ধরি $x^{-\frac{2}{3}} = z$. তাহলে $-\frac{2}{3}x^{-\frac{5}{3}}dx = dz$

$$\Rightarrow -\frac{2}{3}x^{-\frac{2}{3}}\frac{dx}{x} = dz \Rightarrow -\frac{2}{3}z\frac{dx}{x} = dz$$

$$\Rightarrow \frac{dx}{x} = -\frac{3}{2}\frac{dz}{z}$$

সীমা : $x = 8$ হলে $z = 2^{-2} = \frac{1}{4}$ এবং

$x = 27$ হলে $z = 3^{-2} = \frac{1}{9}$

$$\therefore \int_8^{27}\frac{dx}{x - x^{1/3}} = -\frac{3}{2}\int_{1/4}^{1/9}\frac{dz}{z(1-z)}$$

$$= \frac{3}{2}\int_{1/4}^{1/9}\{\frac{1}{z-1} - \frac{1}{z}\}dz$$

$$= \frac{3}{2}[\ln|z-1| - \ln|z|]_{1/4}^{1/9} = \frac{3}{2}\left[\ln\left|\frac{z-1}{z}\right|\right]_{1/4}^{1/9}$$

$$= \frac{3}{2}\{\ln\left|\frac{\frac{1}{9}-1}{\frac{1}{9}}\right| - \ln\left|\frac{\frac{1}{4}-1}{\frac{1}{4}}\right|\}$$

$$= \frac{3}{2}\{\ln|-8| - \ln|-3|\} = \frac{3}{2}(\ln 8 - \ln 3)$$

$$= \frac{3}{2}\ln\frac{8}{3}$$

**39.** $\int_{-1}^{1}\frac{1-x}{1+x}dx$ [প্র.ভ.প.'৮৪]

$$= \int_{-1}^{1}\frac{-(1+x)+2}{1+x}dx = \int_{-1}^{1}(-1 + \frac{2}{1+x})dx$$

$$= [-x + 2\ln|1+x|]_{-1}^{1}$$

$$= -1 + 2\ln|1+1| - (1 + 2\ln|1-1|)$$

$$= -1 + 2\ln 2 - 1 - 2\ln 0$$

$$= 2(\ln 2 - 1)$$

**40.** ধরি, $I = \int_{-\pi/4}^{\pi/4}\frac{\sec^6 x - \tan^6 x}{(a^x + 1)\cos^2 x}dx \quad (a > 0)$

$$= \int_{-\pi/4}^{0}\frac{\sec^6 x - \tan^6 x}{(a^x + 1)\cos^2 x}dx + \int_0^{\pi/4}\frac{\sec^6 x - \tan^6 x}{(a^x + 1)\cos^2 x}dx$$

$= I_1 + I_2$ , যেখানে

$$I_1 = \int_{-\pi/4}^{0}\frac{\sec^6 x - \tan^6 x}{(a^x + 1)\cos^2 x}dx = -\int_0^{-\pi/4}\frac{\sec^6 x - \tan^6 x}{(a^x + 1)\cos^2 x}dx$$

ধরি, $x = -y$ তাহলে $dx = -dy$

সীমা : $x=0$ হলে $y=0$ এবং $x=-\frac{\pi}{4}$ হলে $y=\frac{\pi}{4}$

$$\therefore I_1 = \int_0^{\pi/4}\frac{\sec^6 y - \tan^6 y}{(a^{-y}+1)\cos^2 y}dy = \int_0^{\pi/4}\frac{\sec^6 x - \tan^6 x}{(a^{-x}+1)\cos^2 x}dx$$

$$\therefore I = \int_0^{\pi/4}\frac{\sec^6 x - \tan^6 x}{(a^{-x}+1)\cos^2 x}dx + \int_0^{\pi/4}\frac{\sec^6 x - \tan^6 x}{(a^x + 1)\cos^2 x}dx$$

$$= \int_0^{\pi/4}(\frac{1}{a^{-x}+1} + \frac{1}{a^x+1})\frac{\sec^6 x - \tan^6 x}{\cos^2 x}dx$$

$$= \int_0^{\pi/4}(\frac{a^x}{1+a^x} + \frac{1}{a^x+1})\frac{(1+\tan^2 x)^3 - \tan^6 x}{\cos^2 x}dx$$

$$= \int_0^{\pi/4}\frac{1+3\tan^2 x+3\tan^4 x+\tan^6 x-\tan^6 x}{\cos^2 x}dx$$

$$= \int_0^{\pi/4}(1+3\tan^2 x+3\tan^4 x)\sec^2 x dx$$

$$= \left[\tan x + 3\frac{\tan^3 x}{3} + 3\frac{\tan^5 x}{5}\right]_0^{\pi/4}$$

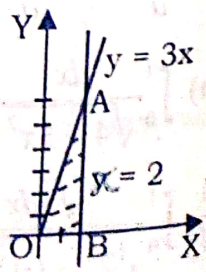
$$= (\tan\frac{\pi}{4} + \tan^3\frac{\pi}{4} + \frac{3}{5}\tan^5\frac{\pi}{4}) = 1 + 1 + \frac{3}{5}$$

$= \frac{13}{5}$ (Ans.)

## প্রশ্নমালা X E

**1(a)** $y = 3x$ **সরলরেখা ,** $x$**-অক্ষ এবং কোটি** $x = 2$ **দ্বারা সীমাবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।**

সমাধান : নির্ণেয় ক্ষেত্রফল = $y = 3x$ সরলরেখা, $x$-অক্ষ এবং $x = 0$ ও $x = 2$ রেখাদ্বয় দ্বারা সীমাবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল = $\int_0^2 y\,dx = \int_0^2 3x\,dx$

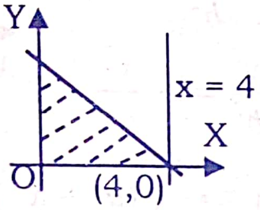



$$= 3\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^2 = \frac{3}{2}(2^2 - 0) = 6 \text{ বর্গ একক।}$$

**1(b) $3x+4y=12$ সরলরেখা এবং স্থানাঙ্কের অক্ষদ্বয় দ্বারা সীমাবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। [মা.বো.'০৩]**

সমাধান: $3x+4y=12$ অর্থাৎ $y=3-\frac{3}{4}x$ সরলরেখা $x$ অক্ষকে $(4, 0)$ বিন্দুতে ছেদ করে।

$\therefore$ নির্ণেয় ক্ষেত্রফল = প্রদত্ত রেখা, $x$-অক্ষ এবং $x=0$ ও $x=4$ রেখাদ্বয় দ্বারা সীমাবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল = $\int_0^4 y\,dx$




$=\int_0^4 (3-\frac{3}{4}x)dx$

$=\left[3x-\frac{3}{4}\cdot\frac{x^2}{2}\right]_0^4 = 12-\frac{3}{8}.16 = 6$ বর্গ একক।

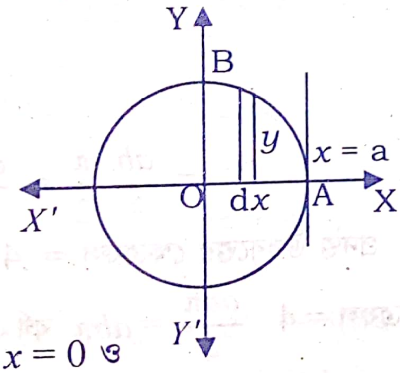
**2(a) $x^2+y^2=a^2$ বৃত্ত দ্বারা সীমাবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। [য.'০৬,'০৯;ব.'১৩; প্র.ভ.প.'০৪]**

সমাধান ঃ $x^2+y^2=a^2$ বৃত্তের কেন্দ্র মূলবিন্দু ও ব্যাসার্ধ $a$।

$x^2+y^2=a^2$

$\Rightarrow y^2=a^2-x^2$

$\Rightarrow y=\pm\sqrt{a^2-x^2}$




ক্ষেত্র OAB এর ক্ষেত্রফল = $y=\sqrt{a^2-x^2}$. বক্ররেখা, $x$-অক্ষ এবং $x=0$ ও $x=$ a রেখাদ্বয় দ্বারা সীমাবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল = $\int_0^a y\,dx = \int_0^a \sqrt{a^2-x^2}\,dx$

$=\left[\frac{x\sqrt{a^2-x^2}}{2}+\frac{a^2}{2}\sin^{-1}\frac{x}{a}\right]_0^a$

$=\frac{a^2}{2}\sin^{-1}1 = \frac{a^2}{2}.\frac{\pi}{2} = \frac{a^2\pi}{4}$

$\therefore$ বৃত্তের ক্ষেত্রফল $= 4 \times$ ক্ষেত্র OAB এর ক্ষেত্রফল

$= 4\times\frac{a^2\pi}{4}$ বর্গ একক $= a^2\pi$ বর্গ একক।

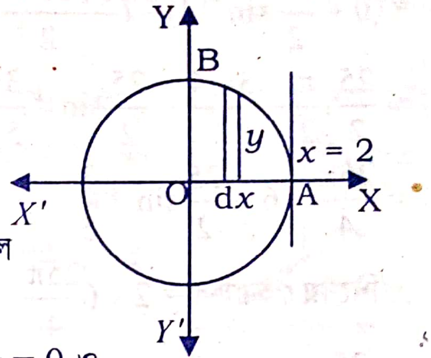
**2(b) $x^2+y^2=4$ বৃত্ত দ্বারা সীমাবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। [ঢা.'০৭]**

সমাধান ঃ $x^2+y^2=4$ বৃত্তের কেন্দ্র মূলবিন্দু ও ব্যাসার্ধ 2

$x^2+y^2=4$

$\Rightarrow y^2=4-x^2$

$\Rightarrow y=\pm\sqrt{4-x^2}$




ক্ষেত্র OAB এর ক্ষেত্রফল

$= y=\sqrt{4-x^2}$

বক্ররেখা, $x$-অক্ষ এবং $x=0$ ও $x=2$ রেখাদ্বয় দ্বারা সীমাবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল

$=\int_0^2 y\,dx = \int_0^2 \sqrt{4-x^2}\,dx = \int_0^2 \sqrt{2^2-x^2}\,dx$

$=\left[\frac{x\sqrt{2^2-x^2}}{2}+\frac{2^2}{2}\sin^{-1}\frac{x}{2}\right]_0^2$

$=\frac{4}{2}\sin^{-1}1 = 2.\frac{\pi}{2} = \pi$

$\therefore$ বৃত্তের ক্ষেত্রফল $= 4 \times$ ক্ষেত্র OAB এর ক্ষেত্রফল

$= 4\pi$ বর্গ একক

**2(c) $x^2+y^2=25$ বৃত্ত এবং $x=3$ সরলরেখা দ্বারা সীমাবদ্ধ ক্ষুদ্রতর ক্ষেত্রটির ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।**

**[ঢা.'০৫,'০৯,'১৪; রা.'০৯,'১৪; য.'১৩; কু.,চ.'১৪]**

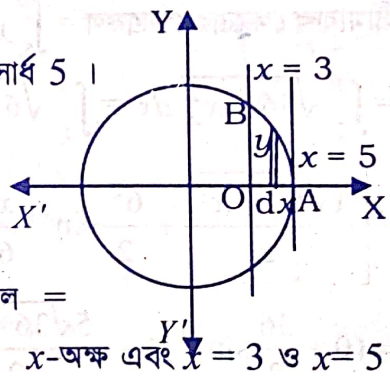
সমাধান ঃ $x^2+y^2=25$

বৃত্তের কেন্দ্র মূলবিন্দু ও ব্যাসার্ধ 5 ।

$x^2+y^2=25$

$\Rightarrow y^2=25-x^2$

$\Rightarrow y=\pm\sqrt{25-x^2}$




ক্ষেত্র OAB এর ক্ষেত্রফল = $y=\sqrt{25-x^2}$ বক্ররেখা, $x$-অক্ষ এবং $x=3$ ও $x=5$ রেখাদ্বয় দ্বারা সীমাবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল $=\int_3^5 y\,dx$

$=\int_3^5 \sqrt{25-x^2}\,dx = \int_3^5 \sqrt{5^2-x^2}\,dx$

$=\left[\frac{x\sqrt{5^2-x^2}}{2}+\frac{5^2}{2}\sin^{-1}\frac{x}{5}\right]_3^5$

$$= (0 + \frac{25}{2}\sin^{-1} 1) - (\frac{3\sqrt{25-9}}{2} + \frac{25}{2}\sin^{-1}\frac{3}{5})$$

$$= \frac{25}{2}.\frac{\pi}{2} - \frac{3\times4}{2} - \frac{25}{2}\sin^{-1}\frac{3}{5}$$

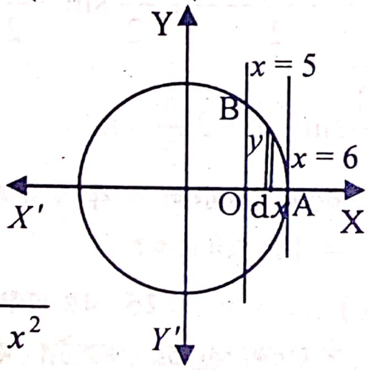
$$= \frac{25\pi}{4} - 6 - \frac{25}{2}\sin^{-1}\frac{3}{5}$$

$\therefore$ নির্ণেয় ক্ষেত্রফল $= 2\times(\frac{25\pi}{4} - 6 - \frac{25}{2}\sin^{-1}\frac{3}{5})$

$= (\frac{25\pi}{2} - 12 - 25\sin^{-1}\frac{3}{5})$ বর্গ একক।

**2(d) $x^2 + y^2 = 36$ বৃত্ত এবং $x = 5$ সরলরেখা দ্বারা সীমাবদ্ধ ক্ষুদ্রতর ক্ষেত্রটির ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।** [প্র.ভ.প.'০৪]

**সমাধান :** $x^2 + y^2 = 36$ বৃত্তের কেন্দ্র মূলবিন্দু ও ব্যাসার্ধ 6 ।




$x^2 + y^2 = 36$

$\Rightarrow y^2 = 36 - x^2$

$\Rightarrow y = \pm\sqrt{36 - x^2}$

ক্ষেত্র OAB এর ক্ষেত্রফল $= y = \sqrt{36 - x^2}$ বক্ররেখা, $x$-অক্ষ এবং $x = 5$ ও $x = 6$ রেখাদ্বয় দ্বারা সীমাবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল $= \int_5^6 y\, dx$

$$= \int_5^6 \sqrt{36 - x^2}\, dx = \int_5^6 \sqrt{6^2 - x^2}\, dx$$

$$= \left[\frac{x\sqrt{6^2 - x^2}}{2} + \frac{6^2}{2}\sin^{-1}\frac{x}{6}\right]_5^6$$

$$= (0 + \frac{36}{2}\sin^{-1} 1) - (\frac{5\sqrt{36-25}}{2} + \frac{36}{2}\sin^{-1}\frac{5}{6})$$

$$= 18.\frac{\pi}{2} - \frac{5\sqrt{11}}{2} - 18\sin^{-1}\frac{5}{6}$$

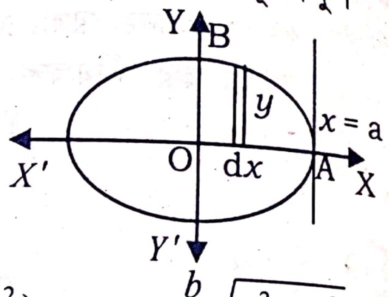
$$= 9\pi - \frac{5\sqrt{11}}{2} - 18\sin^{-1}\frac{5}{6}$$

$\therefore$ নির্ণেয় ক্ষেত্রফল $= 2[9\pi - \frac{5\sqrt{11}}{2} - 18\sin^{-1}\frac{5}{6}]$

$= (18\pi - 5\sqrt{11} - 36\sin^{-1}\frac{5}{6})$ বর্গ একক।

**3. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ উপবৃত্ত দ্বারা সীমাবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।** [ঢা.'০২; রা.'০৮; সি.'০৮; দি.'১৪]

**সমাধান ঃ** $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ উপবৃত্তের কেন্দ্র মূলবিন্দু ।




$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

$\Rightarrow \frac{y^2}{b^2} = 1 - \frac{x^2}{a^2}$

$\Rightarrow y^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2) \Rightarrow y = \pm\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$

$\therefore$ ক্ষেত্র OAB এর ক্ষেত্রফল =

$y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$ বক্ররেখা, $x$-অক্ষ এবং $x = 0$ ও $x = a$ রেখাদ্বয় দ্বারা সীমাবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল =

=

$= \frac{ab}{2}.\frac{\pi}{2} = \frac{ab\pi}{4}$ বর্গ একক।

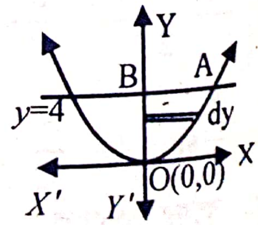
$\therefore$ প্রদত্ত উপবৃত্তের ক্ষেত্রফল $= 4 \times$ ক্ষেত্র OAB এর ক্ষেত্রফল $= 4 \quad \frac{ab\pi}{4} = ab\pi$ বর্গ একক ।

**4(a) পরাবৃত্ত এবং $y = 4$ সরলরেখা দ্বারা সীমাবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।** [কু.'০১]

**সমাধান ঃ** পরাবৃত্তের শীর্ষবিন্দু

$\Rightarrow$

$\Rightarrow$




$\therefore$ ক্ষেত্র OAB এর ক্ষেত্রফল =

বক্ররেখা, $y$-অক্ষ এবং $y = 0$ ও $y = 4$ রেখাদ্বয় দ্বারা সীমাবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল = =

