A এর মাত্রা $m\times n$ হলে A^T এর মাত্রা $n\times m$

কৌশল -২ : $AI^3 = AI = A$, $A \pm I$ এর ক্ষেত্রে এর মুখ্য কর্ণের ভুক্তির সাথে 1 করে যথাক্রমে যোগ ও বিয়োগ করতে হবে।

যেকোনো ক্রমের একক ম্যাট্রিক্স I এর বিপ্রতীপ ম্যাট্রিক্স I .

কৌশল -৩ : $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ ব্যতিক্রমী হলে , $ad = bc$.

$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ ম্যাট্রিক্সের $Adj. = \begin{bmatrix} d & -c \\ -b & a \end{bmatrix}$

এবং বিপরীত ম্যাট্রিক্স $A^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$

কৌশল -৪ : $A = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix}$ হলে $A^2 = \begin{bmatrix} a^2 & 0 & 0 \\ 0 & b^2 & 0 \\ 0 & 0 & c^2 \end{bmatrix}$,

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{a} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{b} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{c} \end{bmatrix}$$

কৌশল -৫ : A একটি 3×3 ম্যাট্রিক্স হলে $|4A| = 4^3\,|A|$.

ম্যাট্রিক্সে ক্যালকুলেটরের ব্যবহার :

$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & 4 \\ 3 & -2 & 3 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 6 & 1 & 6 \\ 5 & 10 & 5 \end{bmatrix}$ হলে, AB ও A^{-1} নির্ণয় কর।

Declaring Matrix A:

MODE 3 times 2 (MAT) SHIFT 4 1 1 (A)

3 = 3 = 1 = 1 = 1 = 2

= −3 = 4 = 3 = −2 = 3

SHIFT STO

এভাবে Matrix B Declare করি।

এভাবে Matrix B Declare করি।

SHIFT [MAT] 4 3 (MAT) 1 (A) ×

SHIFT [MAT] 4 3 (MAT) 2 (B) =

ধারাবাহিকভাবে এর ডান দিক চাপতে হবে।

AC SHIFT [MAT] 4 3 (MAT) 1 x^{-1} =

ধারাবাহিকভাবে এর ডান দিক চাপতে হবে।

নির্ণায়কে ক্যালকুলেটরের ব্যবহার

$A = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \end{vmatrix}$ এর মান নির্ণয়:

MODE 3 times 2 (MAT) SHIFT 4 1 1 (A)

3 = 3 = 3 = 1 = 2 = 4

= 3 = 2 = 3 = 5 = SHIFT 4

এর ডান দিক চাপতে হবে। 1 (Det) SHIFT 4

3 1 (A) = 24

বহুনির্বাচনি প্রশ্ন:

1. প্রদত্ত ম্যাট্রিক্সটি কর্ণ, স্কেলার ও অভেদক ম্যাট্রিক্স।
2. অপ্রতিসম (Skew symmetric) ম্যাট্রিক্সের ক্ষেত্রে- মূখ্যকর্ণের ভুক্তিগুলি শূন্য হয় এবং (i, j) ও (j, i) তম ভুক্তিদ্বয় পরস্পর সমান কিন্তু বিপরীত চিহ্ন যুক্ত হয় যেখানে $i \neq j$. ∴ Ans.: ক.
3. প্রতিসম ম্যাট্রিক্সের ক্ষেত্রে- (i, j) ও (j, i) তম ভুক্তিদ্বয় পরস্পর সমান ও সমচিহ্নযুক্ত হবে যেখানে $i \neq j$।
   ∴ $a = 4$. ∴ Ans. : ক.
4. সমাধান: $|A| = B \Rightarrow 6 + 4 = p(0 + 2)$
   $10 = 2p \Rightarrow p = 5$ ∴ Ans. : ঘ.
5. বিপ্রতিসম (Skew symmetric) ম্যাট্রিক্সের ক্ষেত্রে- মুখ্যকর্ণের ভুক্তিগুলি শূন্য এবং (i, j) ও

(j, i) তম ভুক্তিদ্বয় পরস্পর সমান কিন্তু বিপরীত চিহ্ন যুক্ত হয় যেখানে $i \neq j$.

$\therefore$ Ans. খ.

6. প্রদত্ত ম্যাট্রিক্সটির (i, j) ও (j, i) তম ভুক্তিদ্বয় পরস্পর সমান ও সমচিহ্নযুক্ত , যেখানে $i \neq j$; যা প্রতিসম ম্যাট্রিক্সের নিয়ম মেনে চলে।

$\therefore$ Ans. খ.

7. প্রদত্ত ম্যাট্রিক্সটি বর্গ ম্যাট্রিক্স ও স্কেলার ম্যাট্রিক্স এর নিয়ম মেনে চলে কিন্তু একক ম্যাট্রিক্স এর নিয়ম মেনে চলে। $\therefore$ Ans. খ.

8. প্রদত্ত ম্যাট্রিক্সটি বর্গ ম্যাট্রিক্স ও স্কেলার ম্যাট্রিক্স এর নিয়ম মেনে চলে কিন্তু অভেদ ম্যাট্রিক্স এর নিয়ম মেনে চলে। $\therefore$ Ans. খ.

9. প্রদত্ত ম্যাট্রিক্সটি প্রদত তিন প্রকারের ম্যাট্রিক্স এর নিয়ম মেনে চলে কিন্তু এর নিয়ম মেনে চলে।

$\therefore$ Ans. ঘ.

10. $$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & 1 \\ -1 & z \\ y & -3 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 3 \\ 4 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & 1 \\ -1 & z \\ y & -3 \end{bmatrix}$$

$\therefore (x, y, z) = (3, 4, 3)$ $\therefore$ Ans.: খ.

11. AX =B

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y \\ x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$\therefore (x, y) = (1, 2)$ $\therefore$ Ans.: খ.

12. $$A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+0 & 0+0 \\ 3+12 & 16 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 15 & 16 \end{bmatrix}$$ $\therefore$ Ans.: গ.

13. $\left.\begin{matrix} 2x-5y=3 \\ 2x-3y=1 \end{matrix}\right\}$ সমীকরণ জোটের সহগ ম্যাট্রিক্স.

$\begin{bmatrix} 2 & -5 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$ $\therefore$ Ans.: ঘ.

14. $$AB = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3-1 \\ 3+2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$\therefore$ Ans.: গ.

15. AB এর ক্রম = A এর সারি সংখ্যা $\times$ B এর কলাম সংখ্যা = 2×3 $\therefore$ Ans. খ

16. i ও iii সত্য এবং B এর ক্রম 2×3.

$\therefore$ Ans.: গ.

17. $$\begin{vmatrix} 5 & 6 & 7 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 4 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 0 \; [r_1' = r_1 - r_2, r_3' = r_3 + r_2]$$

$\therefore$ Ans.: গ.

18. $|A| = B \Rightarrow 15 + 9 = -p(0-12)$

$\Rightarrow 12p = 24 \Rightarrow p = 2$ $\therefore$ Ans. ক

19. বিপ্রতিসম ম্যাট্রিক্সের মূখ্যকর্ণের ভুক্তিগুলি শূন্য হয় এবং (i, j) ও (j, i) তম ভুক্তিদ্বয় পরস্পর সমান ও বিপরীত চিহ্নযুক্ত। $\therefore$ Ans. খ

20. $$A - 2B = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$\therefore$ Ans. ঘ

21. $|A| = -6$, $2|A| = \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$ কিন্তু B কটি অভেদ ম্যাট্রিক্স নয়। $\therefore$ Ans. গ.

22. **i ও ii** কিন্তু C ব্যতিক্রমীর ক্ষেত্রে $a = 4, -2$

$\therefore$ Ans. গ

23. সব তথ্যিই সত্য। $\therefore$ Ans. ঘ

24. $$AB = [1 \;\; 2 \;\; 2]\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} = [1+4-2] = [3]$$

$\therefore 4\,AB = [12]$ $\therefore$ Ans. খ

25. সব তথ্যই সত্য। $\therefore$ Ans. ঘ

26. (2, 3) তম ভুক্তি -2 এর সহগুণক

$= -(7 + 12) = -19$ $\therefore$ Ans. ক

27. $\det(A) = 5(15 - 14) = 5$ $\therefore$ Ans. গ

28. (1, 2) তম ভুক্তির সহগুণক 2 . $\therefore$ Ans. গ

29. (AB)C এর ক্রম = A এর সারি সংখ্যা $\times$ C এর কলাম সংখ্যা = 2×1 $\therefore$ Ans. খ

30. $$A^T - B^T = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

Ans. ঘ

31. নির্ণায়কের মান $= 4-6 = -2$

$\therefore$ **Ans.** ক

32. $A^{-1} = \frac{1}{2-0}\begin{bmatrix} 2 & +1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

Ans. ক

33. $4(C + I_2) = 4\left(\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right)$

$= 4\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$

$\therefore$ $|4(C + I_2)| = 4^2\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 16(-2) = -32$

$\therefore$ Ans. ক.

34. C ম্যাট্রিক্স-এর নির্ণায়কের মান শূন্য নয় বলে ইহা ব্যতিক্রমী ম্যাট্রিক্স নয়। $\therefore$ Ans. গ

35. নিয়ম: $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ ম্যাট্রিক্সের Adj. $= \begin{bmatrix} d & -c \\ -b & a \end{bmatrix}$

$A = \begin{bmatrix} 3 & 7 \\ 2 & -4 \end{bmatrix}$ এর Adjoint matrix

$= \begin{bmatrix} -4 & -7 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$ $\therefore$ Ans. ঘ

36. (2, 3) তম ভুক্তির সহগুণক

$= -\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 7 & 6 \end{vmatrix} = -(12+7) = -19$ $\therefore$ Ans. ক

37. সব তথ্যই সত্য। $\therefore$ Ans. ঘ

38. $\det(A) = 5(15-14) = 5$ $\therefore$ Ans. গ

39. ১ম ও ২য় কলামের অনুরূপ ভূক্তির অনুপাত সমান (1/2) বলে নির্ণয়কের মান শূন্য। $\therefore$ Ans. খ

40. (1, 2) তম ভুক্তির সহগুণক $= -(-9-54)$ $= 63$ $\therefore$ Ans. ঘ

41. (2, 3) তম ভুক্তি a, (3, 2) তম ভুক্তি 4 এর সমান হবে। $\therefore$ Ans. ক

42. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}$ হলে

$AB = \begin{bmatrix} 1+0 & -6 \\ -2+0 & 0-9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -6 \\ -2 & -9 \end{bmatrix}$

$\therefore$ Ans. খ

43. AB এর ক্রম = A এর সারির সংখ্যা $(3) \times$ B এর কলাম সংখ্যা $(3) = 3\times3$ $\therefore$ Ans. খ

44. (1, 2) তম ভুক্তির সহগুণক $-(-2) = 2$

$\therefore$ Ans. গ

45. নিয়ম: $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ ব্যতিক্রমী হলে, $ad = bc$.

$x = \frac{7\times10}{2} = 35$ $\therefore$ Ans. ক

46. $B^{-1} = \frac{1}{-45+42}\begin{bmatrix} -9 & -6 \\ +7 & 5 \end{bmatrix}$

$= \frac{-1}{3}\begin{bmatrix} -9 & -6 \\ 7 & 5 \end{bmatrix}$ $\therefore$ Ans. গ

47. Correction: $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}$

(AB)C ম্যাট্রিক্সের ক্রম কত?

