ম্যাট্রিক্স ও নির্ণায়ক

প্রশ্নমালা IA

1. (a) $A = \begin{bmatrix} 8 & 4 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 5 & 4 & 8 \end{bmatrix}$ এবং $B = \begin{bmatrix} -4 & 6 & 2 \\ 1 & 3 & 7 \\ 5 & 4 & 1 \end{bmatrix}$

ম্যাট্রিক্স দুইটির সমষ্টি ও অন্তর নির্ণয় কর। [কু.'০৫;দি.'১১]

$$A + B = \begin{bmatrix} 8 & 4 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 5 & 4 & 8 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -4 & 6 & 2 \\ 1 & 3 & 7 \\ 5 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 8-4 & 4+6 & -1+2 \\ 0+1 & 1+3 & 3+7 \\ 5+5 & 4+4 & 8+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 10 & 1 \\ 1 & 4 & 10 \\ 10 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

$$A - B = \begin{bmatrix} 8 & 4 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 5 & 4 & 8 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -4 & 6 & 2 \\ 1 & 3 & 7 \\ 5 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 8+4 & 4-6 & -1-2 \\ 0-1 & 1-3 & 3-7 \\ 5-5 & 4-4 & 8-1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 & -2 & -3 \\ -1 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}$$

1(b) $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 4 \\ -4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$ ও $B = \begin{bmatrix} 1 & -4 & 6 \\ 2 & 0 & -7 \\ 3 & 5 & 0 \end{bmatrix}$

হলে, $7A - 5B$ নির্ণয় কর। [কু.'০২]

সমাধানঃ $7A - 5B =$

$$7\begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 4 \\ -4 & 5 & 6 \end{bmatrix} - 5\begin{bmatrix} 1 & -4 & 6 \\ 2 & 0 & -7 \\ 3 & 5 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 21 & 7 & -7 \\ 14 & 21 & 28 \\ -28 & 35 & 42 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 5 & -20 & 30 \\ 10 & 0 & -35 \\ 15 & 25 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 21-5 & 7+20 & -7-30 \\ 14-10 & 21-0 & 28+35 \\ -28-15 & 35-25 & 42-0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 16 & 27 & -37 \\ 4 & 21 & 63 \\ -43 & 10 & 42 \end{bmatrix} \text{ (Ans.)}$$

2(a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ -3 & 5 \end{bmatrix}$ এবং $B = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$ হলে,

AB ও BA নির্ণয় কর। [য.'০৯]

সমাধান ঃ $AB = \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ -3 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} 4+12 & 0-6 \\ -12+10 & 0-5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16 & -6 \\ -2 & -5 \end{bmatrix} \text{ (Ans.)}$$

$$BA = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 6 \\ -3 & 5 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 4+0 & 24+0 \\ 2+3 & 12-5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 24 \\ 5 & 7 \end{bmatrix} \text{ (Ans.)}$$

2(b) $A = \begin{bmatrix} 3 & -4 & 2 \\ -2 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ এবং $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & -4 \\ 3 & 7 & -5 \end{bmatrix}$ হলে

দেখাও যে, $AB = BA = I_3$

[কু.'০৮; সি.'০৫, '১০; য.'০৮; ঢা.'১০; চ.'১২; মা.'১১]

প্রমাণ : $AB = \begin{bmatrix} 3 & -4 & 2 \\ -2 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & -4 \\ 3 & 7 & -5 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} 3-8+6 & 6-20+14 & -6+16-10 \\ -2+2+0 & -4+5+0 & 4-4+0 \\ -1-2+3 & -2-5+7 & 2+4-5 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I_3$$

$$BA = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & -4 \\ 3 & 7 & -5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & -4 & 2 \\ -2 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 3-4+2 & -4+2+2 & 2+0-2 \\ 6-10+4 & -8+5+4 & 4+0-4 \\ 9-14+5 & -12+7+5 & 6+0-5 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I_3$$

$\therefore$ $AB = BA = I_3$ (Showed)

2(c) দেখাও যে, A $=\begin{bmatrix}2&0&-1\\5&1&0\\0&1&3\end{bmatrix}$ এবং B $=\begin{bmatrix}3&-1&1\\-15&6&-5\\5&-2&2\end{bmatrix}$ গুণন প্রক্রিয়ায় বিনিময়যোগ্য। [ঢা.'০৫; চ.'০৮]

