Matrix এর প্রথম ধারণা দেন: James Joseph Sylvester (1850)
" " জনক: Arthur Cayley (English mathematician)

প্রথম অধ্যায়

ম্যাট্রিক্স ও নির্ণায়ক (Matrices and Determinants)

তথ্য পরিবেশনে গণিতশাস্ত্র এক গুরুত্বপূর্ণ ভূমিকা পালন করে। গণিতের বিশেষ দুইটি হাতিয়ার ম্যাট্রিক্স ও নির্ণায়ক ব্যবহার করে সংক্ষেপে এবং সহজে তথ্য বর্ণনা করা যায়। ধরা যাক কোনো দোকানের পরপর তিন দিনে কোকাকোলা, আরসি কোলা ও স্প্রাইট বিক্রয় নিম্নের তালিকায় দেখানো হলঃ

বোতলের সংখ্যা			
	কোকাকোলা	আরসি কোলা	স্প্রাইট
প্রথম দিন	70	50	45
দ্বিতীয় দিন	50	55	50
তৃতীয় দিন	53	60	40

উপর্যুক্ত ছকাকারে সাজানো তথ্য থেকে দোকানের পরপর তিন দিনে কোকাকোলা, আরসি কোলা ও স্প্রাইট বিক্রি সহজে বুঝতে পারা যায়। তবে একজন গণিতবিদ ছকটিকে $\begin{bmatrix} 70 & 50 & 45 \\ 50 & 55 & 50 \\ 53 & 60 & 40 \end{bmatrix}$ আকারে দেখতে অধিকতর পছন্দ করবেন।

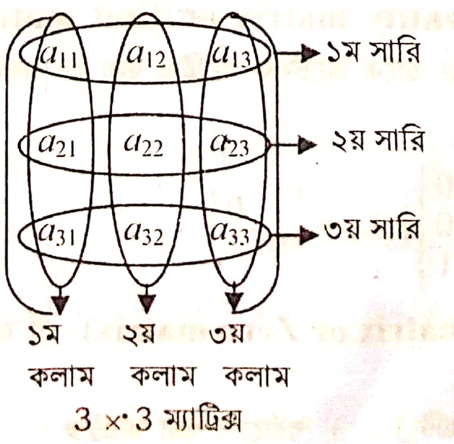
গণিত শাস্ত্রে দুই বা ততোধিক চলকবিশিষ্ট সরল সমীকরণসমূহকে ম্যাট্রিক্সের সাহায্যে প্রকাশ করে নির্ণায়কের সাহায্যে সমাধান করা হয়। পরিসংখ্যানের সম্ভাবনা তত্ত্বে, পদার্থবিদ্যার আলোকবিদ্যা, তড়িৎ চুম্বকবিদ্যা, কোয়ান্টাম বলবিদ্যা, চিরায়ত বলবিদ্যা ইত্যাদি শাখায়, উচ্চতর অর্থনীতিতে, ব্যবসা-বাণিজ্যে, শেয়ারের ক্রয়-বিক্রয় হিসাবে ও কোন প্রকার ট্রেজারি বন্ডে কী পরিমাণ অর্থ বিনিয়োগ করতে হবে তা নির্ধারণে, কম্পিউটার গ্রাফিক্সের ত্রিমাত্রিক ছবিকে দ্বিমাত্রিক পর্দায় উপস্থাপনে, গুগল সার্চে ওয়েবসাইটগুলির পেইজ-র‍্যাংক অ্যালগরিদমে, প্রকৌশলসহ জ্ঞান-বিজ্ঞানের বহু শাখায় ম্যাট্রিক্স ও নির্ণায়ক ব্যাপকভাবে ব্যবহৃত হয়।

অধ্যায় শেষে পারীক্ষার্থীরা -

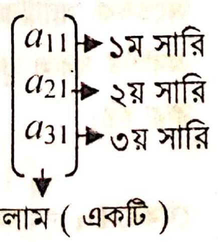
1. ম্যাট্রিক্স ও ম্যাট্রিক্সের প্রকারভেদ উদাহরণসহ বর্ণনা করতে পারবে; 2. ম্যাট্রিক্স এর সমতা, যোগ, বিয়োগ ও গুণ করতে পারবে; 3.নির্ণায়ক কী ব্যাখ্যা করতে পারবে; 4. নির্ণায়কের মান নির্ণয় করতে পারবে; 5. নির্ণায়কের অনুরাশি ও সহগুণনক ব্যাখ্যা করতে পারবে; 6.নির্ণায়কের ধর্মাবলী প্রমাণ ও প্রয়োগ করতে পারবে; 7.ব্যতিক্রমী ও অব্যতিক্রমী ম্যাট্রিক্স ব্যাখ্যা করতে পারবে; 8. বর্গম্যাট্রিক্সের বিপরীত ম্যাট্রিক্স ব্যাখ্যা করতে পারবে এবং প্রযোজ্য ক্ষেত্রে তা নির্ণয় করতে পারবে; 9. নির্ণায়কের সাহায্যে একঘাত সমীকরণ জোটের সমাধান নির্ণয় করতে পারবে।

১. ম্যাট্রিক্স ও ম্যাট্রিক্সের প্রকারভেদ :