ক. 2×3 খ. 2×1 গ. 2×1 ঘ. অনির্ণেয়

A এর কলাম সংখ্যা (2) ও B এর সারি সংখ্যা (3) অসমান বলে AB অর্থাৎ (AB)C নির্ণয়যোগ্য নয়। $\therefore$ Ans. ঘ

48. A এর বিপরীত ম্যাট্রিক্স $= \frac{1}{6-3}\begin{bmatrix} 3 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$

$= \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 3 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ $\therefore$ Ans. ক

49. (2, 1) তম ভুক্তির সহগুণক $= -2$ $\therefore$ Ans. ক

50. $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$ ম্যাট্রিক্স নির্ণায়কের মান = 0

$\therefore$ Ans. খ

51. **নিয়ম:** $AI = A$, $A \pm I$ এর ক্ষেত্রে এর মুখ্য কর্ণের ভুক্তির সাথে 1 করে যথাক্রমে যোগ ও বিয়োগ করতে হবে।

$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I_2$ বলে $AB = A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$

$\therefore$ Ans. গ

52. $A^T - B^T = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$

$\therefore$ Ans. ঘ

53. $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$, $X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ এবং

$AX = B \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$

$\Rightarrow \begin{bmatrix} 0+y \\ 2x+0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ $\therefore (x, y) = (1, 1)$

$\therefore$ Ans. ঘ

54. $A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+0 & 0+0 \\ 3+12 & 0+16 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 15 & 16 \end{bmatrix}$ $\therefore$ Ans. গ

55. $x + y = 4,\ x - y = 2 \Rightarrow 2x = 6, 2y = 2$

$\therefore\ (x,y) = (3, 1)$ $\therefore$ Ans. ক

56. ম্যাট্রিক্সটি ব্যতিক্রমী বলে,

$(m-2)(m-3) - 12 = 0$

$\Rightarrow m^2 - 5m + 6 - 12 = 0$

$\Rightarrow m^2 - 5m - 6 = 0 \Rightarrow (m-6)(m+1) = 0$

$\therefore m = 6, -1$ $\therefore$ Ans. খ

57. কতগুলি সংখ্যাকে বর্গাকারে সাজিয়ে উভয় পাশে | | দ্বারা আবদ্ধ করলে **নির্ণায়ক** উৎপন্ন হয়।

$\therefore \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$ একটি নির্ণায়ক। $\therefore$ Ans. ঘ

58. $2A = \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 4 & 8 \end{bmatrix}$ $\therefore$ Ans. ক

59. $A^{-1} = \frac{1}{4-6}\begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{-2}\begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} -2 & 3/2 \\ 1 & -1/2 \end{bmatrix}$ $\therefore$ Ans. গ

60. $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I_3$ বলে সব তথ্যই সত্য।

$\therefore$ Ans. ঘ

61. $A = \begin{bmatrix} 10 & 4 & 6 \\ 7 & 9 & 8 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 10 & 4 & 6 \\ x+1 & 9 & 8 \end{bmatrix}$

এবং $A = B$ বলে, $x + 1 = 7 \Rightarrow x = 6$

$\therefore$ Ans. ক

62. আয়তাকার ম্যাট্রিক্স যার ক্রম 2×3; যা নির্ণায়ক আকারে প্রকাশ যোগ্য নয়। $\therefore$ Ans. ক

63. A এর ক্রম 2×3. $\therefore$ A^T এর ক্রম 3×2

$\therefore$ Ans. গ

64. দুইটি ম্যাট্রিক্সের যোগ বা বিয়োগের ক্ষেত্রে তাদের ক্রম অবশ্যই সমান হতে হবে। আবার দুইটি ম্যাট্রিক্সের গুণের ক্ষেত্রে ১ম ম্যাট্রিক্সের কলাম সংখ্যা ২য় ম্যাট্রিক্সের সারি সংখ্যার সমান হতে হবে। $\therefore$ AB নির্ণয়যোগ্য

$\therefore$ Ans. ক

65. $A^{-1} = \frac{1}{15+12}\begin{bmatrix} 3 & -6 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} = \frac{1}{27}\begin{bmatrix} 3 & -6 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$

$\therefore$ Ans. ক

66. (1, 2) তম অনুরাশি $= 12 - 6 = 6$

$\therefore$ Ans. খ [বি.দ্র.: প্রথমে সহজ option যাচাই করতে হবে]

67. AB এর ক্রম $= 3 \times 1$ $\therefore$ Ans. গ

68. (1, 2) তম ভুক্তির সহগুণক $= -(a_2c_3 - a_3c_2)$

$= a_3c_2 - a_2c_3$ $\therefore$ Ans. খ

69. -6 এর অনুরাশির মান $= (-30 + 30) = 0$

$\therefore$ Ans. খ

70. |A| এর মান $= -5(-35 + 36) - 4(50 - 48)$

$- 3(-60 + 56) = -5 - 8 + 12 = -1$

$\therefore$ Ans. খ

71. BA এবং A^TB^T নির্ণয়যোগ্য। $\therefore$ Ans. গ

72. $\left.\begin{array}{l} 2x - 3y = 2 \\ 2y - x = -1 \end{array}\right\}$ সমীকরণ জোটের ম্যাট্রিক্স

আকার $\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$ $\therefore$ Ans. ক

73. $\begin{bmatrix} -1 & -2 \\ -3 & 6 \end{bmatrix}$ এর নির্ণায়কের মান অশূন্য বলে তার বিপরীত ম্যাট্রিক্স নির্ণয়যোগ্য। $\therefore$ Ans. ঘ

74. $AB = \begin{bmatrix} 4-6 & 4-6 \\ -4+6 & -4+6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$

$\therefore$ Ans. ঘ

75. ম্যাট্রিক্সটি ব্যতিক্রমী বলে,

$(m-2)(m-3)-12=0$

$\Rightarrow m^2-5m+6-12=0$

$\Rightarrow m^2-5m-6=0 \Rightarrow (m-6)(m+1)=0$

$\therefore m=6,-1$ $\therefore$ Ans. ক

76. $A^{-1}=\frac{1}{49-48}\begin{bmatrix}7 & -6\\ -8 & 7\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}7 & -6\\ -8 & 7\end{bmatrix}$

$\therefore$ Ans. গ

77. যদি $A=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{bmatrix}, X=\begin{bmatrix}-y\\ x\end{bmatrix}$ হয় তবে,

X এর কলাম সংখ্যা (1) ও A^2 এর সারি সংখ্যা (2) অসমান বলে XA^2 নির্ণয়যোগ্য নয়।

$\therefore$ Ans. ঘ

78. $|2A|=2\times2\times2|A|=8\times(-7)=-56$.

$2A\times(2A)^{-1}=I\Rightarrow(2A)^{-1}=\frac{I}{2A}$

$\therefore |(2A)^{-1}|=\frac{|I|}{|2A|}=\frac{1}{-56}$ $\therefore$ Ans. খ

79. I এর ক্রম 3×3 হওয়ায় I^3 একটি 3×3 ক্রমের একক ম্যাট্রিক্স হবে। $\therefore AI^3=A$

$\therefore$ Ans. খ

80. *iii* নং option সত্য নয়। $\therefore$ Ans. ক

81. বিপরীত ম্যাট্রিক্স $=\frac{1}{6-4}\begin{bmatrix}3 & -1\\ -4 & 2\end{bmatrix}$

$=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}3 & -1\\ -4 & 2\end{bmatrix}$ $\therefore$ Ans. খ

82. $\begin{vmatrix}p & 2 & q+r\\ q & 2 & r+p\\ r & 2 & p+q\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}p & 2 & p+q+r\\ q & 2 & p+q+r\\ r & 2 & p+q+r\end{vmatrix}$, $[c_3'=c_3+c_1]$

$=0$

$\therefore$ Ans. ক

83. AB এর ক্রম = A এর সারি সংখ্যা $\times$ B এর কলাম সংখ্যা $=2\times3$ $\therefore$ Ans. খ

84. (2, 1) তম ভুক্তির সহগুণক $=-(0-7)=7$

$\therefore$ Ans. ঘ

85. A ম্যাট্রিক্সের অশূন্য ভুক্তিসমূহ সমান নয় বলে ইহা স্কেলার ম্যাট্রিক্স নয়। $\therefore$ Ans. খ

86. $\begin{pmatrix}a & 0 & 0\\ 0 & b & 0\\ 0 & 0 & c\end{pmatrix}$ ম্যাট্রিক্সের বিপরীত ম্যাট্রিক্স

$\begin{pmatrix}\frac{1}{a} & 0 & 0\\ 0 & \frac{1}{b} & 0\\ 0 & 0 & \frac{1}{c}\end{pmatrix}$

$\therefore$ Ans. ঘ

87. BA ম্যাট্রিক্সর ক্রম 4×3 $\therefore$ Ans. গ

88. অশূন্য ভুক্তিগুলি সমান নয় বলে প্রদত্ত ম্যাট্রিক্সটি স্কেলার নয়। $\therefore$ Ans. খ

89. $A^{-1}=\frac{1}{32-30}\begin{bmatrix}4 & 5\\ 6 & 8\end{bmatrix}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}4 & 5\\ 6 & 8\end{bmatrix}$

$\therefore$ Ans. ক

90. $\begin{pmatrix}1 & -2 & 3\\ 0 & 1 & -2\\ -1 & 0 & 2\end{pmatrix}$ এর (1, 2) তম ভুক্তির সহগুণক $=-(0-2)=2$ $\therefore$ Ans. গ

91. প্রতিসম ম্যাট্রিক্স এর (i, j) ও (j, i) তম ভুক্তিদ্বয় পরস্পর সমান ও সমচিহ্নযুক্ত হয়। $\therefore a=4$

$\therefore$ Ans. ঘ

92. সব তথ্যই সত্য। $\therefore$ Ans. ঘ

93. $\begin{vmatrix}0 & 1\\ 2 & -1\end{vmatrix}$ এর মান $=(0-2)=-2$

$\therefore$ Ans. খ

94. $A=\begin{bmatrix}3 & 1\\ 2 & 0\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}6\\ 4\end{bmatrix}, X=\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}$ এবং

$AX=B\Rightarrow\begin{bmatrix}3x+y\\ 2x+0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6\\ 4\end{bmatrix}$

$\Rightarrow 2x=4\Rightarrow x=2, 3x+y=6\Rightarrow y=0$

$\therefore (x,y)=(2,0)$ $\therefore$ Ans. ক

95. ১ম ও ২য় সারি সমান হলে নির্ণায়কটির মান শূন্য হয়। সেক্ষেত্রে, $p=3$. $\therefore$ Ans. ঘ

96. $A-2I=\begin{vmatrix}3-2 & 5 & 1\\ 4 & 0-2 & 2\\ 1 & 6 & 4-2\end{vmatrix}=$

$\begin{vmatrix}1 & 5 & 1\\ 4 & -2 & 2\\ 1 & 6 & 2\end{vmatrix}$

$\therefore$ Ans. খ

97. AB ম্যাট্রিক্সের ক্রম $= 4\times4$ $\therefore$ Ans. গ

98. সব তথ্যই সত্য। $\therefore$ Ans. ঘ

99. i নং Option নির্ণায়কের বৈশিষ্ট মেনে চলে।
$\therefore$ Ans. ক

100. $A=\begin{bmatrix}a & 0\\ 0 & b\end{bmatrix}$ $A^{-1}=\begin{bmatrix}\frac{1}{a} & 0\\ 0 & \frac{1}{b}\end{bmatrix}$

$\therefore$ Ans. খ

101. $\begin{vmatrix}4 & 0 & 8\\ 2 & 3 & 4\\ 1 & 5 & 2\end{vmatrix}$ এর ১ম ও ৩য় কলামের অনুরূপ ভুক্তির অনুপাত সমান হওয়ায় এর মান শূন্য।

102. যেকোনো ক্রমের একক ম্যাট্রিক্স I এর বিপ্রতীত ম্যাট্রিক্স I. $\therefore$ Ans. খ

103. ম্যাট্রিক্স এর কোনো মান নেই। $|A-B|=0$ এর সমার্থক- $|A|=0$ অথবা $|B|=0$ $\therefore$ Ans. খ

ভর্তি পরীক্ষার MCQ (অতিরিক্ত) ঃ

ম্যাট্রিক্স ঃ

1. যদি $A=\begin{bmatrix}2 & 0\\ 0 & -3\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}3 & 0\\ 5 & 1\end{bmatrix}$ হয়, তবে AB এর সমান – **[DU 05-06; Jt.U 08-09, 09-10; JU.09-10; R.U.08-09]**

$Sol^n.:$ $AB=\begin{bmatrix}2 & 0\\ 0 & -3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3 & 0\\ 5 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6 & 0\\ -15 & -3\end{bmatrix}$

[বি.দ্র.: ক্যালকুলেটরের সাহায্যেও ম্যাট্রিক্সের সমাধান করা যায়।]

2. $A=\begin{bmatrix}2 & -3\\ 3 & 2\end{bmatrix}$ হলে, A^2 সমান– **[DU 04-05; RU,'07-08; JU.09-10]**

$Sol^n.:$ $A^2=\begin{bmatrix}2 & -3\\ 3 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & -3\\ 3 & 2\end{bmatrix}$

$=\begin{bmatrix}4-9 & -6-6\\ 6+6 & -9+4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-5 & -12\\ 12 & -5\end{bmatrix}$

3. $A=\begin{bmatrix}1\\ 2\\ 3\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}4 & 5 & 6\end{bmatrix}$ হলে AB কত? **[CU 07-08]**

a. $\begin{bmatrix}3 & 2\end{bmatrix}$ **b.** $\begin{bmatrix}1 & 4\\ 2 & 5\\ 3 & 6\end{bmatrix}$ **c.** $\begin{bmatrix}5\\ 7\\ 9\end{bmatrix}$ **d.** $\begin{bmatrix}4 & 5 & 6\\ 8 & 10 & 12\\ 12 & 15 & 18\end{bmatrix}$

$Sol^n.:$ AB এর মাত্রা হবে $(3\times1).(1\times3)=3\times3$

4. $A=\begin{bmatrix}0 & 0 & 2i\\ 0 & 2i & 0\\ 2i & 0 & 0\end{bmatrix}$ হলে, A^2+4I সমান– **[CU 06-07]**

