(f) $\begin{bmatrix} x & 4 & 11 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ 4 \\ -1 \end{bmatrix}$ একটি শূন্য ম্যাট্রিক্স হলে x এর মান নির্ণয় কর। উ: $x = -2$

সৃজনশীল প্রশ্ন:

8. $A = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 9 \\ -2 & 5 & 3 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & 7 \\ 1 & 2 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}$.

(a) $\begin{bmatrix} 3x-2y \\ 2x+5y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 4 \end{bmatrix}$ হলে (x, y) নির্ণয় কর।

(b) ম্যাট্রিক্সের ক্রম এর সাহায্যে প্রমাণ কর যে, $AB \neq BA$

(c) দেখাও যে, $C^2 + 3C - 10I$ একটি শূন্য ম্যাট্রিক্স। [য.'১৫]

উত্তরমালা I A

1. (a) $A+B = \begin{bmatrix} 4 & 10 & 1 \\ 1 & 4 & 10 \\ 10 & 8 & 9 \end{bmatrix}$, $A-B = \begin{bmatrix} 12 & -2 & -3 \\ -1 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 16 & 27 & -37 \\ 4 & 21 & 63 \\ -43 & 10 & 42 \end{bmatrix}$

2. (a) $AB = \begin{bmatrix} 16 & -6 \\ -2 & -5 \end{bmatrix}$, $BA = \begin{bmatrix} 4 & 24 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}$ **3.** (a) (i) $AB = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 12 \end{bmatrix}$, $BA = \begin{bmatrix} 8 & 10 & 12 \\ 9 & 12 & 15 \\ -4 & -5 & -6 \end{bmatrix}$

(b) $\begin{bmatrix} 6 & 1 & -3 \end{bmatrix}$ (c) (*i*) $AB = \begin{bmatrix} 8 & 5 \\ 20 & 13 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$, $BC = \begin{bmatrix} 10 & 17 \\ 4 & 7 \end{bmatrix}$ **4.** (b) (i) $AB = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 12 \end{bmatrix}$,

$AC = \begin{bmatrix} 8 & 28 \\ 14 & 64 \end{bmatrix}$ (c) (ii) $\begin{bmatrix} 13 & 26 & -65 & 78 \\ 40 & 80 & -200 & 240 \end{bmatrix}$ **5.**(a) $A^2 = \begin{bmatrix} 9 & -4 \\ -8 & 17 \end{bmatrix}$, $A^3 = \begin{bmatrix} -7 & 30 \\ 60 & -67 \end{bmatrix}$

(b) $\begin{bmatrix} 10 & -6 \\ -15 & 22 \end{bmatrix}$ (c) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ (d) $\begin{bmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 3 & -4 & 3 \\ 5 & -5 & 5 \end{bmatrix}$ (e) $A^2 = \begin{bmatrix} 7 & -6 \\ -9 & 22 \end{bmatrix}$, $A^3 = \begin{bmatrix} -11 & 38 \\ 57 & -106 \end{bmatrix}$

6. (a) 3710 (b) 1265

৩. নির্ণায়ক (DETERMINANT)

$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ বর্গ ম্যাট্রিক্সের নির্ণায়ক হচ্ছে $|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ এবং এর মান $a_{11}\, a_{22} - a_{21}\, a_{12}$.অর্থাৎ, কতগুলি সংখ্যাকে বর্গাকারে সাজিয়ে উভয় পাশে | | দ্বারা আবদ্ধ করলে **নির্ণায়ক** উৎপন্ন হয়। $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ একটি তৃতীয় ক্রমের নির্ণায়ক। ইহা একটি নির্দিষ্ট মান।

৪. নির্ণায়কের অনুরাশি এবং সহগুণক (Minor and Cofactor of determinant) :

কোনো নির্ণায়ক D এর কোনো ভুক্তি যে সারি ও যে কলামে অবস্থিত সে সারি ও সে কলাম ব্যতীত অবশিষ্ট ভুক্তি দ্বারা গঠিত নির্ণায়ককে

উক্ত ভুক্তির অনুরাশি বলা হয়। যেমন, $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ নির্ণায়কের a_{11}, a_{12}, a_{13} এর অর্থাৎ (1, 1), (1, 2), (1, 3) –তম ভুক্তির অনুরাশি যথাক্রমে $\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$ এবং $\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$.

যথাযথ চিহ্নযুক্ত কোনো ভুক্তির অনুরাশিকে সে ভুক্তির **সহগুণক** বলা হয়। কোনো নির্ণায়কের (r, c) –তম সহগুণকের চিহ্ন হবে $(-1)^{r+c}$ অর্থাৎ (r + c) জোড় হলে চিহ্ন '+' এবং (r + c) বিজোড় হলে চিহ্ন '–' হবে। তৃতীয় মাত্রার নির্ণায়কের চিহ্ন $\begin{vmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{vmatrix}$ অর্থাৎ কোণাকোণি অবস্থিত উপাদান ৫টির চিহ্ন ' + ' এবং অপর ৪ টির চিহ্ন ' – '।

যেমন, $\begin{vmatrix} a_{11} & b_{12} & c_{13} \\ a_{21} & b_{22} & c_{23} \\ a_{31} & b_{32} & c_{33} \end{vmatrix}$ নির্ণায়কের (1, 1), (1, 2)–তম ভুক্তির সহগুণক যথাক্রমে $\begin{vmatrix} b_{22} & c_{23} \\ b_{32} & c_{33} \end{vmatrix}$, $-\begin{vmatrix} a_{21} & c_{23} \\ a_{31} & c_{33} \end{vmatrix}$.

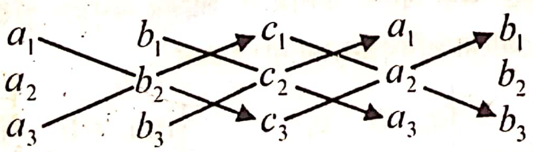
৫. নির্ণায়কের মান (The value of a determinant) :

কোনো নির্ণায়কের যেকোনো সারি বা কলামের ভুক্তিসমূহ ও তাদের নিজ নিজ সহগুণকের গুণফলের সমষ্টিই নির্ণায়কের মান। 2×2 আকারের নির্ণায়ক $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ এর মান $a_{11}\, a_{22} - a_{21}\, a_{12}$। $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ নির্ণায়কের a_{11}, a_{12}, a_{13} ভুক্তিগুলির সহগুণক যথাক্রমে A_1, A_2, A_3 হলে নির্ণায়কের মান হবে $a_{11}A_1 + a_{12}A_2 + a_{13}A_3$

$$= a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{12}\times(-)\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

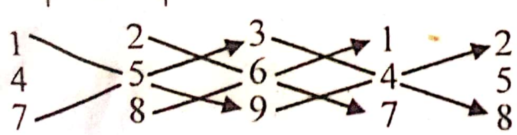
সারাসের চিত্রের মাধ্যমে নির্ণায়কের বিস্তৃতি (Expansion of Determinant using Sarrus Diagram) :

$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$ নির্ণায়কটির জন্য সারাসের চিত্র নিম্নরূপ:



একই তীর চিহ্ন বরাবর ভুক্তি তিনটি গুণ করতে হবে। উপর হতে নিচে তীর (↘) চিহ্ন বরাবর গুণফলের পূর্বে '+' চিহ্ন এবং নিচ হতে উপরে তীর (↗) চিহ্ন বরাবর গুণফলের পূর্বে ' – ' চিহ্ন বসিয়ে গুণফল ছয়টি যোগ করে নির্ণায়কের মান পাওয়া যায়। উপরের নির্ণায়কটির মান $= a_1b_2c_3 + b_1c_2a_3 + c_1a_2b_3 - a_3b_2c_1 - b_3c_2a_1 - c_3a_2b_1$

যেমন, $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$ নির্ণায়কটির মান নির্ণয়ের জন্য সারাসের চিত্র:



নির্ণায়কটির মান $= 45 + 84 + 96 - 105 - 48 - 72 = 225 - 225 = 0$

৬. **নির্ণায়কের ধর্মবলি (Properties of determinant) ঃ**

(i) যদি কোনো নির্ণায়কের কোনো কলাম বা সারির প্রত্যেক ভুক্তি শূন্য হয় তবে নির্ণায়কের মান শূন্য হবে।