ম্যাট্রিক্স (Matrix): কতগুলি সংখ্যাকে আয়তাকারে সাজিয়ে উভয় পাশে [ ] বা, ( ) বন্ধনী দ্বারা আবদ্ধ করলে ম্যাট্রিক্স উৎপন্ন হয়। যেমন, $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$ একটি 3×3 (তিন বাই তিন) ম্যাট্রিক্স। ম্যাট্রিক্স এর নিজের কোনো মান নেই। কোনো ম্যাট্রিক্সের অন্তর্গত সংখ্যাগুলিকে ঐ ম্যাট্রিক্সের ভুক্তি (Entry) বলা হয়।



3×3 ম্যাট্রিক্স



3×1 ম্যাট্রিক্স

আনুভূমিক বরাবর অবস্থিত ভুক্তি বা ভুক্তিসমূহকে একত্রে একটি সারি এবং উল্লম্ব বরাবর অবস্থিত ভুক্তি বা ভুক্তিসমূহকে একত্রে একটি কলাম বলা হয়।

ম্যাট্রিক্সের ক্রম বা পর্যায় (order): কোনো ম্যাট্রিক্সের সারির সংখ্যা m এবং কলামের সংখ্যা n হলে $m \times n$ কে ম্যাট্রিক্সের ক্রম বলা হয় ।

বর্গ ম্যাট্রিক্স (Square matrix) : যে ম্যাট্রিক্সের সারি ও কলামের সংখ্যা সমান তাকে বর্গ ম্যাট্রিক্স বলা হয় ।

একটি সারি বিশিষ্ট ম্যাট্রিক্সকে **সারি ম্যাট্রিক্স (row matrix)** বা **সারি ভেক্টর (row vector)** বলা হয়। আবার, একটি কলাম বিশিষ্ট ম্যাট্রিক্সকে **কলাম ম্যাট্রিক্স (column matrix)** বা **কলাম ভেক্টর (column vector)** বলা হয়। যেমন, $\begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{bmatrix}$ একটি কলাম ম্যাট্রিক্স এবং $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \end{bmatrix}$ একটি সারি ম্যাট্রিক্স ।

মূখ্য কর্ণ (Principal diagonal) : কোনো বর্গ ম্যাট্রিক্সের a_{ij}, যেখানে $i = j$ ভুক্তিগুলি বরাবর কর্ণকে অর্থাৎ ১ম সারি ও ১ম কলামের সাধারণ (common) ভুক্তি বরাবর কর্ণকে মূখ্য কর্ণ বলা হয় । প্রধান কর্ণ বরাবর ভুক্তিগুলির সমষ্টিকে ম্যাট্রিক্সটির ট্রেস (Trace) বলা হয়। যেমন,

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \rightarrow$$ মূখ্য কর্ণ অর্থাৎ a_{11}, a_{22}, a_{33} মূখ্য কর্ণের ভুক্তি এবং ট্রেস $= a_{11} + a_{22} + a_{33}$

কর্ণ ম্যাট্রিক্স (Diagonal matrix) ঃ যে বর্গ ম্যাট্রিক্সের অমূখ্য কর্ণের ভুক্তিসমূহ শূন্য তাকে কর্ণ ম্যাট্রিক্স বলা হয়।

যেমন, $\begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ এর প্রত্যেকে একটি কর্ণ ম্যাট্রিক্স।

স্কেলার ম্যাট্রিক্স (Scalar matrix) : যে কর্ণ ম্যাট্রিক্সের মূখ্য কর্ণের ভুক্তিসমূহ সমান তাকে স্কেলার ম্যাট্রিক্স বলা হয়।

যেমন, $\begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ এর প্রত্যেকে একটি স্কেলার ম্যাট্রিক্স।

অভেদক ম্যাট্রিক্স (Identity matrix or Unit matrix) : যে বর্গ ম্যাট্রিক্সের মূখ্য কর্ণের ভুক্তিসমূহ 1 এবং অবশিষ্ট সকল ভুক্তি শূন্য তাকে অভেদক ম্যাট্রিক্স বলা হয় এবং n পর্যায় বিশিষ্ট অভেদক ম্যাট্রিক্সকে I_n দ্বারা প্রকাশ করা হয়।

যেমন, $I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

শূন্য ম্যাট্রিক্স (Null matrix or Zero matrix) : যে ম্যাট্রিক্সের সকল ভুক্তি শূন্য তাকে শূন্য ম্যাট্রিক্স বলা হয়।

$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ একটি 3×3 পর্যায়ের শূন্য ম্যাট্রিক্স ।

ত্রিভুজাকার ম্যাট্রিক্স (Triangular matrix): যে বর্গ ম্যাট্রিক্সের প্রধান কর্ণের নিচের অথবা উপরের ভুক্তিগুলি শূন্য তাকে ত্রিভুজাকার ম্যাট্রিক্স বলে। ত্রিভুজাকার ম্যাট্রিক্স দুই ধরনের হয়। যে বর্গ ম্যাট্রিক্সের প্রধান কর্ণের নিচের সকল ভুক্তি শূন্য তাকে **উর্ধ্ব ত্রিভুজাকার ম্যাট্রিক্স (Upper triangular matrix)** এবং যে বর্গ ম্যাট্রিক্সের প্রধান কর্ণের উপরের সকল ভুক্তি শূন্য তাকে **নিম্ন ত্রিভুজাকার ম্যাট্রিক্স (Lower triangular matrix)** বলে।