$Sol^n.:$ $A^2+4I=\begin{bmatrix}0 & 0 & (2i)^2\\ 0 & (2i)^2 & 0\\ (2i)^2 & 0 & 0\end{bmatrix}$

$+\begin{bmatrix}4 & 0 & 0\\ 0 & 4 & 0\\ 0 & 0 & 4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4 & 0 & -4\\ 0 & 0 & 0\\ -4 & 0 & 4\end{bmatrix}$

5. $M=\begin{bmatrix}2 & 0\\ 0 & 2\end{bmatrix}$ হলে $M^2=$? **[CU 02-03]**

$Sol^n.:$ $M^2=\begin{bmatrix}2^2 & 0\\ 0 & 2^2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4 & 0\\ 0 & 4\end{bmatrix}$

6. $\begin{bmatrix}x-y & 1\\ 7 & x+y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}8 & 1\\ 7 & 2\end{bmatrix}$ হলে $(x,y)=$? **[DU 02-03]**

$Sol^n.:$ $x-y=8, x+y=2 \therefore (x,y)=(5,-3)$

7. $\begin{bmatrix}3 & 2\\ 1 & -2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5\\ 7\end{bmatrix}$ হলে $(x,y)=$? **[CU 05-06]**

$Sol^n.:$ $3x+2y=5$, $x-2y=7$

$\therefore (x, y) = (3, -2)$

8. $\begin{bmatrix} p-4 & 8 \\ 2 & p+2 \end{bmatrix}$ **ম্যাট্রিক্সটি ব্যতীক্রমী হবে যদি p এর মান –** **[DU 09-10, 07-08]**

$Sol^n.: (p-4)(p+2)-16=0$

$\Rightarrow p^2-2p-8-16=0 \Rightarrow p^2-2p-24=0$

$\therefore p=-6, 4$

9. $\begin{bmatrix} \alpha+3 & 6 \\ 5 & \alpha-4 \end{bmatrix}$ **ম্যাট্রিক্সটি ব্যতীক্রমী হবে যদি α এর মান –** **[Jt.U 07-08]**

$Sol^n.: (\alpha+3)(\alpha-4)-30=0$

$\Rightarrow \alpha^2-\alpha-42=0 \therefore \alpha = 7, -6$

কৌশল ঃ 2×2 অব্যতীক্রমী ম্যাট্রিক্স $A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ এর বিপরীত ম্যাট্রিক্স $A^{-1}=\frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$

10. যদি $A=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ হয় তবে $A^{-1}=?$ **[DU 06-07; Jt.U 06-07]**

$Sol^n.: A^{-1}=\frac{1}{4-6}\begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$

11. যদি $A=\begin{bmatrix} 5 & 2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$ হয় তবে $A^{-1}=?$ **[Jt.U 07-08]**

$Sol^n.: A^{-1}=\frac{1}{5+6}\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$

12. $A=\begin{bmatrix} 4 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ হলে AB কত? **[BUET 08-09; NU 09-10; CU 07-08]**

a. $\begin{bmatrix} 4 & -29 \end{bmatrix}$ b. $\begin{vmatrix} 4 & 8 & 12 \\ -1 & -2 & -3 \\ 3 & 6 & 9 \end{vmatrix}$ c. $\begin{bmatrix} 4 \\ -2 \\ 9 \end{bmatrix}$ d. $\begin{bmatrix} 11 \end{bmatrix}$

$Sol^n.:$ AB ম্যাট্রিক্সের মাত্রা = A এর সারি $\times$ B এর কলাম = 3×3 $\therefore$ Ans. b.

13. যদি $A=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$, $X=\begin{bmatrix} y \\ -x \end{bmatrix}$ হয়, তবে XA^2 হবে– **[BUET 11-12]**

A. $\begin{bmatrix} -x \\ -y \end{bmatrix}$ B. $\begin{bmatrix} x \\ -y \end{bmatrix}$ C. $\begin{bmatrix} -y \\ -x \end{bmatrix}$ D. কোনটি নয়।

$Sol^n.: XA^2$ নির্ণয় যোগ্য নয়।

14. A, B, C ম্যাট্রিক্সগুলির মাত্রা যথাক্রমে 4×5, 5×4, 4×2 হলে $(A^T+B)C$ এর মাত্রা হবে- **[BUET 10-11]**

$Sol^n.: A^T$ এর মাত্রা $= 5\times 4$, (A^T+B) এর মাত্রা $= 5\times 4$, $(A^T+B)C = 5\times 2$

নির্ণায়ক ঃ

1. নির্ণায়ক $\begin{vmatrix} x+y & x & y \\ x & x+z & z \\ y & z & y+z \end{vmatrix}$ এর মান–

[DU 08-09, 05-06, Jt.U06-07; RU 05-06;KUET 10-11, 08-09; BAU 08-09]

A. 4xyz B. 3xyz C. 2xyz D. xyz

$Sol^n.: x=1, y=2, z=3$ হলে

$\Delta=\begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \end{vmatrix} = 24$ (ক্যালকুলেটরের সাহায্যে)

Option গুলোতে x =1, y = 2, z = 3 বসালে A = 24 হয়। $\therefore$ **Ans. A.**

2. নির্ণায়ক $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}$ এর মান কত? **[RU 07-08]**

A. $(a-b)(b-c)(c-a)$ B. $(a^2-b^2)(b-c)(c-a)$
C. $(a-b)(b^2-c^2)(c-a)$ D. $(a-b)(b-c)(c^2-a^2)$

$Sol^n.: a=1, b=2, c=3$ হলে, $\Delta=2$

Option গুলোতে a = 1, b = 2, c = 3 বসালে A = 2 হয়। $\therefore$ **Ans. A.**

অন্যভাবে বলা যায়– নির্ণায়কে a , b, c এর উপস্থিতি সমভাবে বলে নির্ণায়কের মানেও a , b, c এর উপস্থিতি সমভাবে হবে।

3. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & a & b \\ x^2 & a^2 & b^2 \end{vmatrix} = 0$ হলে $x = ?$ **[DU 03-04; CU 02-03]**

Sol^n.: $x = a$ হলে $C_1 = C_2$ হয় . ∴ $\Delta = 0$

$x = b$ হলে $C_1 = C_3$ হয় . ∴ $\Delta = 0$

∴ $x = a$ or b

4. $\begin{vmatrix} 50 & 60 & 70 \\ 10 & 20 & 30 \\ 30 & 60 & 90 \end{vmatrix}$ নির্ণায়কের মান – **[Jt.U 08-09]**

Sol^n.: এখানে $r_3 = 3r_2$. ∴ $\Delta = 0$

5. x এর মান কত হলে $\begin{vmatrix} x^2 & x & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -5 \end{vmatrix} = 0$ হবে–

Sol^n.: $x = 0$ হলে $\Delta = 0$ হয় । **[BUET 05-06]**

$x = 2$ হলে $\Delta = 2(4-4) = 0$ হয় ।

6. $\begin{vmatrix} a-3 & -1 \\ -8 & a+4 \end{vmatrix}$ নির্ণায়কটির মান শূন্য হলে a এর মান কত হবে? **[DU 07-08]**

Sol^n.: $a^2 + a - 12 - 8 = 0 \Rightarrow a^2 + a - 20 = 0$

∴ $a = -5$ or 4

সৃজনশীল প্রশ্ন:

1. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -3 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

ক. AB নির্ণয় কর।

সমাধান : $AB = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 4 & -3 & 4 \end{bmatrix}$ (Ans.)

খ. দেখাও যে, $A^2 + 2A - 11I$ একটি শূন্য ম্যাট্রিক্স; যেখানে $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

প্রমাণ: প্রশ্নমালা IA এর 5(a) নং প্রশ্নের উত্তর দ্রষ্টব্য ।

গ. A^{-1} নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ | A | এর সহগুণকগুলি হচ্ছে, $A_{11} = -3$, $A_{12} = -4$, $A_{21} = -2$, $A_{22} = 1$

$$\therefore \quad A^{-1} = \frac{1}{|A|}\text{Adj}(A) = \frac{1}{-11}\begin{bmatrix} -3 & -4 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}^T$$

$$= -\frac{1}{11}\begin{bmatrix} -3 & -2 \\ -4 & 1 \end{bmatrix}$$

2. $C = \begin{bmatrix} x+2 & 3 & 5 \\ 5 & x+3 & 2 \\ 4 & 2 & x+4 \end{bmatrix}$

ক. $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -3 \\ 1 & -1 & 0 \\ 4 & 0 & -2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 1 \\ -1 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ হলে AB এর ট্রেস নির্ণয় কর।

সমাধান: $AB = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -3 \\ 1 & -1 & 0 \\ 4 & 0 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 & -2 & 1 \\ -1 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} 12-2-3 & -6+0+0 & 3+6+3 \\ 4+1+0 & -2+0+0 & 1-3+0 \\ 16+0-2 & -8+0+0 & 4+0+2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 7 & -6 & 12 \\ 5 & -2 & -2 \\ 14 & -8 & 6 \end{bmatrix}$$

∴ AB এর ট্রেস $= 7 - 2 + 6 = 11$ (Ans.)

খ. C ব্যতিক্রমী ম্যাট্রিক্স হলে x এর মান নির্ণয় কর।

সমাধান: $C = \begin{bmatrix} x+2 & 3 & 5 \\ 5 & x+3 & 2 \\ 4 & 2 & x+4 \end{bmatrix}$

ব্যতিক্রমী ম্যাট্রিক্স ।

$$\therefore \quad |C| = \begin{vmatrix} x+2 & 3 & 5 \\ 5 & x+3 & 2 \\ 4 & 2 & x+4 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} x+10 & 3 & 5 \\ x+10 & x+3 & 2 \\ x+10 & 2 & x+4 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow (x+10)\begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 1 & x+3 & 2 \\ 1 & 2 & x+4 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow (x+10)\begin{vmatrix}0 & -x & 3\\ 0 & x+1 & -x-2\\ 1 & 2 & x+4\end{vmatrix}=0$$

$$\Rightarrow (x+10)\,1.(x^2+2x-3x-3)=0$$

$$\Rightarrow (x+10)(x^2-x-3)=0$$

$x+10=0$ হলে, $x=-10$

$x^2-x-3=0$ হলে,

$$x=\frac{1\pm\sqrt{1-4.1(-3)}}{2.1}=\frac{1\pm\sqrt{13}}{2}$$

$$\therefore\ x=-10,\ \frac{1\pm\sqrt{13}}{2}$$

গ. $x=1$ এবং $DC=\begin{bmatrix}-7 & -5 & 1\\ 15 & 15 & 14\end{bmatrix}$ হলে D নির্ণয় কর।

সমাধান: $x=1$ হলে, $C=\begin{bmatrix}3 & 3 & 5\\ 5 & 4 & 2\\ 4 & 2 & 5\end{bmatrix}$

প্রশ্নমতে, $DC=\begin{bmatrix}-7 & -5 & 1\\ 15 & 15 & 14\end{bmatrix}$

$$\therefore\ D=\begin{bmatrix}-7 & -5 & 1\\ 15 & 15 & 14\end{bmatrix}C^{-1}$$

এখন, $|C|=\begin{vmatrix}3 & 3 & 5\\ 5 & 4 & 2\\ 4 & 2 & 5\end{vmatrix}$

$=3(20-4)-3(25-8)+5(10-16)$

$=48-51-30=-33$

$$\left|\begin{array}{ccccc}3 & 3 & 5 & 3 & 3\\ 5 & 4 & 2 & 5 & 4\\ 4 & 2 & 5 & 4 & 2\\ 3 & 3 & 5 & 3 & 3\\ 5 & 4 & 2 & 5 & 4\end{array}\right.$$

$$\text{Adj }(C)=\begin{bmatrix}20-4 & 8-25 & 10-16\\ 10-15 & 15-20 & 12-6\\ 6-20 & 25-6 & 12-15\end{bmatrix}^T$$

$$=\begin{bmatrix}16 & -17 & -6\\ -5 & -5 & 6\\ -14 & 19 & -3\end{bmatrix}^T=\begin{bmatrix}16 & -5 & -14\\ -17 & -5 & 19\\ -6 & 6 & -3\end{bmatrix}$$

$$\therefore\ C^{-1}=\frac{1}{|C|}\text{Adj }(C)$$

$$=\frac{1}{-33}\begin{bmatrix}16 & -5 & -14\\ -17 & -5 & 19\\ -6 & 6 & -3\end{bmatrix}$$

$$\therefore\ D=\frac{1}{-33}\begin{bmatrix}-7 & -5 & 1\\ 15 & 15 & 14\end{bmatrix}\begin{bmatrix}16 & -5 & -14\\ -17 & -5 & 19\\ -6 & 6 & -3\end{bmatrix}$$

$$=\frac{1}{-33}\begin{bmatrix}-112+85-6 & 35+25+6 & 98-95-3\\ 240-255-84 & -75-75+84 & -210+285-42\end{bmatrix}$$

$$=\frac{1}{-33}\begin{bmatrix}-33 & 66 & 0\\ -99 & -66 & 33\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & -2 & 0\\ 3 & 2 & -1\end{bmatrix}$$

3. $A^{-1}=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & p & p^2\\ 1 & p^2 & p^4\end{bmatrix}$.

