$5\times(i)+2\times(ii) \Rightarrow 15x+4x=30+8$

$\Rightarrow \quad 19x=38 \Rightarrow x=2$

(i) হতে, $6-2y=6 \Rightarrow -2y=0 \Rightarrow y=0$

$\therefore \quad (x, y)=(2, 0)$

(b) A ম্যাট্রিক্সের ক্রম 2×3, [সা.স. × ক.স.]

B ম্যাট্রিক্সের ক্রম 3×2.

$\therefore$ AB ম্যাট্রিক্সের ক্রম 2×2,
[A ম্যাট্রিক্সের সা.স. × B ম্যাট্রিক্সের ক.স.]

$\therefore$ BA ম্যাট্রিক্সের ক্রম 3×3,
[A এর সা.স. × B এর ক.স.]

$\therefore \quad AB \neq BA$.

(c) $C^2 = C.C = \begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & -4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & -4\end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix}1+6 & 2-8\\ 3-12 & 6+16\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}7 & -6\\ -9 & 22\end{bmatrix}$

$3C = 3\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & -4\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}3 & 6\\ 9 & -12\end{bmatrix}$

$10I_2 = 10\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}10 & 0\\ 0 & 10\end{bmatrix}$

$\therefore \quad C^2+3C-10I$

$= \begin{bmatrix}7 & -6\\ -9 & 22\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}3 & 6\\ 9 & -12\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}10 & 0\\ 0 & 10\end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix}7 & -6\\ -9 & 22\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}3 & 6\\ 9 & -12\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}-10 & 0\\ 0 & -10\end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix}7+3-10 & -6+6\\ -9+9 & 22-12-10\end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}$

$\therefore \quad C^2+3C-10I$ একটি শূন্য ম্যাট্রিক্স।

নির্ণায়ক

প্রশ্নমালা -IB

1. প্রমাণ কর যে,

(a) $\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & p & p^2\\ 1 & p^2 & p^4\end{vmatrix} = p(p-1)^2(p^2-1)$

[ঢা.'০২,'১২; রা.'১১; কু.'০৯,'১৫; য.'০৯; চ.'১২,'১৫; মা.'১৩,'১৫; বুয়েট'০৭-০৮]

প্রমাণ ঃ L.H.S. $= \begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & p & p^2\\ 1 & p^2 & p^4\end{vmatrix}$

$= \begin{vmatrix}0 & 0 & 1\\ 1-p & p(1-p) & p^2\\ 1-p^2 & p^2(1-p^2) & p^4\end{vmatrix}$

[c_1-c_2 এবং c_2-c_3]

$= 1\{(1-p)p^2(1-p^2) - p(1-p)(1-p^2)\}$

[১ম সারি বরাবর বিস্তার করে ।]

$= (1-p)(1-p^2)(p^2-p)$

$= (1-p)(1-p^2)\,p\,(p-1)$

$= p(p-1)^2(p^2-1) = $ R.H.S. (Proved)

1(b) $\begin{vmatrix}a^2 & ab & b^2\\ 2a & a+b & 2b\\ 1 & 1 & 1\end{vmatrix} = (a-b)^3$ [ঢা.'০১; সি.'০৩]

প্রমাণ ঃ L.H.S. $= \begin{vmatrix}a^2 & ab & b^2\\ 2a & a+b & 2b\\ 1 & 1 & 1\end{vmatrix}$

$= \begin{vmatrix}a(a-b) & b(a-b) & b^2\\ a-b & a-b & 2b\\ 0 & 0 & 1\end{vmatrix}$

[c_1-c_2 এবং c_2-c_3]

$= 1\{a(a-b)(a-b) - b(a-b)(a-b)\}$

[শেষ সারি বরাবর বিস্তার করে ।]

$= (a-b)^2(a-b) = (a-b)^3 = $ R.H.S.

(Proved)

1(c) $\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ a & b & c\\ a^2-bc & b^2-ca & c^2-ab\end{vmatrix} = 0$

[য.'০৩;চুয়েট'০৫-০৬]

L.H.S. $= \begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ a & b & c\\ a^2-bc & b^2-ca & c^2-ab\end{vmatrix}$

$= \begin{vmatrix}0 & 0 & 1\\ a-b & b-c & c\\ a^2-b^2+ca-bc & b^2-c^2+ab-ca & c^2-ab\end{vmatrix}$

[$c_1' = c_1-c_2$ এবং $c_2' = c_2-c_3$]

$= 1\{a-b)(b^2-c^2+ab-ca)$

$-(b-c)(a^2-b^2+ca-bc)\}$

[১ম সারি বরাবর বিস্তার করে ।]

$=(a-b)\{(b-c)(b+c)+a(b-c)\}$

$-(b-c)\{(a-b)(a+b)+c(a-b)\}$

$=(a-b)(b-c)(a+b+c)-(a-b)(b-c)$

$(a+b+c)=0=$ R.H.S. (Proved)

1(d) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+x & 1 \\ 1 & 1 & 1+y \end{vmatrix} = xy$ [ব.'০১]

প্রমাণঃ L.H.S. $=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+x & 1 \\ 1 & 1 & 1+y \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -x & x & 1 \\ 0 & -y & 1+y \end{vmatrix}$

$[c_1-c_2, c_2-c_3]$

$=1\{xy-0\}=xy=$ R.H.S. (Proved)

1(e) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix} = (a-b)(b-c)(c-a)$ $(a+b+c)$ [চ.'০৫; ব.'১০]

প্রমাণ ঃ L.H.S. $=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix}$

$=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ a-b & b-c & c \\ a^3-b^3 & b^3-c^3 & c^3 \end{bmatrix}$

$[c_1-c_2$ এবং $c_2-c_3]$

$=1\{(a-b)(b^3-c^3)-(b-c)(a^3-b^3)\}$

[১ম সারি বরাবর বিস্তার করে ।]

$=(a-b)(b-c)(b^2+bc+c^2)$

$-(b-c)(a-b)(a^2+ab+b^2)$

$=(a-b)(b-c)(b^2+bc+c^2-a^2-ab-b^2)$

$=(a-b)(b-c)\{b(c-a)+(c-a)(c+a)\}$

$=(a-b)(b-c)(c-a)(a+b+c)=$ R.H.S.

(Proved)

1(f) $\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix} = (a-b)(b-c)(c-a)$ [চ.'১০]

L.H.S. $=\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 0 & a-b & a^2-b^2 \\ 0 & b-c & b^2-c^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix}$

$[r_1-r_2, r_2-r_3]$

$=1\{(a-b)(b^2-c^2)-(a^2-b^2)(b-c)\}$

[১ম কলাম বরাবর বিস্তার করে ।]

$=(a-b)(b-c)(b+c)-(a-b)(a+b)(b-c)$

$=(a-b)(b-c)(b+c-a-b)$

$=(a-b)(b-c)(c-a)$

1(g) $\begin{vmatrix} (b+c)^2 & a^2 & 1 \\ (c+a)^2 & b^2 & 1 \\ (a+b)^2 & c^2 & 1 \end{vmatrix}$

$=-2(a+b+c)(a-b)(b-c)(c-a)$

প্রমাণ ঃ L.H.S. $=\begin{vmatrix} (b+c)^2 & a^2 & 1 \\ (c+a)^2 & b^2 & 1 \\ (a+b)^2 & c^2 & 1 \end{vmatrix}$

$=\begin{vmatrix} (b+c)^2-a^2 & a^2 & 1 \\ (c+a)^2-b^2 & b^2 & 1 \\ (a+b)^2-c^2 & c^2 & 1 \end{vmatrix}$ $[c_1'=c_1-c_2]$

$=\begin{vmatrix} (b+c+a)(b+c-a) & a^2 & 1 \\ (c+a+b)(c+a-b) & b^2 & 1 \\ (a+b+c)(a+b-c) & c^2 & 1 \end{vmatrix}$

$=(a+b+c)\begin{vmatrix} b+c-a & a^2 & 1 \\ c+a-b & b^2 & 1 \\ a+b-c & c^2 & 1 \end{vmatrix}$

$=(a+b+c)\begin{vmatrix} -2(a-b) & a^2-b^2 & 0 \\ -2(b-c) & b^2-c^2 & 0 \\ a+b-c & c^2 & 1 \end{vmatrix}$

$[r_1'=r_1-r_2, r_2'=r_2-r_3]$

$=(a+b+c)(a-b)(b-c)$

$\begin{vmatrix} -2 & a+b & 0 \\ -2 & b+c & 0 \\ a+b-c & c^2 & 1 \end{vmatrix}$

$=(a+b+c)(a-b)(b-c)\{1.(-2b-2c$

$+2a+2b)$

$=-2(a+b+c)(a-b)(b-c)(c-a)$

$= \text{R.H.S.}$ (Proved)

1(h) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x^2 & y^2 & z^2 \\ x^3 & y^3 & z^3 \end{vmatrix} = (x-y)(y-z)(z-x)(xy+yz+zx)$

প্রমাণ ঃ $\text{L.H.S.} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x^2 & y^2 & z^2 \\ x^3 & y^3 & z^3 \end{vmatrix}$

$= \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ x^2-y^2 & y^2-z^2 & z^2 \\ x^3-y^3 & y^3-z^3 & z^3 \end{vmatrix}$

$[c_1' = c_1 - c_2$ এবং $c_2' = c_2 - c_3]$

$=1\{(x-y)(x+y)(y-z)(y^2+yz+z^2) - (y-z)(y+z)(x-y)(x^2+xy+y^2)\}$

$= (x-y)(y-z)(xy^2+xyz+xz^2+y^3+y^2z+yz^2-x^2y-xy^2-y^3-zx^2-xyz-y^2z)$

$= (x-y)(y-z)(xz^2+yz^2-x^2y-zx^2)$

$= (x-y)(y-z)\{xz(z-x)+y(z-x)(z+x)\}$

$= (x-y)(y-z)(z-x)(xy+yz+zx)$

$= \text{R.H.S.}$ (Proved)

2. বিস্তার না করে প্রমাণ কর ঃ

(a) $\begin{vmatrix} 1 & bc & bc(b+c) \\ 1 & ca & ca(c+a) \\ 1 & ab & ab(a+b) \end{vmatrix} = abc \begin{vmatrix} a & 1 & b+c \\ b & 1 & c+a \\ c & 1 & a+b \end{vmatrix} = 0$

[রা.'১৫; ঢা.'০৯; য.'১৩; কুয়েট'০৯-১০]

প্রমাণ ঃ $\text{L.H.S.} = \begin{vmatrix} 1 & bc & bc(b+c) \\ 1 & ca & ca(c+a) \\ 1 & ab & ab(a+b) \end{vmatrix}$

$= \frac{1}{abc} \begin{vmatrix} a & abc & abc(b+c) \\ b & abc & abc(c+a) \\ c & abc & abc(a+b) \end{vmatrix}$

$= \frac{abc.abc}{abc} \begin{vmatrix} a & 1 & b+c \\ b & 1 & c+a \\ c & 1 & a+b \end{vmatrix}$

$= abc \begin{vmatrix} a & 1 & b+c \\ b & 1 & c+a \\ c & 1 & a+b \end{vmatrix} = \text{M.H.S.}$

এখন, $abc \begin{vmatrix} a & 1 & b+c \\ b & 1 & c+a \\ c & 1 & a+b \end{vmatrix}$

$= abc \begin{vmatrix} a & 1 & a+b+c \\ b & 1 & a+b+c \\ c & 1 & a+b+c \end{vmatrix}$ $[c_3' = c_3 + c_1]$