যেমন, $\begin{vmatrix} 0 & a_1 & b_1 \\ 0 & a_2 & b_2 \\ 0 & a_3 & b_3 \end{vmatrix} = 0$, $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} = 0$

(ii) নির্ণায়কের সারিকে কলাম এবং কলামকে সারিতে পরিবর্তন করলে নির্ণায়কের মানের কোনো পরিবর্তন হয় না।

যেমন, $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$

(iii) নির্ণায়কের দুইটি কলাম বা সারি পরস্পর স্থান বিনিময় করলে নির্ণায়কের সংখ্যামানের পরিবর্তন হয় না কিন্তু চিহ্নের পরিবর্তন হয়।

যেমন, $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} b_1 & a_1 & c_1 \\ b_2 & a_2 & c_2 \\ b_3 & a_3 & c_3 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_3 & b_3 & c_3 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_1 & b_1 & c_1 \end{vmatrix}$

(iv) যদি কোনো নির্ণায়কের দুইটি কলাম বা সারি এক হয় বা একটি অন্যটির গুণিতক হয় অর্থাৎ দুইটি কলাম বা সারির অনুরূপ ভুক্তির অনুপাত সমান হয় তবে নির্ণায়কের মান শূন্য হবে। যেমন,

$\begin{vmatrix} a_1 & a_1 & c_1 \\ a_2 & a_2 & c_2 \\ a_3 & a_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0$, $\begin{vmatrix} a_1 & ma_1 & c_1 \\ a_2 & ma_2 & c_2 \\ a_3 & ma_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0$, $\begin{vmatrix} ma_1 & na_1 & c_1 \\ ma_2 & na_2 & c_2 \\ ma_3 & na_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0$

(v) নির্ণায়কের কোনো কলাম বা সারির প্রত্যেক ভুক্তিকে কোনো সংখ্যা দ্বারা গুণ করলে নির্ণায়কের মানকেও সেই সংখ্যা দ্বারা গুণ করতে হয়। $A = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$ হলে, $\begin{vmatrix} ma_1 & b_1 & c_1 \\ ma_2 & b_2 & c_2 \\ ma_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = m\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = mA$

(vi) নির্ণায়কের কোনো কলাম বা সারির প্রতিটি ভুক্তি অন্য একটি কলাম বা সারির অনুরূপ ভুক্তির একই গুণিতক দ্বারা বৃদ্ধি বা হ্রাস করা হলে নির্ণায়কের মানের কোনো পরিবর্তন হয় না। যেমন,

$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1+mb_1 & b_1-nc_1 & c_1 \\ a_2+mb_2 & b_2-nc_2 & c_2 \\ a_3+mb_3 & b_3-nc_3 & c_3 \end{vmatrix}$ তবে $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \frac{1}{mn}\begin{vmatrix} ma_1+b_1 & nb_1-c_1 & c_1 \\ ma_2+b_2 & nb_2-c_2 & c_2 \\ ma_3+b_3 & nb_3-c_3 & c_3 \end{vmatrix}$

(vii) যদি কোনো নির্ণায়কের কোনো কলাম বা সারির প্রতিটি ভুক্তি দুইটি পদের যোগফল বা বিয়োগফল রূপে প্রকাশিত হয়, তবে সেই নির্ণায়ককে দুইটি নির্ণায়কের যোগফল বা বিয়োগফল রূপে প্রকাশ করা যায়। যেমন,

$\begin{vmatrix} a_1+\alpha_1 & b_1 & c_1 \\ a_2+\alpha_2 & b_2 & c_2 \\ a_3+\alpha_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \alpha_1 & b_1 & c_1 \\ \alpha_2 & b_2 & c_2 \\ \alpha_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$,

$$\begin{vmatrix} a_1+\beta_1 & b_1+\beta_2 & c_1+\beta_3 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

নির্ণায়কের মান নির্ণয়ের কৌশল : প্রথমে প্রদত্ত নির্ণায়কের কোনো সারি বা কলামের সব ভুক্তিকে একই বানাতে হবে। এর জন্য কোনো সারি বা কলামের প্রতিটি ভুক্তির সাথে অন্য সারি বা সারিসমূহ অথবা কলাম বা কলামসমূহের অনুরূপ ভুক্তি বা ভুক্তির প্রয়োজনীয় গুণিতকের যোগ বা বিয়োগ করতে হবে। অত:পর সেই সারি বা কলামের সাধারণ মান common নিয়ে সারি বা কলামের সকল ভুক্তিকে 1 বানাতে হবে। তারপর সেই সারি বা কলামের দুইটি ভুক্তিকে শূন্য বানাতে হবে। সর্বশেষে সেই সারি বা কলাম বরাবর বিস্তার করতে হবে।

উদাহরণমালা

উদাহরণ 1. $D_1 = \begin{vmatrix} a-b-c & 2a & 2a \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix}$, $D_2 = \begin{vmatrix} x & y & z \\ x^2 & y^2 & z^2 \\ x^3-1 & y^3-1 & z^3-1 \end{vmatrix}$

(a) বিস্তার না করে প্রমাণ কর যে, $\begin{vmatrix} bc & ca & ab \\ \frac{1}{a} & \frac{1}{b} & \frac{1}{c} \\ \frac{1}{a}+b & \frac{1}{b}+c & \frac{1}{c}+a \end{vmatrix} = 0$

(b) প্রমাণ কর যে, $D_1 = (a+b+c)^3$ [কু.'১৩;ঢা.'১৩; চ.'০৮; য.'১১]

(c) প্রমাণ কর যে, $D_2 = (xyz-1)(x-y)(y-z)(z-x)$ [ঢা.'১৪; সি.'১৪, '১৫; ব.'১৫; দি.'১৩]

(a) প্রমাণ : $\text{L.H.S.} = \begin{vmatrix} bc & ca & ab \\ \frac{1}{a} & \frac{1}{b} & \frac{1}{c} \\ \frac{1}{a}+b & \frac{1}{b}+c & \frac{1}{c}+a \end{vmatrix} = \frac{1}{abc}\begin{vmatrix} abc & abc & abc \\ 1 & 1 & 1 \\ 1+ab & 1+bc & 1+ca \end{vmatrix}$

$$= \frac{abc}{abc}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1+ab & 1+bc & 1+ca \end{vmatrix} = 1 \times 0 = 0$$

(b) প্রমাণ: $\text{L.H.S.} = \begin{vmatrix} a-b-c & 2a & 2a \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a+b+c & a+b+c & a+b+c \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix}$

$[r_1' = r_1 + (r_2 + r_3)]$

$$= (a+b+c)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix} = (a+b+c)\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ a+b+c & -(a+b+c) & 2b \\ 0 & a+b+c & c-a-b \end{vmatrix}$$

$[c_1' = c_1 - c_2$ এবং $c_2' = c_2 - c_3]$

$= (a+b+c)1\{(a+b+c)^2 - 0\}$ [১ম সারি বরাবর বিস্তার করে।]

$= (a+b+c)^3 = $ R.H.S. (Proved)

(c) প্রমাণ ঃ L.H.S.$= \begin{vmatrix} x & y & z \\ x^2 & y^2 & z^2 \\ x^3-1 & y^3-1 & z^3-1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & y & z \\ x^2 & y^2 & z^2 \\ x^3 & y^3 & z^3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} x & y & z \\ x^2 & y^2 & z^2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$

$$= xyz\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ x^2 & y^2 & z^2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 1 & 1 \\ x^2 & y^2 & z^2 \end{vmatrix} = xyz\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ x^2 & y^2 & z^2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ x^2 & y^2 & z^2 \end{vmatrix}$$

[২য় ও ৩য় সারি পরস্পর বিনিময় করে।] [১ম ও ২য় সারি পরস্পর বিনিময় করে।]

$$= (xyz-1)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ x^2 & y^2 & z^2 \end{vmatrix} = (xyz-1)\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ x-y & y-z & z \\ x^2-y^2 & y^2-z^2 & z^2 \end{vmatrix}$$ [$c'_1 = c_1 - c_2$, $c'_2 = c_2 - c_3$]

$= (xyz-1)1.\{(x-y)(y^2-z^2) - (y-z)(x^2-y^2)\}$ [১ম সারি বরাবর বিস্তার করে।]

