দ্বিতীয় অধ্যায়	ভেক্টর (VECTORS)

দৈনন্দিন জীবনে প্রায় সকল ক্ষেত্রেই বস্তুর পরিমাপের প্রয়োজন হয়। বস্তুর দৈর্ঘ্য, সময়ের পরিমাণ, টাকার পরিমাণ, আয়তনের পরিমাণ, তাপমাত্রার পরিমাণ ইত্যাদি শুধুমাত্র এককসহ পরিমাণ দ্বারা সম্পূর্ণরূপে প্রকাশ করা যায়। যে রাশিকে কেবলমাত্র এককসহ পরিমাণ দ্বারা সম্পূর্ণরূপে বর্ণনা করা যায় তাকে স্কেলার বা অদিক বা নির্দিক রাশি বলা হয়। দৈর্ঘ্য, ভর, আয়তন, দ্রুতি, তাপমাত্রা ইত্যাদির প্রত্যেকেই স্কেলার রাশি। শুধু স্কেলার রাশি সম্পর্কে ধারনা থাকলেই দৈনন্দিন জীবনের অনেক কার্যক্রম ব্যাখা করা যায় না। এক্ষেত্রে আমাদের ভেক্টর রাশির ধারণা প্রয়োজন হয়।

অধ্যায় শেষে পারীক্ষার্থীরা -

১. সদিক রাশির প্রতিরূপ হিসাবে ভেক্টর ব্যাখ্যা করতে পারবে ; ২. জ্যামিতিক ভেক্টরের ধারক, সমতা, বিপরীত ভেক্টর, শূন্য ভেক্টর ব্যাখ্যা করতে পারবে; ৩. দ্বিমাত্রিক ভেক্টরের যোগ, বিয়োগ ও স্কেলার গুণিতক নির্ণয় করতে পারবে; ৪. দ্বিমাত্রিক ভেক্টরের যোগ, বিয়োগ ও স্কেলার গুণিতকের বিধিগুলি প্রমাণ ও প্রয়োগ করতে পারবে; ৫. সমতলে ভেক্টরের অংশক নির্ণয় করতে পারবে; ৬. ভেক্টরকে কার্তেসীয় স্থানাঙ্কে প্রকাশ করতে পারবে; ৭. একক ভেক্টর $\hat{i}$, $\hat{j}$ বর্ণনা করতে পারবে; ৮.অবস্থান ভেক্টর নির্ণয় করতে পারবে; ৯. দ্বিমাত্রিক জ্যামিতির সমস্যা সমাধানে ভেক্টরের প্রয়োগ করতে পারবে; ১০. ত্রিমাত্রিক জগতে ভেক্টরের অংশক নির্ণয় করতে পারবে; ১১. ত্রিমাত্রিক জগতে $\hat{i}$, $\hat{j}$, $\hat{k}$ ব্যাখ্যা করতে পারবে; ১২. ভেক্টরকে $\hat{i}$, $\hat{j}$, $\hat{k}$ এর মাধ্যমে প্রকাশ করতে পারবে; ১৩. ত্রিমাত্রিক জগতে ভেক্টরের যোগ ও স্কেলার গুণিতককে $\hat{i}$, $\hat{j}$, $\hat{k}$ এর মাধ্যমে প্রকাশ করতে পারবে; ১৪. সরলরেখার ভেক্টর সমীকরণ নির্ণয় ও প্রয়োগ করতে পারবে; ১৫. ভেক্টরের স্কেলার গুণন ব্যাখ্যা করতে পারবে; ১৬.স্কেলার গুণজের ধর্ম ব্যাখ্যা ও প্রয়োগ করতে পারবে; ১৭. দুইটি ভেক্টরের স্কেলার গুণজকে ভেক্টর দুইটির অংশকের মাধ্যমে প্রকাশ করতে পারবে; ১৮. ভেক্টরের ভেক্টর গুণন ব্যাখ্যা করতে পারবে; ১৯. ভেক্টর গুণজের ধর্ম ব্যাখ্যা ও প্রয়োগ করতে পারবে; ২০. ভেক্টর গুণজকে ভেক্টর দুইটির অংশকের মাধ্যমে প্রকাশ করতে পারবে।

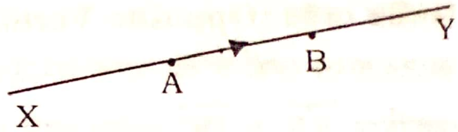
১. সদিক রাশির প্রতিরূপ হিসাবে ভেক্টর

যে রাশিকে সম্পূর্ণরূপে প্রকাশের জন্য তার পরিমাণ ও দিক উভয়ই প্রয়োজন হয় তাকে সদিক রাশি বলা হয়। সদিক রাশির প্রতিরূপ হচ্ছে ভেক্টর। সরণ, বেগ, ত্বরণ, ওজন, বল ইত্যাদির প্রত্যেকেই ভেক্টর রাশি।