$= abc(a+b+c) \begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ b & 1 & 1 \\ c & 1 & 1 \end{vmatrix}$

$= abc\,(a+b+c).0 = 0 = \text{R.H.S.}$

[$\because$ দুইটি কলাম একই ।]

2(b) $\begin{vmatrix} 1 & x-a & y-b \\ 1 & x_1-a & y_1-b \\ 1 & x_2-a & y_2-b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & x & y \\ 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \end{vmatrix}$

প্রমাণ ঃ $\text{L.H.S.} = \begin{vmatrix} 1 & x-a & y-b \\ 1 & x_1-a & y_1-b \\ 1 & x_2-a & y_2-b \end{vmatrix}$

$= \begin{vmatrix} 1 & x & y-b \\ 1 & x_1 & y_1-b \\ 1 & x_2 & y_2-b \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & a & y-b \\ 1 & a & y_1-b \\ 1 & a & y_2-b \end{vmatrix}$

$= \begin{vmatrix} 1 & x & y \\ 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & x & b \\ 1 & x_1 & b \\ 1 & x_2 & b \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 1 & y-b \\ 1 & 1 & y_1-b \\ 1 & 1 & y_2-b \end{vmatrix}$

$= \begin{vmatrix} 1 & x & y \\ 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \end{vmatrix} - b \begin{vmatrix} 1 & x & 1 \\ 1 & x_1 & 1 \\ 1 & x_2 & 1 \end{vmatrix} - a.0$

$= \begin{vmatrix} 1 & x & y \\ 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \end{vmatrix} - b.0 = \begin{vmatrix} 1 & x & y \\ 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \end{vmatrix} = \text{R.H.S.}$

(Proved)

2(c) $\begin{vmatrix} 1 & x_1+a & y_1+b \\ 1 & x_2+a & y_2+b \\ 1 & x_3+a & y_3+b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix}$

[সি.'০৭;চ.'১১]

প্রমাণ ঃ $\text{L.H.S.} = \begin{vmatrix} 1 & x_1+a & y_1+b \\ 1 & x_2+a & y_2+b \\ 1 & x_3+a & y_3+b \end{vmatrix}$

$$= \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1+b \\ 1 & x_2 & y_2+b \\ 1 & x_3 & y_3+b \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & a & y_1+b \\ 1 & a & y_2+b \\ 1 & a & y_3+b \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & x_1 & b \\ 1 & x_2 & b \\ 1 & x_3 & b \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 & y_1+b \\ 1 & 1 & y_2+b \\ 1 & 1 & y_3+b \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix} + \mathrm{b}\begin{vmatrix} 1 & x_1 & 1 \\ 1 & x_2 & 1 \\ 1 & x_3 & 1 \end{vmatrix} + \mathrm{a}.0$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix} + \mathrm{b}.0 = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix} = \text{R.H.S.}$$

2(d) $\begin{vmatrix} b+c & c+a & a+b \\ q+r & r+p & p+q \\ y+z & z+x & x+y \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ x & y & z \end{vmatrix}$ [য.'১৫]

প্রমাণ ঃ $\text{LH.S.} = \begin{vmatrix} b+c & c+a & a+b \\ q+r & r+p & p+q \\ y+z & z+x & x+y \end{vmatrix}$

$$= \begin{vmatrix} b & c+a & a+b \\ q & r+p & p+q \\ y & z+x & x+y \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} c & c+a & a+b \\ r & r+p & p+q \\ z & z+x & x+y \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} b & c & a+b \\ q & r & p+q \\ y & z & x+y \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b & a & a+b \\ q & p & p+q \\ y & x & x+y \end{vmatrix}$$

$$+ \begin{vmatrix} c & c & a+b \\ r & r & p+q \\ z & z & x+y \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} c & a & a+b \\ r & p & p+q \\ z & x & x+y \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} b & c & a \\ q & r & p \\ y & z & x \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b & c & b \\ q & r & q \\ y & z & y \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b & a & a \\ q & p & p \\ y & x & x \end{vmatrix}$$

$$+ \begin{vmatrix} b & a & b \\ q & p & q \\ y & x & y \end{vmatrix} + 0 + \begin{vmatrix} c & a & a \\ r & p & p \\ z & x & x \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} c & a & b \\ r & p & q \\ z & x & y \end{vmatrix}$$

$$= -\begin{vmatrix} b & a & c \\ q & p & r \\ y & x & z \end{vmatrix} + 0 + 0 + 0 + 0$$

$$+ (-)\begin{vmatrix} a & c & b \\ p & r & q \\ x & z & y \end{vmatrix}$$

$$= (-)(-)\begin{vmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ x & y & z \end{vmatrix} + (-)(-)\begin{vmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ x & y & z \end{vmatrix}$$

$$= 2\begin{vmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ x & y & z \end{vmatrix} = \text{R.H.S.(Proved)}$$

3. **প্রমাণ কর যে,**

(a) $\begin{vmatrix} a+b+2c & a & b \\ c & b+c+2a & b \\ c & a & c+a+2b \end{vmatrix} = 2\,(a+b+c)^3$

[ব.'০৬; য.'০৭; দি.'০৯.'১১;মা.'১৪; য.'১৫]

L.H.S.

$$= \begin{vmatrix} a+b+2c & a & b \\ c & b+c+2a & b \\ c & a & c+a+2b \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 2(a+b+c) & a & b \\ 2(a+b+c) & b+c+2a & b \\ 2(a+b+c) & a & c+a+2b \end{vmatrix}$$

$$[c_1' = c_1 + (c_2 + c_3)]$$

$$= 2(\mathrm{a+b+c})\begin{vmatrix} 1 & a & b \\ 1 & b+c+2a & b \\ 1 & a & c+a+2b \end{vmatrix}$$

$$= 2(\mathrm{a+b+c})\begin{vmatrix} 0 & -(a+b+c) & 0 \\ 0 & a+b+c & -(a+b+c) \\ 1 & a & c+a+2b \end{vmatrix}$$

$$[r_1' = r_1 - r_2, r_2' = r_2 - r_3]$$

$$= 2(\mathrm{a+b+c})\,1\{-(\mathrm{a+b+c}) \times -(\mathrm{a+b+c})\}$$
$$= 2(\mathrm{a+b+c})^3 = \text{R.H.S.}$$

3(b) $\begin{vmatrix} 1+x_1 & x_2 & x_3 \\ x_1 & 1+x_2 & x_3 \\ x_1 & x_2 & 1+x_3 \end{vmatrix}$

$$= 1 + x_1 + x_2 + x_3$$

প্রমাণ ঃ L.H.S.$=\begin{vmatrix}1+x_1 & x_2 & x_3\\ x_1 & 1+x_2 & x_3\\ x_1 & x_2 & 1+x_3\end{vmatrix}$

$=\begin{vmatrix}1+x_1+x_2+x_3 & x_2 & x_3\\ 1+x_1+x_2+x_3 & 1+x_2 & x_3\\ 1+x_1+x_2+x_3 & x_2 & 1+x_3\end{vmatrix}$

$[c_1'=c_1+(c_2+c_3)]$

$=(1+x_1+x_2+x_3)\begin{vmatrix}1 & x_2 & x_3\\ 1 & 1+x_2 & x_3\\ 1 & x_2 & 1+x_3\end{vmatrix}$

$=(1+x_1+x_2+x_3)\begin{vmatrix}0 & -1 & 0\\ 0 & 1 & -1\\ 1 & x_2 & 1+x_3\end{vmatrix}$

$[r_1'=r_1-r_2, r_2'=r_2-r_3]$

$=(1+x_1+x_2+x_3).1(1-0)$

$=1+x_1+x_2+x_3$

3(c) $\begin{vmatrix}a & b & c\\ a^2 & b^2 & c^2\\ a^3 & b^3 & c^3\end{vmatrix}=abc\,(a-b)(b-c)(c-a)$

[সি.'০৮; মা.বো.'০৯; ব.'১২]

L.H.S.$=\begin{vmatrix}a & b & c\\ a^2 & b^2 & c^2\\ a^3 & b^3 & c^3\end{vmatrix}=\text{abc}\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ a & b & c\\ a^2 & b^2 & c^2\end{vmatrix}$

$=\text{abc}\begin{vmatrix}0 & 0 & 1\\ a-b & b-c & c\\ a^2-b^2 & b^2-c^2 & c^2\end{vmatrix}$

$=\text{abc}.1\{(a-b)(b^2-c^2)-(b-c)(a^2-b^2)\}$

$=\text{abc}\{(a-b)(b-c)(b+c)-(a-b)(b-c)(a+b)\}$

$=\text{abc}\,(a-b)(b-c)(b+c-a-b)$

$=\text{abc}\,(a-b)(b-c)(c-a)$

= R.H.S. (Proved)

3(d) $\begin{vmatrix}a+x & b+x & c+x\\ a+y & b+y & c+y\\ a^2 & b^2 & c^2\end{vmatrix}=(a-b)(b-c)(c-a)(x-y)$ **[ঢা.'০১; বুয়েট'১০-১১]**

প্রমাণ ঃ L.H.S.$=\begin{vmatrix}a+x & b+x & c+x\\ a+y & b+y & c+y\\ a^2 & b^2 & c^2\end{vmatrix}$

$=\begin{vmatrix}a-b & b-c & c+x\\ a-b & b-c & c+y\\ a^2-b^2 & b^2-c^2 & c^2\end{vmatrix}$

$[c_1'=c_1+(c_2+c_3)]$

$=(a-b)(b-c)\begin{vmatrix}1 & 1 & c+x\\ 1 & 1 & c+y\\ a+b & b+c & c^2\end{vmatrix}$

$=(a-b)(b-c)\begin{vmatrix}0 & 0 & x-y\\ 1 & 1 & c+y\\ a+b & b+c & c^2\end{vmatrix}$

$[r_1'=r_1-r_2]$

$=(a-b)(b-c)(x-y)(b+c-a-b)$

$=(a-b)(b-c)(c-a)(x-y)$

= R.H.S. (Proved)

3.(e) $\begin{vmatrix}a & a & a\\ 1 & a & a^2\\ 1 & a^2 & a^4\end{vmatrix}=a^2(a-1)^2(a^2-1)$

[চ.'০৩ ; রা .'০৫]

প্রমাণ ঃ L.H.S.$=\begin{vmatrix}a & a & a\\ 1 & a & a^2\\ 1 & a^2 & a^4\end{vmatrix}=a\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & a & a^2\\ 1 & a^2 & a^4\end{vmatrix}$

$=a\begin{vmatrix}0 & 0 & 1\\ 1-a & a(1-a) & a^2\\ (1-a)(1+a) & a^2(1-a)(1+a) & a^4\end{vmatrix}$

$[c_1'=c_1-c_2, c_2'=c_2-c_3]$

$=a^2(1-a)^2\begin{vmatrix}0 & 0 & 1\\ 1 & 1 & a^2\\ 1+a & a(1+a) & a^4\end{vmatrix}$

$=a^2(1-a)^2\{a(1+a)-(1+a)\}$

$=a^2(1-a)^2(a+a^2-1-a)$

$=a^2(1-a)^2(a^2-1)$ = R.H.S. (Proved)

3(f) $\begin{vmatrix}2 & a & b+c\\ 2 & b & c+a\\ 2 & c & a+b\end{vmatrix}=0$ **[য.'০০]**

প্রমাণ ঃ **L.H.S.**$=\begin{vmatrix}2 & a & b+c\\ 2 & b & c+a\\ 2 & c & a+b\end{vmatrix}$

$=2\begin{vmatrix}1 & a+b+c & b+c\\ 1 & a+b+c & c+a\\ 1 & a+b+c & a+b\end{vmatrix}\quad [c_2' = c_2 + c_3]$

$=2(a+b+c)\begin{vmatrix}1 & 1 & b+c\\ 1 & 1 & c+a\\ 1 & 1 & a+b\end{vmatrix}$

$= 2(a+b+c).\ 0 = 0 =$ R.H.S.