$= (xyz-1)(x-y)(y-z)(y+z-x-y)$

$= (xyz-1)(x-y)(y-z)(z-x) = $ R.H.S. (Proved)

উদাহরণ 2. প্রমাণ কর যে, $\begin{vmatrix} (b+c)^2 & a^2 & a^2 \\ b^2 & (c+a)^2 & b^2 \\ c^2 & c^2 & (a+b)^2 \end{vmatrix} = 2abc\,(a+b+c)^3$ **[কু.'০৩]**

প্রমাণ : L.H.S$= \begin{vmatrix} (b+c)^2 & a^2 & a^2 \\ b^2 & (c+a)^2 & b^2 \\ c^2 & c^2 & (a+b)^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} (b+c)^2-a^2 & a^2-a^2 & a^2 \\ b^2-b^2 & (c+a)^2-b^2 & b^2 \\ c^2-(a+b)^2 & c^2-(a+b)^2 & (a+b)^2 \end{vmatrix}$

[$c'_1 = c_1 - c_3, c'_2 = c_2 - c_3$]

$$= \begin{vmatrix} (a+b+c)(b+c-a) & 0 & a^2 \\ 0 & (a+b+c)(c+a-b) & b^2 \\ (a+b+c)(c-a-b) & (a+b+c)(c-a-b) & (a+b)^2 \end{vmatrix}$$

$$= (a+b+c)^2\begin{vmatrix} b+c-a & 0 & a^2 \\ 0 & c+a-b & b^2 \\ c-a-b & c-a-b & (a+b)^2 \end{vmatrix} = (a+b+c)^2\begin{vmatrix} b+c-a & 0 & a^2 \\ 0 & c+a-b & b^2 \\ -2b & -2a & 2ab \end{vmatrix}$$

[$r'_3 = r_3 - (r_1 + r_2)$]

$$= (a+b+c)^2\frac{ab}{ab}\begin{vmatrix} b+c-a & 0 & a^2 \\ 0 & c+a-b & b^2 \\ -2b & -2a & 2ab \end{vmatrix}$$

$$= \frac{(a+b+c)^2}{ab}\begin{vmatrix} ab+ca-a^2 & 0 & a^2 \\ 0 & bc+ab-b^2 & b^2 \\ -2ab & -2ab & 2ab \end{vmatrix} = \frac{(a+b+c)^2}{ab}\begin{vmatrix} ab+ca & a^2 & a^2 \\ b^2 & bc+ab & b^2 \\ 0 & 0 & 2ab \end{vmatrix}$$

[$c''_1 = c'_1 + c'_3$, $c''_2 = c'_2 + c'_3$]

$$= \frac{(a+b+c)^2}{ab}.2\,ab\{(ab+ca)(bc+ab)-a^2b^2\}$$ [শেষ কলাম বরাবর বিস্তার করে ।]

$$= 2(a+b+c)^2.\,ab\{(b+c)(c+a)-ab\}$$

$$= 2ab(a+b+c)^2(bc+ab+c^2+ca-ab)$$

$$= 2ab(a+b+c)^2.c(a+b+c) = 2abc(a+b+c)^3 = \text{R.H.S.} \quad \text{(Proved)}$$

৭. ব্যতিক্রমী (Singular) ও অব্যতিক্রমী (Nonsingular) ম্যাট্রিক্স

যে বর্গ ম্যাট্রিক্সের নির্ণায়কের মান শূন্য তাকে ব্যতিক্রমী ম্যাট্রিক্স এবং যে বর্গ ম্যাট্রিক্সের নির্ণায়কের মান অশূন্য তাকে অব্যতিক্রমী মাট্রিক্স বলে। যেমন –

$A = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 4 & -6 \end{bmatrix}$ একটি 2×2 ব্যতিক্রমী ম্যাট্রিক্স যেহেতু $|A| = -12 + 12 = 0$ এবং $B = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -6 \end{bmatrix}$ একটি 2×2 অব্যতিক্রমী ম্যাট্রিক্স যেহেতু $|B| = -12 - 12 = -24 \neq 0$ ।

উদাহরণ –3: $\begin{bmatrix} 3 & 1 & 9 \\ 2x & 2 & 6 \\ x^2 & 3 & 3 \end{bmatrix}$ **ব্যতিক্রমী হলে x এর মান নির্ণয় কর।**

সমাধান : প্রদত্ত ম্যাট্রিক্সটি ব্যতিক্রমী বলে, $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 9 \\ 2x & 2 & 6 \\ x^2 & 3 & 3 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 3(6-18) - 1(6x-6x^2) + 9(6x-2x^2) = 0$

$\Rightarrow \quad -36 - 6x + 6x^2 + 54x - 18x^2 = 0 \Rightarrow -12x^2 + 48x - 36 = 0 \Rightarrow x^2 - 4x + 3 = 0$

$\Rightarrow \quad x^2 - 3x - x + 3 = 0 \Rightarrow (x-3)(x-1) = 0 \;\therefore x = 1, 3$ (Ans.)

৮. বর্গ ম্যাট্রিক্সের বিপরীত ম্যাট্রিক্স (Inverse matrix of a square matrix) : $n\times n$ মাত্রার দুইটি বর্গ ম্যাট্রিক্স A ও B-এর জন্য যদি $AB = BA = I_n$ হয় তবে এদের একটিকে অপরটির বিপরীত ম্যাট্রিক্স বলা হয়। A ম্যাট্রিক্সের বিপরীত ম্যাট্রিক্সকে A^{-1} দ্বারা প্রকাশ করা হয়। সুতরাং $AA^{-1} = A^{-1}A = I_n$ । উল্লেখ্য যে, শুধু অব্যতিক্রমী ম্যাট্রিক্সের বিপরীত ম্যাট্রিক্স বিদ্যমান।

৮.১ অনুবন্ধী ম্যাট্রিক্স (Adjoint matrix) : কোনো বর্গ ম্যাট্রিক্স A দ্বারা গঠিত নির্ণায়ক $|A|$ এর সহগুণকসমূহ দ্বারা গঠিত ম্যাট্রিক্সের ট্রান্সপোজ ম্যাট্রিক্সকে প্রদত্ত ম্যাট্রিক্স A এর **অনুবন্ধী** ম্যাট্রিক্স বলা হয় এবং এ ম্যাট্রিক্সকে Adj A দ্বারা প্রকাশ করা হয়।

$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$ এর সহগুণক ম্যাট্রিক্স $\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix}$ হলে,

$$\text{Adj } A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{bmatrix}$$

যেখানে A_{ij} হচ্ছে (i, j) তম সহগুণক (a_{ij} তম ভুক্তির সহগুণক)

উদাহরণ –4: $A=\begin{bmatrix}1 & -4 & 2\\ -2 & 1 & 0\\ -1 & -1 & 1\end{bmatrix}$ এর অনুবন্ধী ম্যাট্রিক্স নির্ণয় কর।

সমাধান: $A=\begin{bmatrix}1 & -4 & 2\\ -2 & 1 & 0\\ -1 & -1 & 1\end{bmatrix}$ এর সহগুণক ম্যাট্রিক্স $\begin{bmatrix}A_{11} & A_{12} & A_{13}\\ A_{21} & A_{22} & A_{23}\\ A_{31} & A_{32} & A_{33}\end{bmatrix}$ হলে,

$$A_{11}=\begin{vmatrix}1 & 0\\ -1 & 1\end{vmatrix},\ A_{12}=-\begin{vmatrix}-2 & 0\\ -1 & 1\end{vmatrix},\ A_{13}=\begin{vmatrix}-2 & 1\\ -1 & -1\end{vmatrix},\ A_{21}=-\begin{vmatrix}-4 & 2\\ -1 & 1\end{vmatrix},\ A_{22}=\begin{vmatrix}1 & 2\\ -1 & 1\end{vmatrix},$$

$$A_{23}=-\begin{vmatrix}1 & -4\\ -1 & -1\end{vmatrix},\ A_{31}=\begin{vmatrix}-4 & 2\\ 1 & 0\end{vmatrix},\ A_{32}=-\begin{vmatrix}1 & 2\\ -2 & 0\end{vmatrix},\ A_{33}=\begin{vmatrix}1 & -4\\ -2 & 1\end{vmatrix}$$

$$\therefore\quad \text{Adj } A=\begin{bmatrix}1+0 & -(-2+0) & 2+1\\ -(-4+2) & 1+2 & -(-1-4)\\ 0-2 & -(0+4) & 1-8\end{bmatrix}^T=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 3 & 5\\ -2 & -4 & -7\end{bmatrix}^T=\begin{bmatrix}1 & 2 & -2\\ 2 & 3 & -4\\ 3 & 5 & -7\end{bmatrix}$$