দিক নির্দেশক রেখাংশ বা সদিক রেখাংশ (Directed line segment): যেকোনো ভেক্টর রাশিকে একটি দিক নির্দেশক রেখাংশ দ্বারা প্রকাশ করা যায়। কোনো রেখাংশের এক প্রান্তকে **প্রারম্ভবিন্দু (initial point)** এবং অপর প্রান্তকে **প্রান্তবিন্দু (terminal point)** হিসাবে চিহ্নিত করলে ঐ রেখাংশকে একটি দিক নির্দেশক রেখাংশ বা সদিক রেখাংশ বলা হয়। কোনো সদিক রেখাংশের প্রারম্ভবিন্দু A এবং প্রান্তবিন্দু B হলে ঐ সদিক রেখাংশকে $\overrightarrow{AB}$ দ্বারা সূচিত করা হয়। "প্রতিটি সদিক রেখাংশ একটি ভেক্টর রাশির জ্যামিতিক বর্ণনা, যার পরিমাণ ঐ রেখাংশের দৈর্ঘ্যের সমানুপাতিক এবং যার দিক A বিন্দু হতে AB রেখা বরাবর B বিন্দুর অভিমুখে "। A বিন্দুকে $\overrightarrow{AB}$ ভেক্টরের **লেজ (tail)** এবং B বিন্দুকে ভেক্টরটির **মাথাও (head)** বলা হয়। প্রতিটি সদিক রেখাংশ $\overrightarrow{AB}$ এর সাথে দৈর্ঘ্য, ধারক রেখা এবং দিক সংশ্লিষ্ট থাকে। A ও B বিন্দু দুইটির মধ্যবর্তী দূরত্বই সদিক রেখাংশ $\overrightarrow{AB}$ এর দৈর্ঘ্য এবং ইহাকে $|\overrightarrow{AB}| = AB$ দ্বারা সূচিত করা হয়। $\overrightarrow{AB}$ ও $\overrightarrow{BA}$ সদিক রেখাংশ দুইটির দৈর্ঘ্য সমান। অর্থাৎ $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{BA}|$.

২. জ্যামিতিক ভেক্টরের ধারক, সমতা, বিপরীত ভেক্টর, শূন্য ভেক্টর :

ধারক (Support): কোনো ভেক্টর নির্দেশক সদিক রেখাংশ যে অসীম সরলরেখার অংশ বিশেষ , তাকে ঐ ভেক্টরের ধারক রেখা বা শুধু ধারক বলা হয়। চিত্রে $\overrightarrow{AB}$ এর ধারক XY.



দিক (Sense or direction): $\overrightarrow{AB}$ এর দিক A বিন্দু হতে B বিন্দুর দিক এবং $\overrightarrow{BA}$ এর দিক B বিন্দু হতে A বিন্দুর দিক। সুতরাং, সদিক রেখাংশের দিক হচ্ছে প্রারম্ভবিন্দু হতে প্রান্তবিন্দুর দিক। $\overrightarrow{AB}$ এবং $\overrightarrow{BA}$ ভেক্টর দুইটি এক নয়।

সচারচার একটি ভেক্টরকে একটি অক্ষর দ্বারা সূচিত করা হয়; $\overrightarrow{AB} = \underline{u}$ বা $\bar{u}$ বা **u**, কিন্তু $\overrightarrow{AB}$ লিখলে যেমন বোঝা যায় যে, ভেক্টরটির আদিবিন্দু A এবং প্রান্তবিন্দু B , $\underline{u}$ লিখলে তেমন কোনো তথ্য পাওয়া যায় না।

ভেক্টরের মান (Magnitude of Vector): কোনো ভেক্টরের আদিবিন্দু ও প্রান্তবিন্দুর মধ্যবর্তী দূরত্বকে ভেক্টরটির মান বলে। $\bar{a}$ ভেক্টরের মানকে $|\bar{a}|$ বা a দ্বারা প্রকাশ করা হয়।

একক ভেক্টর (Unit Vector): যে ভেক্টরের দৈর্ঘ্য বা মান এক, তাকে একক ভেক্টর বলা হয়। মান শূন্য নয় এমন যেকোনো ভেক্টরকে তার মান দ্বারা ভাগ করলে ঐ ভেক্টরটির দিকে অথবা তার সদৃশ সমান্তরাল দিকে একটি একক ভেক্টর পাওয়া যায়। $\bar{a}$ ভেক্টর রাশির মান $|\bar{a}| \neq 0$ হলে, $\bar{a}$ ভেক্টরের দিকে অথবা তার সমান্তরাল দিকে একটি একক ভেক্টর $\frac{\vec{a}}{|\bar{a}|} = \hat{a}$ পাওয়া যায় । একক ভেক্টর বোঝানোর জন্য যে ভেক্টরের দৈর্ঘ্য অথবা মান এক এর সমান তার উপর "^" চিহ্নটি ব্যবহার করা হয়। একে পড়া হয় "a হ্যাট " ।