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{y^{3/2}}{3/2}\right]_0^4=\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}(4)^{\frac{3}{2}}=\frac{1}{3}\times 8=\frac{8}{3}$$ বর্গএকক

$\therefore$ নির্ণেয় ক্ষেত্রফল $= 2\times$ ক্ষেত্র OAB এর ক্ষেত্রফল

$$=\frac{16}{3}$$ বর্গএকক ।

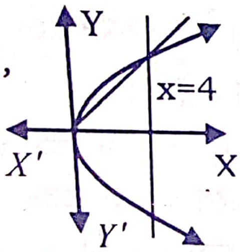
**4(b) $y^2 = 4x$ পরাবৃত্ত এবং $y = x$ সরলরেখা দ্বারা সীমাবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।**

**[ঢা.'০৩,'১৩; সি.'০৯; '১১; ব.'১০; চ.,কু.'১৩]**

সমাধান ঃ $y = x$ হতে $y$ এর মান

$y^2 = 4x$ সমীকরণে বসিয়ে পাই,

$x^2 = 4x \Rightarrow x = 0, 4$




$\therefore$ নির্ণেয় ক্ষেত্রফল $=$

$y_1 = 2\sqrt{x}$ বক্ররেখা ও $y_2 = x$

সরলরেখা এবং $x = 0$ ও $x = 4$

রেখাদ্বয় দ্বারা আবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল

$$=\int_0^4 (y_1 - y_2)\,dx = \int_0^4 (2\sqrt{x} - x)\,dx$$

$$=\left[2\frac{x^{3/2}}{3/2}-\frac{x^2}{2}\right]_0^4 = 2\times\frac{2}{3}(4)^{\frac{3}{2}}-\frac{4^2}{2}$$

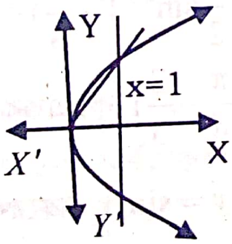
$$=\frac{32}{3}-8=\frac{32-24}{3}=\frac{8}{3}$$ বর্গ একক ।

**4(c) $y^2 = 4x$ পরাবৃত্ত এবং $y = 2x$ সরলরেখা দ্বারা সীমাবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। [য.'০২; চ.'১০]**

সমাধান ঃ $y = 2x$ হতে $y$ এর মান

$y^2 = 4x$ সমীকরণে বসিয়ে পাই,

$y^2 = 4x \Rightarrow x = 0, 1$




$\therefore$ নির্ণেয় ক্ষেত্রফল $=$

$y_1 = 2\sqrt{x}$ বক্ররেখা ও

সরলরেখা এবং $x = 0$ ও $x = 1$

রেখাদ্বয় দ্বারা আবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল

$$=\int_0^1 (y_1 - y_2)\,dx = \int_0^2 (2\sqrt{x} - 2x)\,dx$$

$$=\left[2\times\frac{x^{3/2}}{3/2}-2.\frac{x^2}{2}\right]_0^1 = 2\times\frac{2}{3}-1$$

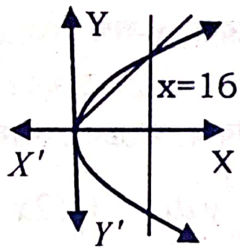
$$=\frac{4}{3}-1=\frac{4-3}{3}=\frac{1}{3}$$ বর্গ একক ।

**4(d) $y^2 = 16x$ পরাবৃত্ত এবং $y = x$ সরলরেখা দ্বারা সীমাবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। [সি.'০২]**

সমাধান ঃ $y = x$ হতে $y$ এর মান

$y^2 = 16x$ সমীকরণে বসিয়ে পাই,

$x^2 = 16x \Rightarrow x = 0, 16$




$\therefore$ নির্ণেয় ক্ষেত্রফল $=$

$y_1 = 4\sqrt{x}$ বক্ররেখা ও $y_2 = x$

সরলরেখা এবং $x = 0$ ও $x = 16$

রেখাদ্বয় দ্বারা আবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল

$$=\int_0^{16} (y_1 - y_2)\,dx = \int_0^{16} (4\sqrt{x} - x)\,dx$$

$$=\left[4\times\frac{x^{3/2}}{3/2}-\frac{x^2}{2}\right]_0^{16} = 4\times\frac{2}{3}(16)^{\frac{3}{2}}-\frac{16^2}{2}$$

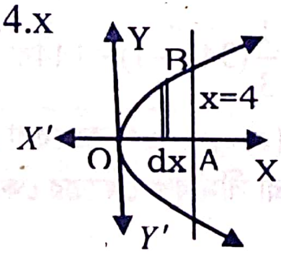
$$=\frac{512}{3}-128=\frac{512-384}{3}=\frac{128}{3}$$ বর্গ একক ।

**4(e) $y^2 = 16x$ পরাবৃত্ত এবং এর উপকেন্দ্রিক লম্ব দ্বারা সীমাবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। [সি.'০৫]**

সমাধান ঃ $y^2 = 16x \Rightarrow y^2 = 4.4.x$

পরাবৃত্তের উপকেন্দ্রিক লম্বের

সমীকরণ $x = 4$.




$y^2 = 16x \Rightarrow y = \pm 4\sqrt{x}$

$\therefore$ ক্ষেত্র OAB এর ক্ষেত্রফল $=$

$y = 4\sqrt{x}$ বক্ররেখা, $x$-অক্ষ এবং $x = 0$ ও $x = 4$ রেখাদ্বয় দ্বারা সীমাবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল

$$=\int_0^4 y\,dx = \int_0^4 4\sqrt{x}\,dx$$

$$=4\left[\frac{y^{3/2}}{3/2}\right]_0^4 = 4\times\frac{2}{3}(4)^{\frac{3}{2}}=\frac{8}{3}\times 8=\frac{64}{3}$$ বর্গএকক

$\therefore$ নির্ণেয় ক্ষেত্রফল $= 2\times$ ক্ষেত্র OAB এর ক্ষেত্রফল

$$=\frac{128}{3}$$ বর্গএকক ।

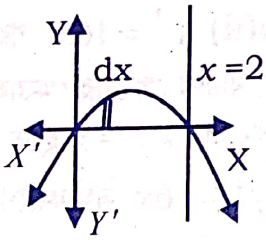
**5(a) $y = 2x - x^2$ বক্ররেখা এবং $x$-অক্ষ দ্বারা সীমাবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। [রা.'০১]**

**সমাধান ঃ** $y = 2x - x^2 \cdots (1)$

$x$-অক্ষের সমীকরণ $y = 0 \cdots (2)$

(1) এ $y = 0$ বসিয়ে পাই,

$0 = 2x - x^2 \Rightarrow x = 0, 2$



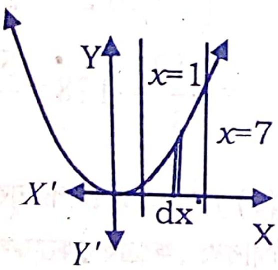

$\therefore$ নির্ণেয় ক্ষেত্রফল = প্রদত্ত বক্ররেখা, $x$-অক্ষ এবং $x = 0$ ও $x = 2$ রেখাদ্বয় দ্বারা সীমাবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল

$$= \int_0^2 y\, dx = \int_0^2 (2x - x^2) dx$$

$$= \left[2.\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right]_0^2 = 4 - \frac{8}{3} = \frac{4}{3} \text{ বর্গ একক}$$

**5(b) $y = x^2$ বক্ররেখা, $x$-অক্ষ এবং $x = 1$ ও $x = 7$ রেখাদ্বয় দ্বারা সীমাবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।**

**সমাধান ঃ** নির্ণেয় ক্ষেত্রফল = $x = \sqrt{y}$ বক্ররেখা, $x$-অক্ষ এবং $x = 1$ ও $x = 4$ রেখাদ্বয় দ্বারা সীমাবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল




$$= \int_1^7 y\, dx = \int_1^7 x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_1^7$$

$$= \frac{1}{3}(343 - 1) = 144 \text{ বর্গ একক}$$

**5(c) $y = x^2$ বক্ররেখা এবং $x - y + 2 = 0$ সরলরেখা দ্বারা সীমাবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।** [সি.'০৩]

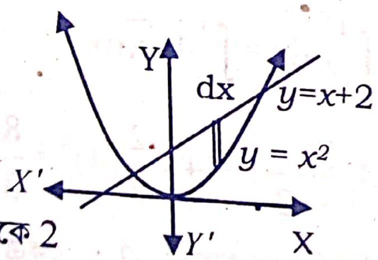
**সমাধান ঃ** $y = x^2 \ldots\ldots (1)$ হতে $y$ এর মান $x - y + 2 = 0$ সমীকরণে বসিয়ে পাই,

$x - x^2 + 2 = 0$

$\Rightarrow x^2 - x - 2 = 0$

$\Rightarrow (x+1)(x-2) = 0$

$\Rightarrow x = -1, 2$




এখানে x এর সীমা $-1$ থেকে 2

এবং $y_1 = x + 2$, $y_2 = x^2$

$\therefore$ নির্ণেয় ক্ষেত্রফল $= \int_{-1}^2 (y_1 - y_2)\, dx$

$$= \int_{-1}^2 (x + 2 - x^2)\, dx = \left[\frac{x^2}{2} + 2x - \frac{x^3}{3}\right]_{-1}^2$$

$$= \frac{4}{2} + 4 - \frac{8}{3} - (\frac{1}{2} - 2 + \frac{1}{3}) = 8 - \frac{8}{3} - \frac{1}{2} - \frac{1}{3}$$

$$= \frac{48 - 16 - 3 - 2}{6} = \frac{48 - 21}{6} = \frac{27}{6} = \frac{9}{2} \text{ বর্গএকক}$$

**6. $x^2 + y^2 = 1$ ও $y^2 = 1 - x$ বক্ররেখা দুইটি দ্বারা সীমাবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।** [ঢা.'০১]

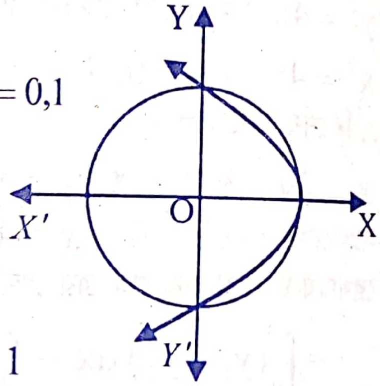
**সমাধান ঃ** $y^2 = 1 - x = -(x - 1)$ হতে $y^2$ এর মান $x^2 + y^2 = 1$ সমীকরণে বসিয়ে পাই,

$x^2 + 1 - x = 1$

$\Rightarrow x(x - 1) = 0 \Rightarrow x = 0, 1$

$x = 1$ হলে $y = 0$ এবং

$x = 0$ হলে $y = \pm 1$




$\therefore$ বক্ররেখা দুইটির ছেদবিন্দু $(1,0)$, $(0,1)$, $(0,-1)$

এখানে x এর সীমা 0 থেকে 1

এবং $y_1 = \sqrt{1 - x^2}$, $y_1 = \sqrt{1 - x}$.

$\therefore$ নির্ণেয় ক্ষেত্রফল $= 2\int_0^1 (y_1 - y_2)\, dx$

$$= 2\int_0^1 (\sqrt{1 - x^2} - \sqrt{1 - x})\, dx$$

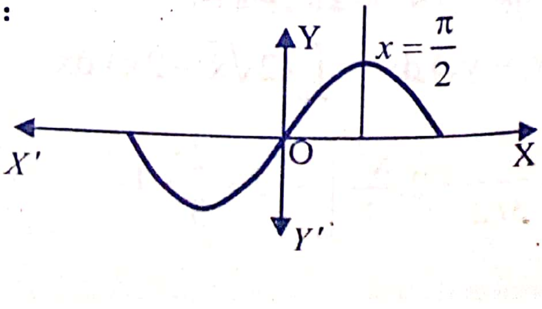
$$= 2\left[\frac{x\sqrt{1 - x^2}}{2} + \frac{1}{2}\sin^{-1} x + \frac{2}{3}(1 - x)^{3/2}\right]_0^1$$

$$= 2(\frac{1}{2}\sin^{-1} 1 - \frac{2}{3}) = 2(\frac{1}{2}.\frac{\pi}{2} - \frac{2}{3})$$

$$= 2(\frac{\pi}{4} - \frac{2}{3}) \text{ বর্গ একক}$$

**7(a) $y = \sin x$ বক্ররেখা, $x$-অক্ষ এবং $x = \dfrac{\pi}{2}$ রেখা দ্বারা সীমাবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।** [চ.'০৫]

**সমাধান :**



নির্ণেয় ক্ষেত্রফল = $y=\sin x$ বক্ররেখা, $x$-অক্ষ এবং $x=0$ ও $x=\frac{\pi}{2}$ রেখাদ্বয় দ্বা:

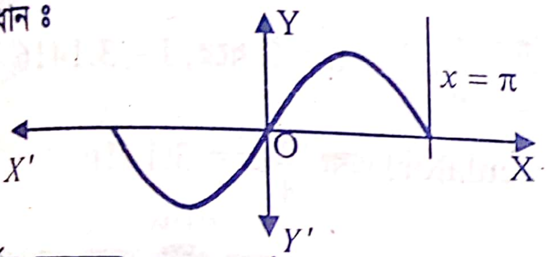
প্রশ্নমালা X E

ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল $=\int_0^{\pi/2} y\,dx = \int_0^{\pi/2} \sin x\,dx$

$=[-\cos x]_0^{\pi/2} = -\cos\frac{\pi}{2}+\cos 0 = 1$ বর্গ একক।

**7(b)** **$x$- অক্ষ এবং $y=\sin x$ বক্ররেখার একটি চাপ দ্বারা গঠিত ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।**

সমাধান ঃ




নির্ণেয় ক্ষেত্রফল = $y=\sin x$ বক্ররেখা, $x$-অক্ষ এবং $x=0$ ও $x=\pi$ রেখাদ্বয় দ্বারা সীমাবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল $=\int_0^{\pi} y\,dx = \int_0^{\pi} \sin x\,dx$

$=[-\cos x]_0^{\pi} = -\cos\pi+\cos 0$

$=1+1=2$ বর্গ একক।

## সম্ভাব্য ধাপসহ প্রশ্ন :

**8.** **$y=x^3$ বক্ররেখা, $x$-অক্ষ এবং $y=0$, $x=1$ ও $x=3$ সরলরেখা তিনটি দ্বারা সীমাবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।**

সমাধান ঃ নির্ণেয় ক্ষেত্রফল $=\int_1^3 y\,dx = \int_1^3 x^3\,dx$ (১)

$=\left[\frac{x^4}{4}\right]_1^3 = \frac{1}{4}(81-1)=\frac{80}{4}=20$ বর্গ একক ।(২)

**9.** **$xy=c^2$ অধিবৃত্ত, $x$-অক্ষ এবং $x=a$ ও $x=b$ রেখা দুইটি দ্বারা সীমাবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।**

সমাধান ঃ নির্ণেয় ক্ষেত্রফল $=\int_a^b y\,dx = \int_a^b \frac{c^2}{x}\,dx$ (১)

$=c^2[\ln x]_a^b = c^2(\ln b-\ln a) = c^2\ln\frac{b}{a}$ (২)

**10.** **দেখাও যে, $\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{a}$ অধিবৃত্ত এবং স্থানাঙ্কের অক্ষ দুইটি দ্বারা সীমাবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল $a^2/6$.**

প্রমাণ ঃ $\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{a} \Rightarrow \sqrt{y}=\sqrt{a}-\sqrt{x}$

$\Rightarrow y=(\sqrt{a}-\sqrt{x})^2 = a-2\sqrt{a}\sqrt{x}+x$

এর সীমা 0 হতে $a$. (১)

$\therefore$ নির্ণেয় ক্ষেত্রফল $=\int_0^a y\,dx$

$=\int_0^a (a-2\sqrt{a}\sqrt{x}+x)\,dx$ (১)

$=\left[ax-2\sqrt{a}.\frac{2}{3}x^{3/2}+\frac{x^2}{2}\right]_0^a$ (১)

$=a^2-2\sqrt{a}.\frac{2}{3}a^{3/2}+\frac{a^2}{2}$

$=a^2-\frac{4}{3}a^2+\frac{a^2}{2}=\frac{6a^2-8a^2+3a^2}{6}=\frac{a^2}{6}$ (১)

## ভর্তি পরীক্ষার MCQ:

**1.** $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{2x-x^2}}$ এর মান কত হবে? **[DU 06-07,08-09;NU 06-07; KU 03-04]**

A. $\frac{\pi}{2}$ B. 1 C. 0 D. $\frac{\pi}{4}$

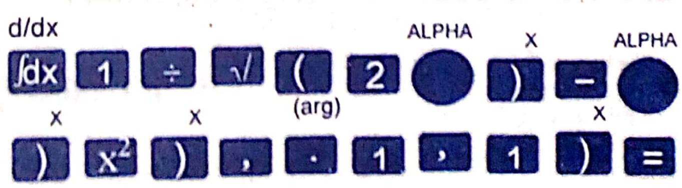
$Sol^n$. $I=\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-(x-1)^2}} = \left[\sin^{-1}(x-1)\right]_0^1 = \frac{\pi}{2}$