বিকল্প পদ্ধতি: $A=\begin{bmatrix}1 & -4 & 2\\ -2 & 1 & 0\\ -1 & -1 & 1\end{bmatrix}$ এর অনুবন্ধী ম্যাট্রিক্স,

$$\begin{array}{c|ccccc} 1 & -4 & 2 & 1 & -4\\ -2 & 1 & 0 & -2 & 1\\ -1 & -1 & 1 & -1 & -1\\ 1 & -4 & 2 & 1 & 4\\ -2 & 1 & 0 & -2 & 1\end{array}$$

$$\text{Adj } A=\begin{bmatrix}1+0 & 0+2 & 2+1\\ -2+4 & 1+2 & 4+1\\ 0-2 & -4-0 & 1-8\end{bmatrix}^T$$

$$=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 3 & 5\\ -2 & -4 & -7\end{bmatrix}^T=\begin{bmatrix}1 & 2 & -2\\ 2 & 3 & -4\\ 3 & 5 & -7\end{bmatrix}$$

৮.২ বিপরীত ম্যাট্রিক্স নির্ণয়ের বিভিন্ন পদ্ধতি (Different processes of determining inverse matrix):

(i) সমাধান পদ্ধতি (Solution method): $AX=B$ হলে $X=A^{-1}B$, যেখানে A একটি অব্যতিক্রমী ম্যাট্রিক্স, $X=\begin{bmatrix}x\\ y\\ z\end{bmatrix}$ এবং $B=\begin{bmatrix}a\\ b\\ c\end{bmatrix}$.

উদাহরণ –5: $A=\begin{bmatrix}0 & 1 & 2\\ 1 & 2 & 3\\ 3 & 1 & 1\end{bmatrix}$ হলে A^{-1} নির্ণয় কর। [ঢা.'১৫]

সমাধান : মনে করি, $AX=B$, যেখানে $X=\begin{bmatrix}x\\ y\\ z\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}a\\ b\\ c\end{bmatrix}$. তাহলে, $X=A^{-1}B$.

এখন, $AX=B\Rightarrow\begin{bmatrix}0 & 1 & 2\\ 1 & 2 & 3\\ 3 & 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\\ z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a\\ b\\ c\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{array}{l}0x+y+2z=a\cdots\cdots(i)\\ x+2y+3z=b\cdots\cdots(ii)\\ 3x+y+z=c\cdots\cdots(iii)\end{array}$

$3\times(ii)-(iii) \Rightarrow 5y+8z=3b-c \cdots\cdots (iv)$

$5\times(i)-(iv) \Rightarrow 2z = 5a-3b+c \Rightarrow z=\frac{5}{2}a-\frac{3}{2}b+\frac{1}{2}c$

(i) হতে, $y+5a-3b+c=a \Rightarrow y=-4a+3b-c$

(iii) হতে, $3x-4a+3b-c+\frac{5}{2}a-\frac{3}{2}b+\frac{1}{2}c=c$

$$\Rightarrow 3x=(4-\frac{5}{2})a+(-3+\frac{3}{2})b+(2-\frac{1}{2})c \Rightarrow 3x=\frac{3}{2}a-\frac{3}{2}b+\frac{3}{2}c \Rightarrow x=\frac{1}{2}a-\frac{1}{2}b+\frac{1}{2}c$$

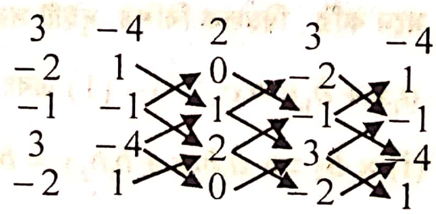
$$\therefore \begin{bmatrix} x\\ y\\ z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1/2 & -1/2 & 1/2\\ -4 & 3 & -1\\ 5/2 & -3/2 & 1/2\end{bmatrix}\begin{bmatrix} a\\ b\\ c\end{bmatrix}.$$ কাজেই, $A^{-1}=\begin{bmatrix} 1/2 & -1/2 & 1/2\\ -4 & 3 & -1\\ 5/2 & -3/2 & 1/2\end{bmatrix}=-\frac{1}{2}\begin{bmatrix} -1 & 1 & -1\\ 8 & -6 & 2\\ -5 & 3 & -1\end{bmatrix}$

(ii) অনুবন্ধী ম্যাট্রিক্স পদ্ধতি (Adjoint matrix method): কোনো অব্যতিক্রমী ম্যাট্রিক্স A এর অনুবন্ধী ম্যাট্রিক্সকে তার নির্ণায়ক $|A|$ এর মান দ্বারা ভাগ করে যে ম্যাট্রিক্স পাওয়া যায় তাকে প্রদত্ত ম্যাট্রিক্স A এর বিপরীত ম্যাট্রিক্স বলা হয় অর্থাৎ কোনো অব্যতিক্রমী ম্যাট্রিক্স A দ্বারা গঠিত নির্ণায়ক $|A|$ এর সহগুণকসমূহ দ্বারা গঠিত ম্যাট্রিক্সের কলামকে সারিতে এবং সারিকে কলামে পরিণত করে সৃষ্ট ম্যাট্রিক্সকে নির্ণায়ক $|A|$ এর মান দ্বারা ভাগ করে যে ম্যাট্রিক্স পাওয়া যায় তাকে প্রদত্ত ম্যাট্রিক্স A এর বিপরীত ম্যাট্রিক্স বলা হয়। সুতরাং, ম্যাট্রিক্স A এর বিপরীত ম্যাট্রিক্স $A^{-1}=\frac{Adj(A)}{|A|}$.

উদাহরণ –6: $A=\begin{bmatrix} 3 & -4 & 2\\ -2 & 1 & 0\\ -1 & -1 & 1\end{bmatrix}$ এর বিপরীত ম্যাট্রিক্স নির্ণয় কর। **[কু.'১৫]**

সমাধান : $A=\begin{bmatrix} 3 & -4 & 2\\ -2 & 1 & 0\\ -1 & -1 & 1\end{bmatrix}$ ম্যাট্রিক্সের নির্ণায়ক $|A| = 3(1+0)+4(-2+0)+2(2+1)=3-8+6=1$

$$Adj(A)=\begin{bmatrix} 1+0 & 0+2 & 2+1\\ -2+4 & 3+2 & -4+3\\ 0-2 & 4-0 & 3-8\end{bmatrix}^T$$



$$=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3\\ 2 & 5 & 7\\ -2 & -4 & -5\end{bmatrix}^T=\begin{bmatrix} 1 & 2 & -2\\ 2 & 5 & -4\\ 3 & 7 & -5\end{bmatrix}$$

$$\therefore\ A^{-1}=\frac{1}{|A|}Adj(A)=\frac{1}{1}\begin{bmatrix} 1 & 2 & -2\\ 2 & 5 & -4\\ 3 & 7 & -5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 2 & -2\\ 2 & 5 & -4\\ 3 & 7 & -5\end{bmatrix}\ \text{(Ans.)}$$

(iii) ব্লক ম্যাট্রিক্স পদ্ধতি (Block matrix method): $A=(a_{ij})_{n\times n}$ একটি অব্যতিক্রমী ম্যাট্রিক্স হলে ব্লক ম্যাট্রিক্স $[A \mid I_n]$ কে সমতুল্য ম্যাট্রিক্স $[I_n \mid B]$ তে পরিণত করা যায়, যেখানে $B=A^{-1}$ হবে।

উদাহরণ –7: $A=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 0\end{bmatrix}$ এর বিপরীত ম্যাট্রিক্স নির্ণয় কর।

সমাধান : এখানে $[A\,|\,I]=\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&1&0&0\\1&0&1&0&1&0\\1&1&0&0&0&1\end{array}\right]\xrightarrow[r_3-r_1]{r_2-r_1}\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&1&0&0\\0&0&1&-1&1&0\\0&1&0&-1&0&1\end{array}\right]$