শূন্য ভেক্টর (Zero Vector or Null Vector) : যে ভেক্টরের দৈর্ঘ্য বা পরমমান শূন্য এবং যার দিক নির্ণয় করা যায় না তাকে শূন্য ভেক্টর বলা হয় এবং ইহাকে $\underline{0}$ বা **0** (মোটা হরফের শূন্য) দ্বারা প্রকাশ করা হয়। শূন্য ভেক্টরের প্রারম্ভবিন্দু ও প্রান্তবিন্দু একই বিন্দু। যেমন, $\overrightarrow{AA} = \underline{0}$.

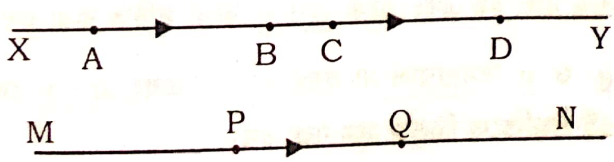
প্রকৃত ও অপ্রকৃত ভেক্টর (Proper and improper vector): শূন্য ব্যতীত সকল ভেক্টরকে প্রকৃত ভেক্টর এবং শূন্য ভেক্টরকে অপ্রকৃত ভেক্টর বলে।

সদৃশ ভেক্টর (Like Vectors): যদি দুইটি ভেক্টরের দিক একই হয়, তবে তাদেরকে সদৃশ ভেক্টর বলে। দুইটি সদৃশ ভেক্টরের ধারক রেখা একই অথবা পরস্পর সমান্তরাল কিন্তু তাদের দৈর্ঘ্য সমান নাও হতে পারে।

অসদৃশ ভেক্টর (Unlike Vectors): যদি দুইটি ভেক্টরের দিক বিপরীতমুখী হয়, তবে তাদেরকে অসদৃশ ভেক্টর বলে। অসদৃশ ভেক্টরের মান একই অথবা ভিন্ন ভিন্ন হতে পারে।

সমান ভেক্টর (Equal Vectors): যদি দুইটি সদৃশ ভেক্টরের দৈর্ঘ্য সমান হয়, তবে তারা পরস্পর সমান। অর্থাৎ, দুইটি ভেক্টর সমান হবে, যদি তাদের দৈর্ঘ্য সমান , ধারক রেখা একই অথবা সমান্তরাল এবং দিক একই হয়।

চিত্রে AB = CD হলে, $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ । আবার, XY ও MN পরাস্পর সমান্তরাল সরলরেখা এবং AB = PQ হলে, $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{PQ}$



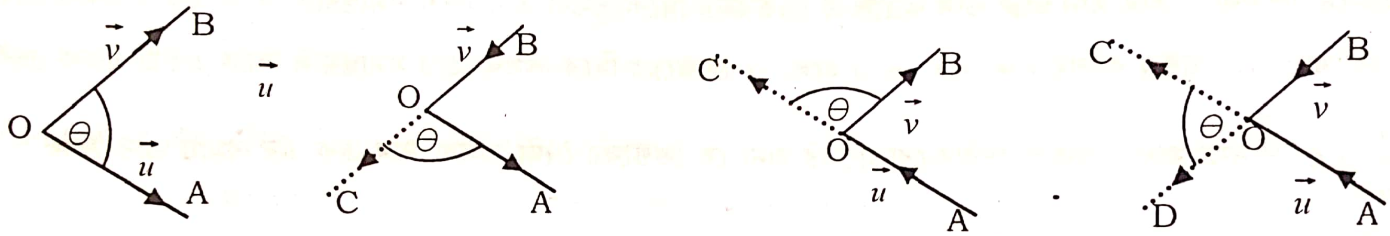
বিপরীত ভেক্টর (Opposite Vector): যদি দুইটি ভেক্টর $\underline{u}$ ও $\underline{v}$ এর দৈর্ঘ্য সমান অর্থাৎ $|\underline{u}| = |\underline{v}|$ হয় এবং তাদের ধারক রেখা অভিন্ন অথবা সমান্তরাল হয় কিন্তু দিক বিপরীত হয় , তবে ভেক্টরদ্বয় পরস্পর বিপরীত হবে। উপরি উক্ত রেখাচিত্রে $\overrightarrow{AB}$ ও $\overrightarrow{DC}$ ভেক্টর দুইটি পরস্পর বিপরীত । আবার, $\overrightarrow{CD}$ ও $\overrightarrow{QP}$ ভেক্টর দুইটি পরস্পর বিপরীত।