[$\therefore$ দুইটি কলাম একই ।]

3(g) $\begin{vmatrix}3 & a & b+c\\ 3 & b & c+a\\ 3 & c & a+b\end{vmatrix}=0$ **[কু.'০৫]**

প্রমাণ ঃ **L.H.S.**$=\begin{vmatrix}3 & a & b+c\\ 3 & b & c+a\\ 3 & c & a+b\end{vmatrix}$

$=3\begin{vmatrix}1 & a+b+c & b+c\\ 1 & a+b+c & c+a\\ 1 & a+b+c & a+b\end{vmatrix}\quad [c_2' = c_2 + c_3]$

$=3(a+b+c)\begin{vmatrix}1 & 1 & b+c\\ 1 & 1 & c+a\\ 1 & 1 & a+b\end{vmatrix}$

$= 3(a+b+c).\ 0 = 0 =$ R.H.S.

[$\therefore$ দুইটি কলাম একই ।]

3(h) $\begin{vmatrix}a-b-c & 2a & 2a\\ 2b & b-c-a & 2b\\ 2c & 2c & c-a-b\end{vmatrix}$

$=(a+b+c)^3$ **[রা.'০৪; বুয়েট'১১–১২]**

L.H.S.$=\begin{vmatrix}a-b-c & 2a & 2a\\ 2b & b-c-a & 2b\\ 2c & 2c & c-a-b\end{vmatrix}$

$=\begin{vmatrix}a+b+c & a+b+c & a+b+c\\ 2b & b-c-a & 2b\\ 2c & 2c & c-a-b\end{vmatrix}$

$[r_1' = r_1 + (r_2 + r_3)]$

$=(a+b+c)\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 2b & b-c-a & 2b\\ 2c & 2c & c-a-b\end{vmatrix}$

$=(a+b+c)\begin{vmatrix}0 & 0 & 1\\ (a+b+c) & -(a+b+c) & 2b\\ 0 & (a+b+c) & c-a-b\end{vmatrix}$

$[c_1' = c_1 - c_2, c_2' = c_2 - c_3]$

$=(a+b+c).1(a+b+c)^2$

$=(a+b+c)^3 =$ R.H.S. (Proved)

4.(a) $\begin{vmatrix}\log x & \log y & \lg z\\ \log 2x & \log 2y & \log 2z\\ \log 3x & \log 3y & \log 3z\end{vmatrix}=0$

[ব.'১৩; কুয়েট'০৭-০৮; বুয়েট'০৯-১০; বুয়েট'১১-১২]

প্রমাণ ঃ **L.H.S.**$=\begin{vmatrix}\log x & \log y & \lg z\\ \log 2x & \log 2y & \log 2z\\ \log 3x & \log 3y & \log 3z\end{vmatrix}$

$=\begin{vmatrix}\log x-\log y & \log y-\log z & \lg z\\ \log 2x-\log 2y & \log 2y-\log 2z & \log 2z\\ \log 3x-\log 3y & \log 3y-\log 3z & \log 3z\end{vmatrix}$

$[c_1' = c_1 - c_2, c_2' = c_2 - c_3]$

$=\begin{vmatrix}\log\frac{x}{y} & \log\frac{y}{z} & \lg z\\ \log\frac{x}{y} & \log\frac{y}{z} & \log 2z\\ \log\frac{x}{y} & \log\frac{y}{z} & \log 3z\end{vmatrix}$

$=\log\frac{x}{y}\log\frac{y}{z}\begin{vmatrix}1 & 1 & \lg z\\ 1 & 1 & \log 2z\\ 1 & 1 & \log 3z\end{vmatrix}$

$=\log\frac{x}{y}\log\frac{y}{z}\times 0 = 0 =$ R.H.S.

4(b) $\begin{vmatrix}1 & \cos 2\alpha & \sin\alpha\\ 1 & \cos 2\beta & \sin\beta\\ 1 & \cos 2\gamma & \sin\gamma\end{vmatrix} = 2(\sin\alpha - \sin\beta)$

$(\sin\beta - \sin\gamma)(\sin\gamma - \sin\alpha)$ **[ব.'০৩]**

প্রমাণ ঃ **L.H.S.**$=\begin{vmatrix}1 & \cos 2\alpha & \sin\alpha\\ 1 & \cos 2\beta & \sin\beta\\ 1 & \cos 2\gamma & \sin\gamma\end{vmatrix}$

$$= \begin{vmatrix} 0 & \cos 2\alpha - \cos 2\beta & \sin\alpha - \sin\beta \\ 0 & \cos 2\beta - \cos 2\gamma & \sin\beta - \sin\gamma \\ 1 & \cos 2\gamma & \sin\gamma \end{vmatrix}$$

$[r_1' = r_1 - r_2, r_2' = r_2 - r_3]$

$= 1\{ (\cos2\alpha - \cos2\beta)(\sin\beta - \sin\gamma) -$
$(\sin\alpha - \sin\beta)(\cos2\beta - \cos2\gamma)$
$= (1 - 2\sin^2\alpha - 1 + 2\sin^2\beta)(\sin\beta - \sin\gamma)$
$-(\sin\alpha - \sin\beta)(1 - 2\sin^2\beta - 1 + 2\sin^2\gamma)$
$= -2(\sin^2\alpha - \sin^2\beta)(\sin\beta - \sin\gamma)$
$+ 2(\sin\alpha - \sin\beta)(\sin^2\beta - \sin^2\gamma)$
$= -2(\sin\alpha - \sin\beta)(\sin\alpha + \sin\beta)(\sin\beta - \sin\gamma)$
$+ 2(\sin\alpha - \sin\beta)(\sin\beta - \sin\gamma)(\sin\beta + \sin\gamma)$
$= 2(\sin\alpha - \sin\beta)(\sin\beta - \sin\gamma)$
$(-\sin\alpha - \sin\beta + \sin\beta + \sin\gamma)$
$= 2(\sin\alpha - \sin\beta)(\sin\beta - \sin\gamma)(\sin\gamma - \sin\alpha)$
= R.H.S. (Proved)

5. প্রমাণ কর যে,

(a) $\begin{vmatrix} -a^2 & ab & ac \\ ab & -b^2 & bc \\ ac & bc & -c^2 \end{vmatrix} = 4a^2b^2c^2$

[চ.'০২,'০৪; সি.'০৬,'০৯; রা.'০৮]

প্রমাণ ঃ L.H.S. $= \begin{vmatrix} -a^2 & ab & ac \\ ab & -b^2 & bc \\ ac & bc & -c^2 \end{vmatrix}$

$= abc \begin{vmatrix} -a & a & a \\ b & -b & b \\ c & c & -c \end{vmatrix} = abc \begin{vmatrix} 0 & 2a & a \\ 0 & 0 & b \\ 2c & 0 & -c \end{vmatrix}$

$[c_1' = c_1 - c_2, c_2' = c_2 - c_3]$

$= abc\{2c(2ab - 0)\} = abc.4abc$
$= 4a^2 b^2 c^2 =$ R.H.S. (Proved)

5(b) $\begin{vmatrix} b^2+c^2 & ab & ca \\ ab & c^2+a^2 & bc \\ ca & bc & a^2+b^2 \end{vmatrix} = 4a^2b^2c^2$

[কু.'০৪,'১২]

প্রমাণ ঃ L.H.S. $= \begin{vmatrix} b^2+c^2 & ab & ca \\ ab & c^2+a^2 & bc \\ ca & bc & a\ +b^2 \end{vmatrix}$

$$= \frac{1}{abc}\begin{vmatrix} ab^2+ac^2 & ab^2 & c^2a \\ a^2b & bc^2+a^2b & bc^2 \\ ca^2 & b^2c & ca^2+b^2c \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{abc} abc \begin{vmatrix} b^2+c^2 & b^2 & c^2 \\ a^2 & c^2+a^2 & c^2 \\ a^2 & b^2 & a^2+b^2 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & b^2 & c^2 \\ -2c^2 & c^2+a^2 & c^2 \\ -2b^2 & b^2 & a^2+b^2 \end{vmatrix}$$

$[c_1' = c_1 - (c_2 + c_3)]$

$= 2c^2(a^2b^2 + b^4 - b^2c^2) -$
$2b^2(b^2c^2 - c^4 - c^2a^2)$
$= 2b^2c^2(a^2 + b^2 - c^2) - b^2c^2(b^2 - c^2 - a^2)$
$= 2b^2c^2(a^2 + b^2 - c^2 - b^2 + c^2 + a^2\}$
$= 2b^2c^2.2a^2 = 4a^2b^2c^2 =$ R,H.S. (Proved)

5.(c) $\begin{vmatrix} x^2 & yz & zx+z^2 \\ x^2+xy & y^2 & zx \\ xy & y^2+yz & z^2 \end{vmatrix} = 4x^2y^2z^2$

[য.'০৪,'০৮; রা.'১৩,'১৫]

প্রমাণ ঃ L.H.S. $= \begin{vmatrix} x^2 & yz & zx+z^2 \\ x^2+xy & y^2 & zx \\ xy & y^2+yz & z^2 \end{vmatrix}$

$= xyz \begin{vmatrix} x & z & x+z \\ x+y & y & x \\ y & y+z & z \end{vmatrix}$

$= xyz \begin{vmatrix} -2z & z & x+z \\ 0 & y & x \\ -2z & y+z & z \end{vmatrix}$

$= xyz \begin{vmatrix} 0 & -y & x \\ 0 & y & x \\ -2z & y+z & z \end{vmatrix}$ $[r_1' = r_1 - r_3]$

$= xyz(-2z)(-xy - xy) = -2xyz^2(-2xy)$
$= 4x^2y^2z^2 =$ R.H.S. (Proved)

5(d) $\begin{vmatrix} 1+a^2-b^2 & 2ab & -2b \\ 2ab & 1-a^2+b^2 & 2a \\ 2b & -2a & 1-a^2-b^2 \end{vmatrix}$

$=(1+a^2+b^2)^3$

[রা.'০৯; য.'০২; সি.'১০,'১৩; কুয়েট'০৩-০৪, ১১-১২]

L.H.S.= $\begin{vmatrix} 1+a^2-b^2 & 2ab & -2b \\ 2ab & 1-a^2+b^2 & 2a \\ 2b & -2a & 1-a^2-b^2 \end{vmatrix}$

$= \begin{vmatrix} 1+a^2-b^2+2b^2 & 2ab-2ab & -2b \\ 2ab-2ab & 1-a^2+b^2+2a^2 & 2a \\ 2b-b+a^2b+b^3 & -2a+a-a^3-ab^2 & 1-a^2-b^2 \end{vmatrix}$

$[c_1' = c_1 - bc_3, c_2' = c_2 + ac_3]$

$= \begin{vmatrix} 1+a^2+b^2 & 0 & -2b \\ 0 & 1+a^2+b^2 & 2a \\ b(1+a^2+b^2) & -a(1+a^2+b^2) & 1-a^2-b^2 \end{vmatrix}$