$\xrightarrow{r_2+r_3}\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&1&0&0\\0&1&1&-2&1&1\\0&1&0&-1&0&1\end{array}\right]\xrightarrow{r_3-r_2}\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&1&0&0\\0&1&1&-2&1&1\\0&0&-1&1&-1&0\end{array}\right]$

$\xrightarrow{r_2+r_3}\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&1&0&0\\0&1&0&-1&0&1\\0&0&-1&1&-1&0\end{array}\right]\xrightarrow{(-r_3)}\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&1&0&0\\0&1&0&-1&0&1\\0&0&-1&1&-1&0\end{array}\right]=[I\,|\,A^{-1}]$

$\therefore$ A এর বিপরীত ম্যাট্রিক্স $A^{-1}=\begin{bmatrix}1&0&0\\-1&0&1\\-1&1&0\end{bmatrix}$

সত্যতা যাচাই : ম্যাট্রিক্স গুণনের সাহায্যে প্রমাণ করা যায় যে, $A.\ A^{-1}=A^{-1}.A=I_3$

বিপরীত ম্যাট্রিক্সের বৈশিষ্ট্য: (i) $(A^{-1})^{-1}=A$ (ii) $(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$ (iii) $(A^T)^{-1}=(A^{-1})^T$

(iv) $(BA)A^{-1}=B(AA^{-1})=B.$ (v) $I=I^{-1}=I^n$

(vi) $AB=C$ হলে $A=CB^{-1}$ এবং $B=A^{-1}C.$

[**MCQ এর জন্যঃ** $\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}$ এর বিপরীত ম্যাট্রিক্স $\frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix}d&-b\\-c&a\end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix}a&0&0\\0&b&0\\0&0&c\end{bmatrix}$ এর বিপরীত ম্যাট্রিক্স $\begin{bmatrix}1/a&0&0\\0&1/b&0\\0&0&1/c\end{bmatrix}$]

৭. নির্ণায়কের সাহায্যে সরল সমীকরণ জোটের সমাধান (Cramer's Rule)

মনে করি , দ্বিচলক বিশিষ্ট দুইটি সরল সমীকরণ,

$a_1x+b_1y=c_1$ ...... (1) এবং $a_2x+b_2y=c_2$ .... (ii)

(i) $\times\ b_2\Rightarrow a_1b_2x+b_1b_2y=b_2c_1$ ....(iii)

(ii) $\times\ b_1\Rightarrow a_2b_1x+b_1b_2y=b_1c_2$ ....(iv)

(iii) – (iv) $\Rightarrow x(\ a_1b_2-a_2b_1)=b_2c_1-b_1c_2$

$$\Rightarrow\ x=\frac{b_2c_1-b_1c_2}{a_1b_2-a_2b_1}=\frac{\begin{vmatrix}c_1&b_1\\c_2&b_2\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}a_1&b_1\\a_2&b_2\end{vmatrix}}=\frac{D_x}{D}$$, যখন $D\neq0$

অনুরূপভাবে, (i) $\times\ a_2-$ (ii) $\times\ a_1\Rightarrow y(\ a_2b_1-a_1b_2\ )=c_1a_2-c_2a_1$

$$\Rightarrow \quad y=\frac{c_1a_2-c_2a_1}{a_2b_1-a_1b_2}=\frac{\begin{vmatrix}a_1 & c_1\\ a_2 & c_2\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}a_1 & b_1\\ a_2 & b_2\end{vmatrix}}=\frac{D_y}{D}$$, যখন $D\neq 0$

একই পদ্ধতিতে ত্রিচলক বিশিষ্ট $a_1x+b_1y+c_1z=d_1, a_2x+b_2y+c_2z=d_2$ এবং $a_3x+b_3y+c_3z=d_3$ সরল সমীকরণ তিনটি সমাধান করে পাওয়া যায়,

$$D=\begin{vmatrix}a_1 & b_1 & c_1\\ a_2 & b_2 & c_2\\ a_3 & b_3 & c_3\end{vmatrix}\neq 0$$ [x, y, z এর সহগগুলো নিয়ে গঠিত নির্ণায়ক D]

$$D_x=\begin{vmatrix}d_1 & b_1 & c_1\\ d_2 & b_2 & c_2\\ d_3 & b_3 & c_3\end{vmatrix}$$ [D এর ১ম কলাম (x এর সহগ) ডানদিকের ধ্রুবপদ দ্বারা পতিস্থাপন করে।]

$$D_y=\begin{vmatrix}a_1 & d_1 & c_1\\ a_2 & d_2 & c_2\\ a_3 & d_3 & c_3\end{vmatrix}$$ [D এর ২য় কলাম (y এর সহগ) ডানদিকের ধ্রুবপদ দ্বারা পতিস্থাপন করে।]

$$D_z=\begin{vmatrix}a_1 & b_1 & d_1\\ a_2 & b_2 & d_2\\ a_3 & b_3 & d_3\end{vmatrix}$$ [D এর ৩য় কলাম (z এর সহগ) ডানদিকের ধ্রুবপদ দ্বারা পতিস্থাপন করে।]

$$\therefore \quad x=\frac{D_x}{D}, y=\frac{D_y}{D} \text{ এবং } z=\frac{D_z}{D}$$

নির্ণায়কের সাহায্যে একঘাত সমীকরণ জোটের এরূপ সমাধান পদ্ধতিকে ক্রেমারের নিয়ম (Cramer's Rule) বলা হয়।

D = 0 হলে, সমীকরণ জোটের কোনো সমাধান থাকবে না, অন্যথায় অসংখ্য সমাধান থাকবে যা এই সূত্রের সাহায্যে পাওয়া যায় না।

উদাহরণ –7: নির্ণায়কের সাহায্যে (ক্রেমারের নিয়মে) এবং ম্যাট্রিক্সের সাহায্যে সমাধান কর ।

$2x+y-2z=10, 3x+2y+2z=1, 5x+4y+3z=4$ **[ঢা.'০৫]**

নির্ণায়কের সাহায্যে সমাধান : ক্রেমারের নিয়ম ব্যবহার করে পাওয়া যায়,

$$D=\begin{vmatrix}2 & 1 & -2\\ 3 & 2 & 2\\ 5 & 4 & 3\end{vmatrix}=2(6-8)-1(9-10)-2(12-10)=-4+1-4=-7$$

$$D_x=\begin{vmatrix}10 & 1 & -2\\ 1 & 2 & 2\\ 4 & 4 & 3\end{vmatrix}=10(6-8)-1(3-8)-2(4-8)=-20+5+8=-7$$

$$D_y=\begin{vmatrix}2 & 10 & -2\\ 3 & 1 & 2\\ 5 & 4 & 3\end{vmatrix}=2(3-8)-10(9-10)-2(12-5)=-10+10-14=-14$$

$$D_z = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 10 \\ 3 & 2 & 1 \\ 5 & 4 & 4 \end{vmatrix} = 2(8-4) - 1(12-5) + 10(12-10) = 8 - 7 + 20 = 21$$

$$\therefore\ x = \frac{D_x}{D} = \frac{-7}{-7} = 1,\ y = \frac{D_y}{D} = \frac{-14}{-7} = 2,\ z = \frac{D_z}{D} = \frac{21}{-7} = -3$$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান $x = 1, y = 2, z = -3$