সমরৈখিক ভেক্টর (Collinear Vectors) : কতগুলি ভেক্টর যদি একটি সরলরেখার সমান্তরাল হয় তবে তাদেরকে সমরৈখিক বা সমান্তরাল ভেক্টর বলা হয়। যদি $\underline{a}$ ও $\underline{b}$ ভেক্টর দুইটি সমরৈখিক হয় তবে $\underline{a} = m\underline{b}$; যেখানে m একটি স্কেলার।

সমতলীয় ভেক্টর (Coplanar Vector) : কতগুলি ভেক্টরকে সমতলীয় ভেক্টর বলা হয়, যদি তাদের ধারক রেখা অভিন্ন সমতলের সমান্তরাল হয়।

মুক্ত ভেক্টর (Free vector): যে ভেক্টরের মডুলাস ও দিক স্থির কিন্তু অবস্থান স্থির নয় , অর্থাৎ মডুলাস ও দিকের কোনো পরিবর্তন না করে যে ভেক্টরকে স্থানান্তর করা যায় তাকে মুক্ত ভেক্টর বলা হয়।

দুইটি ভেক্টরের অন্তর্ভুক্ত কোণঃ মনে করি, দুইটি ভেক্টর $\underline{u}$ ও $\underline{v}$ এর ধারক রেখাদ্বয় পরস্পরকে O বিন্দুতে ছেদ করলে এবং তাদের ছেদবিন্দুতে $0 < \theta < \pi$ কোণ উৎপন্ন করে

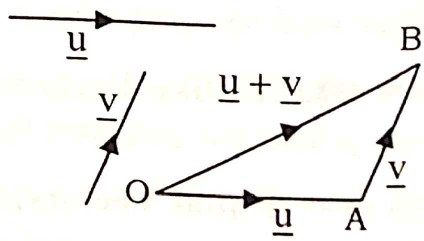


$\theta = 0$ অথবা π হলে, ভেক্টর দুইটিকে পরস্পর সমান্তরাল বলা হয়। আবার, ভেক্টর দুইটি পরস্পর লম্ব হবে যদি $\theta = \dfrac{\pi}{2}$ হয়।

৩. দ্বিমাত্রিক ভেক্টরের যোগ, বিয়োগ ও স্কেলার গুণিতকঃ

ভেক্টর যোগের ত্রিভুজ সূত্রঃ কোনো $\underline{u}$ ভেক্টরের প্রান্তবিন্দু হতে অপর একটি ভেক্টর $\underline{v}$ অঙ্কন করা হলে $\underline{u}+\underline{v}$ দ্বারা এরূপ একটি ভেক্টর বোঝায় যার প্রারম্ভবিন্দু $\underline{u}$ এর প্রারম্ভবিন্দু এবং যার প্রান্তবিন্দু $\underline{v}$ এর প্রান্তবিন্দু।

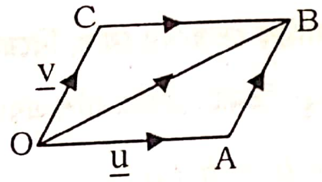
যেকোনো বিন্দু O হতে $\underline{u}$ নির্দেশক ধারক রেখার সমান ও সমান্তরাল করে OA রেখাংশ অঙ্কন করি। $\underline{u}$ এর প্রান্তবিন্দু A হতে $\underline{v}$ নির্দেশক ধারক রেখার সমান ও সমান্তরাল করে AB রেখাংশ অঙ্কন করি। তাহলে, $\underline{u} = \overrightarrow{OA}$ ও $\underline{v} = \overrightarrow{AB}$ । $\underline{u}$ এর প্রারম্ভবিন্দু O এবং $\underline{v}$ এর প্রান্তবিন্দু B সংযোগে গঠিত রেখাংশ $\overrightarrow{OB}$ ভেক্টরকে $\underline{u}$ ও $\underline{v}$ ভেক্টর দুইটির সমষ্টি বা লব্ধি বলা হয় এবং একে $\underline{u}+\underline{v}$ দ্বারা সূচিত করা হয়।



$\underline{u}$ ও $\underline{v}$ সমান্তরাল না হলে $\underline{u}$, $\underline{v}$ এবং $\underline{u}+\underline{v}$ ভেক্টর তিনটি দ্বারা ত্রিভুজ উৎপন্ন হয় বলে উপরি উক্ত ভেক্টর যোগের এই পদ্ধতিকে ত্রিভুজ সূত্র বলা হয়।

ভেক্টর যোগের সামান্তরিক সূত্রঃ ভেক্টর $\underline{u}$ ও $\underline{v}$ কে একটি সামান্তরিকের দুইটি সন্নিহিত বাহু দ্বারা মানে ও দিকে সূচিত করা হলে, ভেক্টরদ্বয়ের ছেদবিন্দুগামী সামান্তরিকের কর্ণটি ভেক্টরদ্বয়ের লব্ধি $\underline{u}+\underline{v}$ কে মানে ও দিকে প্রকাশ করবে ।