ক. $A=\begin{bmatrix}2 & -3\\ 3 & 2\end{bmatrix}$ হলে A^2+A নির্ণয় কর।

সমাধান: A^2+A

$$=\begin{bmatrix}2 & -3\\ 3 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & -3\\ 3 & 2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}2 & -3\\ 3 & 2\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}4-9 & -6-6\\ 6+6 & -9+4\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}2 & -3\\ 3 & 2\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}-5 & -12\\ 12 & -5\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}2 & -3\\ 3 & 2\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}-5+2 & -12-3\\ 12+3 & -5+2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-3 & -15\\ 15 & -3\end{bmatrix}$$

খ. প্রমাণ কর যে, $|A^{-1}|=p(p-1)^2(p^2-1)$

সমাধান: প্রশ্নমালা IB এর 1(a) নং প্রশ্ন।

গ. নির্ণায়কের সাহায্যে সমাধান কর :

$$A^{-1}\times\begin{bmatrix}x\\ y\\ z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5\\ 7\\ 11\end{bmatrix},\ \text{যখন } p=2.$$

সমাধান: $p=2$ হলে,

$$A^{-1}=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 2^2\\ 1 & 2^2 & 2^4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 4\\ 1 & 4 & 16\end{bmatrix}$$

$$4C = 4\begin{bmatrix}0 & 1 & 3\\1 & 2 & 1\\2 & 3 & 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 4 & 12\\4 & 8 & 4\\8 & 12 & 4\end{bmatrix}$$

$$\therefore\ AB + 4C - I = \begin{bmatrix}-6 & -7 & 7\\12 & -37 & 23\\-5 & -14 & 12\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0 & 4 & 12\\4 & 8 & 4\\8 & 12 & 4\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix}-6+0-1 & -7+4+0 & 7+12+0\\12+4+0 & -37+8-1 & 23+4+0\\-5+8+0 & -14+12+0 & 12+4-1\end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix}-7 & -3 & 19\\16 & -30 & 27\\3 & -2 & 15\end{bmatrix} \text{ (Ans.)}$$

গ. $(C^T)^{-1}$ নির্ণয় কর।

সমাধান: $C = \begin{bmatrix}0 & 1 & 3\\1 & 2 & 1\\2 & 3 & 1\end{bmatrix}$

$$\therefore\ C^T = \begin{bmatrix}0 & 1 & 3\\1 & 2 & 1\\2 & 3 & 1\end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix}0 & 1 & 2\\1 & 2 & 3\\3 & 1 & 1\end{bmatrix}$$

C^T ম্যাট্রিক্সের নির্ণায়ক, $|C^T| = 0(2-3) - 1(1-9) + 2(1-6) = 0 + 8 - 10 = -2$

C^T এর অনুবন্ধী ম্যাট্রিক্স, $Adj(C^T)$

$$= \begin{bmatrix}2-3 & -(1-9) & 1-6\\-(1-2) & 0-6 & -(0-3)\\3-4 & -(0-2) & 0-1\end{bmatrix}^T$$

$$= \begin{bmatrix}-1 & 8 & -5\\1 & -6 & 3\\-1 & 2 & -1\end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix}-1 & 1 & -1\\8 & -6 & 2\\-5 & 3 & -1\end{bmatrix}$$

$$\therefore\ (C^T)^{-1} = \frac{1}{|C^T|} Adj\,(C^T)$$

$$= \frac{1}{-2}\begin{bmatrix}-1 & 1 & -1\\8 & -6 & 2\\-5 & 3 & -1\end{bmatrix} \text{ (Ans.)}$$

7. $A = \begin{bmatrix}1 & 2 & -1\\3 & -1 & 3\\2 & 3 & 1\end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix}1 & 1 & 0\\-1 & -2 & 2\\0 & -1 & 1\end{bmatrix}$

ক. $\begin{bmatrix}a+5 & 5\\4 & 2\end{bmatrix}$ একটি ব্যতিক্রমী ম্যাট্রিক্স হলে, a এর মান নির্ণয় কর।

সমাধান: প্রদত্ত ম্যাট্রিক্সটি ব্যতিক্রমী বলে,

$$\begin{vmatrix}a+5 & 5\\4 & 2\end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 2a + 10 - 20 = 0$$

$$\Rightarrow 2a = 10 \Rightarrow a = 5$$

খ. $|(2AB)^{-1}|$ নির্ণয় কর।

সমাধান: $AB = \begin{bmatrix}1 & 2 & -1\\3 & -1 & 3\\2 & 3 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1 & 0\\-1 & -2 & 2\\0 & -1 & 1\end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix}1-2+0 & 1-4+1 & 0+4-1\\3+1+0 & 3+2-3 & 0-2+3\\2-3+0 & 2-6-1 & 0+6+1\end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix}-1 & -2 & 3\\4 & 2 & 1\\-1 & -5 & 7\end{bmatrix}$$

$$\therefore\ 2AB = 2\begin{bmatrix}-1 & -2 & 3\\4 & 2 & 1\\-1 & -5 & 7\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-2 & -4 & 6\\8 & 4 & 2\\-2 & -10 & 14\end{bmatrix}$$

$$\therefore\ |2AB| = \begin{vmatrix}-2 & -4 & 6\\8 & 4 & 2\\-2 & -10 & 14\end{vmatrix} = 2^3\begin{vmatrix}-1 & -2 & 3\\4 & 2 & 1\\-1 & -5 & 7\end{vmatrix}$$

$$= 8\{-1(14+5) + 2(28+1) + 3(-20+2)\}$$

$$= 8\{-19 + 58 - 54\} = -120$$

এখন, $(2AB)(2AB)^{-1} = I$

$$\Rightarrow (2AB)^{-1} = \frac{I}{2AB}$$

$$\therefore\ |(2AB)^{-1}| = \frac{|I|}{|2AB|} = \frac{1}{-120}$$

গ. বিপরীত ম্যাট্রিক্সের সাহায্যে সমাধান কর:

$$A \times \begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}5\\7\\11\end{bmatrix}$$

সমাধানঃ দেওয়া আছে, $A\times\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5\\7\\11\end{bmatrix}$

$\therefore \begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=A^{-1}\times\begin{bmatrix}5\\7\\11\end{bmatrix}$

এখন, $|A|=\begin{vmatrix}1&2&-1\\3&-1&3\\2&3&1\end{vmatrix}$

$=1(-1-9)-2(3-6)-1(9+2)$
$=-10+6-11=-15$

$\therefore \text{Adj}(A)=\begin{bmatrix}-1-9&-(3-6)&9+2\\-(2+3)&1+2&-(3-4)\\6-1&-(3+3)&-1-6\end{bmatrix}^T$

$=\begin{bmatrix}-10&3&11\\-5&3&1\\5&-6&-7\end{bmatrix}^T=\begin{bmatrix}-10&-5&5\\3&3&-6\\11&1&-7\end{bmatrix}$

$\therefore A^{-1}=\dfrac{1}{|A|}\text{Adj}(A)$

$=\dfrac{1}{-15}\begin{bmatrix}-10&-5&5\\3&3&-6\\11&1&-7\end{bmatrix}$

$=\begin{bmatrix}2/3&1/3&-1/3\\-1/5&-1/5&2/5\\-11/15&-1/15&7/15\end{bmatrix}$

$\therefore \begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2/3&1/3&-1/3\\-1/5&-1/5&2/5\\-11/15&-1/15&7/15\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}5\\7\\11\end{bmatrix}$

$=\begin{bmatrix}\frac{10}{3}+\frac{7}{3}-\frac{11}{3}\\-\frac{5}{5}-\frac{7}{5}+\frac{22}{5}\\-\frac{55}{15}-\frac{7}{15}+\frac{77}{15}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\2\\1\end{bmatrix}$

$\therefore x=2, y=2, z=1$

8. $A=\begin{bmatrix}2&-1&-1\\1&-2&1\\1&-1&2\end{bmatrix}$, $f(x)=x^3-2x^2+3x$

ক. $\begin{bmatrix}1&-5&3\\4&0&5\\9&6&8\end{bmatrix}$ ম্যাট্রিক্সটি ব্যতিক্রমী কিনা প্রমাণ কর।

প্রমাণঃ $\begin{vmatrix}1&-5&3\\4&0&5\\9&6&8\end{vmatrix}=1(0-30)+5(32-45)$
$+3(24-0)$
$=-30-65+72=-23\neq 0$

$\therefore$ প্রদত্ত ম্যাট্রিক্সটি ব্যতিক্রমী নয়।

খ. $AB=I$ হলে B নির্ণয় কর।

সমাধানঃ যেহেতু $AB=I$ সুতরাং $B=A^{-1}$

দেওয়া আছে, $A=\begin{bmatrix}2&-1&-1\\1&-2&1\\1&-1&2\end{bmatrix}$

$|A|=\begin{vmatrix}2&-1&-1\\1&-2&1\\1&-1&2\end{vmatrix}$

$=2(-4+1)+1(2-1)-1(-1+2)$
$=-6+1-1=-6$

$\therefore \text{Adj}(A)=\begin{bmatrix}-4+1&-(2-1)&-1+2\\-(-2-1)&4+1&-(-2+1)\\-1-2&-(2+1)&-4+1\end{bmatrix}^T$

$=\begin{bmatrix}-3&-1&1\\3&5&1\\-3&-3&-3\end{bmatrix}^T=\begin{bmatrix}-3&3&-3\\-1&5&-3\\1&1&-3\end{bmatrix}$

$\therefore B=A^{-1}=\dfrac{1}{|A|}\text{Adj}(A)$

$=\dfrac{1}{-6}\begin{bmatrix}-3&3&-3\\-1&5&-3\\1&1&-3\end{bmatrix}$ (Ans.)

গ. $f(A)=I$ সমীকরণ হতে A^{-1} নির্ণয় কর।

সমাধানঃ দেওয়া আছে, $f(x)=x^3-2x^2+3x$

$\therefore f(A)=A^3-2A^2+3A$

প্রশ্নমতে, $f(A)=I\Rightarrow A^3-2A^2+3A=I$

$\Rightarrow A^{-1}(A.A^2-2A.A+3A)=A^{-1}I$

$\Rightarrow (A^{-1}.A).A^2-2(A^{-1}A).A+3(A^{-1}A)$
$=A^{-1}$

$\Rightarrow I.A^2 - 2(I.A) + 3I = A^{-1}$

$\Rightarrow A^{-1} = A.A - 2A + 3I$

$$= \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix} - 2\begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix} + 3\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 4-1-1 & -2+2+1 & -2-1-2 \\ 2-2+1 & -1+4-1 & -1-2+2 \\ 2-1+2 & -1+2-2 & -1-1+4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -4 & 2 & 2 \\ -2 & 4 & -2 \\ -2 & 2 & -4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 1 & -5 \\ 1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -4 & 2 & 2 \\ -2 & 4 & -2 \\ -2 & 2 & -4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2-4+3 & 1+2+0 & -5+2+0 \\ 1-2+0 & 2+4+3 & -1-2+0 \\ 3-2+0 & -1+2+0 & 2-4+3 \end{bmatrix}$$

$$\therefore A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -3 \\ -1 & 9 & -3 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \text{ (Ans.)}$$

9. $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 5 & 2 \\ 2 & 5 & 11 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 3 \\ 3 & 0 & 5 \\ 5 & 2 & 6 \end{bmatrix}$

ক. $(A+B)^T$ নির্ণয় কর।

সমাধান: $A + B = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 5 & 2 \\ 2 & 5 & 11 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & -1 & 3 \\ 3 & 0 & 5 \\ 5 & 2 & 6 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} 2+3 & 2-1 & 2+3 \\ 2+3 & 5+0 & 2+5 \\ 2+5 & 5+2 & 11+6 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 5 & 1 & 5 \\ 5 & 5 & 7 \\ 7 & 7 & 17 \end{bmatrix}$$

$$\therefore (A+B)^T = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 5 \\ 5 & 5 & 7 \\ 7 & 7 & 17 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5 & 5 & 7 \\ 1 & 5 & 7 \\ 5 & 7 & 17 \end{bmatrix}$$