প্রমাণ : $AB=\begin{bmatrix}2&0&-1\\5&1&0\\0&1&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3&-1&1\\-15&6&-5\\5&-2&2\end{bmatrix}$

$=\begin{bmatrix}6-0-5&-2+0+2&2+0-2\\15-15+0&-5+6+0&5-5+0\\0-15+15&0+6-6&0-5+6\end{bmatrix}$

$=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$

$BA=\begin{bmatrix}3&-1&1\\-15&6&-5\\5&-2&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&0&-1\\5&1&0\\0&1&3\end{bmatrix}$

$=\begin{bmatrix}6-5+0&0-1+1&-3+0+3\\-30+30+0&0+6-5&15+0-15\\10-10+0&0-2+2&-5+0+6\end{bmatrix}$

$=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$

$\therefore\ AB=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}=BA$

$\therefore$ A ও B গুণন প্রক্রিয়ায় বিনিময়যোগ্য। (Showed)

3(a) $A=\begin{bmatrix}1&2&3\\4&5&6\end{bmatrix}$ এবং $B=\begin{bmatrix}0&2\\1&2\\0&-1\end{bmatrix}$ হলে,

(i) AB ও BA নির্ণয় কর।

[রা.'০৮ ; সি.'১২,'১৪; চ.'১০; য.'১২;দি.'১৩; মা.'১২]

(ii) দেখাও যে , AB ≠ BA

[ব.,য.'০৭;ঢা.'০৮; চ.'১১; সি.'১২; ব.,সি.,দি.'১৩]

(i) সমাধান ঃ $AB=\begin{bmatrix}1&2&3\\4&5&6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&2\\1&2\\0&-1\end{bmatrix}$

$=\begin{bmatrix}0+2+0&2+4-3\\0+5+0&8+10-6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&3\\5&12\end{bmatrix}$

$BA=\begin{bmatrix}0&2\\1&2\\0&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&2&3\\4&5&6\end{bmatrix}$

$=\begin{bmatrix}0+8&0+10&0+12\\1+8&2+10&3+12\\0-4&0-5&0-6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}8&10&12\\9&12&15\\-4&-5&-6\end{bmatrix}$

(ii) প্রমাণ: $AB=\begin{bmatrix}2&3\\5&12\end{bmatrix}$ এবং

$BA=\begin{bmatrix}8&10&12\\9&12&15\\-4&-5&-6\end{bmatrix}$

$\therefore\ AB\neq BA$

3(b) $A=\begin{bmatrix}2&1\end{bmatrix}$ এবং $B=\begin{bmatrix}1&-2&0\\4&5&-3\end{bmatrix}$ হলে, **AB নির্ণয় কর।** [ব.'০৩]

সমাধান : $AB=\begin{bmatrix}2&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&-2&0\\4&5&-3\end{bmatrix}$

$=\begin{bmatrix}2+4&-4+5&0-3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6&1&-3\end{bmatrix}$

(Ans.)

3(c) $A=\begin{bmatrix}1&2\\3&4\\0&1\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}4&3\\2&1\end{bmatrix}$ এবং $C=\begin{bmatrix}1&2\\2&3\end{bmatrix}$ হলে,

(i) AB এবং BC নির্ণয় কর। [ব. মা.'০৯;য.'১৩]

(ii) দেখাও যে, (AB)C = A (BC) [য.'০৪]

(i) সমাধান : $AB=\begin{bmatrix}1&2\\3&4\\0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4&3\\2&1\end{bmatrix}$

$=\begin{bmatrix}4+4&3+2\\12+8&9+4\\0+2&0+1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}8&5\\20&13\\2&1\end{bmatrix}$ (Ans.)

$BC=\begin{bmatrix}4&3\\2&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&2\\2&3\end{bmatrix}$

$=\begin{bmatrix}4+6&8+9\\2+2&4+3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}10&17\\4&7\end{bmatrix}$ (Ans.)