$= (1+a^2+b^2)^2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & -2b \\ 0 & 1 & 2a \\ b & -a & 1-a^2-b^2 \end{vmatrix}$

$= (1+a^2+b^2)^2\{1(1-a^2-b^2+2a^2)+b(0+2b\}$

$= (1+a^2+b^2)^2(1+a^2-b^2+2b^2)$

$= (1+a^2+b^2)^3 =$ R.H.S. (Proved)

5(e) $\begin{vmatrix} a & b & ax+by \\ b & c & bx+cy \\ ax+by & bx+cy & 0 \end{vmatrix} = (b^2-ac)$ $(ax^2+2bxy+cy^2)$ [য.'১০, '১২,'১৪, ঢা.'১০,'১৫; দি., রা.,সি.'১২; চ.'১৩,'১৫ ; ব. '১৪]

প্রমাণ ঃ L.H.S. = $\begin{vmatrix} a & b & ax+by \\ b & c & bx+cy \\ ax+by & bx+cy & 0 \end{vmatrix}$

$= \frac{1}{xy}\begin{vmatrix} ax & bx & ax^2+bxy \\ by & cy & bxy+cy^2 \\ ax+by & bx+cy & 0 \end{vmatrix}$

$= \frac{1}{xy}\begin{vmatrix} 0 & 0 & ax^2+2bxy+cy^2 \\ by & cy & bxy+cy^2 \\ ax+by & bx+cy & 0 \end{vmatrix}$

$[r_1' = r_1 + (r_2 - r_3)]$

$= \frac{1}{xy}(ax^2+2bxy+cy^2)$ $(b^2xy+bcy^2-acxy-bcy^2)$

$= \frac{1}{xy}(ax^2+2bxy+cy^2)(b^2-ac)xy$

$= (b^2-ac)(ax^2+2bxy+cy^2) =$ R.H.S.

5(f) $\begin{vmatrix} (b+c)^2 & a^2 & bc \\ (c+a)^2 & b^2 & ca \\ (a+b)^2 & c^2 & ab \end{vmatrix} = (a^2+b^2+c^2)$ $(a+b+c)(b-c)(c-a)(a-b)$ [চ.'০৬]

প্রমাণ ঃ L.H.S.= $\begin{vmatrix} (b+c)^2 & a^2 & bc \\ (c+a)^2 & b^2 & ca \\ (a+b)^2 & c^2 & ab \end{vmatrix}$

$= \begin{vmatrix} (b+c)^2-a^2 & a^2 & bc \\ (c+a)^2-b^2 & b^2 & ca \\ (a+b)^2-c^2 & c^2 & ab \end{vmatrix}$ $[c_1' = c_1 - c_2]$

$= \begin{vmatrix} (a+b+c)(b+c-a) & a^2 & bc \\ (a+b+c)(c+a-b) & b^2 & ca \\ (a+b+c)(a+b-c) & c^2 & ab \end{vmatrix}$

$= (a+b+c)\begin{vmatrix} b+c-a & a^2 & bc \\ c+a-b & b^2 & ca \\ a+b-c & c^2 & ab \end{vmatrix}$

$= (a+b+c)\begin{vmatrix} -2(a-b) & (a-b)(a+b) & -c(a-b) \\ -2(b-c) & (b-c)(b+c) & -a(b-c) \\ a+b-c & c^2 & ab \end{vmatrix}$

$[r_1' = r_1 - r_2, r_2' = r_2 - r_3]$

$= (a+b+c)(a-b)(b-c)\begin{vmatrix} -2 & a+b & -c \\ -2 & b+c & -a \\ a+b-c & c^2 & ab \end{vmatrix}$

$= (a+b+c)(a-b)(b-c)$

$\begin{vmatrix} 0 & -(c-a) & -(c-a) \\ -2 & b+c & -a \\ a+b-c & c^2 & ab \end{vmatrix}$

$[r_1' = r_1 - r_2]$

$= (a+b+c)(a-b)(b-c)(c-a)$

$\begin{vmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -2 & b+c & -a \\ a+b-c & c^2 & ab \end{vmatrix}$

$= (a+b+c)(a-b)(b-c)(c-a)$

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -2 & a+b+c & -a \\ a+b-c & c^2-ab & ab \end{vmatrix} \quad [c_2' = c_2 - c_3]$$

$= (a + b + c)(a - b)(b - c)(c - a) .(-1)$
$[- 2c^2 + 2ab - \{(a + b)^2 - c^2\}]$

$= (a + b + c)(a - b)(b - c)(c - a)(-1)$
$(- 2c^2 + 2ab - a^2 - b^2 - 2ab + c^2)$

$= (a + b + c)(a - b)(b - c)(c - a)$
$(-1)(-1)(a^2 + b^2 + c^2)$

$= (a^2 + b^2 + c^2) (a + b + c)(a-b)(b-c)(c-a)$

= R.H.S. (Proved)

6. (a) $\begin{vmatrix} -2a & a+b & a+c \\ b+a & -2b & b+c \\ c+a & c+b & -2c \end{vmatrix}$ **[ব.'১১]**

$= 4(a + b)(b + c)(c + a)$

প্রমাণ ঃ L.H.S. $= \begin{vmatrix} -2a & a+b & a+c \\ b+a & -2b & b+c \\ c+a & c+b & -2c \end{vmatrix}$

$= -2a\{4bc - (b + c)^2 \} - (a + b)\{- 2c(b+ a) -(b + c) (c + a)\} + (a + c)\{(a + b)(b + c) + 2b(c + a)\}$

$= -8abc + 2a(b + c)^2 + 2c(a + b)^2 + 2(a + b)(b + c)(c + a) + 2b(c + a)^2$

$= -8abc + 2a(b^2 + 2bc + c^2) + 2c(a^2 + 2ab + b^2) + 2b(c^2 + 2ca + a^2) + 2(a + b)(b + c)(c + a)$

$= -8abc + 2ab^2 + 4abc + 2ac^2 + 2ca^2 + 4abc + 2b^2c + 2bc^2 + 4abc + 2a^2b + 2(a + b)(b + c)(c + a)$

$= 2\{ab^2 +2abc + ac^2 + ca^2 +a^2b + b^2c + bc^2\} +2(a + b)(b + c)(c + a)$

$= 2\{a(b + c)^2 + a^2(b + c) + bc(b + c)\} + 2(a + b)(b + c)(c + a)$

$= 2(b + c) (ab + ca + a^2 + bc) + 2(a + b)(b + c)(c + a)$

$= 2(b + c) \{a(c + a) + b(c + a)\} + 2(a + b)(b + c)(c + a)$

$= 2(b + c)(c+ a) (a + b) + 2(a + b)(b + c)(c + a)$

$= 4(a + b)(b + c)(c + a) =$ R.H.S.

বিকল্প পদ্ধতি ঃ মনে করি ,

$$D = \begin{vmatrix} -2a & a+b & a+c \\ b+a & -2b & b+c \\ c+a & c+b & -2c \end{vmatrix}$$

$a + b = 0$ i.e. $b = - a$ বসিয়ে আমরা পাই ,

$$D = \begin{vmatrix} -2a & 0 & a+c \\ 0 & 2a & -a+c \\ c+a & c-a & -2c \end{vmatrix}$$

$= -2a(-4ac-(c-a)^2\}+ (c + a)\{0-2a(c+ a)\}$

$= 2a(c + a)^2 -2a(c + a)^2 = 0$

$\therefore (a + b)$, D এর একটি উৎপাদক ।

অনুরূপভাবে দেখানো যায়, $(b + c)$ এবং $(c + a)$ নির্ণায়ক D এর উৎপাদক।

যেহেতু D একটি তৃতীয় ক্রমের নির্ণায়ক এবং $(a + b) (b + c) (c + a)$ একটি তৃতীয় ক্রমের উৎপাদক , সুতরাং D এর অপর একটি উৎপাদক k থাকতে পারে যা ধ্রুবক ।

$$\therefore \begin{vmatrix} -2a & a+b & a+c \\ b+a & -2b & b+c \\ c+a & c+b & -2c \end{vmatrix} = k(a + b)(b + c) (c + a)$$

এখন, উভয় পক্ষে $a = b = c =1$ বসিয়ে আমরা পাই ,

$$\begin{vmatrix} -2 & 2 & 2 \\ 2 & -2 & 2 \\ 2 & 2 & -2 \end{vmatrix} = k.2.2.2$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \\ 4 & 0 & -2 \end{vmatrix} = 8k \Rightarrow 32 = k = 4$$

$$\therefore \begin{vmatrix} -2a & a+b & a+c \\ b+a & -2b & b+c \\ c+a & c+b & -2c \end{vmatrix} = 4(a + b) (b + c) (c+ a)$$

6(b) $\begin{vmatrix} 1+a & 1 & 1 \\ 1 & 1+b & 1 \\ 1 & 1 & 1+c \end{vmatrix} = abc(1+ \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c})$

প্রমাণ ঃ L.H.S. $= \begin{vmatrix} 1+a & 1 & 1 \\ 1 & 1+b & 1 \\ 1 & 1 & 1+c \end{vmatrix}$

$$= \begin{vmatrix} a(\frac{1}{a}+1) & b.\frac{1}{b} & c.\frac{1}{c} \\ a.\frac{1}{a} & b(\frac{1}{b}+1) & c.\frac{1}{c} \\ a.\frac{1}{a} & b.\frac{1}{b} & c(\frac{1}{c}+1) \end{vmatrix}$$

$$= abc\begin{vmatrix} \frac{1}{a}+1 & \frac{1}{b} & \frac{1}{c} \\ \frac{1}{a} & \frac{1}{b}+1 & \frac{1}{c} \\ \frac{1}{a} & \frac{1}{b} & \frac{1}{c}+1 \end{vmatrix}$$

$$= abc\begin{vmatrix} 1+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} & \frac{1}{b} & \frac{1}{c} \\ 1+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} & \frac{1}{b}+1 & \frac{1}{c} \\ 1+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} & \frac{1}{b} & \frac{1}{c}+1 \end{vmatrix}$$

$[c_1' = c_1 + (c_2 + c_3)]$

$$= abc(1+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}) = \begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{b} & \frac{1}{c} \\ 1 & \frac{1}{b}+1 & \frac{1}{c} \\ 1 & \frac{1}{b} & \frac{1}{c}+1 \end{vmatrix}$$

$$= abc(1+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c})\begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & \frac{1}{b} & \frac{1}{c}+1 \end{vmatrix}$$

$[r_1' = r_1 - r_2, r_2' = r_2 - r_3]$

$= abc(1+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c})\ 1(1-0)$

$= abc(1+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}) =$ R.H.S. (Proved)

7. $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$ নির্ণায়কে a_1, b_1, c_1 এর সহগুণক যথাক্রমে A_1, B_1, C_1 হলে, প্রমাণ কর যে, $a_2A_1+b_2B_1+c_2C_1= 0$. [য.'০১; কু.'০৮,'০৯]

সমাধান ঃ $A_1 = a_1$ এর সহগুণক $= b_2c_3 - b_3c_2$

$B_1 = b_1$ এর সহগুণক $= -(a_2c_3 - a_3c_2)$

$C_1 = c_1$ এর সহগুণক $= a_2b_3 - a_3b_2$

L.H.S. $= a_2A_1 + b_2B_1 + c_2C_1$

$= a_2(b_2c_3 - b_3c_2) + b_2\{-(a_2c_3 - a_3c_2)\} +$
$c_2(a_2b_3 - a_3b_2)$

$= a_2b_2c_3 - a_2b_3c_2 - a_2b_2c_3 + a_3b_2c_2 +$
$a_2b_3c_2 - a_3b_2c_2 = 0 =$ R.H.S. (Proved)

8. মান নির্ণয় কর ঃ

(a) সমাধান ঃ $\begin{vmatrix} x+y & x & y \\ x & x+z & z \\ y & z & y+z \end{vmatrix}$ [য.'০৫]

$$= \begin{vmatrix} 0 & x & y \\ -2z & x+z & z \\ -2z & z & y+z \end{vmatrix} \quad [c_1' = c_1 - (c_2 + c_2)]$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & x & y \\ 0 & x & -y \\ -2z & z & y+z \end{vmatrix} \quad [r_1' = r_1 - r_2]$$

$= -2z(-xy - xy) = -2z(-2xy) = 4xyz$

8(b) সমাধান ঃ $\begin{vmatrix} b+c & b-c & c-b \\ a-c & c+a & c-a \\ a-b & b-a & a+b \end{vmatrix}$

$$= \begin{vmatrix} 2b & 0 & c-b \\ 2a & 2c & c-a \\ 0 & 2b & a+b \end{vmatrix} \quad [c_1' = c_1 - c_2, c_2' = c_2 - c_3]$$

$$= 2.2\begin{vmatrix} b & 0 & c-b \\ a & c & c-a \\ 0 & b & a+b \end{vmatrix}$$

$= 4\{b(ca + bc - bc + ab) + (c - b)(ab - 0)\}$
$= 4\{abc + ab^2 + abc - ab^2\}$
$= 4.2abc = 8abc$ (Ans.)