প্রমাণঃ মনে করি, যেকোনো বিন্দু O থেকে অঙ্কিত $\underline{u}$ ও $\underline{v}$ ভেক্টর দুইটি যথাক্রমে OA ও OC দ্বারা সূচিত। OABC সামান্তরিকটি অঙ্কন করি এবং O, B যোগ করি। তাহলে, O বিন্দুগামী OABC সামান্তরিকের OB কর্ণ দ্বারা $\underline{u}$ ও $\underline{v}$ ভেক্টর দুইটির সমষ্টি (লব্ধি) সূচিত করবে।



OABC সামান্তরিকের OC ও AB পরস্পর সমান ও সমান্তরাল।

$\therefore \quad \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{AB} = \underline{v}$

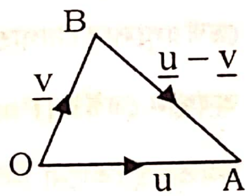
ভেক্টর যোগের ত্রিভুজ সূত্র হতে পাই, $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} = \underline{u} + \underline{v}$

$\therefore$ OB কর্ণ $\underline{u}$ ও $\underline{v}$ ভেক্টর দুইটির সমষ্টি (লব্ধি) কে সূচিত করে।

দ্রষ্টব্য : (i) দুই বা ততোধিক ভেক্টরের যোগফলকে তাদের **লব্ধি** (Resultant) বলা হয়। $\underline{u}$ ও $\underline{v}$ দুইটি ভেক্টরের লব্ধির সমান্তরাল একক ভেক্টর $= \pm \dfrac{\underline{u} + \underline{v}}{|\underline{u} + \underline{v}|}$। বল ও বেগের লব্ধি নির্ণয়ের ক্ষেত্রে ভেক্টর যোগের পদ্ধতি অনুসরণ করতে হয়।

(ii) দুইটি ভেক্টর সমান্তরাল হলে তাদের যোগের ক্ষেত্রে সামান্তরিক বিধি প্রযোজ্য নয়, কিন্তু ত্রিভুজ বিধি সকল ক্ষেত্রেই প্রযোজ্য।

ভেক্টরের বিয়োগঃ যদি দুইটি ভেক্টর $\underline{u}$ ও $\underline{v}$ এর প্রারম্ভবিন্দু একই হয়, তাহলে ঐ ভেক্টর দুইটির বিয়োগফল ভেক্টর $\underline{u} - \underline{v}$, যার প্রারম্ভবিন্দু হচ্ছে $\underline{v}$ এর প্রান্তবিন্দু এবং প্রান্তবিন্দু হচ্ছে $\underline{u}$ এর প্রান্তবিন্দু।



পাশের চিত্র হতে পাই, $\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{OA}$

$\therefore \quad \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BO} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{BO} \Rightarrow \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{OA} + (-\overrightarrow{OB})$

$\Rightarrow \overrightarrow{BA} = \underline{u} - \underline{v}$

অর্থাৎ, $\underline{v}$ ভেক্টরের প্রান্তবিন্দু ও $\underline{u}$ ভেক্টরের অন্তবিন্দুর সংযোগ রেখাংশ দ্বারা তাদের অন্তর ভেক্টর $\underline{u} - \underline{v}$ সূচিত হয়।

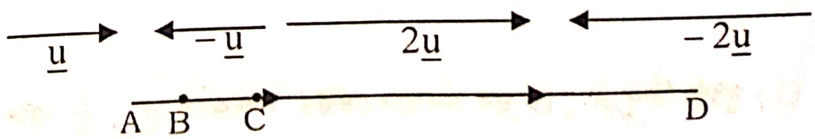
ভেক্টরের সংখ্যা গুণিতক বা স্কেলার গুণিতক (Scalar Multiple of a vector): মনে করি, $\underline{u}$ যেকোনো ভেক্টর এবং m যেকোনো বাস্তব সংখ্যা। তাহলে, ভেক্টর $\underline{u}$ এবং স্কেলার m এর গুণফল $m\underline{u}$ একটি ভেক্টর।

(i) $m\underline{u}$ এর দৈর্ঘ্য $= |m\underline{u}| = |m||\underline{u}|$ অর্থাৎ, $m\underline{u}$ ভেক্টরের দৈর্ঘ্য $\underline{u}$ ভেক্টরের দৈর্ঘ্যের $|m|$ গুণ।

(ii) $m\underline{u}$ ও $\underline{u}$ ভেক্টরের ধারক অভিন্ন অথবা সমান্তরাল।

(iii) $m>0$ হলে $m\underline{u}$ এর দিক $\underline{u}$ এর দিকের সাথে অভিন্ন , $m<0$ হলে $m\underline{u}$ এর দিক $\underline{u}$ দিকের বিপরীত এবং $m = 0$ হলে $m\underline{u}$ এর কোনো নির্দিষ্ট দিক থাকবেনা।

(iv) $m(n\underline{u}) = n(m\underline{u}) = (mn)\underline{u}$.