খ. $|3(B^2+I)|$ নির্ণয় কর।

সমাধান: $B^2 = B.B$

$$= \begin{bmatrix} 3 & -1 & 3 \\ 3 & 0 & 5 \\ 5 & 2 & 6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & -1 & 3 \\ 3 & 0 & 5 \\ 5 & 2 & 6 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 9-3+15 & -3+0+6 & 9-5+18 \\ 9+0+25 & -3+0+10 & 9+0+30 \\ 15+6+30 & -5+0+12 & 15+10+36 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 21 & 3 & 22 \\ 34 & 7 & 39 \\ 51 & 7 & 61 \end{bmatrix}$$

$$B^2 + I = \begin{bmatrix} 21 & 3 & 22 \\ 34 & 7 & 39 \\ 51 & 7 & 61 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 22 & 3 & 22 \\ 34 & 8 & 39 \\ 51 & 7 & 62 \end{bmatrix}$$

$$3(B^2+I) = 3\begin{bmatrix} 22 & 3 & 22 \\ 34 & 8 & 39 \\ 51 & 7 & 62 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 3\times22 & 3\times3 & 3\times22 \\ 3\times34 & 3\times8 & 3\times39 \\ 3\times51 & 3\times7 & 3\times62 \end{bmatrix}$$

$$|3(B^2+I)| = \begin{vmatrix} 3\times22 & 3\times3 & 3\times22 \\ 3\times34 & 3\times8 & 3\times39 \\ 3\times51 & 3\times7 & 3\times62 \end{vmatrix}$$

$$= 3\times3\times3\begin{vmatrix} 22 & 3 & 22 \\ 34 & 8 & 39 \\ 51 & 7 & 62 \end{vmatrix}$$

$$= 9\{22(496-273) - 3(2108-1989) + 22(238-408)\}$$

$$= 9(4906 - 357 - 3740) = 7281 \text{ (Ans.)}$$

গ. $(AB)^{-1}$ নির্ণয় কর।

সমাধান: $AB = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 5 & 2 \\ 2 & 5 & 11 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & -1 & 3 \\ 3 & 0 & 5 \\ 5 & 2 & 6 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 6+6+10 & -2+0+4 & 6+10+12 \\ 6+15+10 & -2+0+4 & 6+25+12 \\ 6+15+55 & -2+0+22 & 6+25+66 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 22 & 2 & 28 \\ 31 & 2 & 43 \\ 76 & 20 & 97 \end{bmatrix}$

$\therefore \quad |AB| = \begin{vmatrix} 22 & 2 & 28 \\ 31 & 2 & 43 \\ 76 & 20 & 97 \end{vmatrix}$

$= 22(194-860) - 2(3007-3268) + 28(620-152)$

$= -14652 + 522 + 13104 = -1026$

$\therefore \quad Adj(AB)$

$= \begin{bmatrix} 194-860 & -(3007-3268) & 620-152 \\ -(194-560) & 2134-2128 & -(440-152) \\ 86-56 & -(946-868) & 44-62 \end{bmatrix}^T$

$= \begin{bmatrix} -666 & 261 & 468 \\ 366 & 6 & -288 \\ 30 & -76 & -18 \end{bmatrix}^T$

$= \begin{bmatrix} -666 & 366 & 30 \\ 261 & 6 & -76 \\ 468 & -288 & -18 \end{bmatrix}$

$\therefore \quad (AB)^{-1} = \dfrac{1}{|AB|} Adj(AB)$

$= \dfrac{1}{-1026}\begin{bmatrix} -666 & 366 & 30 \\ 261 & 6 & -76 \\ 468 & -288 & -18 \end{bmatrix}$ (Ans.)

10. $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 5 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ এবং

$C = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$

ক. $BC = \begin{bmatrix} 2x & 3a \\ y & z \end{bmatrix}$ হলে, a এর মান নির্ণয় কর।

সমাধান: $BC = \begin{bmatrix} 2x & 3a \\ y & z \end{bmatrix}$

$\Rightarrow \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x & 3a \\ y & z \end{bmatrix}$

$\Rightarrow \begin{bmatrix} 10+12 & 15+16 \\ 4+3 & 6+4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x & 3a \\ y & z \end{bmatrix}$

$\Rightarrow \begin{bmatrix} 22 & 31 \\ 7 & 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x & 3a \\ y & z \end{bmatrix}$

$\therefore \quad 3a = 31 \Rightarrow a = \dfrac{31}{3}$ (Ans.)

খ. $B^2 + 3C + I$ নির্ণয় কর।

সমাধান: $B^2 + 3C + I$

$= \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} + 3\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 25+8 & 20+4 \\ 10+2 & 8+1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 6 & 9 \\ 9 & 12 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 33 & 24 \\ 12 & 9 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 6 & 9 \\ 9 & 12 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 33+6+1 & 24+9+0 \\ 12+9+0 & 9+12+1 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 40 & 33 \\ 21 & 22 \end{bmatrix}$ (Ans.)

গ. $(A^T)^{-1}$ নির্ণয় কর।

সমাধান: $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 5 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \end{bmatrix}$

$\therefore \quad A^T = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 5 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 5 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

$\therefore \quad |A^T| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 5 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 1(10-4) + 1(4-3)$

$= 6 + 1 = 7$

$\therefore \quad Adj(A^T) = \begin{bmatrix} 10-4 & -(-2-0) & -1-0 \\ -(4-3) & 2-0 & -(1-0) \\ 8-15 & -(4+3) & 5+2 \end{bmatrix}^T$

$= \begin{bmatrix} 6 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -7 & -7 & 7 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 6 & -1 & -7 \\ 2 & 2 & -7 \\ -1 & -1 & 7 \end{bmatrix}$

$$\therefore\ (A^T)^{-1} = \frac{1}{|A^T|}\,Adj(A^T)$$

$$= \frac{1}{7}\begin{bmatrix} 6 & -1 & -7 \\ 2 & 2 & -7 \\ -1 & -1 & 7 \end{bmatrix} \text{(Ans.)}$$

11. $A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ এবং $B = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$

ক. $A^{-1}B$ নির্ণয় যোগ্য কিনা ব্যাখ্যা কর।

সমাধান: A^{-1} এর কলাম সংখ্যা 3 এবং B এর কলাম সংখ্যা 3 পরস্পর সমান। সুতরাং $A^{-1}B$ নির্ণয় যোগ্য।

খ. A নির্ণয় কর।

সমাধান: $|A^{-1}| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$

$= 1(1-5) = -4$

$$Adj(A^{-1}) = \begin{bmatrix} 0-3 & -(-1-0) & -1-0 \\ -(1-2) & 1-0 & -(1-0) \\ 3-0 & -(3+2) & 0+1 \end{bmatrix}^T$$

$$= \begin{bmatrix} -3 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 3 & -5 & 1 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} -3 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & -5 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A = (A^{-1})^{-1} = \frac{1}{|A^{-1}|}\,Adj(A^{-1})$$

$$= \frac{1}{-4}\begin{bmatrix} -3 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & -5 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 3 & -1 & -3 \\ -1 & -1 & 5 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

গ. $A^{-1}X = B$ হলে ক্রেমারেরর নিয়মানুসারে x, y, z নির্ণয় কর।

সমাধান: $A^{-1}X = B$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} x+y+2z \\ -x+0y+3z \\ 0x+y+z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\therefore\ x+y+2z = 1$$
$$-x+0y+3z = 3$$
$$0x+y+z = 2$$

এখন, ক্রেমারের নিয়ম ব্যবহার করে আমরা পাই,

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -4$$

$$D_x = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1(0-3) - 1(3-6) + 2(3-0)$$

$$= -3+3+6 = 6$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 3 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = (4-10) = -6$$

$$D_z = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 1(2-4) = -2$$

$$\therefore\ x = \frac{D_x}{D} = \frac{6}{-4} = -\frac{3}{2},$$

$$y = \frac{D_y}{D} = \frac{-6}{-4} = \frac{3}{2},$$

$$z = \frac{D_z}{D} = \frac{-2}{-4} = \frac{1}{2}$$

12. $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, D = \begin{vmatrix} 1 & -a & a^2 \\ a^2 & 1 & -a \\ -a & a^2 & 1 \end{vmatrix}$

ক. বিস্তার না করে প্রমাণ কর :

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ bc & ca & ab \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix}$$

খ. প্রমাণ কর যে, $D = (1-a+a^2)^2(a+1)^2$

[বুয়েট'১২-১৩]

গ. A^3 নির্ণয় কর এবং তা থেকে A^{-1} কত হবে তা সিদ্ধান্ত নাও।

ক. প্রমাণ **:** **L.H.S.** $= \begin{vmatrix} a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ bc & ca & ab \end{vmatrix}$

$$=\frac{1}{abc}\begin{vmatrix} a^2 & b^2 & c^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 \\ abc & abc & abc \end{vmatrix}=\frac{abc}{abc}\begin{vmatrix} a^2 & b^2 & c^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$=-\begin{vmatrix} a^2 & b^2 & c^2 \\ 1 & 1 & 1 \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix}=(-)(-)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix}=\text{R.H.S. (Proved)}$$

খ. প্রমাণ: $\begin{vmatrix} 1 & -a & a^2 \\ a^2 & 1 & -a \\ -a & a^2 & 1 \end{vmatrix}$

$$=\begin{vmatrix} 1-a+a^2 & -a & a^2 \\ 1-a+a^2 & 1 & -a \\ 1-a+a^2 & a^2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$=(1-a+a^2)\begin{vmatrix} 1 & -a & a^2 \\ 1 & 1 & -a \\ 1 & a^2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$=(1-a+a^2)\begin{vmatrix} 0 & -a-1 & a^2+a \\ 0 & 1-a^2 & -a-1 \\ 1 & a^2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$=(1-a+a^2)\begin{vmatrix} 0 & -(a+1) & a(a+1) \\ 0 & (1+a)(1-a) & -(a+1) \\ 1 & a^2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$=(1-a+a^2)(a+1)^2\begin{vmatrix} 0 & -1 & a \\ 0 & 1-a & -1 \\ 1 & a^2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$=(1-a+a^2)(a+1)^2(1-a+a^2)$$

$$=(1-a+a^2)^2(a+1)^2$$

গ. সমাধান :

$$A^2=\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^3=A^2A=\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}=I$$

$A^2A=I$ হতে সিদ্ধান্ত হয় যে, A^{-1} বিদ্যমান এবং

$$A^{-1}=A^2=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

13. $A=\begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 3 & 1 & 3 \\ 3 & 3 & 1 \end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

ক. A ম্যাট্রিক্সটি ব্যতিক্রমী কিনা যাচাই কর।

সমাধান: A ম্যাট্রিক্সটি ব্যতিক্রমী হলে এর নির্ণায়ক $|A|$ এর মান শূন্য হবে।

এখন, $|A|=\begin{vmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 3 & 1 & 3 \\ 3 & 3 & 1 \end{vmatrix}$

$$=1(1-9)-3(3-9)+3(9-3)$$
$$=-8+18+18=-8\neq 0$$

$\therefore$ A ম্যাট্রিক্সটি ব্যতিক্রমী নয়।

খ. A^2+4B-I নির্ণয় কর।

সমাধান: $A^2=A.A=\begin{vmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 3 & 1 & 3 \\ 3 & 3 & 1 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 3 & 1 & 3 \\ 3 & 3 & 1 \end{vmatrix}$

$$=\begin{vmatrix} 1+9+9 & 3+3+9 & 3+9+3 \\ 3+3+9 & 9+1+9 & 9+3+3 \\ 3+9+3 & 9+3+3 & 9+9+1 \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} 19 & 15 & 15 \\ 15 & 19 & 15 \\ 15 & 15 & 19 \end{vmatrix}$$

$$4B=4\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 4 & 8 & 4 \\ 8 & 4 & 4 \\ 4 & 4 & 8 \end{bmatrix}$$

$\therefore A^2+4B-I$

$$=\begin{vmatrix} 19 & 15 & 15 \\ 15 & 19 & 15 \\ 15 & 15 & 19 \end{vmatrix}+\begin{bmatrix} 4 & 8 & 4 \\ 8 & 4 & 4 \\ 4 & 4 & 8 \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} 22 & 23 & 19 \\ 23 & 22 & 19 \\ 19 & 19 & 22 \end{vmatrix}$$

গ. B^{-1} নির্ণয় কর।

সমাধান: $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

$\therefore \quad |B| = 1(2-1) - 2(4-1) + 1(2-1)$
$= 1 - 6 + 1 = -4$

$$\text{Adj } B = \begin{bmatrix} 2-1 & -(4-1) & 2-1 \\ -(4-1) & 2-1 & -(1-2) \\ 2-1 & -(1-2) & 1-4 \end{bmatrix}^T$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & -3 & 1 \\ -3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 1 \\ -3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \quad (B)^{-1} = \frac{1}{|B|} \text{Adj } (B)$$

$$= \frac{1}{-4}\begin{bmatrix} 1 & -3 & 1 \\ -3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \end{bmatrix} \text{ (Ans.)}$$

14. $A^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 4 & -2 & 5 \end{bmatrix}$,

$$D = \begin{vmatrix} a+b+2c & a & b \\ c & b+c+2a & b \\ c & a & c+a+2b \end{vmatrix}$$