$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix}$ একটি উর্ধ্ব ত্রিভুজাকার ম্যাট্রিক্স এবং $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 0 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$ একটি নিম্ন ত্রিভুজাকার ম্যাট্রিক্স।

ট্রান্সপোজ বা রূপান্তরিত বা বিম্ব ম্যাট্রিক্স (Transpose matrix) : একটি ম্যাট্রিক্স A এর কলামকে সারিতে অথবা সারিকে কলামে পরিণত করে যে নতুন ম্যাট্রিক্স পাওয়া যায় তাকে প্রদত্ত ম্যাট্রিক্স A এর ট্রান্সপোজ ম্যাট্রিক্স বলা হয় এবং এ ম্যাট্রিক্সকে A' বা A^T দ্বারা প্রকাশ করা হয়। $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ হলে $A^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.

ট্রান্সপোজ ম্যাট্রিক্সের বৈশিষ্ট: i. $(A^T)^T = A$ ii. $(A \pm B)^T = A^T \pm B^T$ iii. $(AB)^T = B^T A^T$

প্রতিসম ম্যাট্রিক্স (Symmetric matrix): একটি বর্গ ম্যাট্রিক্স A এবং এর ট্রান্সপোজ ম্যাট্রিক্স A^T পরস্পর সমান হলে তাকে প্রতিসম ম্যাট্রিক্স বলে । প্রতিসম ম্যাট্রিক্সের ক্ষেত্রে- (i, j) ও (j,i) তম ভুক্তিদ্বয় পরস্পর সমান ও সমচিহ্নযুক্ত হবে যেখানে $i \neq j$। $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 6 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}$ হলে $A^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 6 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}$ অর্থাৎ $A = A^T$; সুতরাং A একটি প্রতিসম ম্যাট্রিক্স।

বিপ্রতিসম ম্যাট্রিক্স (Skew symmetric matrix): একটি বর্গ ম্যাট্রিক্স A এর ট্রান্সপোজ ম্যাট্রিক্স A^T এবং $A = -A^T$ হলে তাকে বিপ্রতিসম ম্যাট্রিক্স বলে। বিপ্রতিসম ম্যাট্রিক্সের ক্ষেত্রে- মূখ্যকর্ণের ভুক্তিগুলি শূন্য হয় এবং (i, j) ও (j, i) তম ভুক্তিদ্বয় পরস্পর সমান কিন্তু বিপরীত চিহ্ন যুক্ত হয় যেখানে $i \neq j$.

$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 3 \\ 2 & -3 & 0 \end{bmatrix}$ হলে $A^T = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -3 \\ -2 & 3 & 0 \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 3 \\ 2 & -3 & 0 \end{bmatrix} = -A$ অর্থাৎ $A = -A^T$; সুতরাং A একটি বিপ্রতিসম ম্যাট্রিক্স।

উপ-ম্যাট্রিক্স (Sub matrix): কোনো একটি ম্যাট্রিক্সের যেকোনো সংখ্যক সারি ও কলামের ভুক্তি বাদ দিয়ে গঠিত ম্যাট্রিক্সকে মূল ম্যাট্রিক্সের উপ-ম্যাট্রিক্স বলে। $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$ ম্যাট্রিক্সের উপ-ম্যাট্রিক্স $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 9 \end{bmatrix}$ ইত্যাদি।

সমঘাতি ম্যাট্রিক্স (Idempotent matrix): একটি বর্গ ম্যাট্রিক্স A কে সমঘাতি ম্যাট্রিক্স বলে যদি $A^2 = A.A = A$ হয়। $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ হলে $A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = A$; সুতরাং A একটি সমঘাতি ম্যাট্রিক্স।

অভেদঘাতি ম্যাট্রিক্স (Involutory matrix): একটি বর্গ ম্যাট্রিক্স A কে অভেদঘাতি ম্যাট্রিক্স বলে যদি $A^2 = A.A = I$ হয়। $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$ হলে $A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$; সুতরাং A একটি অভেদঘাতি ম্যাট্রিক্স।

শূন্যঘাতি ম্যাট্রিক্স (Nilpotent matrix): ক্ষুদ্রতম স্বাভাবিক সংখ্যা n এর জন্য একটি বর্গ ম্যাট্রিক্স A কে শূন্যঘাতি ম্যাট্রিক্স বলে যদি A^n শূন্য ম্যাট্রিক্স হয়। n কে শূন্যঘাতির সূচক (Index) বলে।

$A=\begin{bmatrix}1 & -1\\ 1 & -1\end{bmatrix}$ হলে $A^2=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}$; সুতরাং A শূন্যঘাতি ম্যাট্রিক্স এবং শূন্যঘাতির সূচক 2.