ক্যালকুলেটরের সাহায্যে : Mode radian- এ নিতে হবে। অত:পর ধারাবাহিকভাবে নিম্নোক্ত Button গুলো Press করতে হবে।

$\boxed{\int dx}$ $\boxed{(}$ $\boxed{\text{Integrand}}$ $\boxed{)}$ $\boxed{,}$ $\boxed{\text{UpperLt}}$ $\boxed{,}$ $\boxed{\text{Lower Lt}}$ $\boxed{,}$ $\boxed{)}$ $\boxed{=}$

Lower Limit বা Upper Limit এর জন্য Integrand সরাসরি অসংজ্ঞায়িত হলে Lower Limit বা Upper Limit এর নিকটবর্তী মান নিতে হয়। যেমন – 0 এর পরিবর্তে 0.01 এবং 1 এর পরিবর্তে 0.99 বসানো যেতে পারে। Calculator অনেক problem calculation করতে বেশ সময় নেয়।

$I=1.198\approx\frac{\pi}{2}$




$1.4293\approx\pi/2$

**2.** $\int_0^1 \frac{\cos^{-1} x dx}{\sqrt{1-x^2}} = ?$ **[ DU,NU 05-06]**

$Sol^n.$ $I = -\left[\frac{1}{2}(\cos^{-1} x)^2\right]_0^1 = -\frac{1}{2}\{0-(\frac{\pi}{2})^2\}$

$= \frac{\pi^2}{8}$. $I = 1.2237 \approx \frac{\pi^2}{8}$ (By Calculator)

[এখানে Upper Limit 0.99 ধরা হয়েছে।]

**3.** $\int_0^{\pi/2} (1+\cos x)^2 \sin x dx = ?$ **[ DU 03-04; RU 06-07, 07-08; BUET 08-09]**

$Sol^n.$ $I = -\left[\frac{1}{3}(1+\cos x)^3\right]_0^{\pi/2} = -\frac{1}{3}(1-8)$

$= \frac{7}{3}$. $I = 2.333 \approx \frac{7}{3}$ (By Calculator)

**4.** $\int_1^e \log_e x dx = ?$ **[ DU 02-03; NU 04-05; 02-03; JU 05-06; BUET 05-06]**

$Sol^n.$ $I = [(\log_e x - 1)x]_1^e = [(\log_e x - 1)x]_1^e = 1$

**5.** $\int_0^1 \frac{\cos^{-1} x dx}{\sqrt{1-x^2}} = ?$ **[ CDU 06-07,02-03; RU 02-03; 06-07; IU 04-05]**

$Sol^n.$ $I = \left[\frac{1}{2}(\sin^{-1} x)^2\right]_0^1 = \frac{1}{2}\{(\frac{\pi}{2})^2 - 0\}$

$= \frac{\pi^2}{8}$. $I = 1.02 \approx \frac{\pi^2}{8}$ (By Calculator)

[এখানে Upper Limit 0.99 ধরা হয়েছে।]

**6.** $\int_1^2 \frac{(x^2-1)^2 dx}{x^2} = ?$ **[ JU 06-07; SU 04-05; CU 05-06]**

$Sol^n.$ $I = 0.833 \approx \frac{5}{6}$ (By Calculator)

**7.** $\int_0^{\pi/2} \cos^3 x\sqrt{\sin x} dx = ?$ **[ CU 05-06]**

$Sol^n.$ $I = 0.3809 \approx \frac{8}{21}$ (By Calculator)

**8.** $\int_0^1 \frac{x dx}{1+x^4} = ?$ **[ BUET 06-07]**

A. $\frac{\pi}{4}$ B. $\frac{\pi}{3}$ C. $\frac{\pi}{8}$ D. $\frac{2\pi}{3}$

$Sol^n.$ $I = .392699 = \frac{\pi}{8}$ (By Calculator)

**9.** $\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2} dx = ?$ **[ JU 07-08; RU 06-07; KU 06-07 ]**

$Sol^n.$ $I = \left[\frac{x\sqrt{a^2-x^2}}{2} + \frac{a^2}{2}\sin^{-1}\frac{x}{a}\right]_0^a$

$= \frac{a^2}{2}.\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4}a^2$ . a = 2 ধরে, I = 3.1416

(By Calculator) এবং $\frac{\pi}{4}a^2 = 3.1416$

d/dx [∫dx] [√] [ ( ] [2] [x²] [−] [ALPHA X] [ ) ] [x²] [ ) ]

(arg) [ , ] [0] [ , ] [2] [ ) ] [=] 3.1416

**10.** $y^2 = 4x$ ও $y = x$ দ্বারা আবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল কত? **[DU 05-06, 08-09]**

$Sol^n.$ $x^2 = 4x \Rightarrow x = 0,4$

$\therefore$ ক্ষেত্রফল $= \int_0^4 (2\sqrt{x} - x) dx = \frac{8}{3}$ (By Calculator)

**11.** $y = 3x$ সরলরেখা , x অক্ষ এবং $x = 2$ রেখা দ্বারা আবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল কত? **[IU 07-08;SU 06-07]**

$Sol^n.$ ক্ষেত্রফল $= \int_0^2 3x dx = \left[3.\frac{x^2}{2}\right]_0^2 = 6$

**12.** $x^2 + y^2 = a$ এর ক্ষেত্রফল কত? **[SU 04-05;CU 02-03]**

$Sol^n.$ $x^2 + y^2 = (\sqrt{a})^2$

$\therefore$ ক্ষেত্রফল $= \pi(\sqrt{a})^2 = \pi a$

## বহুনির্বাচনি প্রশ্ন

**1.** **Sol$^n$ :** $\int \sin ax\, dx = -\frac{1}{a}\cos ax + c$

$\therefore$ Ans. (b)

**2.** **Sol$^n$ :** $\int_1^4 \frac{dx}{\sqrt{x}} = [2\sqrt{x}]_1^4 = 2(2-1) = 2$

$\therefore$ Ans. (d)

3. $\int \frac{xdx}{x^2+4} = \frac{1}{2}\int \frac{2xdx}{x^2+4} = \frac{1}{2}\ln|x^2+4| + c$

$\therefore$ Ans. (a)

4. Sol$^n$ : : ক্যালকুলেটরের সাহায্যে

$\int_0^{\pi/2} \cos^5 xdx = 0.533$ ,যা 8/15 এর সমান।

$\therefore$ Ans. (d).

5. Sol$^n$ : ন্যূনতম হতে হলে, $\frac{d}{dx}\{f(x)\} = 0$ হতে হবে।

এখানে, $\frac{d}{dx}\{f(x)\} = \frac{t-3}{t^2+7} = 0 \Rightarrow t = 3$

$\therefore$ Ans. (d)

6. Sol$^n$ : $x^2 = 2y - 2 = 2(y-1) = 4\times\frac{1}{2}(y-1)$

পরাবৃত্তের শীর্ষ $(0,1)$ , উপকেন্দ্রিক লম্ব, $y-1=\frac{1}{2}$

$\Rightarrow y = \frac{3}{2}$ $\therefore$ নির্ণেয় ক্ষেত্রফল $= \int_1^{3/2} xdy =$

$\int_1^{3/2}\sqrt{2(y-1)}dy = 0.666 = \frac{2}{3}$ $\therefore$ Ans. (c)

7. Sol$^n$ : $\int\frac{dx}{ay-bx} = -\frac{1}{b}\int\frac{d(ay-bx)}{ay-bx}$

$= -\frac{1}{b}\ln(ay-bx) + c$ $\therefore$ Ans. A

8. Sol$^n$ : $\int\frac{dx}{\sqrt{9-16x^2}} = \frac{1}{4}\int\frac{d(4x)}{\sqrt{3^2-(4x)^2}}$

$= \frac{1}{4}\sin^{-1}\frac{4x}{3} + c$ $\therefore$ Ans. B

9. Sol$^n$ : $\int_0^{1/a} d(\tan^{-1}ax) = [\tan^{-1}ax]_0^{1/a}$

10. Sol$^n$ : কৌশল : $\int_a^b f(x) = \int_{a+c}^{b+c} f(x-c)$

এখানে, $\int_0^4 f(x)dx = \int_{0-1}^{4-1} f(x+1)dx$

$= \int_{-1}^3 f(x+1)dx = 6$

$\therefore$ Ans. (c)

11. Sol$^n$ : $pv = 5 \Rightarrow p = \frac{5}{v}$

$\therefore \int_1^2 pdv = \int_1^2 \frac{5}{v}dv = 5\int_1^2\frac{1}{v}dv$

$= 5(\ln2 - \ln1) = 5\ln2$ $\therefore$ Ans.(b)

12. Sol$^n$ : ধনাত্মক x এর জন্য $F(x) = \int_1^x \ln t dt$ হলে

$F'(x) = \frac{d}{dx}(\int_1^x \ln t dt) = \ln x - \ln 1 = \ln x$

$\therefore$ Ans. (b)

13. Sol$^n$ : $x^2+y^2=a^2$ বৃত্তের ক্ষেত্রফল $=\pi a^2$

$\therefore$ $y = -\sqrt{a^2-x^2}$ ও $y = 0$ দ্বারা আবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল = অর্ধবৃত্তের ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2}\pi a^2$

$\therefore$ Ans.(b)

14. Sol$^n$ : রেখাঙ্কিত জায়গার ক্ষেত্রফল $= \int_2^5 ydx$

$= \int_2^5 x^2dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_2^5 = \frac{1}{3}(125-8) = 39$

$\therefore$ Ans. (c).

15. Sol$^n$ : $4x^2+25y^2=100$ [দি.বো. ২০১৭]

$\Rightarrow \frac{x^2}{5^2}+\frac{y^2}{2^2}=1$

$\therefore$ ক্ষেত্রফল $= ab\pi = (5\times2)\pi = 10\pi$ $\therefore$ Ans.(c)

16. Sol$^n$ : $\int f(x)dx = \int\cos2xdx$

$= \frac{\sin2x}{2} + c$ $\therefore$ Ans. (a) [ঢা.বো. ২০১৭]

17. Sol$^n$ : $\frac{d}{dx}(\cos\sqrt{x}) = -\sin\sqrt{x}\times\frac{1}{2\sqrt{x}}$

$\therefore$ Ans. (b) [ঢা.বো. ২০১৭]

18. Sol$^n$ : $\int\frac{dx}{4x} = \frac{1}{4}\ln x + c$ [ঢা.বো. ২০১৭]

$\int e^{4x}dx = \frac{1}{4}e^{4x} + c$

$$\int_0^2 4x\,dx = \left[4\frac{x^2}{2}\right]_0^2 = 2(2^2-0) = 8$$

$\therefore$ Ans. (d)

**19.** Sol$^n$ : $\int \sin x^0 dx = = \int \sin\frac{\pi x}{180}dx$

$= -\frac{180}{\pi}\cos\frac{\pi x}{180} + c = -\frac{180}{\pi}\cos x^0 + c$

$\therefore$ Ans. (c) [ঢা.বো. ২০১৭]

**20.** Sol$^n$ : $\int \operatorname{cosec} x\,dx = \ln|\tan\frac{x}{2}| + c$

$\therefore$ Ans. (c) [সিলেট বোর্ড ২০১৭]

**21.** Sol$^n$ : $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{4^2} + \frac{y^2}{3^2} = 1$

উপবৃত্তের ক্ষেত্রফল = $(4\times 3)\pi = 12\pi$

$\therefore$ Ans. (c) [সিলেট বোর্ড ২০১৭]

**22.** Sol$^n$ : $\int e^{-7x}dx = \frac{e^{-7x}}{-7} + c$

$\therefore$ Ans.(a) [চট্টগ্রাম বোর্ড ২০১৭]

**23.** Sol$^n$ : $\int \frac{dx}{\sqrt{36-x^2}}$ [চট্টগ্রাম বোর্ড ২০১৭]

$= \int \frac{dx}{\sqrt{6^2-x^2}} = \sin^{-1}\frac{x}{6} + c \quad \therefore$ Ans.(b)

নিচের উদ্দীপকের আলোকে 24 ও 25 নং প্রশ্নের উত্তর দাও:-

$f(x) = \ln 2x.$

**24.** Sol$^n$ : $f'(x) = \frac{1}{2x}(2) = \frac{1}{x}$ [য .বো.'১৭]

$\therefore$ $x = 2$ বিন্দুতে স্পর্শকের ঢাল $= \frac{1}{2}$ $\therefore$ Ans.(b)

**25.** Sol$^n$ : $\int \ln 2x\,dx = x(\ln 2x - 1) + c$

$\therefore$ **Ans. (d)** [য .বো.'১৭]

**26.** Sol$^n$ : $\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \ln|f(x)| + c$

$\therefore$ Ans. (d) [য .বো.'১৭]

**27.** Sol$^n$ : $\int_2^3 \frac{x}{x^2-1}dx = \frac{1}{2}\int_2^3 \frac{2x}{x^2-1}dx$

$= \frac{1}{2}\left[\ln(x^2-1)\right]_2^3 = \frac{1}{2}\ln\frac{8}{3}$

$\therefore$ Ans. (b) [রা.বো.'১৭]

**28.** Sol$^n$ : $\int \frac{\sin 2x}{\sin^2 x}dx = 2\int \cot x\,dx$

$= \ln|\sin x| + c$ [কু.বো.'১৭]

**29.** Sol$^n$ : $\int_0^{\pi/2} \sin x\,dx = [-\cos x]_0^{\pi/2}$

$= -(0-1) = 1 \quad \therefore$ Ans.(c) [কু.বো.'১৭]

**30.** Sol$^n$ : $\int \ln x\,dx = x\ln x - x$

$\therefore$ Ans. (b) [ব.বো.'১৭]

**31.** Sol$^n$ : $\int_0^1 \frac{3dx}{1+x^2} = 3\tan^{-1}1 = \frac{3\pi}{4}$

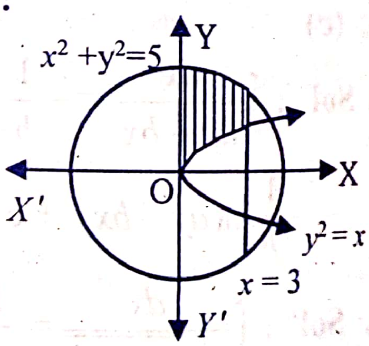
$\therefore$ Ans.(a) [ব.বো.'১৭]

**32.** Sol$^n$ : $\int \frac{e^\theta d\theta}{1+e^\theta} = \ln(1+e^\theta) + c$

$\therefore$ Ans. (a) [ব.বো.'১৭]

সৃজনশীল প্রশ্ন:

**1.**




চিত্রে, x = 3 সরলরেখা $x^2 + y^2 = 25$ বৃত্তকে এবং $y^2 = x$ পরাবৃত্তকে ছেদ করেছে।

**(a)** $\int \frac{1}{1+\cos x}dx$ নির্ণয় কর।

সমাধান: $\int \frac{1}{1+\cos x}dx$

$= \int \frac{1}{2\cos^2\frac{x}{2}}dx = \frac{1}{2}\int \sec^2\frac{x}{2}dx$

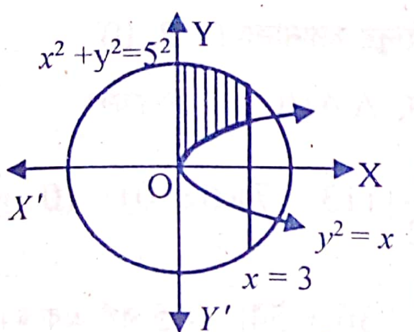
$$=\frac{1}{2}\times 2\tan\frac{x}{2}+c=\tan\frac{x}{2}+c \quad \text{(Ans.)}$$

(b) প্রদত্ত বৃত্ত ও সরলরেখা দ্বারা সীমাবদ্ধ ক্ষুদ্রতর ক্ষেত্রটির ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

সমাধান: প্রশ্নমালা XE.এর 3(c) দ্রষ্টব্য।

(c) প্রদত্ত পরাবৃত্ত ও সরলরেখার সাথে $y = 0$ সরলরেখা যে ক্ষেত্র তৈরি করে তার এবং রেখাঙ্কিত এলাকার ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

সমাধান:




রেখাঙ্কিত এলাকার ক্ষেত্রফল $=\int_0^3 (y_1 - y_2)dx$,

যেখানে $y_1=\sqrt{5^2-x^2}, y_2=\sqrt{x}$ .