ক. বিস্তার না করে প্রমাণ কর যে,

$$\begin{vmatrix} 1 & bc & bc(b+c) \\ 1 & ca & ca(c+a) \\ 1 & ab & ab(a+b) \end{vmatrix} = abc \begin{vmatrix} a & 1 & b+c \\ b & 1 & c+a \\ c & 1 & a+b \end{vmatrix}$$

প্রমাণ: প্রশ্নমালা I B এর 2(a) নং প্রশ্নের উত্তর দ্রষ্টব্য।

খ. প্রমাণ কর যে, $D = 2\,(a+b+c)^3$

প্রমাণ: প্রশ্নমালা I B এর 3(a) নং প্রশ্নের উত্তর দ্রষ্টব্য।

গ. A নির্ণয় কর।

সমাধান: $A^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 4 & -2 & 5 \end{bmatrix}$

$\therefore \quad |A^{-1}| = -1(5-0) - 2(10-0)$
$- 3(-4-4)$
$= -5 - 20 + 24 = -1$

$$\text{Adj}(A^{-1}) = \begin{bmatrix} 5-0 & -(10-0) & -4-4 \\ -(10-6) & -5+12 & -(2-8) \\ 0+3 & -(0+6) & -1-4 \end{bmatrix}^T$$

$$= \begin{bmatrix} 5 & -10 & -8 \\ -4 & 7 & 6 \\ 3 & -6 & -5 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 5 & -4 & 3 \\ -10 & 7 & -6 \\ -8 & 6 & -5 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \quad A = (A^{-1})^{-1} = \frac{1}{|A^{-1}|} \text{Adj}(A^{-1})$$

$$= \frac{1}{-1}\begin{bmatrix} 5 & -4 & 3 \\ -10 & 7 & -6 \\ -8 & 6 & -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & 4 & -3 \\ 10 & -7 & 6 \\ 8 & -6 & 5 \end{bmatrix}$$

15. $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 4 & -2 & 5 \end{bmatrix}$,

$$D = \begin{vmatrix} -2 & a+b & -c \\ -2 & b+c & -a \\ a+b-c & c^2 & ab \end{vmatrix}$$

ক. $|A|$ এর (2, 3) ভুক্তির সহগুণক নির্ণয় কর।

সমাধান: $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 4 & -2 & 5 \end{bmatrix}$

$\therefore \quad |A| = \begin{vmatrix} -1 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 4 & -2 & 5 \end{vmatrix}$ এর (2, 3) ভুক্তির সহগুণক

$= (-1)^{2+3}(2-8) = -1(-6) = 6$

খ. $A^2 - 5A + 4I$ নির্ণয় কর।

সমাধান:

$$A^2 = A.A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 4 & -2 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 4 & -2 & 5 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1+4-12 & -2+2+6 & 3+0-15 \\ -2+2+0 & 4+1+0 & -6+0+0 \\ -4-4+20 & 8-2-10 & -12+0+25 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -7 & 6 & -12 \\ 0 & 5 & -6 \\ 12 & -4 & 13 \end{bmatrix}$$

$$5A = 5\begin{bmatrix} -1 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 4 & -2 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & 10 & -15 \\ 10 & 5 & 0 \\ 20 & -10 & 25 \end{bmatrix}$$

$$\therefore\ A^2 - 5A + 4I = \begin{bmatrix} -7 & 6 & -12 \\ 0 & 5 & -6 \\ 12 & -4 & 13 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -5 & 10 & -15 \\ 10 & 5 & 0 \\ 20 & -10 & 25 \end{bmatrix} + 4\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -7+5+4 & 6-10+0 & -12+15+0 \\ 0-10+0 & 5-5+4 & -6+0+0 \\ 12-20+0 & -4+10+0 & 13-25+4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & -4 & 3 \\ -10 & 4 & -6 \\ -8 & 6 & -8 \end{bmatrix} \text{ (Ans.)}$$

গ. প্রমাণ কর যে, $D = (c-a)(a^2 + b^2 + c^2)$

প্রমাণ: $$D = \begin{vmatrix} -2 & a+b & -c \\ -2 & b+c & -a \\ a+b-c & c^2 & ab \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & -(c-a) & -(c-a) \\ -2 & b+c & -a \\ a+b-c & c^2 & ab \end{vmatrix} \quad [r_1' = r_1 - r_2]$$

$$= (c-a)\begin{vmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -2 & b+c & -a \\ a+b-c & c^2 & ab \end{vmatrix}$$

$$= (c-a)\begin{vmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -2 & a+b+c & -a \\ a+b-c & c^2-ab & ab \end{vmatrix} \quad [c_2' = c_2 - c_3]$$

$= (c-a).(-1)[-2c^2 + 2ab - \{(a+b)^2 - c^2\}]$

$= (c-a)(-1)$
$\qquad (-2c^2 + 2ab - a^2 - b^2 - 2ab + c^2)$

$= (c-a)(-1)(-1)(a^2 + b^2 + c^2)$

$= (a^2 + b^2 + c^2)(c-a) = \text{R.H.S.}$ (Proved)

16. $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 5 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} p-5 & 2 \\ 2 & p-2 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}$, $X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$

ক. B ব্যতিক্রমী ম্যাট্রিক্স হলে, P এর মান নির্ণয় কর।

সমাধান: $B = \begin{bmatrix} p-5 & 2 \\ 2 & p-2 \end{bmatrix}$ বলে,

$$|B| = \begin{vmatrix} p-5 & 2 \\ 2 & p-2 \end{vmatrix} = 0$$

$\Rightarrow (p-5)(p-2) - 4 = 0$

$\Rightarrow p^2 - 7p + 10 - 4 = 0$

$\Rightarrow p^2 - 7p + 6 = 0 \Rightarrow (p-6)(p-1) = 0$

$\therefore\ p = 1, 6$ (Ans.)

খ. A^{-1} নির্ণয় কর।

সমাধান: $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 5 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}$

$\therefore\ |A| = 1(6-3) = 3$

$$\text{Adj}(A) = \begin{bmatrix} 12-15 & -(8-5) & 6-3 \\ -(0-3) & 0-1 & -(0-0) \\ 0-3 & -(0-2) & 0-0 \end{bmatrix}^T$$

$$= \begin{bmatrix} -3 & -3 & 3 \\ 3 & -1 & 0 \\ -3 & 2 & 0 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} -3 & 3 & -3 \\ -3 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\therefore\ A^{-1} = \frac{1}{|A|}\text{Adj}(A) = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} -3 & 3 & -3 \\ -3 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

গ. $AX = C$ হলে ক্রেমার এর নিয়মানুসারে y এর মান নির্ণয় কর।

সমাধান: $$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 5 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 0x + 0y + z \\ 2x + 3y + 5z \\ x + 3y + 4z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$\therefore\ 0x + 0y + z = 2$

$2x + 3y + 5z = 3$

$x + 3y + 4z = 5$

এখন, ক্রেমারের নিয়ম ব্যবহার করে আমরা পাই ,

$$D = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 5 \\ 1 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 1(6-3) = 3$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 5 \\ 1 & 5 & 4 \end{vmatrix} = -2(8-5) + 1(10-3)$$

$$= -6 + 7 = 1$$

$$\therefore\ y = \frac{D_y}{D} = \frac{1}{3} \text{ (Ans.)}$$

17. $D = \begin{vmatrix} -1 & b & c \\ a & -1 & c \\ a & b & -1 \end{vmatrix}$, $A = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$

ক. $\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} B = I$ হলে, B ম্যাট্রিক্স নির্ণয় কর; যেখানে $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ একটি অভেদ ম্যাটিক্স ।

খ. $AB = \begin{bmatrix} 10 & 17 \\ 4 & 7 \end{bmatrix}$ হলে B ম্যাট্রিক্সের ভুক্তিসমূহ নির্ণয় কর। **[বুয়েট' ০৯-১০]**

গ. প্রমাণ কর যে, $D = (a+1)(b+1)(c+1)\left(\frac{a}{a+1} + \frac{b}{b+1} + \frac{c}{c+1} - 1\right)$

ক. **সমাধান:** ধরি, $A = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$.

তাহলে, $A^{-1} = \frac{1}{4-6}\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$

$$= -\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/2 & 3/2 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$$

এখন, যেহেতু $AB = I$, সুতরাং, $B = A^{-1}$

$$\therefore\ B = \begin{bmatrix} -1/2 & 3/2 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$$

খ. **সমাধান:** এখানে, $A^{-1} = \frac{1}{4-6}\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$

$$= -\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/2 & 3/2 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$$

এখন, $A^{-1}(AB) = (A^{-1}A)B = (I)B = B$

$$\Rightarrow B = A^{-1}(AB) = \begin{bmatrix} -1/2 & 3/2 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 10 & 17 \\ 4 & 7 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -5+6 & -\frac{17}{2} + \frac{21}{2} \\ 10-8 & 17-14 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

$\therefore$ B ম্যাট্রিক্সের ভুক্তিসমূহ 1, 2, 2, 3

গ. $\text{L.H.S.} = \begin{vmatrix} -1 & b & c \\ a & -1 & c \\ a & b & -1 \end{vmatrix}$

$$= \begin{vmatrix} -1 & b & c \\ a+1 & -(b+1) & 0 \\ a+1 & 0 & -(c+1) \end{vmatrix}$$

$[r'_2 = r_2 - r_1,\ r'_3 = r_3 - r_1]$

$$= (a+1)(b+1)(c+1)\begin{vmatrix} -\frac{1}{a+1} & \frac{b}{b+1} & \frac{c}{c+1} \\ \frac{a+1}{a+1} & \frac{-(b+1)}{b+1} & \frac{0}{c+1} \\ \frac{a+1}{a+1} & \frac{0}{b+1} & \frac{-(c+1)}{c+1} \end{vmatrix}$$

$$= (a+1)(b+1)(c+1)\begin{vmatrix} -\frac{1}{a+1} & \frac{b}{b+1} & \frac{c}{c+1} \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= (a+1)(b+1)(c+1)\left\{-\frac{1}{a+1}(1-0) - \frac{b}{b+1}(-1-0) + \frac{c}{c+1}(0+1)\right\}$$

$$= (a+1)(b+1)(c+1)\left\{-\frac{1}{a+1} + \frac{b}{b+1} + \frac{c}{c+1}\right\}$$

$$= (a+1)(b+1)(c+1)\left\{-\frac{a+1-a}{a+1} + \frac{b}{b+1} + \frac{c}{c+1}\right\}$$

$$= (a+1)(b+1)(c+1)\left\{-\frac{a+1}{a+1} + \frac{a}{a+1} + \frac{b}{b+1} + \frac{c}{c+1}\right\}$$

$$= (a+1)(b+1)(c+1)\left\{\frac{a}{a+1} + \frac{b}{b+1} + \frac{c}{c+1} - 1\right\}$$

$= \text{R.H.S.}$ (Proved)

18. $A=\begin{bmatrix}1 & 3 & 4\\ 3 & -1 & 6\\ -1 & 5 & 1\end{bmatrix}$, $D=\begin{vmatrix}1 & a & a^2\\ a^2 & 1 & a\\ a & a^2 & 1\end{vmatrix}$

ক. প্রমাণ কর যে, $\begin{vmatrix}0 & b-a & c-a\\ a-b & 0 & c-b\\ a-c & b-c & 0\end{vmatrix}=0$

প্রমাণঃ L.H.S.$=\begin{vmatrix}0 & b-a & c-a\\ a-b & 0 & c-b\\ a-c & b-c & 0\end{vmatrix}$

$=\begin{vmatrix}a-b & b-c & c-a\\ a-b & b-c & c-b\\ a-b & b-c & 0\end{vmatrix}$

$[c_1'=c_1-c_2, c_2'=c_2-c_3]$

$=0$, [∵ ১ম ও ২য় কলামের অনুরূপ ভুক্তির অনুপাত (a – b) : (b – c) সমান।]

= R.H.S. (Proved)

খ. প্রমাণ কর যে, $D=(a^3-1)^2$

প্রমাণ ঃ **L.H.S.**$=\begin{vmatrix}1 & a & a^2\\ a^2 & 1 & a\\ a & a^2 & 1\end{vmatrix}$

$=\begin{vmatrix}1+a+a^2 & a & a^2\\ 1+a+a^2 & 1 & a\\ 1+a+a^2 & a^2 & 1\end{vmatrix}$, $[c_1'=c_1+(c_2+c_3)]$

$=(a^2+a+1)\begin{vmatrix}1 & a & a^2\\ 1 & 1 & a\\ 1 & a^2 & 1\end{vmatrix}$

$=(a^2+a+1)\begin{vmatrix}0 & a-1 & a(a-1)\\ 0 & 1-a^2 & a-1\\ 1 & a^2 & 1\end{vmatrix}$

$[r_1'=r_1-r_2, r_2'=r_2-r_3]$

$=(a^2+a+1)1\{(a-1)^2-a(a-1)(1-a)(1+a)\}$

$=(a^2+a+1)(a-1)^2(1+a+a^2)$

$=(a^2+a+1)^2(a-1)^2=(a^3-1)^2=$ R.H.S.