২. ম্যাট্রিক্সের সমতা যোগ, বিয়োগ ও গুণ :

ম্যাট্রিক্সের সমতা (Equality of Matrices) : দুইটি ম্যাট্রিক্স A ও B সমান হবে যদি ও কেবল যদি, তাদের ক্রম (order) সমান হয় এবং তাদের অনুরূপ ভুক্তিগুলি সমান হয়। অর্থাৎ A = B যদি ও কেবল যদি, (i) A এবং B এর সমান সংখ্যক সারি থাকে , (ii) A এবং B এর সমান সংখ্যক কলাম থাকে ,(iii) A এর সারি বা কলামের যেকোনো ভুক্তি B এর সারি বা কলামের অনুরূপ ভুক্তির সমান হয়।

$\begin{bmatrix}a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x_1 & x_2 & x_3\\ y_1 & y_2 & y_3\end{bmatrix}$ যদি ও কেবল যদি, $a_1=x_1, a_2=x_2, a_3=x_3,\ b_1=y_1, b_2=y_2, b_3=y_3$

আবার , $\begin{bmatrix}2x+3y\\ x-y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4\\ 7\end{bmatrix}$ যদি ও কেবল যদি, $2x+3y=4$ এবং $x-y=7$.

ম্যাট্রিক্সের যোগ, বিয়োগ (Addition and subtraction of matrices) : দুইটি ম্যাট্রিক্স যোগের বা বিয়োগের উপযোগী হবে যদি তাদের ক্রম (order) একই হয় অর্থাৎ সারি সংখ্যা ও কলাম সংখ্যা সমান হয়। A ও B ম্যাট্রিক্সের অনুরূপ ভুক্তিগুলিকে যোগ বা বিয়োগ করে ম্যাট্রিক্সদ্বয়ের যথাক্রমে যোগফল বা বিয়োগফল পাওয়া যায়।

$A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\\ 7 & 8 & 9\end{bmatrix}$ এবং $B=\begin{bmatrix}10 & 11 & 12\\ 13 & 14 & 15\\ 16 & 17 & 18\end{bmatrix}$ উভয় ম্যাট্রিক্সের ক্রম 3×3 বলে তারা যোগের বা বিয়োগের জন্য

উপযোগী এবং $A+B=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\\ 7 & 8 & 9\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}10 & 11 & 12\\ 13 & 14 & 15\\ 16 & 17 & 18\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1+10 & 2+11 & 3+12\\ 4+13 & 5+14 & 6+15\\ 7+16 & 8+17 & 9+18\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}11 & 13 & 15\\ 17 & 19 & 21\\ 23 & 25 & 27\end{bmatrix}$,

$$A-B=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\\ 7 & 8 & 9\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}10 & 11 & 12\\ 13 & 14 & 15\\ 16 & 17 & 18\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1-10 & 2-11 & 3-12\\ 4-13 & 5-14 & 6-15\\ 7-16 & 8-17 & 9-18\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-9 & -9 & -9\\ -9 & -9 & -9\\ -9 & -9 & -9\end{bmatrix}$$

ম্যাট্রিক্সের স্কেলার গুণিতক (Scalar multiple of a matrix): K একটি ধ্রুব (constant) সংখ্যা এবং A একটি ম্যাট্রিক্স হলে KA এমন একটি ম্যাট্রিক্স যার প্রত্যেকটি ভুক্তি A এর প্রতিসঙ্গী ভুক্তির K গুণ। অর্থাৎ কোনো ম্যাট্রিক্স A কে কোনো ধ্রুব সংখ্যা K দ্বারা গুণ করলে KA ম্যাট্রিক্সের প্রতিটি ভুক্তিকে K দ্বারা গুণ করতে হবে। যেমন,

$A=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{bmatrix}$ হলে, $KA=\begin{bmatrix}Ka_{11} & Ka_{12} & Ka_{13}\\ Ka_{21} & Ka_{22} & Ka_{23}\\ Ka_{31} & Ka_{32} & Ka_{33}\end{bmatrix}$ হবে।

ম্যাট্রিক্সের গুণনের যোগ্যতা এবং গুণনের প্রক্রিয়া: দুইটি ম্যাট্রিক্স A ও B গুণের যোগ্য হবে যদি প্রথম ম্যাট্রিক্স A এর কলাম সংখ্যা ও দ্বিতীয় ম্যাট্রিক্স B এর সারি সংখ্যা সমান হয়। A ম্যাট্রিক্সের ক্রম $m\times n$ ও B ম্যাট্রিক্সের ক্রম $n\times l$ হলে AB যোগ্য হবে , কেননা A- এর কলাম সংখ্যা (n) এবং B- এর সারির সংখ্যার সমান। কিন্তু BA যোগ্য হবেনা, কেননা B এর কলাম সংখ্যা (l) A এর সারির সংখ্যা (m) এর সমান নয়।

বি.দ্র: AB এর ক্রম হবে $(m \times n).(n \times l) = m \times l$. অর্থাৎ A ম্যাট্রিক্সের সারি সংখ্যা × B ম্যাট্রিক্সের কলাম সংখ্যা

AB নির্ণয় ঃ B এর ১ম কলামের ভুক্তিসমূহের সাথে A এর ১ম সারির প্রতিসঙ্গী ভুক্তিসমূহের গুণফলের সমষ্টি হবে AB এর প্রথম কলামের প্রথম ভুক্তি। AB এর ১ম কলামের অন্যান্য ভুক্তি পাওয়া যাবে B এর ১ম কলামের ভুক্তিসমূহের সাথে A এর যথাক্রমে ২য়, ৩য়, ··· সারির প্রতিসঙ্গী ভুক্তিসমূহের গুণফলের সমষ্টির সাহায্যে। একই পদ্ধতিতে AB এর ২য়, ৩য়,···কলাম নির্ণয় করা যাবে যথাক্রমে B এর ২য়, ৩য়,··· কলামের সাহায্যে। যেমন,