(ii) প্রমাণ ঃ $AB = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 4+4 & 3+2 \\ 12+8 & 9+4 \\ 0+2 & 0+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 5 \\ 20 & 13 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$

$BC = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 4+6 & 8+9 \\ 2+2 & 4+3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 17 \\ 4 & 7 \end{bmatrix}$

এখন , $(AB)C = \begin{bmatrix} 8 & 5 \\ 20 & 13 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 8+10 & 16+15 \\ 20+26 & 40+39 \\ 2+2 & 4+3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 18 & 31 \\ 46 & 79 \\ 4 & 7 \end{bmatrix}$

$A(BC) = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 10 & 17 \\ 4 & 7 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 10+8 & 17+14 \\ 30+16 & 51+28 \\ 0+4 & 0+7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 18 & 31 \\ 46 & 79 \\ 4 & 7 \end{bmatrix}$

$\therefore (AB)C = A(BC)$ (Showed)

4(a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ এবং $C = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$

হলে দেখাও যে, (AB)C =A(BC) [য.'০৬; কু.'১৫]

প্রমাণ ঃ $AB = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 1+2 & 3+0 & 0+1 \\ 0+4 & 0+0 & 0+2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 1 \\ 4 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

$BC = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2+9+0 \\ 4+0+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 \\ 5 \end{bmatrix}$

এখন , $(AB)C = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 1 \\ 4 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 6+9+1 \\ 8+0+2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16 \\ 10 \end{bmatrix}$

$A(BC) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 11 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11+5 \\ 0+10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16 \\ 10 \end{bmatrix}$

$\therefore (AB)C = A(BC)$ (Showed)

4(b) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ ও $C = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 4 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$

হলে , (i) AB এবং AC নির্ণয় কর। [সি.'০৭]

(ii) দেখাও যে , AB + AC = A (B + C). [য.'০৭; ব.'১১]

(i) সমাধান ঃ $AB = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 0+2+0 & 2+4-3 \\ 0+5+0 & 8+10-6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 12 \end{bmatrix}$

$AC = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 4 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} -1+0+9 & 2+8+18 \\ -4+0+18 & 8+20+36 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 28 \\ 14 & 64 \end{bmatrix}$

(ii) প্রমাণ ঃ $AB = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 0+2+0 & 2+4-3 \\ 0+5+0 & 8+10-6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 12 \end{bmatrix}$

$AC = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 4 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} -1+0+9 & 2+8+18 \\ -4+0+18 & 8+20+36 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 28 \\ 14 & 64 \end{bmatrix}$

$B + C = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 4 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 0-1 & 2+2 \\ 1+0 & 2+4 \\ 0+3 & -1+6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 1 & 6 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$

এখন , $AB + AC = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 12 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 8 & 28 \\ 14 & 64 \end{bmatrix}$

$$=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

$\therefore A^2-B^2$

$$=\begin{bmatrix}-1 & 1 & 1\\13 & -13 & 7\\5 & -5 & -5\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}-2 & 1 & 1\\13 & -14 & 7\\5 & -5 & -6\end{bmatrix} \text{ (Ans.)}$$

(e) $A=\begin{bmatrix}1 & 2\\3 & -4\end{bmatrix}$ **হলে A^2 এবং A^3 নির্ণয় কর এবং দেখাও যে, $A^2+3A-10I$ একটি শূন্য ম্যাট্রিক্স; যেখানে $I=\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}$** **[য.'১৫]**

সমাধান: $A^2=A.A=\begin{bmatrix}1 & 2\\3 & -4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 2\\3 & -4\end{bmatrix}$

$$=\begin{bmatrix}1+6 & 2-8\\3-12 & 6+16\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}7 & -6\\-9 & 22\end{bmatrix}$$

$$A^3=A.A^2=\begin{bmatrix}1 & 2\\3 & -4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}7 & -6\\-9 & 22\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}7-18 & -6+44\\21+36 & -18-88\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-11 & 38\\57 & -106\end{bmatrix}$$

এখন, $A^2+3A-10I=\begin{bmatrix}7 & -6\\-9 & 22\end{bmatrix}+3\begin{bmatrix}1 & 2\\3 & -4\end{bmatrix}-10\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}$

$$=\begin{bmatrix}7 & -6\\-9 & 22\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}3 & 6\\9 & -12\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}10 & 0\\0 & 10\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}7+3-10 & -6+6+0\\-9+9+0 & 22-12-10\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0\\0 & 0\end{bmatrix}$$

