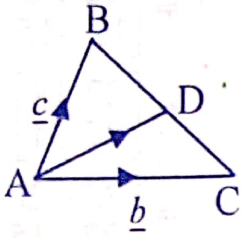
প্রশ্নমালা – II A

1. (a) ABC একটি ত্রিভুজ; D বিন্দু BC এর মধ্যবিন্দু। $\overrightarrow{AB} = \underline{c}$ এবং $\overrightarrow{AC} = \underline{b}$ হলে, দেখাও যে, $\overrightarrow{AD} = \frac{1}{2}(\underline{b}+\underline{c})$ [ব.'১১]



প্রমাণ ঃ $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD}$

$\Rightarrow \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$

[$\because$ D, BC এর মধ্যবিন্দু।]

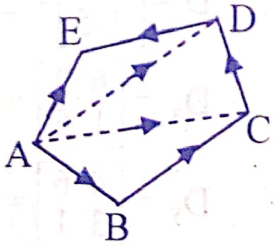
$\Rightarrow \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB})$

$= \underline{c} + \frac{1}{2}(\underline{b} - \underline{c}) = \frac{1}{2}(2\underline{c} + \underline{b} - \underline{c})$

$\therefore \overrightarrow{AD} = \frac{1}{2}(\underline{b} + \underline{c})$ (Showed)

1. (b) ABCDE একটি পঞ্চভুজ; $\overrightarrow{AB} = \underline{a}$, $\overrightarrow{BC} = \underline{b}$, $\overrightarrow{CD} = \underline{c}$ এবং $\overrightarrow{DE} = \underline{d}$ হলে, দেখাও যে, $\overrightarrow{AE} = \underline{a} + \underline{b} + \underline{c} + \underline{d}$ [কু.'০১]

প্রমাণ ঃ ABC, ACD ও ADE ত্রিভুজে ভেক্টর যোগের ত্রিভুজ সূত্র হতে পাই,



$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$

$= \underline{a} + \underline{b} \cdots (1)$

$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD}$

$= \underline{a} + \underline{b} + \underline{c}$ [$\because$ (1) দ্বারা]

এবং $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DE} = \underline{a} + \underline{b} + \underline{c} + \underline{d}$

1. (c) PQR ত্রিভুজের QR, RP ও PQ বাহুগুলোর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে L, M ও N। প্রমাণ কর যে, $\overrightarrow{PL} + \overrightarrow{QM} + \overrightarrow{RN} = \underline{0}$ [সি.'০৭,'০৯,'১২; য.'০১; দি.'০৯,'১৩; রা.'০৯,'১১,'১৩; ব.'১২,'১৪]

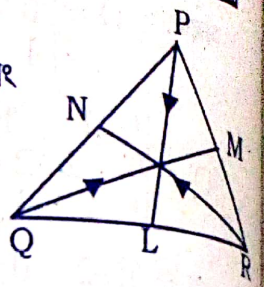
প্রমাণ ঃ QR এর মধ্যবিন্দু L বলে,

$\overrightarrow{PL} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{PR})$

অনুরূপভাবে,

$\overrightarrow{QM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{QP} + \overrightarrow{QR})$ এবং

$\overrightarrow{RN} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{RP} + \overrightarrow{RQ})$



L.H.S. $= \overrightarrow{PL} + \overrightarrow{QM} + \overrightarrow{RN}$

$= \frac{1}{2}(\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{PR} + \overrightarrow{QP} + \overrightarrow{QR} + \overrightarrow{RP} + \overrightarrow{RQ})$

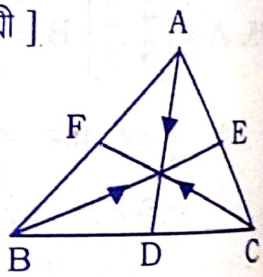
$= \frac{1}{2}\{(\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QP}) + (\overrightarrow{RQ} + \overrightarrow{QR}) + (\overrightarrow{RP} + \overrightarrow{PR})\}$

$= \frac{1}{2}(\underline{0} + \underline{0} + \underline{0}) = \underline{0}$ = R.H.S. (Proved)

2. (a) ABC ত্রিভুজের BC, CA ও AB বাহুর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে D, E ও F হলে $\overrightarrow{BE}$ ও $\overrightarrow{CF}$ ভেক্টর দুইটিকে $\overrightarrow{AB}$ ও $\overrightarrow{AC}$ ভেক্টর দুইটির যোগাশ্রয়ী সমাবেশে প্রকাশ কর।

সমাধান ঃ $\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AE}$

[ভেক্টর যোগের ত্রিভুজ সূত্রানুযায়ী]



$\Rightarrow \overrightarrow{BE} = -\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$

[$\because$ E, AC এর মধ্যবিন্দু।]

$\therefore \overrightarrow{BE} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$

$\overrightarrow{CF} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AF}$ [ভেক্টর যোগের ত্রিভুজ সূত্রানুযায়ী]

$\Rightarrow \overrightarrow{CF} = -\overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$

[$\because$ E, AC এর মধ্যবিন্দু।]

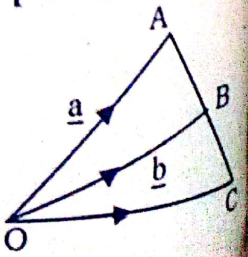
$\therefore \overrightarrow{CF} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$