$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}$ এবং $B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{bmatrix}$ হলে,

$$AB = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} + a_{13}b_{32} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} + a_{23}b_{31} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} + a_{23}b_{32} \end{bmatrix}$$ হবে।

ম্যাট্রিক্সের সূচক (Power of matrix) : $n \in \mathbb{N}$ মাত্রার বর্গ ম্যাট্রিক্স A হলে, $A^2 = A \,.\, A$, $A^3 = A^2 \,.\, A$, $A^4 = A^3 \,.\, A, \cdots \cdots, A^{n+1} = A^n \,.\, A$ এবং $A^0 = I$; যখন I একটি অভেদ ম্যাট্রিক্স। আবার, $I^n = I$.

ম্যাট্রিক্সের বহুপদী (Polynomial of matrix): $a_0, a_1, a_2, \cdots, a_n$ প্রত্যেকেই স্কেলার ধ্রুবক এর জন্য $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$ একটি বহুপদী হলে $f(A) = a_0I + a_1A + a_2A^2 + \cdots\cdots + a_nA^n$ একটি ম্যাট্রিক্স বহুপদী।

উদাহরণমালা

উদাহরণ 1. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & 4 \\ 3 & -2 & 3 \end{pmatrix}$ এবং $B = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -1 \\ 6 & 1 & 6 \\ 5 & 10 & 5 \end{pmatrix}$ হলে, (i) $3A - 2B$ এবং (ii) AB নির্ণয় কর।

সমাধান : (i) $3A - 2B = 3\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & 4 \\ 3 & -2 & 3 \end{bmatrix} - 2\begin{bmatrix} -1 & -2 & -1 \\ 6 & 1 & 6 \\ 5 & 10 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 6 & -9 & 12 \\ 9 & -6 & 9 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -2 & -4 & -2 \\ 12 & 2 & 12 \\ 10 & 20 & 10 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} 3-(-2) & 3-(-4) & 3-(-2) \\ 6-12 & -9-2 & 12-12 \\ 9-10 & -6-20 & 9-10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 7 & 5 \\ -6 & -11 & 0 \\ -1 & -26 & -1 \end{bmatrix} \text{ (Ans.)}$$

(ii) $AB = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & 4 \\ 3 & -2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & -2 & -1 \\ 6 & 1 & 6 \\ 5 & 10 & 5 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} 1(-1)+1.6+1.5 & 1(-2)+1.1+1.10 & 1(-1)+1.6+1.5 \\ 2(-1)+(-3)6+4.5 & 2(-2)+(-3)1+4.10 & 2(-1)+(-3)6+4.5 \\ 3(-1)+(-2)6+3.5 & 3(-2)+(-2)1+3.10 & 3(-1)+(-2)6+3.5 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -1+6+5 & -2+1+10 & -1+6+5 \\ -2-18+20 & -4-3+40 & -2-18+20 \\ -3-12+15 & -6-2+30 & -3-12+15 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 9 & 10 \\ 0 & 33 & 0 \\ 0 & 22 & 0 \end{bmatrix} \text{ (Ans.)}$$

উদাহরণ 2. $A=\begin{bmatrix}1 & -1\\ 0 & 2\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}1 & 3 & 0\\ 2 & 0 & 1\end{bmatrix}$, $C=\begin{bmatrix}2\\ 3\\ 4\end{bmatrix}$ হলে প্রমাণ কর যে, $(AB)C = A(BC)$

[রা.'০৯; য.'১১,'১৪; সি.'১৩; কু. '১০,'১৪,'১৫; চ.'১১,'১৪;'১৫; ব.'১৩; চুয়েট'০৪-০৫]

প্রমাণ: $AB=\begin{bmatrix}1 & -1\\ 0 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 3 & 0\\ 2 & 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1-2 & 3-0 & 0-1\\ 0+4 & 0+0 & 0+2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1 & 3 & -1\\ 4 & 0 & 2\end{bmatrix}$

$BC=\begin{bmatrix}1 & 3 & 0\\ 2 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\ 3\\ 4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2+9+0\\ 4+0+4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}11\\ 8\end{bmatrix}$

বামপক্ষ $=(AB)C=\begin{bmatrix}-1 & 3 & -1\\ 4 & 0 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\ 3\\ 4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2+9-4\\ 8+0+8\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3\\ 16\end{bmatrix}$ এবং

ডানপক্ষ $=A(BC)=\begin{bmatrix}1 & -1\\ 0 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}11\\ 8\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}11-8\\ 0+16\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3\\ 16\end{bmatrix}$

$\therefore$ বামপক্ষ = ডানপক্ষ (প্রমাণিত)

উদাহরণ 3. $A=\begin{bmatrix}1 & 3 & 2\\ 2 & 0 & 3\\ 1 & -1 & 1\end{bmatrix}$ এবং $f(x)=x^3-2x^2+x-2$ হলে $f(A)$ নির্ণয় কর।

[ঢা.'০১,'০৪,'১২,'১৪ ;কু.'০৪; ব.'১৪]