6. (a) সমাধান ঃ মনে করি, P ও Q যথাক্রমে বইয়ের সংখ্যার ম্যাট্রিক্স ও লাভ ম্যাট্রিক্স। তাহলে,

$P=[100 \quad 125 \quad 110]$,

$$Q=\begin{bmatrix}70.00-60.00\\102.00-90.00\\96.00-85.00\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}10.00\\12.00\\11.00\end{bmatrix}$$

$\therefore$ মোট লাভ $=P\times Q$

$$=[100 \quad 125 \quad 110]\times\begin{bmatrix}10.00\\12.00\\11.00\end{bmatrix}$$

$$=[1000.00+1500.00+1210.00]$$

$\therefore$ মোট লাভ $=3710.00$ টাকা

6(b) সমাধান ঃ মনে করি, P ও Q যথাক্রমে বিক্রীত কলমের সংখ্যার ম্যাট্রিক্স ও লাভ ম্যাট্রিক্স। তাহলে,

$$P=\begin{bmatrix}140 & 155 & 132\\130 & 100 & 148\end{bmatrix},\ Q=\begin{bmatrix}1.50\\2.00\\1.25\end{bmatrix}$$

$\therefore$ মোট লাভ $=P\times Q$

$$=\begin{bmatrix}140 & 155 & 132\\130 & 100 & 148\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}1.50\\2.00\\1.25\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}210.00+310.00+165.00\\195.00+200.00+185.00\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}685.00\\580.00\end{bmatrix}$$

$\therefore$ মোট লাভ $=(685.00+580.00)$ টাকা

$=1265.00$ টাকা

7. (a) দেখাও যে, $A=\begin{bmatrix}2 & -2 & -4\\-1 & 3 & 4\\1 & -2 & -3\end{bmatrix}$ একটি সমঘাতি ম্যাট্রিক্স।

(b) দেখাও যে, $A=\begin{bmatrix}-5 & -8 & 0\\3 & 5 & 0\\1 & 2 & -1\end{bmatrix}$ একটি অভেদঘাতি ম্যাট্রিক্স।

(c) $A=\begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\\sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}$ এবং $A^2=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1 & -\sqrt{3}\\\sqrt{3} & 1\end{bmatrix}$ হলে θ এর মান নির্ণয় কর **[চুয়েট' ০৯-১০]**

সমাধান ঃ $A=\begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\\sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}$

$\therefore\ A^2=\begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}$

$=\begin{bmatrix}\cos^2\theta-\sin^2\theta & -\cos\theta\sin\theta-\cos\theta\sin\theta\\ \cos\theta\sin\theta+\cos\theta\sin\theta & -\sin^2\theta+\cos^2\theta\end{bmatrix}$

$=\begin{bmatrix}\cos 2\theta & -\sin 2\theta\\ \sin 2\theta & -\cos 2\theta\end{bmatrix}$

প্রশ্নমতে, $\begin{bmatrix}\cos 2\theta & -\sin 2\theta\\ \sin 2\theta & -\cos 2\theta\end{bmatrix}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1 & -\sqrt{3}\\ \sqrt{3} & 1\end{bmatrix}$

$\therefore\ \cos 2\theta=\frac{1}{2}=\cos\frac{\pi}{3}\ \ldots$

$\therefore\ 2\theta=2n\pi\pm\frac{\pi}{3}\Rightarrow\theta=n\pi\pm\frac{\pi}{6}, n\in\mathbb{Z}.$

(d) $\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x & y\\ 6 & -3\end{bmatrix}^T=\begin{bmatrix}9 & a+b-3\\ 3 & ab+2\end{bmatrix}-2I_2$ হলে a, b, x, y এর মান নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ $\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x & y\\ 6 & -3\end{bmatrix}^T$

$=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x & 6\\ y & -3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x+y & 6-3\\ x-y & 6+3\end{bmatrix}$