9. সমাধান কর :

(a) $\begin{vmatrix} 3+x & 4 & 2 \\ 4 & 2+x & 3 \\ 2 & 3 & 4+x \end{vmatrix} = 0$ [কু.'০৭; চ.'০৭]

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} x+9 & 4 & 2 \\ x+9 & 2+x & 3 \\ x+9 & 3 & 4+x \end{vmatrix} = 0$$

$[c_1' = c_1 + (c_2 + c_2)]$

$$\Rightarrow (x+9)\begin{vmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 1 & 2+x & 3 \\ 1 & 3 & 4+x \end{vmatrix} = 0$$

$$=\begin{bmatrix} 3/2 & -11/10 & -6/5 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1/2 & 7/10 & 2/5 \end{bmatrix}$$

[ক্যালকুলেটরের সাহায্যে উত্তর যাচাই করা যায়।]

(d) $A=\begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$ **[ব.'১৫]**

$\therefore\ |A| = 2(-4+1)+1(2-1)-1(-1+2)$

$= -6+1-1=-6$

$|A|$ এর সহগুণকগুলি হচ্ছে, $A_{11}=\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}=-3,$

$A_{12}=-\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}=-1; A_{13}=\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}=1,$

$A_{21}=-\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}=3,\ A_{22}=\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}=5,$

$A_{23}=-\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}=1,\ A_{31}=\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix}=-3,$

$A_{32}=-\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=-3, A_{33}=\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}=-3$

$\therefore\ A^{-1}=\frac{1}{|A|}\text{Adj}\ (A)$

$$=\frac{1}{-6}\begin{bmatrix} -3 & -1 & 1 \\ 3 & 5 & 1 \\ -3 & -3 & -3 \end{bmatrix}^T=\frac{1}{-6}\begin{bmatrix} -3 & 3 & -3 \\ -1 & 5 & -3 \\ 1 & 1 & -3 \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} 1/2 & -1/2 & 1/2 \\ 1/6 & -5/6 & 1/2 \\ -1/6 & -1/6 & 1/2 \end{bmatrix} \text{ (Ans.)}$$

(e) সমাধান: ধরি, $A=\begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 5 & 5 \\ 2 & 5 & 11 \end{bmatrix}$ **[সি.'১৫]**

$\therefore\ |A| = 2(55-25)-2(22-10)+2(10-10)$

$= 60-24=36$

$|A|$ এর সহগুণকগুলি হচ্ছে, $A_{11}=\begin{vmatrix} 5 & 5 \\ 5 & 11 \end{vmatrix}=30,$

$A_{12}=-\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 2 & 11 \end{vmatrix}=-12, A_{13}=\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}=0,$

$A_{21}=-\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 5 & 11 \end{vmatrix}=-12,\ A_{22}=\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 11 \end{vmatrix}=18,$

$A_{23}=-\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}=-6,\ A_{31}=\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 5 & 5 \end{vmatrix}=0,$

$A_{32}=-\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}=-6, A_{33}=\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}=6$

$\therefore\ A^{-1}=\frac{1}{|A|}\text{Adj}\ (A)$

$$=\frac{1}{36}\begin{bmatrix} 30 & -12 & 0 \\ -12 & 18 & -6 \\ 0 & -6 & 6 \end{bmatrix}^T$$

$$=\frac{1}{36}\begin{bmatrix} 30 & -12 & 0 \\ -12 & 18 & -6 \\ 0 & -6 & 6 \end{bmatrix}$$

$\therefore$ নির্ণেয় বিপরীত ম্যাট্রিক্স $=\begin{bmatrix} 5/6 & -1/3 & 0 \\ -1/3 & 1/2 & -1/6 \\ 0 & -1/6 & 1/6 \end{bmatrix}$

(f) সমাধান: ধরি, $A=\begin{bmatrix} 3 & -4 & 2 \\ -2 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ **[কু.'১৫]**

$\therefore\ |A| = 3(1-0)+4(-2-0)+2(2+1)$

$= 3-8+6=1$

$|A|$ এর সহগুণকগুলি হচ্ছে, $A_{11}=\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}=1,$

$A_{12}=-\begin{vmatrix} -2 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}=2, A_{13}=\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix}=3,$

$A_{21}=-\begin{vmatrix} -4 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}=2,\ A_{22}=\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}=5,$

$A_{23}=-\begin{vmatrix} 3 & -4 \\ -1 & -1 \end{vmatrix}=7,\ A_{31}=\begin{vmatrix} -4 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}=-2,$

$A_{32}=-\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -2 & 0 \end{vmatrix}=-4, A_{33}=\begin{vmatrix} 3 & -4 \\ -2 & 1 \end{vmatrix}=-5$

$\therefore\ A^{-1}=\frac{1}{|A|}\text{Adj}\ (A)$

$$=\frac{1}{1}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 7 \\ -2 & -4 & -5 \end{bmatrix}^T=\begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & -4 \\ 3 & 7 & -5 \end{bmatrix}$$

$\therefore$ নির্ণেয় বিপরীত ম্যাট্রিক্স $=\begin{bmatrix}1 & 2 & -2\\ 2 & 5 & -4\\ 3 & 7 & -5\end{bmatrix}$

(g) সমাধান: ধরি, $\begin{bmatrix}0 & 1 & 2\\ 1 & 2 & 3\\ 3 & 1 & 1\end{bmatrix}$. [ঢা.'১৫]

$\therefore \quad |A| = 0(2-3) - 1(1-9) + 2(1-6)$
$= 0 + 8 - 10 = -2$

$|A|$ এর সহগুণকগুলি হচ্ছে, $A_{11} = \begin{vmatrix}2 & 3\\ 1 & 1\end{vmatrix} = -1,$

$A_{12} = -\begin{vmatrix}1 & 3\\ 3 & 1\end{vmatrix} = 8, A_{13} = \begin{vmatrix}1 & 2\\ 3 & 1\end{vmatrix} = -5,$

$A_{21} = -\begin{vmatrix}1 & 2\\ 1 & 1\end{vmatrix} = 1,\ A_{22} = \begin{vmatrix}0 & 2\\ 3 & 1\end{vmatrix} = -6,$

$A_{23} = -\begin{vmatrix}0 & 1\\ 3 & 1\end{vmatrix} = 3,\ A_{31} = \begin{vmatrix}1 & 2\\ 2 & 3\end{vmatrix} = -1,$

$A_{32} = -\begin{vmatrix}0 & 2\\ 1 & 3\end{vmatrix} = 2, A_{33} = \begin{vmatrix}0 & 1\\ 1 & 2\end{vmatrix} = -1$

$$\therefore \quad A^{-1} = \frac{1}{|A|}\text{Adj}(A)$$

$$= \frac{1}{-2}\begin{bmatrix}-1 & 8 & -5\\ 1 & -6 & 3\\ -1 & 2 & -1\end{bmatrix}^T$$

$$= \frac{1}{-2}\begin{bmatrix}-1 & 1 & -1\\ 8 & -6 & 2\\ -5 & 3 & -1\end{bmatrix}$$

$\therefore$ নির্ণেয় বিপরীত ম্যাট্রিক্স $=\begin{bmatrix}1/2 & -1/2 & 1/2\\ -4 & 3 & -1\\ 5/2 & -3/2 & 1/2\end{bmatrix}$

13. নির্ণায়কের সাহায্যে সমাধান কর :

সমাধান ঃ (a) দেওয়া আছে, $2x + 3y = 4$ [চ.'০১]
$x - y = 7$

ক্রেমারের নিয়ম ব্যবহার করে আমরা পাই ,

$D = \begin{vmatrix}2 & 3\\ 1 & -1\end{vmatrix} = -2 - 3 = -5,$

$D_x = \begin{vmatrix}4 & 3\\ 7 & -1\end{vmatrix} = -4 - 21 = -25,$

$D_y = \begin{vmatrix}2 & 4\\ 1 & 7\end{vmatrix} = 14 - 4 = 10$

$$\therefore \quad x = \frac{D_x}{D} = \frac{-25}{-5} = 5\ ,\ y = \frac{D_y}{D} = \frac{10}{-5} = -2$$

13(b) দেওয়া আছে, $x + y + z = 1$
$x + 2y + z = 2$
$x + y + 2z = 0$

ক্রেমারের নিয়ম ব্যবহার করে আমরা পাই ,

$D = \begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 1\\ 1 & 1 & 2\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}0 & 0 & 1\\ -1 & 1 & 1\\ 0 & -1 & 2\end{vmatrix}$

$[c_1' = c_1 - c_2, c_2' = c_2 - c_3]$

$= 1(1-0) = 1$

$D_x = \begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 2 & 2 & 1\\ 0 & 1 & 2\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1\\ -1 & -1 & 2\end{vmatrix}$

$[c_1' = c_1 - c_2, c_2' = c_2 - c_3]$

$= 1(0+1) = 1$

$D_y = \begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 1\\ 1 & 0 & 2\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}0 & 0 & 1\\ -1 & 1 & 1\\ 1 & -2 & 2\end{vmatrix}$

$[c_1' = c_1 - c_2, c_2' = c_2 - c_3]$

$= 1(2-1) = 1$

$D_z = \begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 2\\ 1 & 1 & 0\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}0 & 0 & 1\\ -1 & 0 & 2\\ 0 & 1 & 0\end{vmatrix}$

$[c_1' = c_1 - c_2, c_2' = c_2 - c_3]$

$= 1(-1-0) = -1$

$$\therefore \quad x = \frac{D_x}{D} = \frac{1}{1} = 1\ ,\ y = \frac{D_y}{D} = \frac{1}{1} = 1,$$

$$z = \frac{D_z}{D} = \frac{-1}{1} = -1$$

13(c) দেওয়া আছে, $\begin{bmatrix}1 & 2 & -1\\ 3 & -1 & 3\\ 2 & 3 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\\ z\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}5\\ 7\\ 11\end{bmatrix}$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix}x + 2y - z\\ 3x - y + 3z\\ 2x + 3y + z\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}5\\ 7\\ 11\end{bmatrix}$$