প্রমাণ : $f(x)=x^3-2x^2+x-2 \quad \therefore f(A)=A^3-2A^2+A-2I$

$A^2=A.A=\begin{bmatrix}1 & 3 & 2\\ 2 & 0 & 3\\ 1 & -1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 3 & 2\\ 2 & 0 & 3\\ 1 & -1 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1+6+2 & 3+0-2 & 2+9+2\\ 2+0+3 & 6+0-3 & 4+0+3\\ 1-2+1 & 3+0-1 & 2-3+1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}9 & 1 & 13\\ 5 & 3 & 7\\ 0 & 2 & 0\end{bmatrix}$

$A^3=A^2.A=\begin{bmatrix}9 & 1 & 13\\ 5 & 3 & 7\\ 0 & 2 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 3 & 2\\ 2 & 0 & 3\\ 1 & -1 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}9+2+13 & 27+0-13 & 18+3+13\\ 5+6+7 & 15+0-7 & 10+9+7\\ 0+4+0 & 0+0+0 & 0+6+0\end{bmatrix}$

$=\begin{bmatrix}24 & 14 & 34\\ 18 & 8 & 26\\ 4 & 0 & 6\end{bmatrix}$

এখন, $f(A)=A^3-2A^2+A-2I=\begin{bmatrix}24 & 14 & 34\\ 18 & 8 & 26\\ 4 & 0 & 6\end{bmatrix}-2\begin{bmatrix}9 & 1 & 13\\ 5 & 3 & 7\\ 0 & 2 & 0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1 & 3 & 2\\ 2 & 0 & 3\\ 1 & -1 & 1\end{bmatrix}-2\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$

$=\begin{bmatrix}24 & 14 & 34\\ 18 & 8 & 26\\ 4 & 0 & 6\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-18 & -2 & -26\\ -10 & -6 & -14\\ 0 & -4 & 0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1 & 3 & 2\\ 2 & 0 & 3\\ 1 & -1 & 1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-2 & 0 & 0\\ 0 & -2 & 0\\ 0 & 0 & -2\end{bmatrix}$

$=\begin{bmatrix}24-18+1-2 & 14-2+3+0 & 34-26+2+0\\ 18-10+2+0 & 8-6+0-2 & 26-14+3+0\\ 4+0+1+0 & 0-4-1+0 & 6+0+1-2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5 & 15 & 10\\ 10 & 0 & 15\\ 5 & -5 & 5\end{bmatrix}$ (Ans.)

উদাহরণ -4. $\begin{bmatrix}2x+3y\\ x-2y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5\\ 2\end{bmatrix}$ হলে দেখাও যে, $(x, y)=(\frac{16}{7},\frac{1}{7})$

প্রমাণ : $\begin{bmatrix} 2x+3y \\ x-2y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix}$ $\therefore 2x+3y=5 \cdots\cdots$ (i), $x-2y=2 \cdots\cdots$ (ii)

$(i)-2\times(ii) \Rightarrow 7y=1 \Rightarrow y=\frac{1}{7}$

(ii) হতে, $x=2+\frac{2}{7}=\frac{16}{7}$ $\therefore (x, y)=(\frac{16}{7}, \frac{1}{7})$ (Showed)

উদাহরণ 5. একটি দোকানের পরপর তিন দিনে কোকাকোলা, আরসি কোলা ও স্প্রাইট বিক্রয় নিম্নের তালিকায় দেওয়া হলঃ

	বোতলের সংখ্যা		
	কোকাকোলা	আরসি কোলা	স্প্রাইট
প্রথম দিন	50	45	40
দ্বিতীয় দিন	45	50	45
তৃতীয় দিন	48	55	30
প্রতি বোতলে লাভ(টাকায়)	0.50	0.75	0.50

ম্যাট্রিক্সের সাহায্যে ঐ তিন দিনের মোট লাভ নির্ণয় কর।

সমাধানঃ মনে করি, P ও Q যথাক্রমে বোতলের সংখ্যার ম্যাট্রিক্স ও লাভ ম্যাট্রিক্স। তাহলে,

$$P=\begin{bmatrix} 50 & 45 & 40 \\ 45 & 50 & 45 \\ 48 & 55 & 30 \end{bmatrix}, Q=\begin{bmatrix} 0.50 \\ 0.75 \\ 0.50 \end{bmatrix}$$ এবং

মোট লাভ $= P\times Q = \begin{bmatrix} 50 & 45 & 40 \\ 45 & 50 & 45 \\ 48 & 55 & 30 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0.50 \\ 0.75 \\ 0.50 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 25+33.75+20 \\ 22.50+37.50+22.50 \\ 24+41.25+15 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 78.75 \\ 82.50 \\ 80.25 \end{bmatrix}$

$\therefore$ মোট লাভ = (78 .75 + 82.50 + 80.25) টাকা = 241.50 টাকা। [অনুরূপ সমস্যা: প্রশ্নমালার 6]

প্রশ্নমালা IA

1. (a) $A=\begin{bmatrix} 8 & 4 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 5 & 4 & 8 \end{bmatrix}$ এবং $B=\begin{bmatrix} -4 & 6 & 2 \\ 1 & 3 & 7 \\ 5 & 4 & 1 \end{bmatrix}$ ম্যাট্রিক্স দুইটির সমষ্টি ও অন্তর নির্ণয় কর। [দি.'১১]