ম্যাট্রিক্সের সাহায্যে সমাধান: প্রদত্ত সমীকরণ জোট হতে পাই,

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 3 & 2 & 2 \\ 5 & 4 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 3 & 2 & 2 \\ 5 & 4 & 3 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 10 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 3 & 2 & 2 \\ 5 & 4 & 3 \end{bmatrix}$ হলে $|A| = 2(6-8) - 1(9-10) - 2(12-10) = -4 + 1 - 4 = -7$

$$\text{Adj}(A) = \begin{bmatrix} 6-8 & 10-9 & 12-10 \\ -8-3 & 6+10 & 5-8 \\ 2+4 & -6-4 & 4-3 \end{bmatrix}^T$$

$$= \begin{bmatrix} -2 & 1 & 2 \\ -11 & 16 & -3 \\ 6 & -10 & 1 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} -2 & -11 & 6 \\ 1 & 16 & -10 \\ 2 & -3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{ccccc} 2 & 1 & -2 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 2 & 3 & 2 \\ 5 & 4 & 3 & 5 & 4 \\ 2 & 1 & -2 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 2 & 3 & 2 \end{array}$$

$$\therefore\ A^{-1} = \frac{1}{|A|}\text{Adj}(A) \Rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 3 & 2 & 2 \\ 5 & 4 & 3 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{-7}\begin{bmatrix} -2 & -11 & 6 \\ 1 & 16 & -10 \\ 2 & -3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\therefore\ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \frac{1}{-7}\begin{bmatrix} -2 & -11 & 6 \\ 1 & 16 & -10 \\ 2 & -3 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 10 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix} = \frac{1}{-7}\begin{bmatrix} -20-11+24 \\ 10+16-40 \\ 20-3+4 \end{bmatrix} = \frac{1}{-7}\begin{bmatrix} -7 \\ -14 \\ 21 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix}$$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান $x = 1, y = 2, z = -3$

উদাহরণ -৪: $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} x & 2 & y \\ 1 & 2 & 2 \\ -1 & z & 2 \end{bmatrix}$

ক. $A + I = C$ হলে (x, y, z) নির্ণয় কর।

খ. $|2A^2|$ নির্ণয় কর।

গ. $AB = I$ হলে B নির্ণয় কর।

সমাধান: ক. $A + I = C$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & 3 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & 2 & y \\ 1 & 2 & 2 \\ -1 & z & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 2 \\ -1 & 3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & 2 & y \\ 1 & 2 & 2 \\ -1 & z & 2 \end{bmatrix}$$

$\therefore$ $(x, y, z) = (4, -1, 3)$ (Ans.)

খ. $2A^2 = 2A.A = 2\begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & 3 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$

$= 2\begin{bmatrix} 9+2+1 & 6+2-3 & -3+4-1 \\ 3+1-2 & 2+1+6 & -1+2+2 \\ -3+3-1 & -2+3+3 & 1+6+1 \end{bmatrix} = 2\begin{bmatrix} 12 & 5 & 0 \\ 2 & 9 & 3 \\ -1 & 4 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\times12 & 2\times5 & 2\times0 \\ 2\times2 & 2\times9 & 2\times3 \\ 2\times(-1) & 2\times4 & 2\times8 \end{bmatrix}$

$\therefore \ |2A^2| = \begin{vmatrix} 2\times12 & 2\times5 & 2\times0 \\ 2\times2 & 2\times9 & 2\times3 \\ 2\times(-1) & 2\times4 & 2\times8 \end{vmatrix} = 2^3\begin{vmatrix} 12 & 5 & 0 \\ 2 & 9 & 3 \\ -1 & 4 & 8 \end{vmatrix} = 8\{12(72-12) - 5(16+3)\}$

$= 8(720 - 95) = 5000$ (Ans.)

গ. দেওয়া আছে, $AB = I$

$\therefore \ B = A^{-1}$

এখন, $|A| = \begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 3(1-6) - 2(1+2) - 1(3+1) = -15 - 6 - 4 = -25$

$\therefore \ \text{Adj}(A) = \begin{bmatrix} 1-6 & -(1+2) & 3+1 \\ -(2+3) & 3-1 & -(9+2) \\ 4+1 & -(6+1) & 3-2 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} -5 & -3 & 4 \\ -5 & 2 & -11 \\ 5 & -7 & 1 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} -5 & -5 & 5 \\ -3 & 2 & -7 \\ 4 & -11 & 1 \end{bmatrix}$

$\therefore \ B = A^{-1} = \frac{1}{|A|}\text{Adj}(A) = \frac{1}{-25}\begin{bmatrix} -5 & -5 & 5 \\ -3 & 2 & -7 \\ 4 & -11 & 1 \end{bmatrix}$ (Ans.)

প্রশ্নমালা I B

1 প্রমাণ কর যে,

(a) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & p & p^2 \\ 1 & p^2 & p^4 \end{vmatrix} = p(p-1)^2(p^2-1)$ [ঢা.'১২; রা.'১১; কু.'১৫; চ.'১৫; মা.'১৩,'১৫; বুয়েট'০৭-০৮]

(b) $\begin{vmatrix} a^2 & ab & b^2 \\ 2a & a+b & 2b \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (a-b)^3$ [ঢা.'০১;সি.'০৩]

(c) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2-bc & b^2-ca & c^2-ab \end{vmatrix} = 0$ [চুয়েট'০৫-০৬]

(d) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+x & 1 \\ 1 & 1 & 1+y \end{vmatrix} = xy$ [ব.'০১]

(e) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix} = (a-b)(b-c)(c-a)(a+b+c)$ [চ.'০৫; ব. '১০]

(f) $\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix} = (a-b)(b-c)(c-a)$ [চ.'১০]

(g) $\begin{vmatrix} (b+c)^2 & a^2 & 1 \\ (c+a)^2 & b^2 & 1 \\ (a+b)^2 & c^2 & 1 \end{vmatrix} = -2(a+b+c)(a-b)(b-c)(c-a)$

(h) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x^2 & y^2 & z^2 \\ x^3 & y^3 & z^3 \end{vmatrix} = (x-y)(y-z)(z-x)(xy+yz+zx)$

2. **বিস্তার না করে প্রমাণ কর ;**

(a) $\begin{vmatrix} 1 & bc & bc(b+c) \\ 1 & ca & ca(c+a) \\ 1 & ab & ab(a+b) \end{vmatrix} = abc \begin{vmatrix} a & 1 & b+c \\ b & 1 & c+a \\ c & 1 & a+b \end{vmatrix} = 0$ **[রা.'১৫; ঢা.'০৯; য.'১৩; কুয়েট'০৯-১০]**

(b) $\begin{vmatrix} 1 & x-a & y-b \\ 1 & x_1-a & y_1-b \\ 1 & x_2-a & y_2-b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & x & y \\ 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \end{vmatrix}$

(c) $\begin{vmatrix} 1 & x_1+a & y_1+b \\ 1 & x_2+a & y_2+b \\ 1 & x_3+a & y_3+b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix}$ **[চ.'১১]**

(d) $\begin{vmatrix} b+c & c+a & a+b \\ q+r & r+p & p+q \\ y+z & z+x & x+y \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ x & y & z \end{vmatrix}$ **[য.'১৫]**

3. **প্রমাণ কর যে,**

(a) $\begin{vmatrix} a+b+2c & a & b \\ c & b+c+2a & b \\ c & a & c+a+2b \end{vmatrix} = 2(a+b+c)^3$ **[য.'০৭; দি.'০৯,'১১; মা.'১৪; য.'১৫]**

(b) $\begin{vmatrix} 1+x_1 & x_2 & x_3 \\ x_1 & 1+x_2 & x_3 \\ x_1 & x_2 & 1+x_3 \end{vmatrix} = 1+x_1+x_2+x_3$ **[সি.'০৮; মা.বো.'০৯;ব.'১২]**

(c) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix} = abc(a-b)(b-c)(c-a)$ **[সি.'০৮; মা.'০৯,'১১,'১৫; ব.'১২]**

(d) $\begin{vmatrix} a+x & b+x & c+x \\ a+y & b+y & c+y \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = (a-b)(b-c)(c-a)(x-y)$ **[ঢা.'০১; বুয়েট'১০-১১]**

(e) $\begin{vmatrix} a & a & a \\ 1 & a & a^2 \\ 1 & a^2 & a^4 \end{vmatrix} = a^2(a-1)^2(a^2-1)$ **[রা .'০৫]**

(f) $\begin{vmatrix} 2 & a & b+c \\ 2 & b & c+a \\ 2 & c & a+b \end{vmatrix} = 0$ **[য.'০০]**

(g) $\begin{vmatrix} 3 & a & b+c \\ 3 & b & c+a \\ 3 & c & a+b \end{vmatrix} = 0$ **[কু.'০৫]**

(h) $\begin{vmatrix} a-b-c & 2a & 2a \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix} = (a+b+c)^3$ [রা.'০৪; বুয়েট'১১-১২]

4. প্রমাণ কর যে, (a) $\begin{vmatrix} \log x & \log y & \lg z \\ \log 2x & \log 2y & \log 2z \\ \log 3x & \log 3y & \log 3z \end{vmatrix} = 0$ [ব.'১৩; কুয়েট'০৭-০৮; বুয়েট'০৯-১০; বুয়েট'১১-১২]