$\therefore \quad x+2y-z=5$

$3x-y+3z=7$

$2x+3y+z=11$

এখন, ক্রেমারের নিয়ম ব্যবহার করে আমরা পাই ,

$$D=\begin{vmatrix}1 & 2 & -1\\ 3 & -1 & 3\\ 2 & 3 & 1\end{vmatrix}$$

$=1(-1-9)-2(3-6)-1(9+2)$

$=-10+6-11=-15$

$$D_x=\begin{vmatrix}5 & 2 & -1\\ 7 & -1 & 3\\ 11 & 3 & 1\end{vmatrix}$$

$=\ 5(-1-9)-2(7-33)-1(21+11)$

$=\ -50+52-32=-30$

$$D_y=\begin{vmatrix}1 & 5 & -1\\ 3 & 7 & 3\\ 2 & 11 & 1\end{vmatrix}$$

$=\ 1(7-33)-5(3-6)-1(33-14)$

$=\ -26+15-19=-30$

$$D_z=\begin{vmatrix}1 & 2 & 5\\ 3 & -1 & 7\\ 2 & 3 & 11\end{vmatrix}$$

$=\ 1(-11-21)-2(33-14)+5(9+2)$

$=-32-38+55=-15$

$\therefore \quad x=\dfrac{D_x}{D}=\dfrac{-30}{-15}=2,\ \ y=\dfrac{D_y}{D}=\dfrac{-30}{-15}=2\ ,$

$z=\dfrac{D_z}{D}=\dfrac{-15}{-15}=1$

সম্ভাব্য ধাপ (Step) সহ কিছু সমস্যা:

14. বিস্তার না করে প্রমাণ কর যে,

$$\begin{vmatrix}bc & ca & ab\\ \frac{1}{a} & \frac{1}{b} & \frac{1}{c}\\ \frac{1}{a}+b & \frac{1}{b}+c & \frac{1}{c}+a\end{vmatrix}=0$$ [প্র.ভ.প.'৯৪]

প্রমাণঃ L.H.S.$=\begin{vmatrix}bc & ca & ab\\ \frac{1}{a} & \frac{1}{b} & \frac{1}{c}\\ \frac{1}{a}+b & \frac{1}{b}+c & \frac{1}{c}+a\end{vmatrix}$

$$=\frac{abc}{abc}\begin{vmatrix}bc & ca & ab\\ \frac{1}{a} & \frac{1}{b} & \frac{1}{c}\\ \frac{1}{a}+b & \frac{1}{b}+c & \frac{1}{c}+a\end{vmatrix}$$

$$=\frac{1}{abc}\begin{vmatrix}abc & abc & abc\\ a.\frac{1}{a} & b.\frac{1}{b} & c.\frac{1}{c}\\ a(\frac{1}{a}+b) & b(\frac{1}{b}+c) & c(\frac{1}{c}+a)\end{vmatrix}$$ (১)

$$=\frac{abc}{abc}\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\\ 1+ab & 1+bc & 1+ca\end{vmatrix}$$

$=0$ [$\because$ দুইটি সারি একই।] (১)

$=$ R.H.S.

15. প্রমাণ কর যে,

$$\begin{vmatrix}x+a & a & a\\ b & x+b & b\\ c & c & x+c\end{vmatrix}=x^2(x+a+b+c)$$

প্রমাণ ঃ L.H.S.$=\begin{vmatrix}x+a & a & a\\ b & x+b & b\\ c & c & x+c\end{vmatrix}$

$$=\begin{vmatrix}x+a+b+c & x+a+b+c & x+a+b+c\\ b & x+b & b\\ c & c & x+c\end{vmatrix}$$

$[r_1'=r_1+(r_2+r_3)]$ (১)

$$=(x+a+b+c)\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ b & x+b & b\\ c & c & x+c\end{vmatrix}$$ (১)

$$=(x+a+b+c)\begin{vmatrix}0&0&1\\-x&x&b\\0&-x&x+c\end{vmatrix} \quad (১)$$

$[c_1'=c_1-c_2, c_2'=c_2-c_3]$

$=(x+a+b+c)(x^2-0)$

$=x^2(x+a+b+c)=$ R.H.S. (Proved) (১)

16. প্রমাণ কর যে, $\begin{vmatrix}1&1&1\\\sin A&\sin B&\sin C\\\cos A&\cos B&\cos C\end{vmatrix}$

$$=-4\sin\frac{A-B}{2}\sin\frac{B-C}{2}\sin\frac{C-A}{2}$$

প্রমাণ : L.H.S.$=\begin{bmatrix}1&1&1\\\sin A&\sin B&\sin c\\\cos A&\cos B&\cos C\end{bmatrix}$

$$=\begin{bmatrix}0&0&1\\\sin A-\sin B&\sin B-\sin C&\sin C\\\cos A-\cos B&\cos B-\cos C&\cos C\end{bmatrix}$$

$[c_1-c_2, c_2-c_3]$ (১)

$=(\sin A-\sin B)(\cos B-\cos C)-(\sin B-\sin C)(\cos A-\cos B)$ (১)

$=2\sin\frac{A-B}{2}\cos\frac{A+B}{2}\,2\sin\frac{B+C}{2}\sin\frac{C-B}{2}$

$-2\sin\frac{B-C}{2}\cos\frac{B+C}{2}\,2\sin\frac{A+B}{2}\sin\frac{B-A}{2}$ (১)

$=-4\sin\frac{A-B}{2}\sin\frac{B-C}{2}[\cos\frac{A+B}{2}\sin\frac{B+C}{2}$

$-\cos\frac{B+C}{2}\sin\frac{A+B}{2}]$

$=-4\sin\frac{A-B}{2}\sin\frac{B-C}{2}\cos(\frac{B+C}{2}-\frac{A+B}{2})$ (১)

$=-4\sin\frac{A-B}{2}\sin\frac{B-C}{2}\sin\frac{C-A}{2}$ =R.H.S.

(Proved)

17. প্রমাণ কর যে,

(a) $\begin{vmatrix}-bc&bc+b^2&bc+c^2\\ca+a^2&-ca&ca+c^2\\ab+a^2&ab+b^2&-ab\end{vmatrix}$

$$=(bc+ca+ab)^3$$

প্রমাণ : L.H.S.$=\begin{vmatrix}-bc&bc+b^2&bc+c^2\\ca+a^2&-ca&ca+c^2\\ab+a^2&ab+b^2&-ab\end{vmatrix}$

$$=\frac{1}{abc}\begin{vmatrix}-abc&abc+ab^2&abc+ac^2\\abc+a^2b&-abc&abc+bc^2\\abc+a^2c&abc+b^2c&-abc\end{vmatrix} \quad (১)$$

$$=\frac{1}{abc}abc\begin{vmatrix}-bc&ca+ab&ab+ac\\bc+ab&-ca&ab+bc\\bc+ca&ca+bc&-ab\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}ab+bc+ca&ab+bc+ca&ab+bc+ca\\bc+ab&-ca&ab+bc\\bc+ca&ca+bc&-ab\end{vmatrix}$$

$[r_1'=r_1+(r_2+r_2)]$ (১)

$$=(ab+bc+ca)\begin{vmatrix}1&1&1\\bc+ab&-ca&ab+bc\\bc+ca&ca+bc&-ab\end{vmatrix}$$

$=(ab+bc+ca)$

$$\begin{vmatrix}0&0&1\\bc+ab+ca&-(ca+ab+ca)&ab+bc\\0&ca+bc+ab&-ab\end{vmatrix} \quad (১)$$

$[c_1'=c_1-c_2,\ c_2'=c_2-c_3]$

$=(ab+bc+ca).1\{(ab+bc+ca)(ab+bc+ca)-0\}$

$=(ab+bc+ca)^3=0=$ R.H.S. (১)

17 (b) $\begin{vmatrix}a^2-bc&b^2-ca&c^2-ab\\c^2-ab&a^2-bc&b^2-ca\\b^2-ca&c^2-ab&a^2-bc\end{vmatrix}$

$$=(a^3+b^3+c^3-3abc)^2$$

L.H.S.$=\begin{vmatrix}a^2-bc&b^2-ca&c^2-ab\\c^2-ab&a^2-bc&b^2-ca\\b^2-ca&c^2-ab&a^2-bc\end{vmatrix}$

$$=\begin{vmatrix}a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca&b^2-ca&c^2-ab\\a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca&a^2-bc&b^2-ca\\a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca&c^2-ab&a^2-bc\end{vmatrix} \quad (১)$$

$=a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$

$$\begin{vmatrix}1&b^2-ca&c^2-ab\\1&a^2-bc&b^2-ca\\1&c^2-ab&a^2-bc\end{vmatrix} \cdots \text{(i)} \quad (১)$$

এখন, $\begin{vmatrix}1 & b^2-ca & c^2-ab\\ 1 & a^2-bc & b^2-ca\\ 1 & c^2-ab & a^2-bc\end{vmatrix}$

$= \begin{vmatrix}0 & -(a-b)(a+b+c) & -(b-c)(a+b+c)\\ 0 & -(c-a)(c+a+b) & -(a-b)(a+b+c)\\ 1 & c^2-ab & a^2-bc\end{vmatrix}$

$[r_1' = r_1 - r_2, r_2' = r_2 - r_3]$ (১)

$= \begin{vmatrix}0 & -(a-b)(a+b+c) & -(b-c)(a+b+c)\\ 0 & -(c-a)(a+b+c) & -(a-b)(a+b+c)\\ 1 & c^2-ab & a^2-bc\end{vmatrix}$

$= (a+b+c)^3 \begin{vmatrix}0 & -(a-b) & -(b-c)\\ 0 & -(c-a) & -(a-b)\\ 1 & c^2-ab & a^2-bc\end{vmatrix}$

$= (a+b+c)^2\, 1.\{(a-b)^2 - (b-c)(c-a)\}$ (১)

$= (a+b+c)^2(a^2+b^2-2ab-bc+c^2+ab-ca)$

$= (a+b+c)^2(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$

(i) হতে আমরা পাই ,

$\begin{vmatrix}a^2-bc & b^2-ca & c^2-ab\\ c^2-ab & a^2-bc & b^2-ca\\ b^2-ca & c^2-ab & a^2-bc\end{vmatrix}$

$= (a+b+c)^2(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)^2$

$= \{(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)\}^2$

$= (a^3+b^3+c^3-3abc)^2 =$ R.H.S. (Proved) (১)

17(c) $\begin{vmatrix}(a+b)^2 & ca & bc\\ ca & (b+c)^2 & ab\\ bc & ab & (c+a)^2\end{vmatrix}$

$= abc\,(a+b+c)^3$

L.H.S.$= \begin{vmatrix}(a+b)^2 & ca & bc\\ ca & (b+c)^2 & ab\\ bc & ab & (c+a)^2\end{vmatrix}$

$= \dfrac{1}{abc}\begin{vmatrix}c(a+b)^2 & c^2a & bc^2\\ ca^2 & a(b+c)^2 & a^2b\\ b^2c & ab^2 & b(c+a)^2\end{vmatrix}$ (১)

$= \dfrac{abc}{abc}\begin{vmatrix}(a+b)^2 & c^2 & c^2\\ a^2 & (b+c)^2 & a^2\\ b^2 & b^2 & (c+a)^2\end{vmatrix}$

$= \begin{vmatrix}(a+b)^2 & c^2 & c^2\\ a^2 & (b+c)^2 & a^2\\ b^2 & b^2 & (c+a)^2\end{vmatrix}$