(Proved)

গ. এমন একটি ম্যাট্রিক্স B নির্ণয় কর যেন, AB = BA = I হয়।

সমাধান : AB = BA = I বলে, $B=A^{-1}$.

$|A|=1(-1-30)-3(3+6)+4(15-1)$
$=-31-27+56=-2$

$\therefore\ A^{-1}=\frac{1}{-2}\begin{bmatrix}\begin{vmatrix}-1 & 6\\ 5 & 1\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}3 & 6\\ -1 & 1\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}3 & -1\\ -1 & 5\end{vmatrix}\\ -\begin{vmatrix}3 & 4\\ 5 & 1\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}1 & 4\\ -1 & 1\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}1 & 3\\ -1 & 5\end{vmatrix}\\ \begin{vmatrix}3 & 4\\ -1 & 6\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}1 & 4\\ 3 & 6\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}1 & 3\\ 3 & -1\end{vmatrix}\end{bmatrix}^T$

$=\frac{1}{-2}\begin{bmatrix}-31 & -9 & 14\\ 17 & 5 & -8\\ 22 & 6 & -10\end{bmatrix}^T$

$=\frac{1}{-2}\begin{bmatrix}-31 & 17 & 22\\ -9 & 5 & 6\\ 14 & -8 & -10\end{bmatrix}$

$\therefore\ B=A^{-1}=\begin{bmatrix}31/2 & -17/2 & -11\\ 9/2 & -5/2 & -3\\ -7 & 4 & 5\end{bmatrix}$

19. $M=\begin{bmatrix}1 & 2 & 1\\ 3 & -3 & -1\\ 2 & 1 & 0\end{bmatrix}$ **[দি.২০১৭]**

ক. $\begin{bmatrix}2 & -x\\ y-1 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & 3+y\\ 4 & 2\end{bmatrix}$ হলে (x, y) নির্ণয় কর।

সমাধান : $\begin{bmatrix}2 & -x\\ y-1 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & 3+y\\ 4 & 2\end{bmatrix}$

$\therefore\ y-1=4\Rightarrow y=5$

$-x=3+y\Rightarrow -x=3+5=8$

$\Rightarrow x=-8\Rightarrow x=-8$

$\therefore\ (x, y)=(-8, 5)$ (Ans.)

খ. $M^2-3M+MI$ এর মান নির্ণয় কর, যেখানে I একক ম্যাট্রিক্স।

সমাধান : $M^2-3M+MI$

$=\begin{bmatrix}1 & 2 & 1\\ 3 & -3 & -1\\ 2 & 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 2 & 1\\ 3 & -3 & -1\\ 2 & 1 & 0\end{bmatrix}$

$$-3\begin{bmatrix}1 & 2 & 1\\3 & -3 & -1\\2 & 1 & 0\end{bmatrix}+M$$

$$=\begin{bmatrix}1+6+2 & 2-6+1 & 1-2+0\\3-9-2 & 6+9-1 & 3+3+0\\2+3+0 & 4-3+0 & 2-1+0\end{bmatrix}$$

$$+\begin{bmatrix}-3 & -6 & -3\\-9 & 9 & 3\\-6 & -3 & 0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1 & 2 & 1\\3 & -3 & -1\\2 & 1 & 0\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}9 & -3 & -1\\-8 & 14 & 6\\5 & 1 & 1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-3 & -6 & -3\\-9 & 9 & 3\\-6 & -3 & 0\end{bmatrix}$$

$$+\begin{bmatrix}1 & 2 & 1\\3 & -3 & -1\\2 & 1 & 0\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}9-3+1 & -3-6+2 & -1-3+1\\-8-9+3 & 14+9-3 & 6+3-1\\5-6+2 & 1-3+1 & 1+0+0\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}7 & -7 & -3\\-14 & 20 & 8\\1 & -1 & 1\end{bmatrix}$$

গ. M এর বিপরীত ম্যাট্রিক্স বিদ্যমান থাকলে তা নির্ণয় কর।

সমাধান : $|M|=\begin{vmatrix}1 & 2 & 1\\3 & -3 & -1\\2 & 1 & 0\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & 2 & 1\\4 & -1 & 0\\2 & 1 & 0\end{vmatrix}$

$=1(4+2)=6\neq 0$

$\therefore$ M এর বিপরীত ম্যাট্রিক্স বিদ্যমান।

$$\text{Adj}(M)=\begin{bmatrix}0+1 & -(0+2) & 3-6\\-(0-1) & 0-2 & -(1-4)\\-2+3 & -(-1-3) & -3-6\end{bmatrix}^T$$

$$=\begin{bmatrix}1 & -2 & -3\\1 & -2 & 3\\1 & 4 & -9\end{bmatrix}^T=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\-2 & -2 & 4\\-3 & 3 & -9\end{bmatrix}$$

$\therefore$ M এর বিপরীত ম্যাট্রিক্স $=\dfrac{1}{|M|}\text{Adj}(M)$

$$=\frac{1}{6}\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\-2 & -2 & 4\\-3 & 3 & -9\end{bmatrix}\text{ (Ans.)}$$

20. $A=\begin{bmatrix}1 & 4 & 2\\4 & 0 & 3\\2 & 3 & 2\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}, C=\begin{bmatrix}2\\5\\4\end{bmatrix}$ [ঢা.বো. '১৭]

ক. $A\times C$ নির্ণয় করে উহার মাত্রা নির্ণয় কর। ২

সমাধান: $A\times C=\begin{bmatrix}1 & 4 & 2\\4 & 0 & 3\\2 & 3 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\5\\4\end{bmatrix}$

$$=\begin{bmatrix}2+20+8\\8+0+12\\4+15+8\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}30\\20\\37\end{bmatrix}$$

$\therefore$ $A\times C$ এর মাত্রা 3×1

খ. A^{-1} নির্ণয় কর। ৪

সমাধান : $|A|=\begin{vmatrix}1 & 4 & 2\\4 & 0 & 3\\2 & 3 & 2\end{vmatrix}$

$=1(0-9)-4(8-6)+2(12-0)$

$=-9-8+24=7\neq 0$

$\therefore$ A এর বিপরীত ম্যাট্রিক্স A^{-1} বিদ্যমান।

$$\text{Adj}(A)=\begin{bmatrix}0-9 & -(8-6) & 12-0\\-(8-6) & 2-4 & -(3-8)\\12-0 & -(3-8) & 0-16\end{bmatrix}^T$$

$$=\begin{bmatrix}-9 & -2 & 12\\-2 & -2 & 5\\12 & 5 & -16\end{bmatrix}^T=\begin{bmatrix}-9 & -2 & 12\\-2 & -2 & 5\\12 & 5 & -16\end{bmatrix}$$

$\therefore$ $A^{-1}=\dfrac{1}{|A|}\text{Adj}(A)$

$$=\frac{1}{7}\begin{bmatrix}-9 & -2 & 12\\-2 & -2 & 5\\12 & 5 & -16\end{bmatrix}\text{ (Ans.)}$$

গ. $A\times B=C$ হলে, ক্রেমারের নিয়মে সমীকরণ জোটটি সমাধান কর।

সমাধান : $A\times B=C$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix}1&4&2\\4&0&3\\2&3&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\5\\4\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix}x+4y+2z\\4x+0y+3z\\2x+3y+2z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\5\\4\end{bmatrix}$$

$\therefore\ x+4y+2z=2$

$4x+0y+3z=5$

$2x+3y+2z=4$

এখন, ক্রেমারের নিয়ম ব্যবহার করে আমরা পাই ,

$$D=\begin{vmatrix}1&4&2\\4&0&3\\2&3&2\end{vmatrix}=7$$

$$D_x=\begin{vmatrix}2&4&2\\5&0&3\\4&3&2\end{vmatrix}$$

$=2(0-9)-4(10-12)+2(15-0)$

$=-18+8+30=20$

$$D_y=\begin{vmatrix}1&2&2\\4&5&3\\2&4&2\end{vmatrix}$$

$=1(10-12)-2(8-6)+2(16-10)$

$=-2-4+12=6$

$$D_z=\begin{vmatrix}1&4&2\\4&0&5\\2&3&4\end{vmatrix}$$

$=1(0-15)-4(16-10)+2(12-0)$

$=-15-24+24=-15$

$\therefore\ x=\dfrac{D_x}{D}=\dfrac{20}{7},\ y=\dfrac{D_y}{D}=\dfrac{6}{7},$

$z=\dfrac{D_z}{D}=\dfrac{-15}{7}$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান, $(x, y, z)=\left(\dfrac{20}{7},\dfrac{6}{7},\dfrac{-15}{7}\right)$

21. দৃশ্যকল্প-১: $B=\begin{pmatrix}1&3&-5\\6&4&-2\\5&2&-1\end{pmatrix};\quad C=\begin{pmatrix}-2&-1&2\\-4&-3&2\\-1&-4&6\end{pmatrix}.$

[সিলেট বোর্ড ২০১৭]

দৃশ্যকল্প-২ :

$$\frac{2}{7}x+\frac{3}{7}y-\frac{5}{7}z=\frac{x}{4}-y+\frac{z}{4}=\frac{3x}{5}-\frac{y}{5}-\frac{2z}{5}=1$$

ক. বিস্তার না করে প্রমাণ কর : ২

$$\begin{pmatrix}x&-a&x+a\\y&-b&y+b\\z&-c&z+c\end{pmatrix}=0$$

প্রমাণ : L.H.S. $=\begin{pmatrix}x&-a&x+a\\y&-b&y+b\\z&-c&z+c\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}x&-a&x\\y&-b&y\\z&-c&z\end{pmatrix},\ [c_3'=c_3+c_2]$

$=0$, [১ম ও শেষ কলামে এক]

খ. $A=B+C$ হলে A^{-1} নির্ণয় কর। 8

সমাধান : $A=B+C$

$=\begin{pmatrix}1&3&-5\\6&4&-2\\5&2&-1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-2&-1&2\\-4&-3&2\\-1&-4&6\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}1-2&3-1&-5+2\\6-4&4-3&-2+2\\5-1&2-4&-1+6\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}-1&2&-3\\2&1&0\\4&-2&5\end{pmatrix}$

$\therefore |A|=\begin{vmatrix}-1&2&-3\\2&1&0\\4&-2&5\end{vmatrix}$

$=-3(-4-4)+5(-1-4)$

$=24-25=-1\neq 0$

$\therefore$ A এর বিপরীত ম্যাট্রিক্স A^{-1} বিদ্যমান।

$$\therefore \text{Adj}(A)=\begin{bmatrix}5-0&-(10-0)&-4-4\\-(10-6)&-5+12&-(2-8)\\0+3&-(0+6)&-1-4\end{bmatrix}^T$$

$$=\begin{bmatrix}5&-10&-8\\-4&7&6\\3&-6&-5\end{bmatrix}^T=\begin{bmatrix}5&-4&3\\-10&7&-6\\-8&6&-5\end{bmatrix}$$

$\therefore\ A^{-1}=\dfrac{1}{|A|}\text{Adj}(A)$

$$=\frac{1}{-1}\begin{bmatrix}5 & -4 & 3\\ -10 & 7 & -6\\ -8 & 6 & -5\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}-5 & 4 & -3\\ 10 & -7 & 6\\ 8 & -6 & 5\end{bmatrix} \text{ (Ans.)}$$

গ. দৃশ্যকল্প-২ এর বর্ণিত সমীকরণ জোটটি ক্রেমারের নিয়মে সমাধান কর। ৪

সমাধান:

$$\frac{2}{7}x+\frac{3}{7}y-\frac{5}{7}z=\frac{x}{4}-y+\frac{z}{4}=\frac{3x}{5}-\frac{y}{5}-\frac{2z}{5}=1$$

$$\therefore \frac{2}{7}x+\frac{3}{7}y-\frac{5}{7}z=1 \Rightarrow 2x+3y-5z=7$$

$$\frac{x}{4}-y+\frac{z}{4}=1 \Rightarrow x-4y+z=4$$

$$\frac{3x}{5}-\frac{y}{5}-\frac{2z}{5}=1 \Rightarrow 3x-y-2z=5$$

এখন, ক্রেমারের নিয়ম ব্যবহার করে আমরা পাই,

$$D=\begin{vmatrix}2 & 3 & -5\\ 1 & -4 & 1\\ 3 & -1 & -2\end{vmatrix}$$
$$=2(8+1)-3(-2-3)-5(-1+12)$$
$$=18+15-55=-22$$

$$D_x=\begin{vmatrix}7 & 3 & -5\\ 4 & -4 & 1\\ 5 & -1 & -2\end{vmatrix}$$
$$=7(8+1)-4(-6-5)+5(3-20)$$
$$=63+44-85=22$$

$$D_y=\begin{vmatrix}2 & 7 & -5\\ 1 & 4 & 1\\ 3 & 5 & -2\end{vmatrix}$$
$$=2(-8-5)-7(-2-3)-5(5-12)$$
$$=-26+35+35=44$$

$$D_z=\begin{vmatrix}2 & 3 & 7\\ 1 & -4 & 4\\ 3 & -1 & 5\end{vmatrix}$$
$$=2(-20+4)-3(5-12)+7(-1+12)$$
$$=-32+21+77=66$$

$$\therefore x=\frac{D_x}{D}=-\frac{22}{22}=-1,\ y=\frac{44}{-22}=-2,$$
$$z=\frac{66}{-22}=-3$$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান, $(x, y, z)=(-1,-2,-3)$

22. $A=\begin{bmatrix}2 & 3 & 1\\ 1 & 2 & 2\\ 1 & 2 & 0\end{bmatrix}, B=A^t, f(x)=x^2-4x.$

[চট্টগ্রাম বোর্ড ২০১৭]

ক. $g(x)=\frac{1}{2x-3}$ ফাংশনটির রেঞ্জ নির্ণয় কর। ২

সমাধান: ধরি, $y=g(x)=\frac{1}{2x-3}$

$$\Rightarrow 2xy-3y=1 \Rightarrow 2xy=1+3y$$

$$\Rightarrow x=\frac{1+3y}{2y}$$

এখন, $x=\frac{1+3y}{2y}\in\mathbb{R}$, যদি ও কেবল যদি $y\in\mathbb{R}$ এবং $y\neq 0$.