$=\begin{bmatrix}x+y & 3\\ x-y & 9\end{bmatrix}$

আবার, $\begin{bmatrix}9 & a+b-3\\ 3 & ab+2\end{bmatrix}-2I_2$

$=\begin{bmatrix}9 & a+b-3\\ 3 & ab+2\end{bmatrix}-2\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$

$=\begin{bmatrix}9 & a+b-3\\ 3 & ab+2\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}2 & 0\\ 0 & 2\end{bmatrix}$

$=\begin{bmatrix}9+2 & a+b-3\\ 3 & ab+2+2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}11 & a+b-3\\ 3 & ab+4\end{bmatrix}$

প্রশ্নমতে, $\begin{bmatrix}x+y & 3\\ x-y & 9\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}11 & a+b-3\\ 3 & ab+4\end{bmatrix}$

$\therefore\ x+y=11\cdots\cdots(i),\ x-y=3\cdots\cdots(ii)$

$a+b-3=3\cdots\cdots(iii),\ ab+4=9\cdots(v)$

(i) + (ii) $\Rightarrow 2x=14\Rightarrow x=7$ এবং $y=4$

(v) হতে, $ab=5\Rightarrow a=\frac{5}{b}$

(iii) হতে, $\frac{5}{b}+b-6=0$

$\Rightarrow b^2-6b+5=0\Rightarrow(b-5)(b-1)=0$

$\Rightarrow b=1, 5$

$b=1$ হলে, $a=5$; $b=5$ হলে, $a=1$.

$\therefore\ a=1$ অথবা 5, $a=5$ অথবা 1, $x=7$, $y=4$

(e) $A=\begin{bmatrix}-1 & 1 & -1\\ 3 & -3 & 5\\ 5 & -5 & 5\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}0 & 4 & 3\\ 1 & -3 & -3\\ -1 & 4 & 4\end{bmatrix}$

এবং $C=\begin{bmatrix}1 & -2 & 3\\ 2 & 1 & 4\\ -3 & -4 & 1\end{bmatrix}$ হলে প্রমাণ কর যে,

$(AB+C)'=B'A'+C'$

(f) $\begin{bmatrix}x & 4 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 2\\ 0 & 2 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ 4\\ -1\end{bmatrix}$ একটি শূন্য ম্যাট্রিক্স হলে x এর মান নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ $\begin{bmatrix}x & 4 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 2\\ 0 & 2 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ 4\\ -1\end{bmatrix}$

$=\begin{bmatrix}x & 4 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2x+4+0\\ x-2\\ 0+8-4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x & 4 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2x+4\\ x-2\\ 4\end{bmatrix}$

$=\begin{bmatrix}2x^2+4x+4x-8+16\end{bmatrix}$

$=\begin{bmatrix}2x^2+8x+8\end{bmatrix}$

প্রশ্নমতে, $2x^2+8x+8=0$

$\Rightarrow x^2+4x+4=0\Rightarrow(x+2)^2=0$

$\Rightarrow x=-2$

সৃজনশীল প্রশ্ন:

7. $A=\begin{bmatrix}5 & 2 & 9\\ -2 & 5 & 3\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}0 & 7\\ 1 & 2\\ 0 & 5\end{bmatrix}, C=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & -4\end{bmatrix}$

(a) $\begin{bmatrix}3x-2y\\ 2x+5y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6\\ 4\end{bmatrix}$ হলে (x, y) নির্ণয় কর।

(b) ম্যাট্রিক্সের ক্রম এর সাহায্যে প্রমাণ কর যে, $AB\neq BA$

(c) দেখাও যে, $C^2+3C-10I$ একটি শূন্য ম্যাট্রিক্স।

(a) সমাধান: $\begin{bmatrix}3x-2y\\ 2x+5y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6\\ 4\end{bmatrix}$

$\therefore\ 3x-2y=6\cdots(i),\ 2x+5y=4\cdots(ii)$

$5\times(i)+2\times(ii)\Rightarrow 15x+4x=30+8$

$\Rightarrow 19x=38\Rightarrow x=2$

(i) হতে, $6-2y=6\Rightarrow -2y=0\Rightarrow y=0$

$\therefore (x,y)=(2,0)$

(b) A ম্যাট্রিক্সের ক্রম 2×3, [সা.স. $\times$ ক.স.]