(b) $\begin{vmatrix} 1 & \cos 2\alpha & \sin\alpha \\ 1 & \cos 2\beta & \sin\beta \\ 1 & \cos 2\gamma & \sin\gamma \end{vmatrix} = 2(\sin\alpha - \sin\beta)(\sin\beta - \sin\gamma)(\sin\gamma - \sin\alpha)$ [ব.'০৩]

5. প্রমাণ কর যে, (a) $\begin{vmatrix} -a^2 & ab & ac \\ ab & -b^2 & bc \\ ac & bc & -c^2 \end{vmatrix} = 4a^2b^2c^2$ [চ.'০৪; সি.'০৬,'০৯; রা.'০৮]

(b) $\begin{vmatrix} b^2+c^2 & ab & ca \\ ab & c^2+a^2 & bc \\ ca & bc & a^2+b^2 \end{vmatrix} = 4a^2b^2c^2$ [কু.'০৪,'১২]

(c) $\begin{vmatrix} x^2 & yz & zx+z^2 \\ x^2+xy & y^2 & zx \\ xy & y^2+yz & z^2 \end{vmatrix} = 4x^2y^2z^2$ [য.'০৪, '০৮; রা.'১৩,'১৫]

(d) $\begin{vmatrix} 1+a^2-b^2 & 2ab & -2b \\ 2ab & 1-a^2+b^2 & 2a \\ 2b & -2a & 1-a^2-b^2 \end{vmatrix} = (1+a^2+b^2)^3$ [সি.'১০,'১৩;দি.'১৪; কুয়েট'১১-১২]

(e) $\begin{vmatrix} a & b & ax+by \\ b & c & bx+cy \\ ax+by & bx+cy & 0 \end{vmatrix} = (b^2-ac)(ax^2+2bxy+cy^2)$

[য.'১০, '১২,'১৪, ঢা.'১০,'১৫; দি., রা.,সি.'১২; চ.'১৩,'১৫.; ব. '১৪]

(f) $\begin{vmatrix} (b+c)^2 & a^2 & bc \\ (c+a)^2 & b^2 & ca \\ (a+b)^2 & c^2 & ab \end{vmatrix} = (a^2+b^2+c^2)(a+b+c)(b-c)(c-a)(a-b)$ [চ.'০৬]

6. (a) $\begin{vmatrix} -2a & a+b & a+c \\ b+a & -2b & b+c \\ c+a & c+b & -2c \end{vmatrix} = 4(a+b)(b+c)(c+a)$ [ব.'১১]

(b) $\begin{vmatrix} 1+a & 1 & 1 \\ 1 & 1+b & 1 \\ 1 & 1 & 1+c \end{vmatrix} = abc\left(1+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)$

7. $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$ নির্ণায়কে a_1, b_1, c_1 এর সহগুণক যথাক্রমে A_1, B_1, C_1 হলে, প্রমাণ কর যে, $a_2A_1 + b_2B_1 + c_2C_1 = 0$. [য.'০১; কু.'০৮,'০৯]

8. মান নির্ণয় কর :

(a) $\begin{vmatrix} x+y & x & y \\ x & x+z & z \\ y & z & y+z \end{vmatrix}$ [কু.'১১; চ.'১৪] উ: $4xyz$. (b) $\begin{vmatrix} b+c & b-c & c-b \\ a-c & c+a & c-a \\ a-b & b-a & a+b \end{vmatrix}$ উ: $8abc$

9. সমাধান কর : (a) $\begin{vmatrix} 3+x & 4 & 2 \\ 4 & 2+x & 3 \\ 2 & 3 & 4+x \end{vmatrix} = 0$ (b) $\begin{vmatrix} x-3 & 1 & -1 \\ 1 & x-5 & 1 \\ -1 & 1 & x-3 \end{vmatrix} = 0$ (c) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & a & b \\ x^2 & a^2 & b^2 \end{vmatrix} = 0$

[ঢা.'০৫,কু.,চ.'০৭] [কুয়েট'০৪-০৫]

উ: (a) $x = -9, \pm\sqrt{3}$ (b) $x = 2, 3, 6$ (c) $x = a, b$

10. যদি x, y, z অসমান এবং $\begin{vmatrix} x & x^2 & 1+x^3 \\ y & y^2 & 1+y^3 \\ z & z^2 & 1+z^3 \end{vmatrix} = 0$ হয়, তাহলে দেখাও যে $xyz + 1 = 0$.

11 (a) $\begin{bmatrix} a+3 & 6 \\ 5 & a-4 \end{bmatrix}$ ম্যাট্রিক্সটি ব্যতিক্রমী হলে a এর মান নির্ণয় কর। উ: $-6, 7$

(b) $\begin{bmatrix} a-2 & 6 \\ 2 & a-3 \end{bmatrix}$ ম্যাট্রিক্সটি ব্যতিক্রমী হলে a এর মান নির্ণয় কর। উ: $-1, 6$

12. বিপরীত ম্যাট্রিক্স নির্ণয় কর :

(a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ (b) $A = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ (c) $A = \begin{bmatrix} 3 & 4 & -1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 2 & 5 & -4 \end{bmatrix}$ (d) $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$ [ব.'১৫]

(e) $\begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 5 & 5 \\ 2 & 5 & 11 \end{bmatrix}$ [সি.'১৫]

উ: (a) $A^{-1} = \frac{1}{-2}\begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$ (b) $A^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ (c) $A^{-1} = \begin{bmatrix} 3/2 & -11/10 & -6/5 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1/2 & 7/10 & 2/5 \end{bmatrix}$

(d) $A^{-1} = \begin{bmatrix} 1/2 & -1/2 & 1/2 \\ 1/6 & -5/6 & 1/2 \\ -1/6 & -1/6 & 1/2 \end{bmatrix}$ (e) $\begin{bmatrix} 5/6 & -1/3 & 0 \\ -1/3 & 1/2 & -1/6 \\ 0 & -1/6 & 1/6 \end{bmatrix}$

13. নির্ণায়কের সাহায্যে ও ম্যাট্রিক্সের সাহায্যে সমাধান কর :

(a) $2x + 3y = 4$
$x - y = 7$
উ: $x = 5, y = -2$

(b) $x + y + z = 1$
$x + 2y + z = 2$
উ: $x = 1, y = 1, z = -1$

$x + y + 2z = 0$

(c) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 7 \\ 11 \end{bmatrix}$ উ: $x = 2, y = 2, z = 1$

(সম্ভাব্য ধাপ (Step) সহ কিছু সমস্যা)

14. বিস্তার না করে প্রমাণ কর যে, $\begin{vmatrix} bc & ca & ab \\ \frac{1}{a} & \frac{1}{b} & \frac{1}{c} \\ \frac{1}{a}+b & \frac{1}{b}+c & \frac{1}{c}+a \end{vmatrix} = 0$ [প্র.ভ.প.'১৪] (২)

15. প্রমাণ কর যে, $\begin{vmatrix} x+a & a & a \\ b & x+b & b \\ c & c & x+c \end{vmatrix} = x^2(x+a+b+c)$ (৪)

16. প্রমাণ কর যে, $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \sin A & \sin B & \sin C \\ \cos A & \cos B & \cos C \end{vmatrix} = -4\sin\frac{A-B}{2}\sin\frac{B-C}{2}\sin\frac{C-A}{2}$ (৪)

17. প্রমাণ কর যে,

(a) $\begin{vmatrix} -bc & bc+b^2 & bc+c^2 \\ ca+a^2 & -ca & ca+c^2 \\ ab+a^2 & ab+b^2 & -ab \end{vmatrix} = (bc+ca+ab)^3$ (৪)

(b) $\begin{vmatrix} a^2-bc & b^2-ca & c^2-ab \\ c^2-ab & a^2-bc & b^2-ca \\ b^2-ca & c^2-ab & a^2-bc \end{vmatrix} = (a^3+b^3+c^3-3abc)^2$ (৫)

(ex-2) (c) $\begin{vmatrix} (a+b)^2 & ca & bc \\ ca & (b+c)^2 & ab \\ bc & ab & (c+a)^2 \end{vmatrix} = abc(a+b+c)^3$ (৫)