অতপর , উদাহরণ 2 দ্রষ্টব্য ।

17(d) $\begin{vmatrix}a+b+c & -c & -b\\ -c & a+b+c & -a\\ -b & -a & a+b+c\end{vmatrix}$

$= 2\,(b+c)\,(c+a)(a+b)$

L.H.S. $= \begin{vmatrix}a+b+c & -c & -b\\ -c & a+b+c & -a\\ -b & -a & a+b+c\end{vmatrix}$

$= \begin{vmatrix}a+b & -(b+c) & -b\\ a+b & b+c & -a\\ -(a+b) & b+c & a+b+c\end{vmatrix}$ (১)

$[c_1' = c_1 - c_2, c_2' = c_2 - c_3]$

$= (a+b)(b+c)\begin{vmatrix}1 & -1 & -b\\ 1 & 1 & -a\\ -1 & 1 & a+b+c\end{vmatrix}$ (১)

$= (a+b)(b+c)\begin{vmatrix}0 & -1 & -b\\ 2 & 1 & -a\\ 0 & 1 & a+b+c\end{vmatrix}$ $[c_1' = c_1 - c_2]$

$= (a+b)(b+c)\{-2(-a-b-c+b)\}$ (১)

$= (a+b)(b+c)(-2)(-1)(c+a)$

$= 2(a+b)(b+c)(c+a) =$ R.H.S. (১)

(CQ উপযোগী কিছু সমস্যা)

18. (a) $A = \begin{bmatrix}2 & 1 & -3\\ 1 & 3 & 0\\ 5 & 0 & 2\end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix}1 & -2 & 3\\ -1 & 0 & 5\\ 3 & 0 & -3\end{bmatrix}$

হলে AB এর ট্রেস নির্ণয় কর।

সমাধান: $AB = \begin{bmatrix}2 & 1 & -3\\ 1 & 3 & 0\\ 5 & 0 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & -2 & 3\\ -1 & 0 & 5\\ 3 & 0 & -3\end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix}2-1-9 & -4+0+0 & 6+5+9\\ 1-3+0 & -2+0+0 & 3+15+0\\ 5+0+6 & -10+0+0 & 15+0-6\end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} -8 & -4 & 20 \\ -2 & -2 & 18 \\ 11 & -10 & 9 \end{bmatrix}$$

$\therefore$ AB এর ট্রেস $= -8 - 2 + 9 = -1$ (Ans.)

(b) $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & y \\ 1 & x & 0 \\ 5 & 0 & -2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -3 & 1 & x \\ 1 & -y & 0 \\ 5 & 0 & -7 \end{bmatrix}$;

$C = A - B$ একটি স্কেলার ম্যাট্রিক্স হলে (x, y) নির্ণয় কর।

সমাধানঃ $C = A - B$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 1 & y \\ 1 & x & 0 \\ 5 & 0 & -2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -3 & 1 & x \\ 1 & -y & 0 \\ 5 & 0 & -7 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2+3 & 0 & y-x \\ 0 & x+y & 0 \\ 0 & 0 & -2+7 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 5 & 0 & y-x \\ 0 & x+y & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$ একটি স্কেলার ম্যাট্রিক্স।

$\therefore x + y = 5 \cdots$ (i), $y - x = 0 \Rightarrow y = x$

(i) হতে, $y + y = 5 \Rightarrow y = x = \frac{5}{2}$

$\therefore (x, y) = (\frac{5}{2}, \frac{5}{2})$

(c) $3\begin{bmatrix} s & v & w \\ x-y & x & v \\ w & u & s \end{bmatrix}$ একটি অভেদক ম্যাট্রিক্স হলে (x, y) নির্ণয় কর।

সমাধানঃ $3\begin{bmatrix} s & v & w \\ x-y & x & v \\ w & u & s \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} 3s & 3v & 3w \\ 3x-3y & 3x & 3v \\ 3w & 3u & 3s \end{bmatrix}$$ একটি অভেদক ম্যাট্রিক্স।

$\therefore 3x = 0 \Rightarrow x = 0, 3x - 3y = 1 \Rightarrow y = -\frac{1}{3}$

$\therefore (x, y) = (0, -\frac{1}{3})$ (Ans.)

(d) $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & y \\ 1 & 3 & 5 \\ 5 & 1 & -2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -3 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 5 & x & -7 \end{bmatrix}$;

$C = A + B$ একটি প্রতিসম ম্যাট্রিক্স হলে (x, y) নির্ণয় কর।

সমাধানঃ $C = A + B$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 1 & y \\ 1 & 3 & 5 \\ 5 & 1 & -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -3 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 5 & x & -7 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2-3 & 1+1 & y+3 \\ 1+1 & 3+2 & 5+3 \\ 5+5 & 1+x & -2-7 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -1 & 2 & y+3 \\ 2 & 5 & 8 \\ 10 & 1+x & -9 \end{bmatrix}$$ একটি প্রতিসম ম্যাট্রিক্স

$\therefore 1 + x = 8 \Rightarrow x = 7, y + 3 = 10 \Rightarrow y = 7$

$\therefore (x, y) = (7, 7)$ (Ans.)

(e) $A = \begin{bmatrix} 1 & x & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 4 & 1 & -3 \\ 1 & 5 & y \\ 5 & 8 & -7 \end{bmatrix}$;

$C = A - B$ একটি বিপ্রতিসম ম্যাট্রিক্স হলে (x, y) নির্ণয় কর।

সমাধানঃ $C = A - B$

$$= \begin{bmatrix} 1 & x & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 4 & 1 & -3 \\ 1 & 5 & y \\ 5 & 8 & -7 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1-4 & x-1 & 0+3 \\ 0-1 & 1-5 & 2-y \\ 2-5 & -2-8 & 1+7 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -3 & x-1 & 3 \\ -1 & -4 & 2-y \\ -3 & -10 & 8 \end{bmatrix}$$ একটি বিপ্রতিসম ম্যাট্রিক্স।

$\therefore x - 1 = -(-1) \Rightarrow x = 1 + 1 = 2,$

$2 - y = -(-10) \Rightarrow -y = 10 - 2$

$\Rightarrow y = -8$

$\therefore (x, y) = (2, -8)$ (Ans.)

(f) $A = \begin{bmatrix} 2 & -2 & -4 \\ y & 3 & x \\ 1 & -2 & -3 \end{bmatrix}$ একটি সমঘাতি ম্যাট্রিক্স হলে (x, y) নির্ণয় কর। Ans. $(4, -1)$

(g) $A = \begin{bmatrix} -5 & y & 0 \\ 3 & 5 & 0 \\ 1 & x & -1 \end{bmatrix}$ একটি অভেদঘাতি ম্যাট্রিক্স হলে (x, y) নির্ণয় কর। Ans. $(2, -8)$

(h) $\begin{bmatrix} 3 & -5 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \\ 7 & -2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ হলে (x, y, z) নির্ণয় কর।

সমাধান: $\begin{bmatrix} 3 & -5 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \\ 7 & -2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 6-5-3 \\ 2+1-12 \\ 14-2-3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} -2 \\ -9 \\ 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

$\therefore\ (x, y, z) = (-2, -9, 9)$

19. $A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 3 \\ 3 & a & 3 \\ 7 & -3 & a \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 3 \\ 5 & 2 & 0 \end{bmatrix}$; $C = A - B$ ম্যাট্রিক্স ব্যতিক্রমী হলে a এর মান নির্ণয় কর।

সমাধান: $C = A - B$

$$= \begin{bmatrix} 2 & -3 & 3 \\ 3 & a & 3 \\ 7 & -3 & a \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 3 \\ 5 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2+1 & -3-1 & 3+1 \\ 3-2 & a-0 & 3-3 \\ 7-5 & -3-2 & a-0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 3 & -4 & 4 \\ 1 & a & 0 \\ 2 & -5 & a \end{bmatrix}$$ একটি ব্যতিক্রমী ম্যাট্রিক্স।

$$\therefore \begin{vmatrix} 3 & -4 & 4 \\ 1 & a & 0 \\ 2 & -5 & a \end{vmatrix} = 0$$

$\Rightarrow 3(a^2 + 0) - 1(-4a + 20) + 2(0 - 4a) = 0$

$\Rightarrow 3a^2 + 4a - 20 - 8a = 0$

$\Rightarrow 3a^2 - 4a - 20 = 0$

$\Rightarrow 3a^2 - 10a + 6a - 20 = 0$

$\Rightarrow a(3a - 10) + 2(3a - 10) = 0$

$\Rightarrow (3a - 10)(a + 2) = 0$

$\therefore\ a = -2, \dfrac{10}{3}$ (Ans.)

20. (a) সমাধান পদ্ধতিতে $A = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 3 & -1 \end{bmatrix}$ এর বিপরীত ম্যাট্রিক্স A^{-1} নির্ণয় কর।

সমাধান:

$A = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 3 & -1 \end{bmatrix}$ ম্যাট্রিক্সের নির্ণায়ক

$|A| = 2(-2 - 9) = -22$

$$\begin{array}{|ccccc} 0 & -2 & 0 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & -1 & 3 & 3 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & 3 & 2 & 1 \end{array}$$

$$\text{Adj}(A) = \begin{bmatrix} -1-9 & 9+2 & 6-3 \\ 0-2 & 0-0 & -6-0 \\ -6-0 & 0-0 & 0+4 \end{bmatrix}^T$$

$$= \begin{bmatrix} -10 & 11 & 3 \\ -2 & 0 & -6 \\ -6 & 0 & 4 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} -10 & -2 & -6 \\ 11 & 0 & 0 \\ 3 & -6 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\therefore\ A^{-1} = \frac{1}{|A|}\text{Adj}(A)$$

$$= \frac{1}{-22}\begin{bmatrix} -10 & -2 & -6 \\ 11 & 0 & 0 \\ 3 & -6 & 4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 5/11 & 1/11 & 3/11 \\ -1/2 & 0 & 0 \\ -3/22 & 3/11 & -2/11 \end{bmatrix} \text{(Ans.)}$$

(b) $\begin{bmatrix} 3 & -5 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \\ 7 & -2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix}$ হলে (x, y, z) নির্ণয় কর।

সমাধান : : ধরি, $A = \begin{bmatrix} 3 & -5 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \\ 7 & -2 & 1 \end{bmatrix}$

$$\therefore \quad A\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = A^{-1}\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & -5 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \\ 7 & -2 & 1 \end{vmatrix}$$

$=3(1+8)-1(-5+2)+7(-20-1)$
$= 27 + 3 - 147 = 117$

$$\begin{array}{|ccccc} 3 & -5 & 1 & 3 & -5 \\ 1 & 1 & 4 & 1 & 1 \\ 7 & -2 & 1 & 7 & -2 \\ 3 & -5 & 1 & 3 & -5 \\ 1 & 1 & 4 & 1 & 1 \end{array}$$

$$\text{Adj}(A) = \begin{bmatrix} 1+8 & 28-1 & -2-7 \\ -2+5 & 3-7 & -35+6 \\ -20-1 & 1-12 & 3+5 \end{bmatrix}^T$$

$$= \begin{bmatrix} 9 & 27 & -9 \\ 3 & -4 & -29 \\ -21 & -11 & 8 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 9 & 3 & -21 \\ 27 & -4 & -11 \\ -9 & -29 & 8 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \quad A^{-1} = \frac{1}{|A|}\text{Adj}(A)$$

$$= \frac{1}{117}\begin{bmatrix} 9 & 3 & -21 \\ 27 & -4 & -11 \\ -9 & -29 & 8 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1/13 & 1/39 & -7/39 \\ 3/13 & -4/117 & -11/117 \\ -1/13 & -29/117 & 8/117 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \quad \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/13 & 1/39 & -7/39 \\ 3/13 & -4/117 & -11/117 \\ -1/13 & -29/117 & 8/117 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1/13 & 1/39 & -7/39 \\ 3/13 & -4/117 & -11/117 \\ -1/13 & -29/117 & 8/117 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{2}{13}+\frac{1}{39}+\frac{21}{39} \\ \frac{6}{13}-\frac{4}{117}+\frac{33}{117} \\ -\frac{2}{13}-\frac{29}{117}-\frac{24}{117} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{6+1+21}{39} \\ \frac{54-4+33}{117} \\ \frac{-18-29-24}{117} \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 28/39 \\ 83/117 \\ -71/117 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \quad (x, y, z) = \left(\frac{28}{39}, \frac{83}{117}, -\frac{71}{117}\right)$$