$\therefore$ নির্ণেয় ক্ষেত্রফল $=\int_0^3(\sqrt{5^2-x^2}-\sqrt{x})dx$

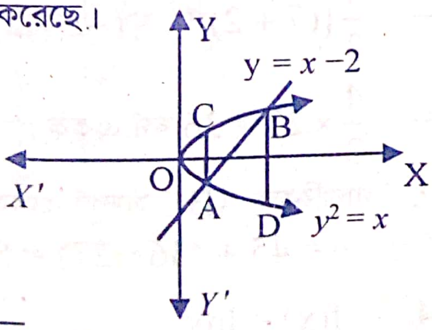
$$=\left[\frac{x\sqrt{25-x^2}}{2}+\frac{25}{2}\sin^{-1}\frac{x}{5}-\frac{x^{3/2}}{3/2}\right]_0^3$$

$$=\frac{3\sqrt{25-3^2}}{2}+\frac{25}{2}\sin^{-1}\frac{3}{5}-2\sqrt{3}$$

$$=\frac{3\times 4}{2}+\frac{25}{2}\sin^{-1}\frac{3}{5}-2\sqrt{3}$$

$$=6-2\sqrt{3}+\frac{25}{2}\sin^{-1}\frac{3}{5}$$

2. চিত্রে $y = x - 2$ সরলরেখা $y^2 = x$ পরাবৃত্তকে A ও B বিন্দুতে ছেদ করেছে।




(a) $\int x^3\sqrt{1+3x^4}dx$ নির্ণয় কর।

ধরি, $I=\int x^3\sqrt{1+3x^4}dx$

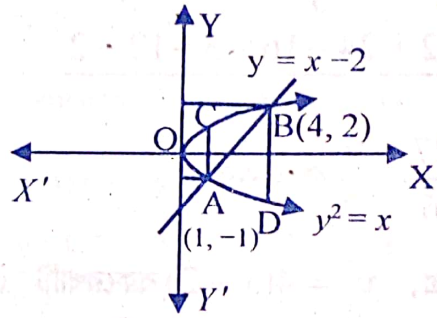
এবং $z = 1+3x^4 \;\therefore\; dz = 12x^3dx$

$$\therefore I=\frac{1}{12}\int\sqrt{z}dz=\frac{1}{12}\times\frac{z^{3/2}}{3/2}+c$$

$$=\frac{1}{18}(1+3x)^{3/2}+c \quad \text{(Ans.)}$$

(b) A ও B বিন্দুগামী y-অক্ষের সমান্তরাল রেখা পরাবৃত্তটিকে যথাক্রমে D ও C বিন্দুতে ছেদ করে। ADBC ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

সমাধান:




$y = x - 2 \Rightarrow x = y + 2$ হতে x এর মান $y^2 = x$ সমীকরণে বসিয়ে পাই, $y^2 = y + 2$

$\Rightarrow y^2 - y - 2 = 0$

$\Rightarrow (y-2)(y+1) = 0$

$\therefore\; y = -1, 2$ এবং $x = 1, 4$ .

ADBC ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল = $y=\sqrt{x}$ বক্ররেখা, $x$-অক্ষ এবং $x = 1$ ও $x = 4$ রেখাদ্বয় দ্বারা সীমাবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফলের দ্বিগুণ

$$=2\int_1^4 ydx=2\int_1^4\sqrt{x}dx=2\left[\frac{x^{3/2}}{3/2}\right]_1^4$$

$$=2\times\frac{2}{3}(4^{3/2}-1)=\frac{4}{3}\times(8-1)$$

$$=\frac{28}{3}$$ বর্গ একক

(c) $y = x - 2$ সরলরেখা ও $y^2 = x$ পরাবৃত্ত দ্বারা অবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

সমাধান: এখানে, A ও B বিন্দুর স্থানাঙ্ক যথাক্রমে (1, −1) ও (2, 4).

∴ y এর সীমা −1 থেকে 2 এবং $x_1 = y+2$, $x_2 = y^2$.

∴ নির্ণেয় ক্ষেত্রফল $= \int_{-1}^{2}(x_1 - x_2)dy$

$$= \int_{-1}^{2}(y+2-y^2)dy = \left[\frac{y^2}{2}+2y-\frac{y^3}{3}\right]_{-1}^{2}$$

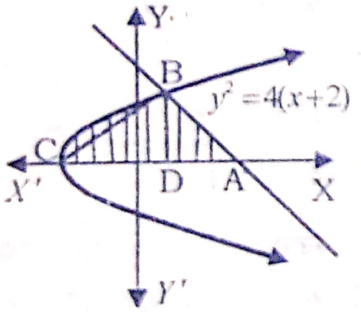
$$= \frac{4}{2}+4-\frac{8}{3}-\left(\frac{1}{2}-2+\frac{1}{3}\right)$$

$$= \frac{4}{2}+4-\frac{8}{3}-\frac{1}{2}+2-\frac{1}{3}$$

$$= \frac{12+24-16-3+12-2}{6}$$

$= \frac{27}{6} = \frac{9}{2}$ বর্গ একক।

**3.** চিত্রে, $y^2 = 4(x+2)$ বক্ররেখাটি x অক্ষকে C বিন্দুতে ও AB রেখাকে B বিন্দুতে ছেদ করে। AB রেখার ঢাল −1 ও B বিন্দুর y স্থানাঙ্ক 6 ।




**(a)** দেখাও যে, B বিন্দুর স্থানাঙ্ক (7, 6) .

**সমাধান :** ধরি, AB রেখার সমীকরণ $y = -x + c \cdots$ (i) এবং B বিন্দুর স্থানাঙ্ক $(\alpha, 6)$, যা (i) রেখা ও $y^2 = 4(x+2)$ বক্ররেখার ছেদবিন্দু।

∴ $6 = -\alpha + c \Rightarrow c = \alpha + 6$ এবং

$$6^2 = 4(\alpha+2) \Rightarrow \alpha + 2 = 9 \Rightarrow \alpha = 7$$

∴ $c = 7 + 6 = 13$

∴ B বিন্দুর স্থানাঙ্ক (7, 6).

**(b)** $\Delta ABC$ এর ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

**সমাধান:** AB রেখার সমীকরণ $y = -x + 13$

$\Rightarrow x + y = 13 \Rightarrow \frac{x}{13} + \frac{y}{13} = 1$

∴ A বিন্দুর স্থানাঙ্ক (13,0)

আবার , প্রদত্ত বক্ররেখা x অক্ষকে C বিন্দুতে ছেদ করে।

∴ C বিন্দুর y স্থানাঙ্ক 0 .

$y^2 = 4(x+2)$ এ $y = 0$ বসিয়ে পাই, $x = -2$

∴ C বিন্দুর স্থানাঙ্ক (− 2, 0)

এখন, $\Delta ABC$ এর ক্ষেত্রফল

$$= \frac{1}{2}|(13-7)(6-0)-(0-6)(7+2)|$$

$= \frac{1}{2}|36+54| = 45$ বর্গ একক।

**(c)** দাগাঙ্কিত ABC সম্পূর্ণ এলাকার ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

**সমাধান:** B হতে AC এর উপর BD লম্ব টানি।

∴ $\Delta BCD$ এর ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2}(CA \times BD)$

$= \frac{1}{2} \times |-2-7| \times 6 = 27$ বর্গ একক।

$y = 2\sqrt{x+2}$ বক্ররেখা, $x = 7$ সরলরেখা ও x অক্ষ দ্বারা সীমাবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল $= \int_{-2}^{7} 2\sqrt{x+2}dx$

$$= 2\left[\frac{(x+2)^{3/2}}{3/2}\right]_{-2}^{7}$$

$$= \frac{4}{3}\{(7+2)^{3/2} - (-2+2)^{3/2}\}$$

$= \frac{4}{3} \times 27 = 36$ বর্গ একক।

∴ দাগাঙ্কিত ABC সম্পূর্ণ এলাকার ক্ষেত্রফল $= 45 + (36 - 27) = 54$ বর্গ একক।

**4.** $f(x) = \ln x$

(a) $f(\ln x)$ এর অন্তরজ নির্ণয় কর।

**সমাধান :** $\frac{d}{dx} f(\ln x) = \frac{d}{dx}\ln(\ln x) = \frac{1}{x\ln x}$

(b) প্রমাণ কর যে, $\int_2^4 f(2x)dx = 8\ln 2 - 2$

সমাধান: $\int \ln(2x)dx$

$= \ln(2x)\int dx - \int [\frac{d}{dx}\{\ln(2x)\}\int dx]dx$

$= x\ln(2x) - \int \frac{2}{2x} . xdx$

$= x\ln(2x) - \int dx = x\ln(2x) - x + c$

$\therefore \int_2^4 \ln(2x)\,dx = [x\ln(2x) - x]_2^4$

$= 4\ln 8 - 4 - (2\ln 4 - 2)$

$= 4\ln 2^3 - 4 - 2\ln 2^2 + 2$

$= 12\ln 2 - 2 - 4\ln 2 = 8\ln 2 - 2$

(c) f(x) বক্ররেখা অক্ষকে যে বিন্দুতে ছেদ করে সে বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ নির্ণয় কর।

সমাধান : f(x)=lnx বক্ররেখা অক্ষকে (1,0) বিন্দুতে ছেদ করে

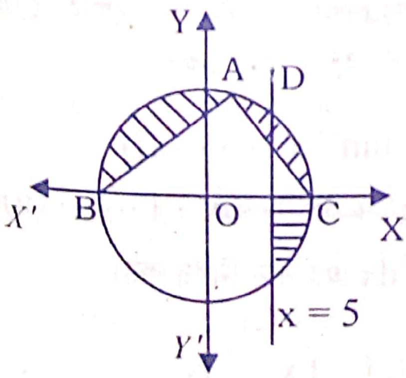
f(x)=lnx কে $x$-এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই, $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}$

(1,0) বিন্দুতে $\frac{dy}{dx} = 1$

$\therefore$ প্রদত্ত বক্ররেখার (1 , 0) বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ

$y - 0 = 1(x-1) \Rightarrow x - y - 1 = 0$(Ans:)

5.




চিত্রে, বৃত্তটির সমীকরণ $x^2 + y^2 = 36$ এবং AC = 8 একক।

(a) $\int \frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}}$ নির্ণয় কর।

সমাধান : ধরি, $I = \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx$

এবং $1 - x^2 = z$ . তাহলে, $-2xdx = dz$ এবং

$I = -\frac{1}{2}\int \frac{dz}{\sqrt{z}} = -\frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{z} + c$

$\therefore \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx = -\sqrt{1-x^2} + c$

(b) x-অক্ষের উপরের ছায়াঘেরা অংশের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

সমাধান : $x^2 + y^2 = 36$ বৃত্তের কেন্দ্র মূলবিন্দু ও ব্যাসার্ধ 6 ।

ABC সমকোণী ত্রিভুজে, $\angle BAC = \frac{\pi}{2}$,

AC = 8 একক, BC = 2 × 6 = 12 একক।

$\therefore AB = \sqrt{BC^2 - AC^2} = \sqrt{12^2 - 8^2} = 4\sqrt{5}$

ABC ত্রিভুজে ক্ষেত্রফল

$= \frac{1}{2}(AB \times AC) = \frac{1}{2}(4\sqrt{5} \times 8)$

$= 16\sqrt{5}$ বর্গ একক।

আবার, ABC অর্ধবৃত্তের ক্ষেত্রফল

$= \frac{1}{2}\pi \times 6^2 = 18\pi =$ বর্গ একক।

$\therefore$ x-অক্ষের উপরের ছায়াঘেরা অংশের ক্ষেত্রফল = ABC অর্ধবৃত্তের ক্ষেত্রফল − ABC ত্রিভুজে ক্ষেত্রফল

$= 18\pi - 16\sqrt{5}$ বর্গ একক।

(c) x−অক্ষের নিচের ছায়াঘেরা অংশের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

সমাধান : $x^2 + y^2 = 36$ বৃত্তের কেন্দ্র মূলবিন্দু ও ব্যাসার্ধ 6 ।

$x^2 + y^2 = 36$

$\Rightarrow y^2 = 36 - x^2 \Rightarrow y = \pm\sqrt{36 - x^2}$

ক্ষেত্র OAB এর ক্ষেত্রফল $= y = \sqrt{36 - x^2}$ বক্ররেখা, $x$-অক্ষ এবং $x = 5$ ও $x = 6$ রেখাদ্বয় দ্বারা সীমাবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল $= \int_5^6 y\,dx$

$$=\int_5^6 \sqrt{36-x^2}\,dx=\int_5^6 \sqrt{6^2-x^2}\,dx$$

$$=\left[\frac{x\sqrt{6^2-x^2}}{2}+\frac{6^2}{2}\sin^{-1}\frac{x}{6}\right]_5^6$$

$$=(0+\frac{36}{2}\sin^{-1}1)-(\frac{5\sqrt{36-25}}{2}+\frac{36}{2}\sin^{-1}\frac{5}{6})$$

$$=18.\frac{\pi}{2}-\frac{5\sqrt{11}}{2}-18\sin^{-1}\frac{5}{6}$$

$$=9\pi-\frac{5\sqrt{11}}{2}-18\sin^{-1}\frac{5}{6}$$

$\therefore$ নির্ণেয় ক্ষেত্রফল $=[9\pi-\frac{5\sqrt{11}}{2}-18\sin^{-1}\frac{5}{6}]$ বর্গ একক।

**6.** $x^2+y^2+4x-6y-12=0$ একটি বৃত্তের সমীকরণ।

(a) $\int\frac{\cos dx}{\sqrt{\sin x}}$ নির্ণয় কর।

সমাধান : ধরি, $I=\int\frac{\cos x}{\sqrt{\sin x}}dx$

এবং $\sin x=z$. তাহলে, $\cos x\,dx=dz$ এবং

$$I=\int\frac{dz}{\sqrt{z}}=2\sqrt{z}+c=2\sqrt{\sin x}+c$$

(b) বৃত্তটির $(5,\ -1)$ বিন্দুতে অভিলম্বের সমীকরণ নির্ণয় কর।

সমাধান : $x^2+y^2+4x-6y-12=0$

ইহাকে $x$-এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই,

$$2x+2y\frac{dy}{dx}-4-6\frac{dy}{dx}=0$$

$$\Rightarrow 2(y-6)\frac{dy}{dx}=-2(x-2)$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx}=-\frac{x-2}{y-6}$$

$(5,-1)$ বিন্দুতে $\frac{dy}{dx}=-\frac{5-2}{-1-6}=\frac{3}{7}$

$\therefore$ প্রদত্ত বৃত্তের $(5,-1)$ বিন্দুতে অভিলম্বের সমীকরণ,

$$y+1=\frac{7}{3}(x-5)$$

$$\Rightarrow 3y+3=7x-35\ \therefore 7x-3y-38=0$$

(c) যোগজীকরণের সাহায্যে বৃত্তটির ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

সমাধান : $x^2+y^2+4x-6y-12=0$

$$\Rightarrow (x+2)^2+(y-3)^2=5^2$$

বৃত্তের ক্ষেত্রফল $x^2+y^2=5^2$ বৃত্তের ক্ষেত্রফলের সমান।

এখন, $x^2+y^2=25$

$$\Rightarrow y^2=25-x^2\Rightarrow y=\pm\sqrt{25-x^2}$$

ক্ষেত্র OAB এর ক্ষেত্রফল

$=$ $y=\sqrt{25-x^2}$ বক্ররেখা, $x$-অক্ষ এবং $x=0$ ও $x=5$ রেখাদ্বয় দ্বারা সীমাবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল

$$=\int_0^5 y\,dx=\int_0^5\sqrt{25-x^2}\,dx$$

$$=\int_0^5\sqrt{5^2-x^2}\,dx$$

$$=\left[\frac{x\sqrt{5^2-x^2}}{2}+\frac{5^2}{2}\sin^{-1}\frac{x}{2}\right]_0^5$$

$$=\frac{25}{2}\sin^{-1}1=\frac{25}{2}.\frac{\pi}{2}=\frac{25}{4}\pi$$

$\therefore$ বৃত্তের ক্ষেত্রফল $=4\times$ ক্ষেত্র OAB এর ক্ষেত্রফল $=25\pi$ বর্গ একক

**7.** $f(x)=\tan^{-1}x$ …… (i)

$y=4x^3+3x^2-6x+1$ …… (ii)

(a) $\int x^2e^{x^3}dx$ এর মান নির্ণয় কর।

সমাধান : ধরি, $I=\int x\,e^{x^2}dx$

এবং $x^2=z$ . তাহলে, $2xdx=dz\Rightarrow xdx=\frac{dz}{2}$

এবং $I=\frac{1}{2}\int e^z dz=\frac{1}{2}e^z+c=\frac{1}{2}e^{x^2}+c$

(b) (ii) বক্ররেখার যে সকল বিন্দুতে স্পর্শক $x$-অক্ষের সমান্তরাল তাদের স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

সমাধান : $y = 4x^3 + 3x^2 - 6x + 1$

$\therefore \dfrac{dy}{dx} = 12x^2 + 6x - 6$

স্পর্শক $x$- অক্ষের সমান্তরাল হলে, $\dfrac{dy}{dx} = 0$

$\therefore 12x^2 + 6x - 6 = 0 \Rightarrow 2x^2 + x - 1 = 0$

$\Rightarrow 2x^2 + 2x - x - 1 = 0$

$\Rightarrow 2x(x + 1) - 1(x + 1) = 0$

$\Rightarrow (x + 1)(2x - 1) = 0 \quad \therefore x = -1, \dfrac{1}{2}$

$x = -1$ হলে, $y = -4 + 3 + 6 + 1 = 6$

$x = \dfrac{1}{2}$ হলে, $y = 4.\dfrac{1}{8} + 3.\dfrac{1}{4} - 6.\dfrac{1}{2} + 1$

$= \dfrac{2 + 3 - 8}{4} = -\dfrac{3}{4}$

$\therefore$ বিন্দু দুইটি $(-1, 6)$, $(\dfrac{1}{2}, -\dfrac{3}{4})$

(c) $\int_1^{\sqrt{3}} xf(x)\,dx$ এর মান নির্ণয় কর।

সমাধান : $\int x \tan^{-1} x\, dx$

$= \tan^{-1} x \int x dx - \int \{\dfrac{d}{dx}(\tan^{-1} x) \int x dx\} dx$

$= \dfrac{x^2}{2} \tan^{-1} x - \int \dfrac{1}{1 + x^2} . \dfrac{x^2}{2} dx$

$= \dfrac{x^2}{2} \tan^{-1} x - \dfrac{1}{2} \int \dfrac{1 + x^2 - 1}{1 + x^2} dx$

$= \dfrac{x^2}{2} \tan^{-1} x - \dfrac{1}{2} \int (1 - \dfrac{1}{1 + x^2}) dx$

$= \dfrac{x^2}{2} \tan^{-1} x - \dfrac{1}{2}(x - \tan^{-1} x) + c$

$= \dfrac{1}{2}\{(x^2 + 1)\tan^{-1} x - x\} + c$

$\int_1^{\sqrt{3}} x \tan^{-1} x\, dx = \left[\dfrac{(x^2 + 1)\tan^{-1} x - x}{2}\right]_1^{\sqrt{3}}$

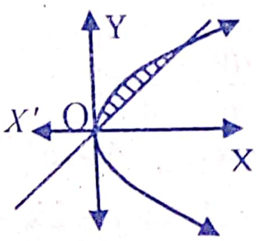
$= \dfrac{(3 + 1)\tan^{-1} \sqrt{3} - \sqrt{3} - (1 + 1)\tan^{-1} 1 + 1}{2}$

$= \dfrac{1}{2}(4.\dfrac{\pi}{3} - \sqrt{3} - 2.\dfrac{\pi}{4} + 1)$

$= \dfrac{1}{2}(\dfrac{4\pi}{3} - \dfrac{\pi}{2} - \sqrt{3} + 1)$

$= \dfrac{1}{2}(\dfrac{8\pi - 3\pi}{6} - \sqrt{3} + 1) = \dfrac{1}{12}(5\pi - 6\sqrt{3} + 6)$

8.