মনে করি, $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BC} = \underline{u}$

$\therefore \quad \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{AB} = 2\underline{u}$.

$\overrightarrow{AD} = 3\overrightarrow{AC}$ হলে, $\overrightarrow{AD} = 3(2\underline{u}) = 6\underline{u} = (2.3)\underline{u}$

(v) $0\underline{u} = \underline{0}$; স্কেলার শূন্য (0) দ্বারা $\underline{u}$ ভেক্টরকে গুণ করলে গুণফল শূন্য ভেক্টর ($\underline{0}$) হয়।

৪. দ্বিমাত্রিক ভেক্টরের যোগ, বিয়োগ ও স্কেলার গুণিতকের বিধি:

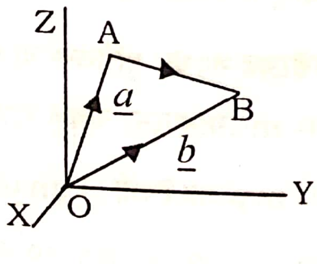
$\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$ তিনটি ভেক্টর রাশি এবং m ও n দুইটি স্কেলার রাশির জন্য,

1. $\underline{a} + \underline{b} = \underline{b} + \underline{a}$ [যোগের বিনিময় বিধি]
2. $\underline{a} + (\underline{b} + \underline{c}) = (\underline{a} + \underline{b}) + \underline{c}$ [যোগের সহযোগ বিধি]
3. $\underline{0}$ ভেক্টরের অস্তিত্ব বিদ্যমান যার জন্য, $\underline{a} + \underline{0} = \underline{0} + \underline{a} = \underline{a}$ [শূন্য ভেক্টরের বিদ্যমানতা]
4. প্রতিটি ভেক্টর $\underline{a}$ একটি অনন্য বিপরীত ভেক্টর $-\underline{a}$ রয়েছে যার জন্য, $\underline{a} + (-\underline{a}) = (-\underline{a}) + \underline{a} = \underline{0}$ [বিপরীত ভেক্টরের বিদ্যমানতা]
5. $(m+n)\underline{a} = m\underline{a} + n\underline{a}$ [যোগের বিতরণ বিধি]
6. $m(\underline{a} + \underline{b}) = m\underline{a} + m\underline{b}$ [গুণের বণ্টন বিধি] 7. $1(\underline{a}) = \underline{a}$

যোগাশ্রয়ী সমাবেশ (Linear combinations): কোনো ভেক্টর $\underline{r}$ কে $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$, ⋯ ⋯ **ভেক্টরগুলির যোগাশ্রয়ী সমাবেশ বলা হয় যদি** $\underline{r} = x\underline{a} + y\underline{b} + z\underline{c} + \cdots\cdots$; **যখন** $x, y, z, \cdots\cdots$ **স্কেলার রাশি।** উদাহরণস্বরূপ বলা যায় $\underline{a} + \underline{b} + \underline{c}$, $2\underline{a} - 3\underline{b} + 4\underline{c}$, $\underline{a} - 3\underline{b} - 2\underline{c}$ প্রভৃতি ভেক্টরগুলি $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$ ভেক্টরগুলোর যোগাশ্রয়ী সমাবেশ।

৫. অবস্থান ভেক্টর (Position Vector):

সমতলস্থ কোনো নির্দিষ্ট O বিন্দুর সাপেক্ষে ঐ সমতলের যেকোনো P বিন্দুর অবস্থান $\overrightarrow{OP}$ দ্বারা নির্দিষ্ট করা যায়। $\overrightarrow{OP}$ কে O বিন্দুর সাপেক্ষে P বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর বলা হয় এবং O বিন্দুকে ভেক্টর মূলবিন্দু (Origin) বলা হয়।



ধরি, O বিন্দুর সাপেক্ষে A ও B বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর যথাক্রমে $\underline{a}$ ও $\underline{b}$.

$\therefore \overrightarrow{OA} = \underline{a}$, $\overrightarrow{OB} = \underline{b}$ and $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB}$

$\Rightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} \Rightarrow \overrightarrow{AB} = \underline{b} - \underline{a}$

দ্রষ্টব্য : বিভিন্ন ভেক্টর-মূলবিন্দুর সাপেক্ষে একই বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর ভিন্ন ভিন্ন হতে পারে। কোনো নির্দিষ্ট প্রতিপাদ্য বিষয়ের সমাধানে এ বিষয়ের বিবেচনাধীন সকল বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর একই মূলবিন্দু সাপেক্ষে ধরা হয়।

অবস্থান ভেক্টর সম্পর্কিত অনুসিদ্ধান্ত

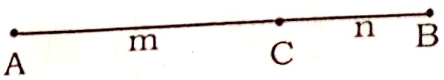
(1) দুইটি বিন্দু A , B এর অবস্থান ভেক্টর যথাক্রমে $\underline{a}$, $\underline{b}$ হলে $\overrightarrow{AB} = \underline{b} - \underline{a}$.