(b) $A=\begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 4 \\ -4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$ এবং $B=\begin{bmatrix} 1 & -4 & 6 \\ 2 & 0 & -7 \\ 3 & 5 & 0 \end{bmatrix}$ হলে, $7A-5B$ নির্ণয় কর। [কু.'০২]

2. (a) $A=\begin{bmatrix} 1 & 6 \\ -3 & 5 \end{bmatrix}$ এবং $B=\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$ হলে, AB ও BA নির্ণয় কর। [য.'০৯]

(b) $A=\begin{bmatrix} 3 & -4 & 2 \\ -2 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ এবং $B=\begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & -4 \\ 3 & 7 & -5 \end{bmatrix}$ হলে দেখাও যে, $AB=BA=I_3$ [চ.'১২; মা.'১১]

(c) দেখাও যে, $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 5 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ এবং $B = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -15 & 6 & -5 \\ 5 & -2 & 2 \end{bmatrix}$ গুণন প্রক্রিয়ায় বিনিময়যোগ্য।[ঢা.'০৫; চ.'০৮]

3. **(a)** $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$ এবং $B = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ হলে,

(i) AB ও BA নির্ণয় কর। [রা.'০৮ ; ব.'০৫; সি.'০৭,'১২,'১৪; চ.'১০; য.'১২;দি.'১৩; মা.'১২]

(ii) দেখাও যে, $AB \neq BA$ [ব.,য.'০৭;ঢা.'০৮; চ.'১১; সি.'১২; ব.,সি.,দি.'১৩]

(b) $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix}$ এবং $B = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 4 & 5 & -3 \end{bmatrix}$ হলে, AB নির্ণয় কর। [ব. '০৩]

(c) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ এবং $C = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ হলে,

(i) AB এবং BC নির্ণয় কর। [ব., মা.'০৯; য.'১৩] (ii) দেখাও যে, $(AB)C = A(BC)$ [য.'০৪]

4. **(a)** $A=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ এবং $C = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$ হলে দেখাও যে, $(AB)C = A(BC)$ [য.'০৬; কু.'১৫]

(b) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ এবং $C = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 4 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$ হলে,

(i) AB এবং AC নির্ণয় কর। [সি.'০৭] (ii) দেখাও যে, $AB + AC = A(B + C)$. [য.'০৭; ব.'১১]

(c) $A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \\ -1 \end{bmatrix}$ এবং $C=\begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 & 6 \end{bmatrix}$ হলে,(i) দেখাও যে, $(AB)C =A(BC)$ [কু.'১২]

(ii) (AB)C নির্ণয় কর। [চ.'০৫; রা.'০৬,'১১,'১৩ ;ব.,য.'১০; ঢা.'১১,'১৩,'১৫; কু.,দি.'১২]

(d) $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -5 \\ 3 & 4 & 0 \end{bmatrix}$ হলে, দেখাও যে, $AB \neq BA$. [দি.'১০]

5. **(a)** $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -3 \end{bmatrix}$ হলে A^2 এবং A^3 নির্ণয় কর এবং দেখাও যে, $A^2 + 2A - 11I$ একটি শূন্য ম্যাট্রিক্স; যেখানে $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ [ব.'০৮ ; রা.'০৭,'১২; ঢা.'০৯; চ.'০৯; দি.'০৯,'১৪; মা.'১৩]

(b) $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 5 & -1 \end{bmatrix}$ হলে, $A^2 - 5A + 6I$ নির্ণয় কর ; যেখানে $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ [ঢা.'০৭; সি.'০৯; ব.'১২]

(c) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ হলে, $A^2 - 4A - 5I$ নির্ণয় কর ; যেখানে $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ [সি.'১৫;মা.'১৪; ব.'১৫]

(d) $A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 3 & -3 & 5 \\ 5 & -5 & 5 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 3 \\ 1 & -3 & -3 \\ -1 & 4 & 4 \end{bmatrix}$ হলে, $A^2 - B^2$ নির্ণয় কর।

(e) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}$ হলে, A^2 এবং A^3 নির্ণয় কর এবং দেখাও যে, $A^2 + 3A - 10I$ একটি শূন্য ম্যাট্রিক্স; যেখানে $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ [য.'১৫]

6. (a) ম্যাট্রিক্সের সাহায্যে নিম্নের তথ্য -তালিকা হতে বিক্রীত বইয়ের মোট লাভ নির্ণয় কর :

	গণিত	পদার্থ	রসায়ন
বইয়ের সংখ্যা	100	125	110
প্রতি বইয়ের ক্রয়মূল্য (টাকায়)	60.00	90.00	85.00
প্রতি বইয়ের বিক্রয়মূল্য (টাকায়)	70.00	102.00	96.00

(b) ম্যাট্রিক্সের সাহায্যে নিম্নের তথ্য -তালিকা হতে বিক্রীত কলমের মোট লাভ নির্ণয় কর :

	A প্রকারের কলম	B প্রকারের কলম	C প্রকারের কলম
ঢাকায় বিক্রীত কলমের সংখ্যা	140	155	132
রাজশাহীতে বিক্রীত কলমের সংখ্যা	130	100	148
প্রতি কলমে লাভ (টাকায়)	1.50	2.00	1.25