চিত্রে, $y = x$ এবং $y^2 = 4x$ বক্ররেখা পরস্পর O ও A বিন্দুতে ছেদ করে।

(a) $\int \sqrt{1 - \sin x} \cos x dx$ নির্ণয় কর।

সমাধান : ধরি, $I = \int \sqrt{1 - \sin x} \cos x\, dx$

এবং $1 - \sin x = z$ . তাহলে, $-\cos dx = dz$ এবং

$I = -\int z^{\frac{1}{2}} dz = -\dfrac{z^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2} + 1} + c = -\dfrac{2}{3} z^{\frac{3}{2}} + c$

$\therefore \int \sqrt{1 - \sin x} \cos x\, dx = -\dfrac{2}{3}(1 - \sin x)^{\frac{3}{2}} + c$

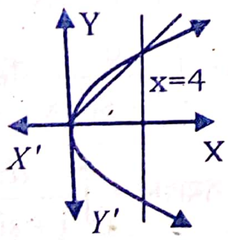
(b) ছায়া ঘেরা অংশটির ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

সমাধান : $y = x$ হতে $y$ এর মান

$y^2 = 4x$ সমীকরণে বসিয়ে পাই,

$x^2 = 4x \Rightarrow x = 0, 4$

$\therefore$ নির্ণেয় ক্ষেত্রফল =




$y_1 = 2\sqrt{x}$ বক্ররেখা ও $y_2 = x$ সরলরেখা এবং $x = 0$ ও $x = 4$ রেখাদ্বয় দ্বারা আবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল

$= \int_0^4 (y_1 - y_2)\, dx = \int_0^4 (2\sqrt{x} - x)\, dx$

$= \left[2\dfrac{x^{3/2}}{3/2} - \dfrac{x^2}{2}\right]_0^4 = 2 \times \dfrac{2}{3}(4)^{\frac{3}{2}} - \dfrac{4^2}{2}$

$=\frac{32}{3}-8=\frac{32-24}{3}=\frac{8}{3}$ বর্গ একক ।

(c) প্রদত্ত বক্ররেখার A বিন্দুতে অঙ্কিত স্পর্শক ও প্রদত্ত সরলরেখার মধ্যবর্তী কোণ নির্ণয় কর।

**সমাধান ঃ** প্রদত্ত বক্ররেখার A বিন্দুর স্থানাঙ্ক(4,4).

বক্ররেখাকে $x$-এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই,

$y^2 = 4x$

$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{2}{y}$

(4,4) বিন্দুতে $\frac{dy}{dx}=\frac{2}{4}=2$

$\therefore$ (4,4) বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ ;

$y-4=2(x-4) \Rightarrow y-2x-4=0$

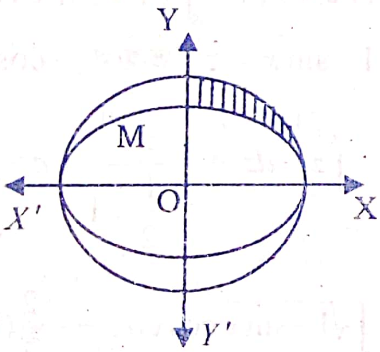
$m_1=2$ , $m_2=1$

প্রদত্ত বক্ররেখার A বিন্দুতে অঙ্কিত স্পর্শক ও প্রদত্ত সরলরেখার মধ্যবর্তী কোণ,

$\theta=\tan^{-1}\frac{m_1-m_2}{1+m_1m_2}\theta \quad =\tan^{-1}\frac{2-1}{1+2}=\tan^{-1}\frac{1}{3}$

(Ans:)

9.




এককেন্দ্রিক একটি বৃত্ত ও একটি উপবৃত্ত। উপবৃত্তটির সমীকরণ $9x^2+16y^2=144$.

(a) $\int\frac{dx}{1+\sin x}$ নির্ণয় কর।

**সমাধান ঃ** $\int\frac{dx}{1+\sin x}=\int\frac{(1-\sin x)dx}{(1+\sin x)(1-\sin x)}$

$=\int\frac{(1-\sin x)dx}{1-\sin^2 x}=\int\frac{(1-\sin x)dx}{\cos^2 x}$

$=\int(\frac{1}{\cos^2 x}-\frac{\sin x}{\cos^2 x})dx$

$=\int(\sec^2 x-\sec x\tan x)dx$

$=\tan x-\sec x+c$

(b) উপবৃত্তটির $(3,\frac{\sqrt{63}}{4})$ বিন্দুতে অভিলম্বের সমীকরণ নির্ণয় কর।

**সমাধানঃ** উপবৃত্তটির সমীকরণ $9x^2+16y^2=144$

ইহাকে $x$-এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই,

$18x+32y\frac{dy}{dx}=0 \Rightarrow \frac{dy}{dx}=-\frac{9x}{16y}$

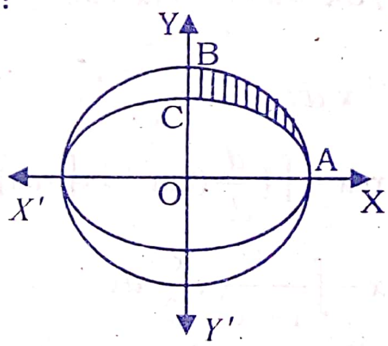
$(3,\frac{\sqrt{63}}{4})$ বিন্দুতে

$\frac{dy}{dx}=-\frac{9.3}{16.\frac{\sqrt{63}}{4}}=\frac{-27}{4.3\sqrt{7}}=-\frac{9}{4\sqrt{7}}$

$\therefore$ প্রদত্ত উপবৃত্তটির $(3,\frac{\sqrt{63}}{4})$ বিন্দুতে অভিলম্বের সমীকরণ $y-\frac{\sqrt{63}}{4}=\frac{4\sqrt{7}}{9}(x-3)$ (Ans)

(c) উদ্দীপকের ছায়াঘেরা অংশটির ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

**সমাধান:**




উপবৃত্তটির সমীকরণ $9x^2+16y^2=144$

$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1 \Rightarrow \frac{x^2}{4^2}+\frac{y^2}{3^2}=1 \cdots\cdots$ (i)

$\therefore$ (i) উপবৃত্তের কেন্দ্র O(0,0), OA = 4, OC = 3

$\therefore$ বৃত্তটির কেন্দ্র O(0,0), ব্যাসার্ধ , OA = 4

$\therefore$ বৃত্তটির সমীকরণ, $x^2+y^2=4^2$

$\Rightarrow y^2=16-x^2 \Rightarrow y=\pm\sqrt{16-x^2}$

(i) হতে, $\frac{y^2}{9}=1-\frac{x^2}{16} \Rightarrow y^2=\frac{9}{16}(16-x^2)$

$\Rightarrow y=\pm\frac{3}{4}\sqrt{16-x^2}$

$\therefore$ উদ্দীপকের ছায়াঘেরা অংশটির ক্ষেত্রফল

= OAB বৃত্তাংশের ক্ষেত্রফল – OAC উপবৃত্তাংশের ক্ষেত্রফল

$=\int_0^4\sqrt{16-x^2}\,dx-\int_0^4\frac{3}{4}\sqrt{16-x^2}\,dx$

$=\frac{1}{4}\int_0^4\sqrt{4^2-x^2}\,dx$

$=\frac{1}{4}\left[\frac{x\sqrt{4^2-x^2}}{2}+\frac{4^2}{2}\sin^{-1}\frac{x}{4}\right]_0^4$

$=\frac{1}{4}(\frac{16}{2}\sin^{-1}1)=2.\frac{\pi}{2}=\pi$ বর্গ একক।

**10.** $f(x)=\sin 2x,\ g(x)=\sqrt{a-x^2}$

**(a)** $f'(0)$ এর মান নির্ণয় কর।

সমাধান: $f(x)=\sin 2x$

$\therefore\ f'(x)=2\cos 2x$

$\therefore\ f'(0)=2\cos 0=2\times 1=2$

**(b)** $\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{1-f(x)}{f(\frac{\pi}{2}+x)}$ এর মান নির্ণয় কর।

সমাধান: $\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{1-\sin 2x}{\cos 2x}$

ধরি, $x=\frac{\pi}{4}+h$. $\because x\to\frac{\pi}{4}\ \therefore h\to 0$

$\therefore \lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{1-\sin 2x}{\cos 2x}=\lim_{h\to 0}\frac{1-\sin 2(\frac{\pi}{4}+h)}{\cos 2(\frac{\pi}{4}+h)}$

$=\lim_{h\to 0}\frac{1-\sin(\frac{\pi}{2}+2h)}{\cos(\frac{\pi}{2}+2h)}=\lim_{h\to 0}\frac{1-\cos 2h}{-\sin 2h}$

$=\lim_{h\to 0}\frac{2\sin^2 h}{-2\sin h\cos h}=-\lim_{h\to 0}\tan h$

$=-\lim_{h\to 0}\frac{\tan h}{h}\times h=-1\times 0=0$ (Ans.)

**(c)** $\int_0^a g(x)dx$ এর মান নির্ণয় কর।

সমাধান: $\int_0^a g(x)dx=\int_0^a\sqrt{a^2-x^2}\,dx$

ধরি, $x=a\sin\theta \Rightarrow \theta=\sin^{-1}\frac{x}{a}$ এবং

$dx=a\cos\theta\,d\theta$

সীমা: $x=0$ হলে, $\theta=\sin^{-1}\frac{0}{a}=\sin^{-1}0=0$

$x=a$ হলে, $\theta=\sin^{-1}\frac{a}{a}=\sin^{-1}1=\frac{\pi}{2}$

$\therefore\ \int_0^a g(x)dx=\int_0^{\pi/2}\sqrt{a^2(1-\sin^2\theta}\,a\cos\theta d\theta$

$=a^2\int_0^{\pi/2}\sqrt{\cos^2\theta}\,\cos\theta d\theta$

$=a^2\int_0^{\pi/2}\cos^2\theta d\theta$

$=a^2\int_0^{\pi/2}\frac{1}{2}(1+\cos 2\theta)d\theta$

$=\frac{a^2}{2}\left[\theta+\frac{\sin 2\theta}{2}\right]_0^{\pi/2}$

$=\frac{a^2}{2}\left[\frac{\pi}{2}+\frac{\sin\pi}{2}-0-\frac{\sin 0}{2}\right]$

$=\frac{a^2}{2}\left[\frac{\pi}{2}+\frac{0}{2}-0-\frac{0}{2}\right]=\frac{a^2\pi}{4}$

**11.** $f(x)=x+\frac{1}{x},\ g(x)=e^x\sin 2x$

**(a)** $\int(\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2})^2dx$ নির্ণয় কর।

সমাধান: $\int(\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2})^2dx$

$$= \int (\sin^2\frac{x}{2} + \cos^2\frac{x}{2} + 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2})dx$$

$$= \int (1 + \sin x)dx = x - \cos x + c$$

**(b)** $f(x)$ এর সর্বোচ্চ ও সর্বনিম্ন মান নির্ণয় কর।

সমাধান: $f(x) = x + \frac{1}{x}$

$\therefore \quad f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2}$ এবং $f''(x) = \frac{2}{x^3}$

চরম মানের জন্য, $f'(x) = 0$

$\therefore \quad 1 - \frac{1}{x^2} = 0 \Rightarrow x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x = -1, 1$

এখন, $f''(-1) = \frac{2}{(-1)^3} < 0$

$\therefore \quad x = -1$ এর জন্য $f(x)$ এর গুরুমান আছে।

$\therefore$ গুরুমান $= f(-1) = -1 + \frac{1}{-1} = -2$

আবার, $f''(1) = \frac{2}{1^3} > 0$

$\therefore \quad x = 1$ এর জন্য $f(x)$ এর লঘুমান আছে।

$\therefore$ লঘুমান $= f(1) = 1 + \frac{1}{1} = 2$

**(c)** $\int_0^{\pi/2} g(x)dx$ এর মান নির্ণয় কর।

সমাধান: ধরি, $I = \int g(x)dx = \int e^x \sin 2x dx$

$$= \sin 2x \int e^x dx - \int \{\frac{d}{dx}(\sin 2x) \int e^x dx\} dx$$

$$= \sin 2x . e^x - \int 2\cos 2x . e^x dx$$

$$= e^x \sin 2x - 2[\cos 2x \int e^x dx - \int \{\frac{d}{dx}(\cos 2x) \int e^x dx\} dx]$$

$$= e^x \sin 2x - 2[\cos 2x . e^x - \int \{-2\sin 2x . e^x\} dx]$$

$$= e^x \sin 2x - 2e^x \cos 2x - 4\int e^x \sin 2x \, dx$$

$$\Rightarrow I = e^x \sin 2x - 2e^x \cos 2x - 4I + c$$

$$\Rightarrow 5I = e^x(\sin 2x - 2\cos 2x) + c$$

$$\Rightarrow I = \frac{1}{5}e^x(\sin 2x - 2\cos 2x) + c$$

$$\therefore \int g(x)dx = \frac{1}{5}e^x(\sin 2x - 2\cos 2x) + c$$

$$\therefore \int_0^{\pi/2} g(x)dx = \left[\frac{1}{5}e^x(\sin 2x - 2\cos 2x)\right]_0^{\pi/2}$$

$$= \frac{1}{5}e^{\pi/2}(\sin \pi - 2\cos \pi - \sin 0 + 2\cos 0)$$

$$= \frac{1}{5}e^{\pi/2}\{0 - 2(-1) - 0 + 2(1)\}$$

$$= \frac{1}{5}e^{\pi/2}(2 + 2) = \frac{4}{5}e^{\pi/2}$$

**12.** $f(x) = 2x^2 + 7x - 1$

$g(x) = \frac{x}{(x+1)(x^2+4)}$

**(a)** $e^x \cos 3x$ এর অন্তরজ নির্ণয় কর।

সমাধান: ধরি, $y = e^x \cos 3x$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = e^x \frac{d}{dx}(\cos 3x) + \cos 3x \frac{d}{dx}(e^x)$$

$$= e^x(-\sin 3x).\frac{d}{dx}(3x) + \cos 3x . e^x$$

$$= -e^x \sin 3x . 3 + e^x \cos 3x$$

$\therefore \quad e^x \cos 3x$ এর অন্তরজ,

$$\frac{d}{dx}(e^x \cos 3x) = e^x(-3\sin 3x + \cos 3x)$$

**(b)** $f(x)$ এর লঘুমান নির্ণয় কর।

সমাধান: $f(x) = 2x^2 + 7x - 1$

$\therefore \quad f'(x) = 4x + 7$ এবং $f''(x) = 4$

চরম মানের জন্য, $f'(x) = 0$

$\therefore \quad 4x + 7 = 0 \Rightarrow 4x = -7 \Rightarrow x = -\frac{7}{4}$

এখন, $f''(-\frac{7}{4}) = 4 > 0$

$\therefore \quad x = -\frac{7}{4}$ এর জন্য $f(x)$ এর লঘুমান আছে।

$$= \frac{49}{8} - \frac{49}{4} - 1 = \frac{49-98-8}{8}$$

$$= -\frac{57}{8} \text{ (Ans.)}$$

(c) $\int_0^2 g(x)dx$ এর মান নির্ণয় কর।

সমাধান: ধরি, $I = \int_0^2 g(x)dx$

$$= \int_0^2 \frac{xdx}{(x+1)(x^2+4)} \text{ এবং}$$

$$\frac{x}{(x+1)(x^2+4)} \equiv \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2+4}$$

$$\Rightarrow x = A(x^2+4) + (Bx+C)(x+1) \cdots (1)$$

(1) এ $x = -1$ বসিয়ে পাই, $-1 = 5A \Rightarrow A = -\frac{1}{5}$

(1) এর উভয়পক্ষ থেকে $x^2$ এর সহগ সমীকৃত করে পাই, $0 = A + B \Rightarrow B = -A = \frac{1}{5}$