(2) A , B , C এর অবস্থান ভেক্টর যথাক্রমে $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$ হলে A, B , C সমরেখ হবে যদি এবং কেবল যদি $\overrightarrow{AC} = k\,.\overrightarrow{AB} \Rightarrow \underline{c} - \underline{a} = k\,(\underline{b} - \underline{a})$ হয়। অর্থাৎ যদি $\overrightarrow{AC}$ ভেক্টরটি $\overrightarrow{AB}$ ভেক্টরের স্কেলার গুণিতক হয়।

(3) $\underline{a}$ ও $\underline{b}$ অশূন্য অসমান্তরাল (অসমরৈখিক) ভেক্টর এবং $m\underline{a} + n\underline{b} = \underline{0}$ হলে $m = n = 0$.

(4) A , B , C এর অবস্থান ভেক্টর যথাক্রমে $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$ হলে এবং C বিন্দু AB রেখাংশকে m : n অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত করলে $\underline{c} = \dfrac{m\underline{b} + n\underline{a}}{m+n}$.

প্রমাণ : দেওয়া আছে, $AC : CB = m : n \Rightarrow n.\,AC = m.\,CB$



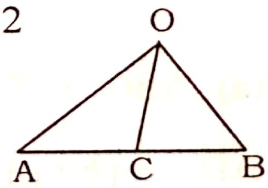
$\Rightarrow n\,|\overrightarrow{AC}| = m\,|\overrightarrow{CB}| \Rightarrow n.\,\overrightarrow{AC} = m.\,\overrightarrow{CB}$

$\Rightarrow n.(\underline{c} - \underline{a}) = m(\underline{b} - \underline{c}) \Rightarrow n\underline{c} - n\underline{a} = m\underline{b} - m\underline{c}$

$\Rightarrow (m + n)\,\underline{c} = m\,\underline{b} + n\,\underline{a} \quad \therefore\ \underline{c} = \dfrac{m\underline{b} + n\underline{a}}{m+n}$

দ্রষ্টব্য: 1. AB রেখাংশ C বিন্দুতে m:n অনুপাতে বহির্বিভক্ত হলে অনুরূপভাবে প্রমাণ করা যায় যে, $\underline{c} = \dfrac{m\underline{b} - n\underline{a}}{m-n}$

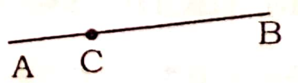
2. C বিন্দুটি AB রেখাংশের মধ্যবিন্দু হলে $m : n = 1 \quad \therefore\ \underline{c} = \dfrac{m\underline{b} + m\underline{a}}{2m} = \dfrac{\underline{a} + \underline{b}}{2}$



অতএব, O বিন্দুর সাপেক্ষে A , B , C বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর যথাক্রমে $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$ এবং C বিন্দু AB রেখাংশের মধ্যবিন্দু হলে $\overrightarrow{OC} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB})$

3. AB রেখাংশ C বিন্দুতে 1 : 2 অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত হলে $2.\overrightarrow{AC} = 1.\overrightarrow{CB}$

$\therefore\ \overrightarrow{AC} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$ এবং $\overrightarrow{CB} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$



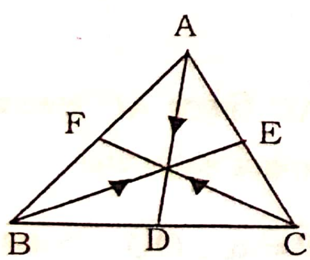
উদাহরণমালা

উদাহরণ –1: ABC ত্রিভুজের BC, CA , AB বাহুগুলির মধ্যবিন্দু যথাক্রমে D, E , F ।

(a) প্রমাণ কর যে, $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{CF} = \underline{0}$ [ঢা. '০৭; য.'১১; রা.'১১'১৩; সি.'০৯,'১২; ব.'১২; দি.'১৩]

(b) $\overrightarrow{AB}$ ও $\overrightarrow{BC}$ ভেক্টরদ্বয়কে $\overrightarrow{BE}$ ও $\overrightarrow{CF}$ ভেক্টরদ্বয়ের মাধ্যমে প্রকাশ কর।

(a) প্রমাণঃ BC এর মধ্যবিন্দু D বলে, $\overrightarrow{AD} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$