7. (a) দেখাও যে, $A = \begin{bmatrix} 2 & -2 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & -3 \end{bmatrix}$ একটি সমঘাতি ম্যাট্রিক্স।

(b) দেখাও যে, $A = \begin{bmatrix} -5 & -8 & 0 \\ 3 & 5 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$ একটি অভেদঘাতি ম্যাট্রিক্স।

(c) $A = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$ এবং $A^2 = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{bmatrix}$ হলে θ এর মান নির্ণয় কর। [চুয়েট' ০৯-১০]

$\theta = n\pi \pm \frac{\pi}{6}, n \in \mathbb{Z}.$

(d) $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x & y \\ 6 & -3 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 9 & a+b-3 \\ 3 & ab+2 \end{bmatrix} + 2I_2$ হলে a, b, x, y এর মান নির্ণয় কর।

উ: a = 1 অথবা 5, b = 5 অথবা 1, x = 7 , y = 4

(e) $A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 3 & -3 & 5 \\ 5 & -5 & 5 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 3 \\ 1 & -3 & -3 \\ -1 & 4 & 4 \end{bmatrix}$ এবং $C = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \\ -3 & -4 & 1 \end{bmatrix}$ হলে প্রমাণ কর যে, $(AB+C)' = B'A' + C'$

(f) $\begin{bmatrix} x & 4 & 11 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ 4 \\ -1 \end{bmatrix}$ একটি শূন্য ম্যাট্রিক্স হলে x এর মান নির্ণয় কর। উ: $x = -2$

সৃজনশীল প্রশ্ন:

8. $A = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 9 \\ -2 & 5 & 3 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & 7 \\ 1 & 2 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}$.

(a) $\begin{bmatrix} 3x - 2y \\ 2x + 5y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 4 \end{bmatrix}$ হলে (x, y) নির্ণয় কর।

(b) ম্যাট্রিক্সের ক্রম এর সাহায্যে প্রমাণ কর যে, $AB \neq BA$

(c) দেখাও যে, $C^2 + 3C - 10I$ একটি শূন্য ম্যাট্রিক্স। [য.'১৫]

উত্তরমালা I A

1. (a) $A + B = \begin{bmatrix} 4 & 10 & 1 \\ 1 & 4 & 10 \\ 10 & 8 & 9 \end{bmatrix}$, $A - B = \begin{bmatrix} 12 & -2 & -3 \\ -1 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 16 & 27 & -37 \\ 4 & 21 & 63 \\ -43 & 10 & 42 \end{bmatrix}$

2. (a) $AB = \begin{bmatrix} 16 & -6 \\ -2 & -5 \end{bmatrix}$, $BA = \begin{bmatrix} 4 & 24 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}$ 3. (a) (i) $AB = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 12 \end{bmatrix}$, $BA = \begin{bmatrix} 8 & 10 & 12 \\ 9 & 12 & 15 \\ -4 & -5 & -6 \end{bmatrix}$

(b) $\begin{bmatrix} 6 & 1 & -3 \end{bmatrix}$ (c) (*i*) $AB = \begin{bmatrix} 8 & 5 \\ 20 & 13 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$, $BC = \begin{bmatrix} 10 & 17 \\ 4 & 7 \end{bmatrix}$ 4. (b) (i) $AB = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 12 \end{bmatrix}$,

$AC = \begin{bmatrix} 8 & 28 \\ 14 & 64 \end{bmatrix}$ (c) (ii) $\begin{bmatrix} 13 & 26 & -65 & 78 \\ 40 & 80 & -200 & 240 \end{bmatrix}$ 5.(a) $A^2 = \begin{bmatrix} 9 & -4 \\ -8 & 17 \end{bmatrix}$, $A^3 = \begin{bmatrix} -7 & 30 \\ 60 & -67 \end{bmatrix}$

(b) $\begin{bmatrix} 10 & -6 \\ -15 & 22 \end{bmatrix}$ (c) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ (d) $\begin{bmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 3 & -4 & 3 \\ 5 & -5 & 5 \end{bmatrix}$ (e) $A^2 = \begin{bmatrix} 7 & -6 \\ -9 & 22 \end{bmatrix}$, $A^3 = \begin{bmatrix} -11 & 38 \\ 57 & -106 \end{bmatrix}$

6. (a) 3710 (b) 1265

৩. নির্ণায়ক (DETERMINANT)

$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ বর্গ ম্যাট্রিক্সের নির্ণায়ক হচ্ছে $|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ এবং এর মান $a_{11}\, a_{22} - a_{21}\, a_{12}$.অর্থাৎ, কতগুলি সংখ্যাকে বর্গাকারে সাজিয়ে উভয় পাশে | | দ্বারা আবদ্ধ করলে **নির্ণায়ক** উৎপন্ন হয়। $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ একটি তৃতীয় ক্রমের নির্ণায়ক। ইহা একটি নির্দিষ্ট মান।

8. নির্ণায়কের অনুরাশি এবং সহগুণক (Minor and Cofactor of determinant) : কোনো নির্ণায়ক D এর কোনো ভুক্তি যে সারি ও যে কলামে অবস্থিত সে সারি ও সে কলাম ব্যতীত অবশিষ্ট ভুক্তি দ্বারা গঠিত নির্ণায়ককে