(1) এর উভয়পক্ষ থেকে ধ্রুবপদ সমীকৃত করে পাই,

$$0 = 4A + C \Rightarrow C = -4A = -4(-\frac{1}{5}) = \frac{4}{5}$$

$$\therefore I = -\frac{1}{5}\int_0^2 \frac{dx}{1+x} + \int_0^2 \frac{\frac{1}{5}x + \frac{4}{5}}{x^2+4}dx$$

$$= -\frac{1}{5}[\ln(1+x)]_0^2 + \frac{1}{10}\int_0^2 \frac{2xdx}{x^2+4} + \frac{4}{5}\int_0^2 \frac{dx}{x^2+2^2}$$

$$= -\frac{1}{5}(\ln 3 + \ln 1) + \frac{1}{10}[\ln(x^2+4)]_0^2 + \frac{4}{5}\left[\frac{1}{2}\tan^{-1}\frac{x}{2}\right]_0^2$$

$$= \frac{1}{5}(\ln 3 + 0) + \frac{1}{10}(\ln 8 - \ln 4) + \frac{4}{10}.(\tan^{-1}1 - 0)$$

$$= \frac{1}{5}\ln 3 + \frac{1}{10}(\ln\frac{8}{4}) + \frac{4}{10}.(\frac{\pi}{4})$$

$$= \frac{1}{5}\ln 3 + \frac{1}{10}\ln 2 + \frac{\pi}{10} \text{ (Ans.)}$$

13. $f(x) = 1 + \cos x$,

$$g(x) = \sqrt{1-x^2}\sin^{-1}x - x$$

(a) $f(x^2)$ এর অন্তরজ নির্ণয় কর।

সমাধান: $f(x) = 1 + \cos x$

$$\therefore f(x^2) = 1 + \cos(x^2)$$

$$\therefore f'(x^2) = 0 - \sin(x^2)\frac{d}{dx}(x^2)$$

$$= -\sin(x^2).(2x)$$

$\therefore$ $f(x^2)$ এর অন্তরজ $= -2x\sin(x^2)$

(b) $\int_0^{\pi/2}\sqrt{f(x)}dx$ এর মান নির্ণয় কর।

সমাধান: $\int_0^{\pi/2}\sqrt{f(x)}dx$

$$= \int_0^{\pi/2}\sqrt{1+\cos x}dx = \int_0^{\pi/2}\sqrt{2\cos^2\frac{x}{2}}dx$$

$$= \sqrt{2}\int_0^{\pi/2}\cos\frac{x}{2}dx = \sqrt{2}\left[\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{1}{2}}\right]_0^{\pi/2}$$

$$= 2\sqrt{2}(\sin\frac{\pi}{4} - \sin\frac{0}{2}) \qquad = 2\sqrt{2}(\frac{1}{\sqrt{2}} - 0)$$

$$= 2 \text{ (Ans.)}$$

(c) দেখাও যে,
$(1-x^2)g''(x) - x\{g'(x) - 2\} + g(x) = 0$

প্রমাণ : এখানে,

$$g(x) = \sqrt{1-x^2}\sin^{-1}x - x \cdots (1)$$

ইহাকে $x$-এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই,

$$g'(x) = \frac{\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{\sin^{-1}x}{2\sqrt{1-x^2}}(-2x) - 1$$

$$\Rightarrow g'(x) = 1 - \frac{x\sin^{-1}x}{\sqrt{1-x^2}} - 1$$

$$= -\frac{x\sqrt{1-x^2}\sin^{-1}x}{1-x^2}$$

$$\Rightarrow (1-x^2)g'(x)$$

$$= -x(\sqrt{1-x^2}\sin^{-1}x - x + x)$$

$$\Rightarrow (1-x^2)g'(x) = -x\{g(x) + x\}$$

[(1) দ্বারা।]

$$\Rightarrow (1-x^2)g'(x) + x\,g(x) + x^2 = 0$$

ইহাকে $x$ -এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই,

$$(1-x^2)g''(x) + g'(x)(-2x) + xg'(x) + g(x) + 2x = 0$$

$$\Rightarrow (1-x^2)g''(x) - xg'(x) + g(x) + 2x = 0$$

$$\therefore (1-x^2)g''(x) - x\{g'(x) - 2\} + g(x) = 0$$

**14.** $y = \dfrac{\ln x}{x^2+1} \cdots$ (i), $x^2 + y^2 = 16 \cdots$ (ii)

**(a)** প্রমাণ কর যে, $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{4-x^2}{3-\sqrt{x^2+5}} = 6$

**প্রমাণ :** $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{4-x^2}{3-\sqrt{x^2+5}}$

$$= \lim_{x\to 2} \frac{(4-x^2)(3+\sqrt{x^2+5})}{(3-\sqrt{x^2+5})(3+\sqrt{x^2+5})}$$

$$= \lim_{x\to 2} \frac{(4-x^2)(3+\sqrt{x^2+5})}{3^2-(x^2+5)}$$

$$= \lim_{x\to 2} \frac{(4-x^2)(3+\sqrt{x^2+5})}{9-x^2-5}$$

$$= \lim_{x\to 2} \frac{(4-x^2)(3+\sqrt{x^2+5})}{4-x^2}$$

$$= \lim_{x\to 2}(3+\sqrt{x^2+5}) = 3+\sqrt{2^2+5}$$

$$= 3+3 = 6 \text{ (Ans.)}$$

**(b)** (i) বক্ররেখার $x = 2$ বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ নির্ণয় কর।

সমাধান: $y = \dfrac{\ln x}{x^2+1}$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{(x^2+1)\frac{d}{dx}(\ln x) - \ln x \frac{d}{dx}(x^2+1)}{(x^2+1)^2}$$

$$= \frac{(x^2+1)\frac{1}{x} - \ln x.(2x+0)}{(x^2+1)^2}$$

$$= \frac{x^2+1-2x^2\ln x}{x(x^2+1)^2}$$

$\therefore$ $x = 2$ বিন্দুতে, $y = \dfrac{\ln 2}{2^2+1} = \dfrac{\ln 2}{5}$ এবং

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2^2+1-2.2^2\ln 2}{2(2^2+1)^2} = \frac{5-8\ln 2}{50}$$

$\therefore$ প্রদত্ত বক্ররেখার $x = 2$ বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ,

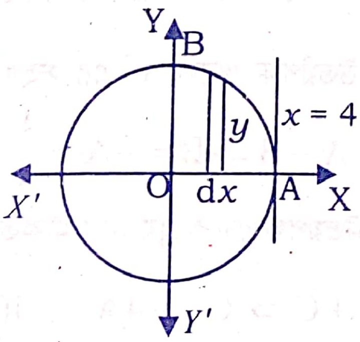
$$\left(y - \frac{\ln 2}{5}\right) = \frac{5-8\ln 2}{50}(x-2)$$

$$\Rightarrow \frac{5y-\ln 2}{5} = \frac{5-8\ln 2}{50}(x-2)$$

$$\therefore 10(5y-\ln 2) = (5-8\ln 2)(x-2)$$

**(c)** প্রমাণ কর যে, (ii) নং বৃত্তের ক্ষেত্রফল $16\pi$ বর্গ একক।

**প্রমাণ :**




$x^2 + y^2 = 4^2$ বৃত্তের কেন্দ্র মূলবিন্দু ও ব্যাসার্ধ 4।

$$x^2 + y^2 = 16 \Rightarrow y^2 = 16 - x^2$$

$$\Rightarrow y = \pm\sqrt{16-x^2}$$

ক্ষেত্র OAB এর ক্ষেত্রফল = $y = \sqrt{16-x^2}$ বক্ররেখা, $x$-অক্ষ এবং $x = 0$ ও $x = 4$ কোটি দুইটি দ্বারা সীমাবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল = $\int_0^4 y\,dx$

$$= \int_0^4 \sqrt{16-x^2}\,dx = \int_0^4 \sqrt{4^2-x^2}\,dx$$

$$= \left[\frac{x\sqrt{4^2-x^2}}{2} + \frac{4^2}{2}\sin^{-1}\frac{x}{4}\right]_0^4$$

$$= \frac{4\sqrt{4^2-4^2}}{2} + \frac{4^2}{2}\sin^{-1}\frac{4}{4} - \frac{0\sqrt{4^2-0^2}}{2} - \frac{0^2}{2}\sin^{-1}\frac{0}{4}$$

$=\frac{16}{2}\sin^{-1}1=8.\frac{\pi}{2}=4\pi$

$\therefore$ বৃত্তের ক্ষেত্রফল $=4\times$ ক্ষেত্র OAB এর ক্ষেত্রফল $=4\times 4\pi$ বর্গ একক $=16\pi$ বর্গ একক ।

15. $h(x)=\ln x$ এবং $h'(x)=g(x)$

(a) $\int\cos^2 x dx$ নির্ণয় কর।

সমাধান : $\int\cos^2 x dx=\int\frac{1}{2}(1+\cos 2x)dx$

$=\frac{1}{2}(x+\frac{\cos 2x}{2})+c=\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}\cos 2x+c$

(b) $x^2g'(x)+h'(\tan 2x)=0$ হলে প্রমাণ কর যে, $\text{cosec } 4x=1$

প্রমাণ: $h(x)=\ln x \cdots$ (i) এবং $h'(x)=g(x) \cdots$ (ii)

(i) হতে, $h'(x)=\frac{1}{x}=g(x)$ , [(ii) দ্বারা]

$\therefore\ g'(x)=\frac{d}{dx}(x^{-1})=-1.x^{-1-1}=\frac{-1}{x^2}$

এখন, $x^2g'(x)+h'(\tan 2x)=0$

$\Rightarrow x^2(-\frac{1}{x^2})+\frac{1}{\tan 2x}=0$

$\Rightarrow\frac{1}{\tan 2x}=1\Rightarrow\tan 2x=1$

$$\text{L.H.S.}=\text{cosec } 4x=\frac{1}{\sin 2.2x}$$

$$=\frac{1}{\frac{2\tan 2x}{1+\tan^2 2x}}=\frac{1+\tan^2 2x}{2\tan 2x}$$

$$=\frac{1+1^2}{2.1}=1=\text{R.H.S.}$$

(c) দেখাও যে, $h(x)\,g(x)$ ফাংশনের সর্বনিম্ন মান e.

প্রমাণ: মনে করি, $f(x)=h(x)\,g(x)=\ln x.\frac{1}{x}$

$\therefore\ f'(x)=\frac{x\frac{1}{x}-\ln x.1}{x^2}=\frac{1-\ln}{x^2}$ এবং

$$f''(x)=\frac{x^2(-\frac{1}{x})-(1-\ln x).2x}{x^4}$$

$$=\frac{-x-2x+2x\ln x}{x^4}=\frac{-3+2\ln x}{x^3}$$

চরম মানের জন্য, $f'(x)=0$

$\therefore\ \frac{1-\ln x}{x^2}=0\Rightarrow\ln x=1\ \therefore\ x=e$

এখন, $f''(e)=\frac{-3+2.1}{e^3}=\frac{-1}{e^3}<0$

$\therefore\ x=e$ এর জন্য $f(x)$ এর গুরুমান আছে।

$\therefore\ h(x)g(x)=\frac{x}{\ln(x)}$ এর গুরুমান $=f(e)=\frac{1}{e}$

**16.** $f(x)=e^x$, $g(x)=e^{-x}$

**(a)** $\int_0^{\pi/2}9g(x)dx$ এর মান নির্ণয় কর।

**সমাধান :** $\int_0^{\pi/2}9g(x)dx=\int_0^{\pi/2}9e^{-x}dx$

$$=-9\int_0^{\pi/2}e^{-x}d(-x)=-9[e^{-x}]_0^{\pi/2}$$

$$=-9(e^{-\pi/2}-e^{-0})=-9(e^{-\pi/2}-e^0)$$

$$=-9(e^{-\pi/2}-1)=9(1-e^{-\pi/2})$$

**(b)** মূল নিয়মে $9g(2x)$ এর অন্তরজ নির্ণয় কর।

**সমাধান :** মনে করি; $F(x)=9g(2x)=9e^{-2x}$

$\therefore\ F(x+h)=9e^{-2(x+h)}=9e^{-2x-2h}$

অন্তরক সহগের সংজ্ঞা হতে পাই,

$$\frac{d}{dx}\{F(x)\}=\lim_{h\to 0}\frac{F(x+h)-F(x)}{h}$$

$$\therefore\ \frac{d}{dx}(9e^{-2x})=\lim_{h\to 0}\frac{9e^{-2x-2h}-9e^{-2x}}{h}$$

$$=9\lim_{h\to 0}\frac{e^{-2x}.e^{-2h}-e^{-2x}}{h}$$

$$=9\lim_{h\to 0}\frac{e^{-2x}}{h}(e^{-2h}-1)$$

$$=9e^{-2x}\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}[\{1+(-2h)+\frac{(-2h)^2}{2!}+\frac{(-2h)^3}{3!}+\cdots\}-1]$$

$$= 9e^{-2x}\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}(-2h+\frac{2^2h^2}{2!}-\frac{2^3h^3}{3!}+\cdots\cdots)$$

$= 9e^{-2x}\lim_{h\to 0}(-2+\frac{2^2h}{2!}-\frac{2^3h^2}{3!}+$ h- এর উচ্চঘাত সম্বলিত পদসমূহ)

$$= 9e^{-2x}(-2+0+0+\cdots\cdots) = -18e^{-2x}$$

**(c)** দেখাও যে; $4f(x) + 9g(x)$ এর লঘুমান $12$।

**প্রমাণ:** মনে করি, $y = 4f(x) + 9g(x)$

$$= 4e^{x}+9e^{-x}$$

$\therefore \frac{dy}{dx}=4e^{x}-9e^{-x}$ এবং $\frac{d^2y}{dx^2}=4e^{x}+9e^{-x}$

চরম মানের জন্য, $\frac{dy}{dx}=0 \therefore 4e^{x}-9e^{-x}=0$

$$\Rightarrow 4e^{x}=\frac{9}{e^{x}} \Rightarrow (e^{x})^2=\frac{9}{4} \therefore e^{x}=\pm\frac{3}{2}$$

$e^{x}=\frac{3}{2}$ হলে, $\frac{d^2y}{dx^2}=4.\frac{3}{2}+9\times\frac{2}{3}>0$

$\therefore e^{x}=\frac{3}{2}$ এর জন্য $4e^{x}+9e^{-x}$ এর লঘুমান আছে।

$\therefore$ লঘুমান $= 4.\frac{3}{2}+9\times\frac{2}{3}=6+6=12$

**17.** $f(x)=x-x^{1/3}\cdots\cdots$ (i)

$y=4x^3+3x^2-6x+1\cdots\cdots$ (ii)

**(a)** $\int_8^{27}f(x)dx$ এর মান নির্ণয় কর।

**সমাধান :** $\int_8^{27}f(x)dx=\int_8^{27}(x-x^{\frac{1}{3}})dx$

$$=\left[\frac{x^{1+1}}{1+1}-\frac{x^{\frac{1}{3}+1}}{\frac{1}{3}+1}\right]_8^{27}=\frac{27^2}{2}-\frac{27^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}}-\frac{8^2}{2}+\frac{8^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}}$$

$$=\frac{729}{2}-\frac{3}{4}\times 81-\frac{64}{2}+\frac{3}{4}\times 16$$

$$=\frac{729}{2}-\frac{243}{4}-32+12=\frac{729}{2}-\frac{243}{4}-20$$

$$=\frac{1458-243-80}{4}=\frac{1135}{4} \text{ (Ans.)}$$

**(b) (ii)** বক্ররেখার যে সকল বিন্দুতে স্পর্শক $x$- অক্ষের সমান্তরাল তাদের স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

**সমাধান ঃ** $y=4x^3+3x^2-6x+1$

$$\therefore \frac{dy}{dx}=12x^2+6x-6$$

স্পর্শক $X$- অক্ষের সমান্তরাল হলে, $\frac{dy}{dx}=0$

$$\therefore 12x^2+6x-6=0 \Rightarrow 2x^2+x-1=0$$

$$\Rightarrow 2x^2+2x-x-1=0$$

$$\Rightarrow 2x(x+1)-1(x+1)=0$$

$$\Rightarrow (x+1)(2x-1)=0 \therefore x=-1, \frac{1}{2}$$

$x=-1$ হলে, $y=-4+3+6+1=6$

$x=\frac{1}{2}$ হলে, $y=4.\frac{1}{8}+3.\frac{1}{4}-6.\frac{1}{2}+1$

$$=\frac{2+3-8}{4}=-\frac{3}{4}$$

$\therefore$ বিন্দু দুইটি $(-1, 6), (\frac{1}{2}, -\frac{3}{4})$

**(c)** দেখাও যে, $\int_8^{27}\frac{dx}{f(x)}=\frac{3}{2}\ln\frac{8}{3}$

**প্রমাণ:** $\int_8^{27}\frac{dx}{f(x)}=\int_8^{27}\frac{dx}{x-x^{1/3}}$

$$=\int_8^{27}\frac{dx}{x(1-x^{-2/3})}$$

ধরি, $x^{-\frac{2}{3}}=z$. তাহলে $-\frac{2}{3}x^{-\frac{5}{3}}dx=dz$

$$\Rightarrow -\frac{2}{3}x^{-\frac{2}{3}}\frac{dx}{x}=dz \Rightarrow -\frac{2}{3}z\frac{dx}{x}=dz$$

$$\Rightarrow \frac{dx}{x}=-\frac{3}{2}\frac{dz}{z}$$

সীমা : $x=8$ হলে $z=2^{-2}=\frac{1}{4}$ এবং

$x=27$ হলে $z=3^{-2}=\frac{1}{9}$

$$\therefore \int_8^{27}\frac{dx}{x-x^{1/3}} = -\frac{3}{2}\int_{1/4}^{1/9}\frac{dz}{z(1-z)}$$

$$=\frac{3}{2}\int_{1/4}^{1/9}\frac{d}{z(1-z)}=\frac{3}{2}\int_{1/4}^{1/9}\{\frac{1}{z-1}-\frac{1}{z}\}dz$$

$$=\frac{3}{2}[\ln|z-1|-\ln|z|]_{1/4}^{1/9}=\frac{3}{2}\left[\ln|\frac{z-1}{z}|\right]_{1/4}^{1/9}$$

$$=\frac{3}{2}\{\ln|\frac{\frac{1}{9}-1}{\frac{1}{9}}|-\ln|\frac{\frac{1}{4}-1}{\frac{1}{4}}|\}$$

$$=\frac{3}{2}\{\ln|-8|-\ln|-3|\}=\frac{3}{2}(\ln 8-\ln 3)$$

$$=\frac{3}{2}\ln\frac{8}{3}$$

**18.** $f(x)=\ln x$ এবং $g(x)=e^x$.

(a) $\lim_{x\to 0}\frac{e^{2x}-1}{ax}$ এর মান নির্ণয় কর।

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1+2x+\frac{(2x)^2}{2!}\cdots-1}{ax}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2x+\frac{(2x)^2}{2!}\cdots}{ax}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2+\frac{4x}{4}\cdots}{a}=\frac{2}{a}$$