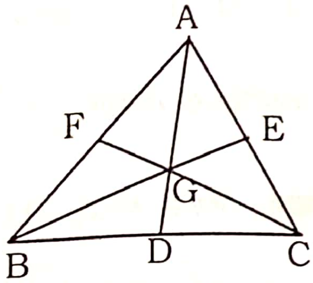
অনুরূপভাবে, $\overrightarrow{BE} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BA})$ এবং $\overrightarrow{CF} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CA})$

$\therefore\ \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{CF} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CA})$

$$=\frac{1}{2}\{(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BA})+(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CA})+(\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BC})\}$$

$$=\frac{1}{2}(\underline{0}+\underline{0}+\underline{0})=\underline{0} \quad (\text{Proved})$$

সমাধান : (b) মনে করি, ABC ত্রিভুজের AD, BE, CF বাহুগুলি পরস্পরকে G বিন্দুতে ছেদ করে। অতএব, G ত্রিভুজটির ভরকেন্দ্র।



$\therefore$ AD , BE , CF পরস্পরকে G বিন্দুতে 1 : 2 অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত করে।

এখন, $\overrightarrow{AB}=2\overrightarrow{FB}=2(\overrightarrow{FG}+\overrightarrow{GB})=2\left(\frac{1}{3}\overrightarrow{FC}+\frac{2}{3}\overrightarrow{EB}\right)$

$$=\frac{2}{3}(-\overrightarrow{CF})+\frac{4}{3}(-\overrightarrow{BE})=-\frac{4}{3}\overrightarrow{BE}-\frac{2}{3}\overrightarrow{CF} \quad (\text{Ans.})$$

$$\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BG}-\overrightarrow{CG}=\frac{2}{3}\overrightarrow{BF}-\frac{2}{3}\overrightarrow{CF} \quad (\text{Ans.})$$

উদাহরণ –2: যদি $\underline{a}$ ও $\underline{b}$ অশূন্য অসমান্তরাল ভেক্টর হয় এবং $(x-2)\underline{a}+(y+5)\underline{b}=\underline{0}$ হয় তবে দেখাও যে, $x=2, y=-5$

প্রমাণ : দেওয়া আছে, $\underline{a}$ ও $\underline{b}$ অশূন্য অসমান্তরাল ভেক্টর এবং $(x-2)\underline{a}+(y+5)\underline{b}=\underline{0}$

$\therefore \quad x-2=0, y+5=0 \Rightarrow x=2, y=-5$

প্রশ্নমালা II A

1. (a) ABC একটি ত্রিভুজ; D বিন্দু BC এর মধ্যবিন্দু । $\overrightarrow{AB}=\underline{c}$ এবং $\overrightarrow{AC}=\underline{b}$ হলে, দেখাও যে, $\overrightarrow{AD}=\frac{1}{2}(\underline{b}+\underline{c})$ [ব.'১১]

(b) ABCDE একটি পঞ্চভুজ; $\overrightarrow{AB}=\underline{a}$, $\overrightarrow{BC}=\underline{b}$, $\overrightarrow{CD}=\underline{c}$ এবং $\overrightarrow{DE}=\underline{d}$ হলে, দেখাও যে, $\overrightarrow{AE}=\underline{a}+\underline{b}+\underline{c}+\underline{d}$ [কু.'০১]

(c) PQR ত্রিভুজের QR, RP ও PQ বাহুগুলির মধ্যবিন্দু যথাক্রমে L, M ও N । প্রমাণ কর যে, $\overrightarrow{PL}+\overrightarrow{QM}+\overrightarrow{RN}=\underline{0}$ [সি.'০৭,'০৯,'১২; য.'০১; দি.'০৯,'১৩; রা.'০৯,'১১,'১৩; ব.'১২,'১৪]

2. (a) ABC ত্রিভুজের BC, CA ও AB বাহুর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে D, E ও F হলে $\overrightarrow{BE}$ ও $\overrightarrow{CF}$ ভেক্টর দুইটিকে $\overrightarrow{AB}$ ও $\overrightarrow{AC}$ ভেক্টর দুইটির যোগাশ্রয়ী সমাবেশে প্রকাশ কর।

উ: $\overrightarrow{BE}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CF}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}$

(b) OAC ত্রিভুজে AC বাহুর মধ্যবিন্দু B; যদি $\overrightarrow{OA}=\underline{a}$ এবং $\overrightarrow{OB}=\underline{b}$ হয়, তবে $\overrightarrow{OC}$ ভেক্টরকে $\underline{a}$ ও $\underline{b}$ এর মাধ্যমে প্রকাশ কর।

উত্তর: $2\underline{b}-\underline{a}$ [ঢা.'০৯,'১৩; দি.'১২;রা.'১৪]

(c) $\overrightarrow{OP}=\underline{a}$, $\overrightarrow{OQ}=\underline{b}$ এবং $\overrightarrow{OR}=\underline{a}+\underline{b}$ হলে OPRQ কি ধরনের চতুর্ভুজ তা নির্ধারন কর।