$\therefore$ নির্ণেয় রেঞ্জ $=\{x\in\mathbb{R} : x\neq 0\}$

খ. $f(B)$ নির্ণয় কর। ৪

সমাধান: দেওয়া আছে, $A=\begin{bmatrix}2 & 3 & 1\\ 1 & 2 & 2\\ 1 & 2 & 0\end{bmatrix}$ এবং

$f(x)=x^2-4x$

$$\therefore B=A^t=\begin{bmatrix}2 & 3 & 1\\ 1 & 2 & 2\\ 1 & 2 & 0\end{bmatrix}^t=\begin{bmatrix}2 & 1 & 1\\ 3 & 2 & 2\\ 1 & 2 & 0\end{bmatrix}$$

এখন, $f(B)=A^2-4A=A.A-4A$

$$=\begin{bmatrix}2 & 1 & 1\\ 3 & 2 & 2\\ 1 & 2 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 1 & 1\\ 3 & 2 & 2\\ 1 & 2 & 0\end{bmatrix}-4\begin{bmatrix}2 & 1 & 1\\ 3 & 2 & 2\\ 1 & 2 & 0\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}4+3+1 & 2+2+2 & 2+2+0\\ 6+6+2 & 3+4+4 & 3+4+0\\ 2+6+0 & 1+4+0 & 1+4+0\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}8 & 4 & 4\\ 12 & 8 & 8\\ 4 & 8 & 0\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}8 & 6 & 4\\ 14 & 11 & 7\\ 8 & 5 & 5\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}8 & 4 & 4\\ 12 & 8 & 8\\ 4 & 8 & 0\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}8-8 & 6-4 & 4-4\\ 14-12 & 11-8 & 7-8\\ 8-4 & 5-8 & 5-0\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}0 & 2 & 0\\ 2 & 3 & -1\\ 4 & -3 & 5\end{bmatrix} \text{ (Ans.)}$$

গ. B এর বিপরীত ম্যাট্রিক্স নির্ণয় কর। ৪

সমাধান: $B=\begin{bmatrix}2 & 1 & 1\\ 3 & 2 & 2\\ 1 & 2 & 0\end{bmatrix}$

$$\therefore\ |B|=\begin{vmatrix}2 & 1 & 1\\ 3 & 2 & 2\\ 1 & 2 & 0\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2 & 1 & 0\\ 3 & 2 & 0\\ 1 & 2 & -2\end{vmatrix}=-2(4-3)$$

$$=-2\neq 0$$

$\therefore$ B এর বিপরীত ম্যাট্রিক্স B^{-1} বিদ্যমান।

$$\therefore\ \text{Adj}(B)=\begin{bmatrix}0-4 & -(0-2) & 6-2\\ -(0-2) & 0-1 & -(4-1)\\ 2-2 & -(4-3) & 4-3\end{bmatrix}^T$$

$$=\begin{bmatrix}-4 & 2 & 4\\ 2 & -1 & -3\\ 0 & -1 & 1\end{bmatrix}^T=\begin{bmatrix}-4 & 2 & 0\\ 2 & -1 & -1\\ 4 & -3 & 1\end{bmatrix}$$

$$\therefore\ B^{-1}=\frac{1}{|B|}\text{Adj}(B)$$

$$=\frac{1}{-2}\begin{bmatrix}-4 & 2 & 0\\ 2 & -1 & -1\\ 4 & -3 & 1\end{bmatrix}$$

$$=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}4 & -2 & 0\\ -2 & 1 & 1\\ -4 & 3 & -1\end{bmatrix} \text{ (Ans.)}$$

23. $x+y+z=1$........(i) [য.বো.'১৭]

$lx+my+nx=k$........(ii)

$l^2x+m^2y+n^2z=k^2$.......(iii)

ক. $2\begin{bmatrix}1 & -2\\ 2 & -1\end{bmatrix}+F=I_2$ হলে, F ম্যাট্রিক্সটি নির্ণয় কর; যেখানে I_2 একটি অভেদ ম্যাট্রিক্স।

সমাধান: $2\begin{bmatrix}1 & -2\\ 2 & -1\end{bmatrix}+F=I_2$

$$\Rightarrow F=I_2-2\begin{bmatrix}1 & -2\\ 2 & -1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}2 & -4\\ 4 & -2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1-2 & 0+4\\ 0-4 & 1+2\end{bmatrix}$$

$$\therefore\ F=\begin{bmatrix}-1 & 4\\ -4 & 3\end{bmatrix} \text{ (Ans.)}$$

খ. সমীকরণগুলোকে $AX=B$ আকারে প্রকাশ করে দেখাও যে,

$$\det(A)=(l-m)(m-n)(n-l).$$

প্রমাণ : প্রদত্ত সমীকরণগুলোকে $AX=B$ আকারে প্রকাশ করে পাই,

$$\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ l & m & n\\ l^2 & m^2 & n^2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\\ z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\ k\\ k^2\end{bmatrix};$$ যেখানে

$$A=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ l & m & n\\ l^2 & m^2 & n^2\end{bmatrix}$$

$$\therefore\ \det(A)=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ l & m & n\\ l^2 & m^2 & n^2\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}0 & 0 & 1\\ l-m & m-n & n\\ l^2-m^2 & m^2-n^2 & n^2\end{vmatrix}$$

$[c_1'=c_1-c_2, c_2'=c_2-c_3]$

$$= \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ l-m & m-n & n \\ (l-m)(l+m) & (m-n)(m+n) & n^2 \end{vmatrix}$$

$$= (l-m)(m-n)\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & n \\ l+m & m+n & n^2 \end{vmatrix}$$

$$= (l-m)(m-n)\{(m+n)-(l+m)\}$$

$$= (l-m)(m-n)(m+n-l-m)$$

$$\therefore \det(A) = (l-m)(m-n)(n-l)$$

গ. x, y, z এর সহগগুলি নিয়ে গঠিত A একটি ম্যাট্রিক্স। A এর বিপরীত ম্যাট্রিক্স নির্ণয় কর; যেখানে $l=1, m=2, n=-1$

সমাধান: x, y, z এর সহগগুলি নিয়ে গঠিত ম্যাট্রিক্স

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ l & m & n \\ l^2 & m^2 & n^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1^2 & 2^2 & (-1)^2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\therefore |A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 4 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -3 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 1(-3+9) = 6$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \text{Adj}(A) = \begin{bmatrix} 2+4 & -(1+1) & 4-2 \\ -(1-4) & 1-1 & -(4-1) \\ -1-2 & -(-1-1) & 2-1 \end{bmatrix}^T$$

$$= \begin{bmatrix} 6 & -2 & 2 \\ 3 & 0 & -3 \\ -3 & 2 & 1 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 6 & 3 & -3 \\ -2 & 0 & 2 \\ 2 & -3 & 1 \end{bmatrix}$$

$\therefore$ A এর বিপরীত ম্যাট্রিক্স

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\text{Adj}(A)$$

$$= \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 6 & 3 & -3 \\ -2 & 0 & 2 \\ 2 & -3 & 1 \end{bmatrix} \text{ (Ans.)}$$

24. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -2 & 1 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 7 \\ 5 & 0 \end{bmatrix},$

$C = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ [কু.বো.'১৭]

ক. x এর যেসব মানের জন্য $\begin{bmatrix} x^2 & 2x \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$ ম্যাট্রিক্স ব্যতিক্রমী হবে তা নির্ণয় কর।

সমাধান: $\begin{bmatrix} x^2 & 2x \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$ ম্যাট্রিক্সটি ব্যতিক্রমী হবে যদি

$\begin{vmatrix} x^2 & 2x \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = 0$ হয়।

$$\Rightarrow 3x^2 - 10x = 0 \Rightarrow x(3x-10) = 0$$

$$\Rightarrow x = 0, 3x - 10 = 0 \Rightarrow x = \frac{10}{3}$$

$\therefore$ $x = 0$ অথবা $x = \frac{10}{3}$ এর জন্য প্রদত্ত ম্যাট্রিক্সটি ব্যতিক্রমী হবে।

খ. $AB - C^2 + 2I_2$ নির্ণয় কর।

সমাধান: $AB - C^2 + 2I_2$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -2 & 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 7 \\ 5 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -1-6-15 & 2+14+0 \\ 2-3+0 & -4+7+0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 25+1 & 5-3 \\ 5-3 & 1+9 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -22 & 16 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 26 & 2 \\ 2 & 10 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -22-26+2 & 16-2+0 \\ -1-2+0 & 3-10+2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -46 & 14 \\ -3 & -5 \end{bmatrix} \text{ (Ans.)}$$

গ. D^{-1} নির্ণয় কর।

সমাধান: $D = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$

$\therefore \quad |D| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & 5 \end{vmatrix}$

$= 5(-2-0) = -10$

$\therefore \quad \text{Adj}(D) = \begin{bmatrix} -6-4 & -(0-2) & 0+2 \\ -(3+2) & 3+1 & -(2-1) \\ 2-2 & -(2-0) & -2-0 \end{bmatrix}^T$

$= \begin{bmatrix} -10 & 2 & 2 \\ -5 & 4 & -1 \\ 0 & -2 & -2 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} -10 & -5 & 0 \\ 2 & 4 & -2 \\ 2 & -1 & -2 \end{bmatrix}$

$\therefore \quad A^{-1} = \frac{1}{|A|} \text{Adj}(A)$

$= \frac{1}{-10} \begin{bmatrix} -10 & -5 & 0 \\ 2 & 4 & -2 \\ 2 & -1 & -2 \end{bmatrix}$ (Ans.)

25. $A = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 6 \\ 1 \end{bmatrix}$ এবং $X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ [ব.বো.'১৭]

ক. p এর মান কত হলে $\begin{bmatrix} p-2 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$ একটি ব্যতিক্রমী বর্গ মাট্রিক্স হবে?

সমাধান: $\begin{bmatrix} p-2 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$ ব্যতিক্রমী হবে যদি

$\begin{vmatrix} p-2 & 3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = 0$ হয়।

$\Rightarrow 5p - 10 - 12 = 0 \Rightarrow 5p - 22$

$\Rightarrow p = \frac{22}{5}$ (Ans)

খ. উদ্দীপকের আলোকে, $A^2 - 5A + 6I$ নির্ণয় কর, যেখানে, $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

সমাধান: $A^2 - 5A + 6I$

$= \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} - 5\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} + 6\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 16+6 & 8+10 \\ 12+15 & 6+25 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 20 & 10 \\ 15 & 25 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 22 & 18 \\ 27 & 31 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 20 & 10 \\ 15 & 25 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 22-20+6 & 18-10+0 \\ 27-15+0 & 31-25+6 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 8 & 8 \\ 12 & 12 \end{bmatrix}$ (Ans.)

গ. উদ্দীপকের আলোকে, $AX = B$ হলে ক্রেমার পদ্ধতিতে x, y নির্ণয় কর।

সমাধান: $AX = B \Rightarrow \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 1 \end{bmatrix}$

$\Rightarrow \begin{bmatrix} 4x+2y \\ 3x+5y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 1 \end{bmatrix}$

$\Rightarrow 4x + 2y = 6$

$3x + 5y = 1$

$\therefore \quad D = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} = 20 - 6 = 14$

$D_x = \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} = 30 - 2 = 28$

$D_y = \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} = 4 - 18 = -14$

$\therefore \quad x = \frac{D_x}{D} = \frac{28}{14} = 2, y = \frac{D_y}{D} = \frac{-14}{14} = -1,$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান, $(x, y) = (2, -1)$