(b) $\frac{f(2x)}{x}$ এর গুরুমান এবং লঘুমান বিদ্যমান থাকলে তা নির্ণয় কর।

**সমাধান ঃ** মনে করি, $f(x)=\frac{\ln 2x}{x}$

$$\therefore\ f'(x)=\frac{x\frac{1}{x}-\ln 2x.1}{x^2}=\frac{1-\ln 2x}{x^2}$$ এবং

$$f''(x)=\frac{x^2(-\frac{1}{x})-(1-\ln 2x).2x}{x^4}$$

$$=\frac{-x-2x+2x\ln 2x}{x^4}=\frac{-3+2\ln 2x}{x^3}$$

চরম মানের জন্য, $f'(x)=0$

$$\therefore\ \frac{1-\ln 2x}{x^2}=0\Rightarrow \ln 2x=1\ \therefore x=\frac{e}{2}$$

এখন, $f''(\frac{e}{2})=8.\frac{-3+2.1}{e^3}=\frac{-8}{e^3}<0$

$\therefore\ x=\frac{e}{2}$ এর জন্য $f(x)$ এর গুরুমান আছে।

$\therefore\ \frac{f(2x)}{x}$ এর গুরুমান $=f(\frac{e}{2})=\frac{2}{e}$ (Ans:)

(c) $\int_1^{e^2}\frac{f(x)}{x}dx+\int_1^2 g(x)dx$ এর মান নির্ণয় কর।

**সমাধান ঃ** $\int_1^{e^2}\frac{\ln x}{x}dx+\int_1^2 e^x dx$

ধরি, $z=\ln x\ \therefore\ dz=\frac{dx}{x}$

$$\therefore\ \int\frac{\ln x}{x}dx=\int zdz=\frac{z^2}{2}+c=\frac{(\ln x)^2}{2}+c$$

$$\therefore\ \int_1^{e^2}\frac{\ln x}{x}dx+\int_1^2 e^x dx=\left[\frac{(\ln x)^2}{2}\right]_1^{e^2}+\left[e^x\right]_1^2$$

$$=2+e^2-e$$

**19.** $g(z)=mz\sin^{-1}z$ একটি ফাংশন এবং $\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$ একটি বক্ররেখা।

(a) $\int_1^2\frac{1}{z}\cos(\ln z)dz$ এর মান নির্ণয় কর।

**সমাধান ঃ** $\int_1^2\frac{1}{z}\cos(\ln z)\,dz$

ধরি, $x=\ln z\ \therefore\ dx=\frac{dz}{z}$

সীমা: $z=1$ হলে $x=\ln 1=0$ এবং $z=2$ হলে $x=\ln 2$

$\therefore \quad \int_1^2 \frac{1}{z}\cos(\ln z)\,dz = \int_0^{\ln 2}\cos x\,dx$

$= [\sin x]_0^{\ln 2} = \sin(\ln 2) - \sin 0 = \sin(\ln 2)$

(b) $\int g(x)dx$ এর যোগজ নির্ণয় কর।

**সমাধান ঃ** $\int g(x)dx = \int mx\sin^{-1}x\,dx$

$= \mathrm{m}[\sin^{-1}x\int x dx - \int\{\frac{d}{dx}(\sin^{-1}x)\int x dx\}dx]$

$= \mathrm{m}[\sin^{-1}x.\frac{x^2}{2} - \int\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.\frac{x^2}{2}dx]$

$= \mathrm{m}[\frac{x^2}{2}\sin^{-1}x + \frac{1}{2}\int\frac{1-x^2-1}{\sqrt{1-x^2}}dx]$

$= m[\frac{x^2}{2}\sin^{-1}x + \frac{1}{2}[\int\sqrt{1-x^2}dx - \int\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx]]$

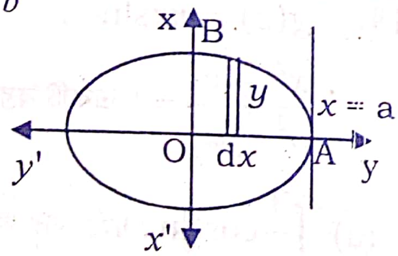
$= \mathrm{m}[\frac{x^2}{2}\sin^{-1}x + \frac{1}{2}[\frac{x\sqrt{1-x^2}}{2} + \frac{1}{2}\sin^{-1}x -$
$- \sin^{-1}x]] + c$

$= \mathrm{m}[\frac{x^2}{2}\sin^{-1}x + \frac{1}{2}[\frac{x\sqrt{1-x^2}}{2} - \frac{1}{2}\sin^{-1}x]] + c$

(c) b > a হলে উদ্দীপকে প্রদত্ত বক্ররেখা দ্বারা আবদ্ধ ক্ষেত্রের অর্ধাংশের ক্ষেত্রফল বের কর।

**সমাধান ঃ** $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ উপবৃত্তের কেন্দ্র মূলবিন্দু ।

$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$




$\Rightarrow \frac{y^2}{a^2} = 1 - \frac{x^2}{b^2}$

$\Rightarrow y^2 = \frac{a^2}{b^2}(b^2 - x^2) \Rightarrow y = \pm\frac{a}{b}\sqrt{b^2 - x^2}$

$\therefore$ ক্ষেত্র OAB এর ক্ষেত্রফল =

$y = \frac{a}{b}\sqrt{b^2 - x^2}$ বক্ররেখা, $x$-অক্ষ এবং $x =$ ও $x = \mathrm{b}$ রেখাদ্বয় দ্বারা সীমাবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল =

$\int_0^b y\,dx = \int_0^a \frac{a}{b}\sqrt{b^2 - x^2}\,dx$

$= \frac{a}{b}\left[\frac{x\sqrt{b^2 - x^2}}{2} + \frac{b^2}{2}\sin^{-1}\frac{x}{b}\right]_0^b$

$= \frac{a}{b}(\frac{b^2}{2}\sin^{-1}1) = \frac{ab}{2}.\frac{\pi}{2} = \frac{ab\pi}{4}$ বর্গ একক।

$\therefore$ প্রদত্ত অর্ধাংশের ক্ষেত্রফল = 2 × ক্ষেত্র OAB এর ক্ষেত্রফল $= 2\times\frac{ab\pi}{4} = \frac{1}{2}ab\pi$ বর্গ একক ।

**20.** দৃশ্যকল্প- I: $f(x) = \frac{x}{(x-1)(x^2+1)}$

দৃশ্যকল্প- II: $2x^2 + 2y^2 = 64.$

(a) $\int \ln x\,dx$ নির্ণয় কর।

$\int 1.\ln x\,dx = \ln x\int 1\,dx -$
$\int\{\frac{d}{dx}(\ln x)\int 1.dx\}dx$

$= x\ln x - \int(\frac{1}{x}\times x)dx$

$= \mathrm{x}.\ln x - \int 1\,dx = x(\ln x - 1) + \mathrm{c}$

(b) দৃশ্যকল্প- I হতে $\int f(x)dx$ নির্ণয় কর।

ধরি, $\mathrm{I} = \int\frac{x}{(x-1)(x^2+1)}dx$ এবং

$\frac{x}{(x-1)(x^2+1)} \equiv \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+1}$

$\Rightarrow x = A(x^2+1) + (Bx+C)(x-1) \cdots(1)$

(1) এ $x = 1$ বসিয়ে পাই, $1 = 2\mathrm{A} \Rightarrow \mathrm{A} = \frac{1}{2}$

(1) এ $x = 0$ বসিয়ে পাই, $\mathrm{A} - \mathrm{C} = 0 \Rightarrow \mathrm{A} = \mathrm{C} = \frac{1}{2}$

(1) এর উভয়পক্ষ থেকে $x^2$ এর সহগ সমীকৃত করে পাই,

$0 = A + B \Rightarrow B = -A = \frac{-1}{2}$

$0 = A + B \Rightarrow B = -A = \frac{-1}{2}$

$\therefore I = \int\{\frac{1}{2}\frac{1}{x-1} - \frac{1}{2}\frac{x}{x^2+1} + \frac{1}{2}\frac{1}{x^2+1}\}dx$

$= \frac{1}{2}[\int\frac{d(x-1)}{x-1} - \frac{1}{2}\int\frac{d(x^2+1)}{x^2+1} + \int\frac{dx}{x^2+1}]$

$= \frac{1}{2}[\ln|x-1| - \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + \tan^{-1}x + c$

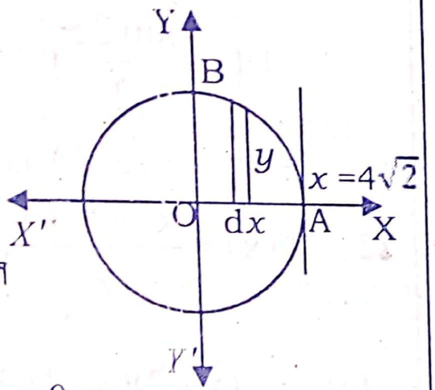
(c) দৃশ্যকল্প- II: দ্বারা প্রথম চর্তুভাগের আবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

$x^2+y^2=32$ বৃত্তের কেন্দ্র মূলবিন্দু ও ব্যাসার্ধ $4\sqrt{2}$

$x^2+y^2=32$

$\Rightarrow y^2 = 32 - x^2$

$\Rightarrow y = \pm\sqrt{32-x^2}$




ক্ষেত্র OAB এর ক্ষেত্রফল

$= y = \sqrt{32-x^2}$

বক্ররেখা, $x$-অক্ষ এবং $x=0$ ও

$x = 4\sqrt{2}$ রেখাদ্বয় দ্বারা সীমাবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল

$= \int_0^{4\sqrt{2}} y\,dx = \int_0^{4\sqrt{2}} \sqrt{32-x^2}\,dx =$

$\int_0^{4\sqrt{2}} \sqrt{(4\sqrt{2})^2 - x^2}\,dx$

$= \left[\frac{x\sqrt{(4\sqrt{2})^2-x^2}}{2} + \frac{32}{2}\sin^{-1}\frac{x}{4\sqrt{2}}\right]_0^{4\sqrt{2}}$

$= 8\pi$

21. $\varphi(x,y) = 9x^2 + 16y^2 - 144; f(x) = x - 2$ এবং $g(x) = \sin^6 x$. [সিলেট বোর্ড ২০১৭]

(a) $\int\frac{xdx}{(x-1)}$ নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ $\int\frac{xdx}{x-1} = \int\frac{x-1+1}{x-1}dx$

$= \int\frac{x-1}{x-1}dx + \int\frac{1}{x-1}dx$

$= \int dx + \int\frac{1}{x-1}dx = x + \ln|x-1| + c$

(b) (i) $\int_0^2 f(x)\tan^{-1}(x-2)dx$ এর মান নির্ণয় কর।

সমাধান : $f(x) = x - 2$

ধরি, $x - 2 = z \Rightarrow dx = dz$

$z = -2$ যখন $x = 0; z = 0$

$\therefore \int_0^2 (x-2)\tan^{-1}(x-2)dx = \int_{-2}^0 z\tan^{-1}z\,dz$

এখন, $\int z\tan^{-1}z\,dz$

$= \tan^{-1}z\int zdz - \int\{\frac{d}{dx}(\tan^{-1}z)\int zdz\}dz$

$= \tan^{-1}z.\frac{z^2}{2} - \int\frac{1}{1+z^2}.\frac{z^2}{2}dz$

$= \frac{z^2}{2}\tan^{-1}z - \frac{1}{2}\int\frac{1+z^2-1}{1+z^2}dz$

$= \frac{z^2}{2}\tan^{-1}z - \frac{1}{2}\{\int dz - \int\frac{1}{1+z^2}dz\}$

$= \frac{z^2}{2}\tan^{-1}z - \frac{1}{2}\{z - \tan^{-1}z\}$

$= \frac{1}{2}(z^2+1)\tan^{-1}z - \frac{1}{2}z + c$

$\therefore \int_{-2}^0 z\tan^{-1}z\,dz = \left[\frac{1}{2}(z^2+1)\tan^{-1}z - \frac{1}{2}z\right]_{-2}^0$

$= 0 - \{\frac{1}{2}.5\tan^{-1}(-2) + 1\}$

$= -\frac{5}{2}\tan^{-1}(-2) - 1$ (Ans:)

(ii) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} g(x)\cos x dx$ এর মান নির্ণয় কর।

সমাধান : (ii) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^6 x\cos x dx$

ধরি, $\sin x = z \Rightarrow \cos x\, dx = dz$

$x = 0$ হলে, $z = 0$; $x = \frac{\pi}{2}$ হলে, $z = 1$

$\therefore \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^6 x\cos x dx = \int_0^1 z^6 dz$

$= \left[\frac{z^7}{7}\right]_0^1 = \frac{1}{7}$ (Ans.)

(c) $\varphi(x,y) = 0$ ও $f(x) = 0$ দ্বারা আবদ্ধ ক্ষুদ্রতর অংশের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

$\varphi(x,y) = 9x^2 + 16y^2 - 144$

$\Rightarrow \frac{x^2}{4^2} + \frac{y^2}{3^2} = 1 \cdots\cdots$ (i)

এবং $f(x) = 0 \Rightarrow x = 2$

উপবৃত্তটি x এবং y অক্ষকে যথাক্রমে $(\pm 4, 0)$ এবং $(0, \pm 3)$ বিন্দুতে ছেদ করে।

(i) হতে, $\frac{y^2}{3^2} = 1 - \frac{x^2}{4^2} \Rightarrow y = \frac{3}{4}\sqrt{16 - x^2}$

$\therefore$ $y = \frac{3}{4}\sqrt{16 - x^2}$ বক্ররেখাএবং $x = 2$ ও $x = 4$ রেখাদ্বয় দ্বারা সীমাবদ্ধ ক্ষেত্রফল =

$2\int_2^4 y\, dx = 2\int_2^4 \frac{3}{4}\sqrt{16 - x^2}\, dx$

ধরি, $x = 4\sin z \therefore dx = 4\cos z\, dz$

$x = 2$ হলে, $z = \frac{\pi}{6}$; $x = 4$ হলে, $z = \frac{\pi}{2}$

$\therefore 2\int_2^4 y\, dx$

$= 2\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{3}{4}\sqrt{16 - 16\sin^2 z}.4\cos z.dz$

$= \frac{3}{2}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} 4\sqrt{\cos^2 z}.4\cos z.dz$

$= \frac{3}{2}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} 4\cos z.4\cos z.dz$

$= \frac{3}{2}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} 8.2\cos^2 z.dz$

$= \frac{3}{2}.8\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos 2z)dz$

$= 12\left[z + \frac{\sin 2z}{2}\right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}$

$= 4\pi - 3\sqrt{3}$ (Ans:)

**22.** $F(x) = \frac{x^2 + x + 1}{x}, H(x) = \frac{xe^x}{(x+1)^2}$.

[য .বো.'১৭]

(a) $y = (x-2)(x+1)$ বক্ররেখার $x = 2$ বিন্দুতে স্পর্শকের ঢাল নির্ণয় কর।

$y = (x-2)(x+1)$

$\Rightarrow y = x^2 - x - 2$

$\therefore \frac{dy}{dx} = 2x - 1$

$\therefore \frac{dy}{dx} = 2.2 - 1 = 3$; যখন = 2

(b) দেখাও যে, $F(x)$ এর লঘুমান, গুরুমান অপেক্ষা বৃহত্তর।

প্রমাণ : মনে করি,

$f(x) = \frac{x^2 + x + 1}{x} = x + 1 + \frac{1}{x}$

$\therefore f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2}$ এবং $f''(x) = \frac{2}{x^3}$

চরম মানের জন্য, $f'(x) = 0$

$\therefore 1 - \frac{1}{x^2} = 0 \Rightarrow x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x = -1, 1$

এখন, $f''(-1) = \frac{2}{(-1)^3} < 0$

$\therefore$ $x=-1$ এর জন্য $f(x)$ এর গুরুমান আছে।

$\therefore$ গুরুমান $= f(-1) = -1+1+\frac{1}{-1} = -1$

আবার, $f''(1) = \frac{2}{1^3} > 0$

$\therefore$ $x=1$ এর জন্য $f(x)$ এর লঘুমান আছে।

$\therefore$ লঘুমান $= f(1) = 1+1+\frac{1}{1} = 3$

$\therefore$ $\frac{x^2+x+1}{x}$ এর গুরুমান তার লঘুমান অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর।

(c) $\int_0^1 H(x)dx$ এর মান নির্ণয় কর।

**সমাধান ঃ** প্রশ্নমালা X C এর উদাহরণ 5 দ্রষ্টব্য।

**23.** $f(x) = \frac{\ln x}{x^2+1}$....(i), $g(x) = x^2+1$....(ii)

[রা.বো.'১৭]

(a) $\int(\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2})^2 dx$ নির্ণয় কর।

**সমাধান ঃ** $\int(\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2})^2 dx$

$= \int(\sin^2\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}+2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2})dx$

$= \int(1+\sin x)dx$

$= x - \cos x + c$ (Ans.)