B ম্যাট্রিক্সের ক্রম 3×2.

$\therefore$ AB ম্যাট্রিক্সের ক্রম 2×2,

[A ম্যাট্রিক্সের সা.স. $\times$ B ম্যাট্রিক্সের ক.স.]

$\therefore$ BA ম্যাট্রিক্সের ক্রম 3×3,

[A এর সা.স. $\times$ B এর ক.স.]

$\therefore AB\neq BA$.

(c) $C^2=C.C=\begin{bmatrix}1&2\\3&-4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&2\\3&-4\end{bmatrix}$

$=\begin{bmatrix}1+6&2-8\\3-12&6+16\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}7&-6\\-9&22\end{bmatrix}$

$3C=3\begin{bmatrix}1&2\\3&-4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3&6\\9&-12\end{bmatrix}$

$10I_2=10\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}10&0\\0&10\end{bmatrix}$

$\therefore C^2+3C-10I$

$=\begin{bmatrix}7&-6\\-9&22\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}3&6\\9&-12\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}10&0\\0&10\end{bmatrix}$

$=\begin{bmatrix}7&-6\\-9&22\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}3&6\\9&-12\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-10&0\\0&-10\end{bmatrix}$

$=\begin{bmatrix}7+3-10&-6+6\\-9+9&22-12-10\end{bmatrix}$

$=\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}$

$\therefore C^2+3C-10I$ একটি শূন্য ম্যাট্রিক্স।

নির্ণায়ক

প্রশ্নমালা -IB

1. প্রমাণ কর যে,

(a) $\begin{vmatrix}1&1&1\\1&p&p^2\\1&p^2&p^4\end{vmatrix}=p(p-1)^2(p^2-1)$

[ঢা.'০২,'১২; রা.'১১; কু.'০৯,'১৫; য.'০৯; চ.'১২,'১৫; মা.'১৩,'১৫; বুয়েট'০৭-০৮]

প্রমাণ ঃ L.H.S.$=\begin{vmatrix}1&1&1\\1&p&p^2\\1&p^2&p^4\end{vmatrix}$

$=\begin{vmatrix}0&0&1\\1-p&p(1-p)&p^2\\1-p^2&p^2(1-p^2)&p^4\end{vmatrix}$

$[c_1-c_2$ এবং $c_2-c_3]$

$=1\{(1-p)p^2(1-p^2)-p(1-p)(1-p^2)\}$

[১ম সারি বরাবর বিস্তার করে ।]

$=(1-p)(1-p^2)(p^2-p)$

$=(1-p)(1-p^2)\,p\,(p-1)$

$=p(p-1)^2(p^2-1)=$ R.H.S. (Proved)

1(b) $\begin{vmatrix}a^2&ab&b^2\\2a&a+b&2b\\1&1&1\end{vmatrix}=(a-b)^3$ [ঢা.'০১; সি.'০৩]

প্রমাণ ঃ L.H.S.$=\begin{vmatrix}a^2&ab&b^2\\2a&a+b&2b\\1&1&1\end{vmatrix}$

$=\begin{vmatrix}a(a-b)&b(a-b)&b^2\\a-b&a-b&2b\\0&0&1\end{vmatrix}$

$[c_1-c_2$ এবং $c_2-c_3]$

$=1\{a(a-b)(a-b)-b(a-b)(a-b)\}$

[শেষ সারি বরাবর বিস্তার করে ।]

$=(a-b)^2(a-b)=(a-b)^3=$ R.H.S.

(Proved)

1(c) $\begin{vmatrix}1&1&1\\a&b&c\\a^2-bc&b^2-ca&c^2-ab\end{vmatrix}=0$

[য.'০৩;চুয়েট'০৫-০৬]

L.H.S.$=\begin{vmatrix}1&1&1\\a&b&c\\a^2-bc&b^2-ca&c^2-ab\end{vmatrix}$

$=\begin{vmatrix}0&0&1\\a-b&b-c&c\\a^2-b^2+ca-bc&b^2-c^2+ab-ca&c^2-ab\end{vmatrix}$

$[c_1'=c_1-c_2$ এবং $c_2'=c_2-c_3]$

$=1\{a-b)(b^2-c^2+ab-ca)$