21. (a) $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 5 \\ 2 & 3 & -2 \end{bmatrix}$ এবং $AB = BA = I$ হলে B নির্ণয় কর।

সমাধান: $AB = BA = I \therefore B = A^{-1}$

এখন, $|A| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 5 \\ 2 & 3 & -2 \end{vmatrix}$

$= 1(2 - 15) + 1(-4 - 10)$
$= -13 - 14 = -27$

$$\begin{array}{|ccccc} 1 & -1 & 0 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 5 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & -2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 5 & 2 & -1 \end{array}$$

$$\text{Adj}(A) = \begin{bmatrix} 2-15 & 10+4 & 6+2 \\ 0-2 & -2-0 & -2-3 \\ -5-0 & 0-5 & -1+2 \end{bmatrix}^T$$

$$= \begin{bmatrix} -13 & 14 & 8 \\ -2 & -2 & -5 \\ -5 & -5 & 1 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} -13 & -2 & -5 \\ 14 & -2 & -5 \\ 8 & -5 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \quad B = A^{-1} = \frac{1}{|A|}\text{Adj}(A)$$

$$= -\frac{1}{27}\begin{bmatrix} -13 & -2 & -5 \\ 14 & -2 & -5 \\ 8 & -5 & 1 \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} 13/27 & 2/27 & 5/27 \\ -14/27 & 2/27 & 5/27 \\ -8/27 & 5/27 & -1/27 \end{bmatrix}$$

(b) $\frac{x}{11}-\frac{2y}{11}+\frac{3z}{11}=\frac{x}{5}+\frac{y}{10}+\frac{z}{5}=\frac{x}{3}+\frac{2y}{9}+\frac{z}{9}=1$

সমীকরণ জোটটি ম্যাট্রিক্স এর সাহায্যে সমাধান কর। উ: $x=2, y=0, z=3$

সমাধান:

22. (a) $A=\begin{bmatrix} 4 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & -1 \end{bmatrix}$ এবং $f(x) = x^3 + 3x^2 - x$ হলে $f(A) = I$ সমীকরণ হতে A^{-1} নির্ণয় কর।

সমাধান: $f(x) = x^3 + 3x^2 - x$

$\therefore\ f(A) = A^3 + 3A^2 - A = I$

$\Rightarrow (A^{-1}A)A^2 + 3(A^{-1}A)A - A^{-1}A = A^{-1}I$

$\Rightarrow IA^2 + 3IA - I = A^{-1}$

$\Rightarrow A^{-1} = A^2 + 3A - I$

এখন, $A^2 = A.A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & -1 \end{bmatrix}$

$$=\begin{bmatrix} 16+0-2 & 0+0--4 & -4+0+1 \\ 12+3+4 & 0+1+8 & -3+2-2 \\ 8+12-2 & 0+4-4 & -2+8+1 \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} 14 & -4 & -3 \\ 19 & 9 & -3 \\ 18 & 0 & 7 \end{bmatrix}$$

$$3A = 3\begin{bmatrix} 4 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & -1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 12 & 0 & -3 \\ 9 & 3 & 6 \\ 6 & 12 & -3 \end{bmatrix}$$

$$\therefore\ A^{-1}=\begin{bmatrix} 14 & -4 & -3 \\ 19 & 9 & -3 \\ 18 & 0 & 7 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 12 & 0 & -3 \\ 9 & 3 & 6 \\ 6 & 12 & -3 \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} 14+12-1 & -4+0-0 & -3-3--0 \\ 19+9-0 & 9+3-1 & -3+6+0 \\ 18+6-0 & 0+12+0 & 7-3-1 \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} 25 & --4 & -6 \\ 27 & 11 & 3 \\ 24 & 12 & 3 \end{bmatrix} \text{(Ans.)}$$

(b) $A=\begin{bmatrix} 5 & 1 & -2 \\ 2 & 0 & 2 \\ 3 & 4 & -3 \end{bmatrix}$ এবং $f(x) = x^3 - 4x^2 - 1$ । $f(A)$ একটি শূন্য ম্যাট্রিক্স হলে A^{-1} নির্ণয় কর।

সমাধান: $f(x) = x^3 - 4x^2 - 1$

$\therefore\ f(A) = A^3 - 4A^2 - I$

প্রশ্নমতে, $f(A)$ একটি শূন্য ম্যাট্রিক্স।

$\therefore\ A^3 - 4A^2 = I$

$\Rightarrow (A^{-1}.A)A^2 - 4(A^{-1}.A)A = A^{-1}.I$

$\Rightarrow I.A^2 - 4(I.A) = A^{-1}$

$\Rightarrow A^{-1} = A^2 - 4A$

এখন, $A^2 = A.A = \begin{bmatrix} 5 & 1 & -2 \\ 2 & 0 & 2 \\ 3 & 4 & -3 \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} 5 & 1 & -2 \\ 2 & 0 & 2 \\ 3 & 4 & -3 \end{bmatrix}$

$$=\begin{bmatrix} 25+2-6 & 5+0-8 & -10+2+6 \\ 10+0+6 & 2+0+8 & -4+0-6 \\ 15+8-9 & 3+0-12 & -6+8+9 \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} 21 & -3 & -2 \\ 16 & 10 & -10 \\ 14 & -9 & 11 \end{bmatrix}$$

$$4A = 4\begin{bmatrix} 5 & 1 & -2 \\ 2 & 0 & 2 \\ 3 & 4 & -3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 20 & 4 & -8 \\ 8 & 0 & 8 \\ 12 & 16 & -12 \end{bmatrix}$$

$$\therefore\ A^{-1}=\begin{bmatrix} 21 & -3 & -2 \\ 16 & 10 & -10 \\ 14 & -9 & 11 \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} 20 & 4 & -8 \\ 8 & 0 & 8 \\ 12 & 16 & -12 \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} 21-20 & -3-4 & -2+8 \\ 16-8 & 10-0 & -10-8 \\ 14-12 & -9-16 & 11+12 \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} 1 & -7 & 6 \\ 8 & 100 & -18 \\ 2 & -25 & 23 \end{bmatrix} \text{(Ans.)}$$

বহুনির্বাচনি প্রশ্ন দ্রুত সমাধানের জন্য কিছু কৌশল:

কৌশল -১: AB নির্ণয়যোগ্য হলে AB ম্যাট্রিক্সের ক্রম = A ম্যাট্রিক্সের সারি সংখ্যা × B ম্যাট্রিক্সের কলাম সংখ্যা

(AB)C নির্ণয়যোগ্য হলে (AB)C ম্যাট্রিক্সের ক্রম = A ম্যাট্রিক্সের সারি সংখ্যা × C ম্যাট্রিক্সের কলাম সংখ্যা

A এর মাত্রা $m \times n$ হলে A^T এর মাত্রা $n \times m$

কৌশল -২ : $AI^3 = AI = A$, $A \pm I$ এর ক্ষেত্রে এর মুখ্য কর্ণের ভুক্তির সাথে 1 করে যথাক্রমে যোগ ও বিয়োগ করতে হবে।

যেকোনো ক্রমের একক ম্যাট্রিক্স I এর বিপ্রতীপ ম্যাট্রিক্স I .

কৌশল -৩ : $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ ব্যতিক্রমী হলে , $ad = bc$.

$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ ম্যাট্রিক্সের $Adj. = \begin{bmatrix} d & -c \\ -b & a \end{bmatrix}$

এবং বিপরীত ম্যাট্রিক্স $A^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$

কৌশল -৪ : $A = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix}$ হলে $A^2 = \begin{bmatrix} a^2 & 0 & 0 \\ 0 & b^2 & 0 \\ 0 & 0 & c^2 \end{bmatrix}$,

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{a} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{b} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{c} \end{bmatrix}$$

কৌশল -৫ : A একটি 3×3 ম্যাট্রিক্স হলে $|4A| = 4^3\ |A|$.

ম্যাট্রিক্সে ক্যালকুলেটরের ব্যবহার :

$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & 4 \\ 3 & -2 & 3 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 6 & 1 & 6 \\ 5 & 10 & 5 \end{bmatrix}$ হলে, AB ও A^{-1} নির্ণয় কর।

Declaring Matrix A:

MODE 3 times 2 (MAT) SHIFT 4 1 1 (A)

3 = 3 = 1 = 1 = 1 = 2

= −3 = 4 = 3 = −2 = 3

SHIFT STO
3 RCL

এভাবে Matrix B Declare করি।

এভাবে Matrix B Declare করি।

SHIFT [MAT] 4 3 (MAT) 1 (A) ×

SHIFT [MAT] 4 3 (MAT) 2 (B) =

ধারাবাহিকভাবে এর ডান দিক চাপতে হবে।

AC SHIFT [MAT] 4 3 (MAT) 1 x^{-1} =

ধারাবাহিকভাবে এর ডান দিক চাপতে হবে।

নির্ণায়কে ক্যালকুলেটরের ব্যবহার

$A = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \end{vmatrix}$ এর মান নির্ণয়:

MODE 3 times 2 (MAT) SHIFT 4 1 1 (A)

3 = 3 = 3 = 1 = 2 = 4

= 3 = 2 = 3 = 5 = SHIFT 4

এর ডান দিক চাপতে হবে। 1 (Det) SHIFT 4

3 1 (A) = 24

বহুনির্বাচনি প্রশ্ন:

1. প্রদত্ত ম্যাট্রিক্সটি কর্ণ, স্কেলার ও অভেদক ম্যাট্রিক্স।
2. অপ্রতিসম (Skew symmetric) ম্যাট্রিক্সের ক্ষেত্রে- মূখ্যকর্ণের ভুক্তিগুলি শূন্য হয় এবং (i, j) ও (j, i) তম ভুক্তিদ্বয় পরস্পর সমান কিন্তু বিপরীত চিহ্ন যুক্ত হয় যেখানে $i \neq j$. $\therefore$ Ans.: ক.
3. প্রতিসম ম্যাট্রিক্সের ক্ষেত্রে- (i, j) ও (j, i) তম ভুক্তিদ্বয় পরস্পর সমান ও সমচিহ্নযুক্ত হবে যেখানে $i \neq j$।
$\therefore a = 4$. $\therefore$ Ans. : ক.
4. সমাধান: $|A| = B \Rightarrow 6 + 4 = p(0 + 2)$
$10 = 2p \Rightarrow p = 5$ $\therefore$ Ans. : ঘ.
5. বিপ্রতিসম (Skew symmetric) ম্যাট্রিক্সের ক্ষেত্রে- মূখ্যকর্ণের ভুক্তিগুলি শূন্য এবং (i, j) ও