(b) (i) বক্ররেখার $x=2$ বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ নির্ণয় কর।

**সমাধান ঃ** $y = f(x) = \frac{\ln x}{x^2+1}$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{(x^2+1)\frac{1}{x} - \ln x.(2x)}{(x^2+1)^2}$$

$$= \frac{(x^2+1)\frac{1}{x} - 2x^2\ln x}{x(x^2+1)^2}$$

$x=2$ বিন্দুতে

$$\frac{dy}{dx} = \frac{4+1-2.4.\ln 2}{2.25} = \frac{5-8\ln 2}{50}$$

$\therefore$ $x=2$ বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ,

$$y-0 = \frac{5-8\ln 2}{50}(x-2) \quad \text{(Ans:)}$$

(c) $\int_0^1 f(x).g(x)\,dx$ এর মান নির্ণয় কর।

**সমাধান ঃ** $f(x).g(x) = \ln x$

$\therefore \int \ln x\,dx$

$= \ln x\int dx - \int\{\frac{d}{dx}(\ln x)\int dx\}dx$

$= x\ln x - \int\frac{1}{x}.x dx = x\ln x - \int dx$

$= x\ln x - x + c = x(\ln x - 1) + c$

$\therefore \int_0^1 \ln x\,dx = [x(\ln x - 1)]_0^1$

$= (1.\ln 1 - 1) - 0 = -1$(Ans:)

**24.** $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{25} = 1, x = 3; f(x) = xe^x, g(x) = (x+1)^3$.

[রা.বো.'১৭]

(a) $\cot x = \frac{1}{9}$ হলে $\sec 2x$ এর মান নির্ণয় কর।

**সমাধান ঃ** $\cot x = \frac{1}{9}$

$\therefore \tan x = 9 \Rightarrow \tan^2 x = 81$

$\cos 2x = \frac{1-\tan^2 x}{1+\tan^2 x}$

$\Rightarrow \sec 2x = \frac{1+\tan^2 x}{1-\tan^2 x} = \frac{41}{40}$

(b) $\int_0^3 \frac{f(x)}{\frac{d}{dx}\{g(x)\}}dx$ এর মান নির্ণয় কর।

**সমাধান ঃ** প্রশ্নমালা X C এর উদাহরণ 5 দ্রষ্টব্য।

(c) উদ্দীপকের উপবৃত্ত এবং সরলরেখা দ্বারা আবদ্ধ ক্ষুদ্রতর অংশের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

**সমাধান :** $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{25} = 1$ এবং $x = 3$

উপবৃত্তটি x এবং y অক্ষকে $(\pm 6, 0)$ এবং $(0, \pm 5)$ ছেদ করে।

এখন, $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{25}=1 \Rightarrow \frac{y^2}{5^2}=1-\frac{x^2}{6^2}$

$\Rightarrow y=\pm\frac{5}{6}\sqrt{36-x^2}$

$\therefore$ $y=\frac{3}{4}\sqrt{16-x^2}$ বক্ররেখা এবং $x=3$ ও $x=6$ রেখাদ্বয় দ্বারা সীমাবদ্ধ ক্ষেত্রফল =

$2\int_3^6 y\,dx = 2\int_3^6 \frac{5}{6}\sqrt{36-x^2}\,dx$

$=\frac{5}{3}\left[\frac{x\sqrt{36-x^2}}{2}+\frac{36}{2}\sin^{-1}\frac{x}{6}\right]_3^6$

$=10\pi-15\sqrt{3}/2$ (Ans:)

**25.** $u=e^x$ এবং $4x^2+9y^2=36$ [কু.বো.'১৭]

(a) প্রমাণ কর যে, $\int \ln x\,dx = x\ln x - x + c$

সমাধান ঃ $\int \ln x\,dx$

$=\ln x\int dx-\int\{\frac{d}{dx}(\ln x)\int dx\}dx$

$=x\ln x-\int\frac{1}{x}.x dx = x\ln x-\int dx$

$=x\ln x - x + c$

(b) $\int_0^{\ln 2}\frac{u}{1+u}dx$ এর মান নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ $\int_0^{\ln 2}\frac{u}{1+u}dx=\int_0^{\ln 2}\frac{e^x}{1+e^x}dx$

ধরি, $z=1+e^x$ $\therefore dz=e^x dx$

সীমা: $x=0$ হলে $z=1+e^0=1+1=2$ এবং

$x=\ln 2$ হলে $z=1+e^{\ln 2}=1+2=3$

$\therefore \int_0^{\ln 2}\frac{e^x}{1+e^x}dx=\int_2^3\frac{dz}{z}=[\ln z]_2^3$

$=\ln 3-\ln 2=\ln\frac{3}{2}$ (Ans.)

(c) যোগজীকরণের সাহায্যে প্রদত্ত উপবৃত্তের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ প্রশ্নমালা X E এর উদাহরণ 2 দ্রষ্টব্য।

**26.** $f(x)=x^3-9x^2+24x-12$,

$\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{12-16x^2}}$ ও $\psi(x)=\tan^{-1}(\frac{x}{5})$

(a) x এর সাপেক্ষে $x^x$ এর অন্তরজ নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ প্রশ্নমালা IX-G এর উদাহরণ 6(a) দ্রষ্টব্য।

(b) উদ্দীপকের আলোকে f(x) এর লঘিষ্ঠ ও গরিষ্ঠ মান নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ $f(x)=x^3-9x^2+24x-12$

$\therefore f'(x)=3x^2-18x+24$ এবং

$f''(x)=6x-18$

চরম মানের জন্য, $f'(x)=0$

$\Rightarrow 3x^2-18x+24=0 \Rightarrow x^2-6x+8=0$

$\Rightarrow (x-4)(x-2)=0 \therefore x=4, 2$

এখন, $f''(4)=6.4-18=6>0$

$\therefore$ $f(x)$ লঘুমান হবে যখন $x=4$ এবং

এর মান $=f(4)=64-144+96-12$

$=4$

আবার, $f''(2)=6.2-18=-6<0$

$\therefore$ $f(x)$ গুরুমান হবে যখন $x=2$ এবং

এর মান $=f(2)=8-36+48-12$

$=8$

(c) উদ্দীপকের আলোকে নির্ণয় কর:

(i) $\int\varphi(x)dx$

সমাধান: $\int\varphi(x)dx=\int\frac{dx}{\sqrt{12-16x^2}}$

$=\int\frac{dx}{\sqrt{4(3-4x^2)}}=$

$\frac{1}{2}.\frac{1}{2}\int\frac{d(2x)}{\sqrt{(\sqrt{3})^2-(2x)^2}}$

$=\frac{1}{4}\sin^{-1}\frac{4x}{\sqrt{3}}+c$ (Ans.)

(ii) $\int\psi(x)dx$

সমাধান : $\int\psi(x)dx=\int\tan^{-1}(\frac{x}{5})dx$

$= \tan^{-1}(\frac{x}{5})\int dx - \int[\frac{d}{dx}\{\tan^{-1}(\frac{x}{5})\}\int dx]dx$

$= x\tan^{-1}(\frac{x}{5}) - \int \frac{1/5}{1+(\frac{x}{5})^2} xdx$

$= x\tan^{-1}(\frac{x}{5}) - \int \frac{xdx}{25+x^2}$

$= x\tan^{-1}(\frac{x}{5}) - \frac{1}{2}\int \frac{(0+2x)dx}{25+x^2}$

$= x\tan^{-1}(\frac{x}{5}) - \frac{1}{2}\ln(25+x^2)+c$

27. দৃশ্যকল্প-১: $f(\theta)=\cos^3\theta, g(\theta)=\sin\theta$

দৃশ্যকল্প-২: $x^2+y^2=36$ [ব.বো.'১৭]

(a) $\int \frac{dx}{1+e^x}$ নির্ণয় কর।

সমাধান : $\int \frac{1}{e^x+1}dx = \int \frac{e^{-x}}{e^{-x}.(e^x+1)}dx$

$= \int \frac{e^{-x}}{1+e^{-x}}dx = -\int \frac{(0-e^{-x})dx}{1+e^{-x}}$

$= -\ln|1+e^{-x}|+c$

(b) দৃশ্যকল্প-১ হতে নির্ণয় কর :

(i) $\int_0^{\pi/2}\sqrt{1+g(\theta)}\,d\theta = \int_0^{\pi/2}\sqrt{1+\sin\theta)}\,d\theta$

$= \int_0^{\pi/2}\sqrt{\sin^2\frac{\theta}{2}+\cos^2\frac{\theta}{2}+2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2})}\,d\theta$

$= \int_0^{\pi/2}(\sin\frac{\theta}{2}+\cos\frac{\theta}{2})d\theta$

$= \left[\frac{-\cos\frac{\theta}{2}}{\frac{1}{2}} + \frac{\sin\frac{\theta}{2}}{\frac{1}{2}}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$

$= 2\{(-\cos\frac{\pi}{4}+\sin\frac{\pi}{4})-(-\cos 0+\sin 0)\}$

$= 2\{(-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}})-(-1+0)\} = 2$ (Ans:)

(ii) $\int_0^{\pi/2} f(\theta)\sqrt[3]{g(\theta)}\,d\theta$

সমাধান ঃ $\int_0^{\pi/2} f(\theta)\sqrt[3]{g(\theta)}\,d\theta$

$= \int_0^{\pi/2}\cos^3\theta.\sqrt[3]{\sin\theta}\,d\theta$

$= \int_0^{\pi/2}(1-\sin^2\theta).\sqrt[3]{\sin\theta}.\cos\theta d\theta$

ধরি, $\sin\theta = z \Rightarrow \cos\theta\, d\theta = dz$

$\theta = 0$ হলে, $z=0$, $\theta=\frac{\pi}{2}$ হলে, $z=1$

$\therefore \int_0^{\pi/2} f(\theta)\sqrt[3]{g(\theta)}\,d\theta = \int_0^1 (1-z^2)z^{\frac{1}{3}}dz$

$= \int_0^1 (z^{\frac{1}{3}} - z^{\frac{7}{3}})dz$

$= \left[\frac{3}{4}z^{\frac{4}{3}} - \frac{3}{10}z^{\frac{10}{3}}\right]_0^1 = \frac{3}{4}-\frac{3}{10}$

$= \frac{15-6}{20} = \frac{9}{20}$ (Ans.)

(C) দৃশ্যকল্প-২ এর আলোকে বৃত্তটি দ্বারা আবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল সমাকলন পদ্ধতিতে নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ $x^2+y^2=36$ বৃত্তের কেন্দ্র মূলবিন্দু ও ব্যাসার্ধ 6

$x^2+y^2=36 \Rightarrow y^2 = 36-x^2$

$\Rightarrow y = \pm\sqrt{36-x^2}$

ক্ষেত্র OAB এর ক্ষেত্রফল

$= y=\sqrt{36-x^2}$ বক্ররেখা, $x$-অক্ষ এবং $x=0$ ও $x=6$ রেখাদ্বয় দ্বারা সীমাবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল

$= \int_0^6 y\,dx = \int_0^6 \sqrt{36-x^2}\,dx$ =

$\int_0^2 \sqrt{2^2-x^2}\,dx$

$$= \left[\frac{x\sqrt{6^2-x^2}}{2} + \frac{6^2}{2}\sin^{-1}\frac{x}{6}\right]_0^6$$

$$= \frac{36}{2}\sin^{-1}1 = 18.\frac{\pi}{2} = 9\pi$$

$\therefore$ বৃত্তের ক্ষেত্রফল = 4 × ক্ষেত্র OAB এর ক্ষেত্রফল = $36\pi$ বর্গ একক

### ব্যবহারিক অনুশীলনী

**1.** পাঁচটি কোটি ব্যবহার করে মান নির্ণয় কর : $\int_{1.5}^{3.5} \ln x\, dx$, $\int_0^1 \frac{1}{1+x} dx$

**পরীক্ষণের নাম ঃ** ছয়টি কোটি ব্যবহার করে $\int_{1.5}^{3.5} \ln x\, dx$ এর মান নির্ণয়।

**মূলতত্ত্ব ঃ** মনে করি, ক্ষেত্রফল $A = \int_{1.5}^{3.5} \ln x\, dx$

পাঁচটি কোটির জন্য $A = h(\frac{y_0}{2} + y_1 + y_2 + y_3 + \frac{y_4}{2})$ ব্যবহার করে $\int_{1.5}^{3.5} \ln x\, dx$ এর মান নির্ণয় করি।

**প্রয়োজনীয় উপকরণ ঃ** (i) পেন্সিল (ii) স্কেল (iii) গ্রাফ পেপার (iv) ইরেজার (v) শার্পনার (vi) সায়েন্টিফিক ক্যালকুলেটর।

**কার্যপদ্ধতি ঃ**

**1.** $1.5 \le x \le 3.5$ ব্যবধিতে সমদুরবর্তী 5টি কোটি $y_0, y_1, y_2, y_3, y_4$ এর জন্য এই জন্য ব্যবধির নিম্নপ্রান্ত ও উর্ধ্বপ্রান্তের বিয়োগফলকে $(5-1) = 4$ দ্বারা ভাগ করে প্রত্যেক ক্ষুদ্র অংশের দৈর্ঘ্য h এর মান নির্ণয় করি।

$$\therefore\ h = \frac{3.5-1.5}{4} = 0.5$$

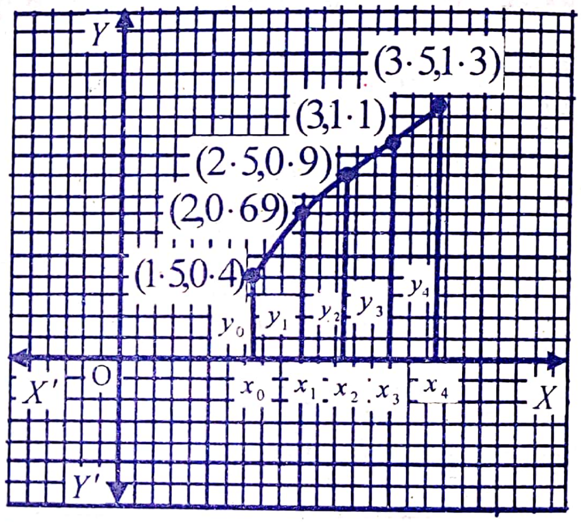
**2.** h এর মান হতে $x_n = x_{n-1} + h$ সূত্র ব্যবহার করে $x_1, x_2, x_3, x_4$ নির্ণয় করি যেখানে $x_0 = 1.5$.

**3.** $y = f(x) = \ln x$ থেকে $y_0, y_1, y_2, y_3, y_4$ এর মান নির্ণয় করি:

| | |
|---|---|
| $x_0 = 1.5$ | $y_0 = \ln 1.5 = 0.405$ |
| $x_1 = x_0 + h = 2$ | $y_1 = \ln 2 = 0.693$ |
| $x_2 = x_1 + h = 2.5$ | $y_2 = \ln 2.5 = 0.916$ |
| $x_3 = x_2 + h = 3$ | $y_3 = \ln 3 = 1.09$ |
| $x_4 = x_3 + h = 3.5$ | $y_4 = \ln 3.5 = 1.25$ |

**4.** $x$ - অক্ষ বরাবর ক্ষুদ্রতম বর্গের 5 বাহু = 1 একক ও $y$ - অক্ষ বরাবর ক্ষুদ্রতম বর্গের 10 বাহু = 1 একক ধরে তালিকাভুক্ত বিন্দুগুলি ছক কাগজে স্থাপন করে লেখচিত্রটি অঙ্কন করি।

**5.** প্রাপ্ত পাঁচটি কোটিকে x অক্ষের সহিত স্কেলের সাহায্যে সংযুক্ত করে 4টি ট্রাপিজিয়াম আকারে প্রকাশ করি।




**হিসাব ঃ** $A = h(\frac{y_0}{2} + y_1 + y_2 + y_3 + \frac{y_4}{2})$

$= 0.5(\frac{0.405}{2} + 0.693 + 0.916 + 1.09 + \frac{1.25}{2}) = 1.76325$ বর্গ একক (প্রায়)।

**ফলাফল ঃ** নির্ণেয় ক্ষেত্রফল

$A = \int_{1.5}^{3.5} \ln x\, dx = 1.76325$ বর্গ একক (প্রায়)।

**মন্তব্য :** n এর মান যত বেশি হবে h এর মান তত ক্ষুদ্র হবে এবং A এর মান অধিকতর শুদ্ধ হবে।

**পরীক্ষণের নাম ঃ** পাঁচটি কোটি ব্যবহার করে $\int_0^1 \frac{1}{1+x} dx$ এর মান নির্ণয়।