(d) $\begin{vmatrix} a+b+c & -c & -b \\ -c & a+b+c & -a \\ -b & -a & a+b+c \end{vmatrix} = 2(b+c)(c+a)(a+b)$ (৪)

(CQ উপযোগী কিছু সমস্যা)

18. (a) $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 1 & 3 & 0 \\ 5 & 0 & 2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -1 & 0 & 5 \\ 3 & 0 & -3 \end{bmatrix}$ হলে AB এর ট্রেস নির্ণয় কর। উ: -1

(b) $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & y \\ 1 & x & 0 \\ 5 & 0 & -2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -3 & 1 & x \\ 1 & -y & 0 \\ 5 & 0 & -7 \end{bmatrix}$; $C = A - B$ একটি স্কেলার ম্যাট্রিক্স হলে (x, y) নির্ণয় কর।

উ: $(x, y) = (\frac{5}{2}, \frac{5}{2})$

(c) $3\begin{bmatrix} s & v & w \\ x-y & x & v \\ w & u & s \end{bmatrix}$ একটি অভেদক ম্যাট্রিক্স হলে (x, y) নির্ণয় কর।

উ: $(x, y) = (0, -\frac{1}{3})$

(d) $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & y \\ 1 & 3 & 5 \\ 5 & 1 & -2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -3 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 5 & x & -7 \end{bmatrix}$; $C = A + B$ একটি প্রতিসম ম্যাট্রিক্স হলে (x, y) নির্ণয় কর।

উ: $(x, y) = (7, 7)$

(e) $A = \begin{bmatrix} 1 & x & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 4 & 1 & -3 \\ 1 & 5 & \square\text{১} \\ 5 & 8 & -7 \end{bmatrix}$; $C = A - B$ একটি বিপ্রতিসম ম্যাট্রিক্স হলে (x, y) নির্ণয় কর।

উ: $(x, y) = (2, -8)$

(f) $A = \begin{bmatrix} 2 & -2 & -4 \\ y & 3 & x \\ 1 & -2 & -3 \end{bmatrix}$ একটি সমঘাতি ম্যাট্রিক্স হলে (x, y) নির্ণয় কর।

উ: $(4, -1)$

(g) $A = \begin{bmatrix} -5 & y & 0 \\ 3 & 5 & 0 \\ 1 & x & -1 \end{bmatrix}$ একটি অভেদঘাতি ম্যাট্রিক্স হলে (x, y) নির্ণয় কর।

উ: $(2, -8)$

(h) $\begin{bmatrix} 3 & -5 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \\ 7 & -2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ হলে (x, y, z) নির্ণয় কর।

উ: $(x, y, z) = (-2, -9, 9)$

19. $A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 3 \\ 3 & a & 3 \\ 7 & -3 & a \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 3 \\ 5 & 2 & 0 \end{bmatrix}$; $C = A - B$ ম্যাট্রিক্স ব্যতিক্রমী হলে a এর মান নির্ণয় কর।

উ: $a = -2, 10/3$

20. (a) সমাধান পদ্ধতিতে $A = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 3 & -1 \end{bmatrix}$ এর বিপরীত ম্যাট্রিক্স A^{-1} নির্ণয় কর।

উ: $\begin{bmatrix} 5/11 & 1/11 & 3/11 \\ -1/2 & 0 & 0 \\ -3/22 & 3/11 & -2/11 \end{bmatrix}$

(b) $\begin{bmatrix} 3 & -5 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \\ 7 & -2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix}$ হলে (x, y, z) নির্ণয় কর।

উ: $(x, y, z) = (\frac{28}{39}, \frac{83}{117}, -\frac{71}{117})$

21. (a) $A=\begin{bmatrix}1 & -1 & 0\\ 2 & -1 & 5\\ 2 & 3 & -2\end{bmatrix}$ এবং $AB = BA = I$ হলে B নির্ণয় কর। উ: $B=\begin{bmatrix}13/27 & 2/27 & 5/27\\ -14/27 & 2/27 & 5/27\\ -8/27 & 5/27 & -1/27\end{bmatrix}$

(b) $\frac{x}{11}-\frac{2y}{11}+\frac{3z}{11}=\frac{x}{5}+\frac{y}{10}+\frac{z}{5}=\frac{x}{3}+\frac{2y}{9}+\frac{z}{9}=1$ সমীকরণ জোটটি ম্যাট্রিক্স এর সাহায্যে সমাধান কর।

উ: $x=2, y=0, z=3$

(c) $\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 2 & -3 & 4\\ 3 & -2 & 3\end{bmatrix}B=\begin{bmatrix}10 & 9 & 10\\ 0 & 33 & 0\\ 0 & 22 & 0\end{bmatrix}$ হলে B নির্ণয় কর। উ: $B=\begin{bmatrix}-1 & -2 & -1\\ 6 & 1 & 6\\ 5 & 10 & 5\end{bmatrix}$

22. (a) $A=\begin{bmatrix}4 & 0 & -1\\ 3 & 1 & 2\\ 2 & 4 & -1\end{bmatrix}$ এবং $f(x) = x^3 + 3x^2 - x$ হলে $f(A) = I$ সমীকরণ হতে A^{-1} নির্ণয় কর।

(b) $A=\begin{bmatrix}5 & 1 & -2\\ 2 & 0 & 2\\ 3 & 4 & -3\end{bmatrix}$ এবং $f(x) = x^3 - 4x^2 - I$ হলে $f(A) = 0$ সমীকরণ হতে A^{-1} নির্ণয় কর।

উ: (a) $A^{-1}=\begin{bmatrix}25 & -4 & -6\\ 27 & 11 & 3\\ 24 & 12 & 3\end{bmatrix}$ (b) $A^{-1}=\begin{bmatrix}1 & -7 & 6\\ 8 & 100 & -18\\ 2 & -25 & 23\end{bmatrix}$

MCQ এর জন্য বিশেষ সূত্র/কৌশল:

1. AB ম্যাট্রিক্স এর মাত্রা = A এর সারির সংখ্যা× B এর কলাম সংখ্যা।

2. $\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}$ এর বিপরীত ম্যাট্রিক্স = $\frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix}d & -b\\ -c & a\end{bmatrix}$

3. কর্ণ ম্যাট্রিক্স একটি প্রতিসম ম্যাট্রিক্স।

4. কর্ণ ম্যাট্রিক্স $\begin{bmatrix}a & 0\\ 0 & b\end{bmatrix}$ এর বিপরীত ম্যাট্রিক্স $\begin{bmatrix}1/a & 0\\ 0 & 1/b\end{bmatrix}$.

5. $A=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{bmatrix}$ হলে $A^n=\begin{bmatrix}1 & n\\ 0 & 1\end{bmatrix}$, $n\in\mathbb{N}$

6. $A=\begin{bmatrix}\cos x & \sin x\\ -\sin x & \cos x\end{bmatrix}$ হলে $A^n=\begin{bmatrix}\cos nx & \sin nx\\ -\sin nx & \cos nx\end{bmatrix}$, $n\in\mathbb{N}$.

7. A একটি $n\times n$ ক্রমের ম্যাট্রিক্স হলে,
$Adj(AdjA) = |A|^{n-2} A$,
$|Adj(AdjA)| = A^{(n-1)^2}$

বহুনির্বাচনি প্রশ্ন:

1. $\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$ ম্যাট্রিক্সটি একটি - [শি.ফ.- ১]

i. কর্ণ ম্যাট্রিক্স, ii. স্কেলার ম্যাট্রিক্স,
iii. অভেদক ম্যাট্রিক্স

উপরের তথ্যের আলোকে নিচের কোনটি সত্য?

ক. i, ii খ. i, iii গ. ii, iii ঘ. i, ii, iii

2. নিচের কোনটি বিপ্রতিসম ম্যাট্রিক্স? [শি.ফ.-১]

ক. $\begin{bmatrix}0 & b\\ -b & 0\end{bmatrix}$ খ. $\begin{bmatrix}b & 0\\ 0 & -b\end{bmatrix}$

গ. $\begin{bmatrix}b & 0\\ -b & 0\end{bmatrix}$ ঘ. $\begin{bmatrix}0 & -b\\ 0 & b\end{bmatrix}$