2. (b) OAC ত্রিভুজে AC বাহুর মধ্যবিন্দু B; যদি $\overrightarrow{OA} = \underline{a}$ এবং $\overrightarrow{OB} = \underline{b}$ হয়, তবে $\overrightarrow{OC}$ ভেক্টরকে $\underline{a}$ ও $\underline{b}$ এর মাধ্যমে প্রকাশ কর। [ঢা.'০৯,'১৩; দি.'১৪]

সমাধান ঃ $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AC}$

$= \overrightarrow{OA} + 2\overrightarrow{AB}$

[$\because$ B , AC এর মধ্যবিন্দু]



$\Rightarrow \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + 2(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA})$

$= \underline{a} + 2(\underline{b} - \underline{a})$

$[\because \overrightarrow{OA} = \underline{a}$ এবং $\overrightarrow{OB} = \underline{b}]$

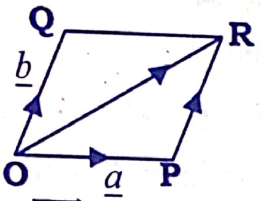
$\therefore \overrightarrow{OC} = 2\underline{b} - \underline{a}$ (Ans.)

2. (c) $\overrightarrow{OP} = \underline{a}$, $\overrightarrow{OQ} = \underline{b}$ এবং $\overrightarrow{OR} = \underline{a} + \underline{b}$ হলে OPRQ কি ধরনের চতুর্ভুজ তা নির্ধারন কর।

সমাধান ঃ দেওয়া আছে,

$\overrightarrow{OP} = \underline{a}$, $\overrightarrow{OQ} = \underline{b}$ এবং

$\overrightarrow{OR} = \underline{a} + \underline{b}$



এখন, $\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ} = \underline{a} + \underline{b} = \overrightarrow{OR}$

$\therefore \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OR}$; যা ভেক্টর যোগের সামান্তরিক সূত্রের শর্ত। অতএব, OPRQ একটি সামান্তরিক ।

3. যদি $\underline{a}$ ও $\underline{b}$ অসমরৈখিক ভেক্টর এবং $(x+1)\underline{a} + (y-2)\underline{b} = 2\underline{a} + \underline{b}$ হয় তবে x ও y এর মান নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ দেওয়া আছে, $\underline{a}$ ও $\underline{b}$ অসমরৈখিক ভেক্টর এবং

$(x+1)\underline{a} + (y-2)\underline{b} = 2\underline{a} + \underline{b}$

$\therefore x + 1 = 2 \Rightarrow x = 1, y - 2 = 1 \Rightarrow y = 3$

প্রশ্নমালা – II B

1. (a) $\vec{A} = \hat{i} + 3\hat{j} - 2\hat{k}$ এবং $\vec{B} = 4\hat{i} - 2\hat{j} + 4\hat{k}$ হলে $2\vec{A} + \vec{B}$ ও $6\vec{A} - 3\vec{B}$ এর মান নির্ণয় কর। [কু.'০৭; চ.'০৪]

সমাধান ঃ $2\overline{A} + \overline{B} = 2(\hat{i} + 3\hat{j} - 2\hat{k}) + 4\hat{i} - 2\hat{j} + 4\hat{k}$

$= 2\hat{i} + 6\hat{j} - 4\hat{k} + 4\hat{i} - 2\hat{j} + 4\hat{k}$

$= 6\hat{i} + 4\hat{j}$ (Ans.)

$6\overline{A} - 3\overline{B} = 6(\hat{i} + 3\hat{j} - 2\hat{k}) - 3(4\hat{i} - 2\hat{j} + 4\hat{k})$

$= 6\hat{i} + 18\hat{j} - 12\hat{k} - 12\hat{i} + 6\hat{j} - 12\hat{k}$

$= -6\hat{i} + 24\hat{j} - 24\hat{k}$ (Ans.)

1. (b) $\vec{A} = \hat{i} + 3\hat{j} - 2\hat{k}$ এবং $\vec{B} = 4\hat{i} - 2\hat{j} + 4\hat{k}$ হলে $|3\overline{A} + 2\overline{B}|$ এর মান নির্ণয় কর। [কু.'০৭; বুয়েট.১১-১২]

সমাধান ঃ $3\overline{A} + 2\overline{B} = 3(\hat{i} + 3\hat{j} - 2\hat{k}) + 2(4\hat{i} - 2\hat{j} + 4\hat{k})$

$= 3\hat{i} + 9\hat{j} - 6\hat{k} + 8\hat{i} - 4\hat{j} + 8\hat{k}$

$= 11\hat{i} + 5\hat{j} + 2\hat{k}$

$\therefore |3\overline{A} + 2\overline{B}| = \sqrt{11^2 + 5^2 + 2^2}$

$= \sqrt{121 + 25 + 4} = \sqrt{150}$

1(c) (2, 3,1) এবং (3,1, – 2) বিন্দুদ্বয়ের অবস্থান ভেক্টর দুইটির স্কেলার গুণফল নির্ণয় কর। [ঢা.'০২]

সমাধান ঃ (2, 3 , 1) ও (3 , 1 , – 2) বিন্দুদ্বয়ের অবস্থান ভেক্টর যথাক্রমে $2\hat{i} + 3\hat{j} + \hat{k}$ ও $3\hat{i} + \hat{j} - 2\hat{k}$.

$\therefore$ এ ভেক্টর দুইটির স্কেলার গুণফল

$= (2\hat{i} + 3\hat{j} + \hat{k}) \cdot (3\hat{i} + \hat{j} - 2\hat{k})$

$= 6 + 3 - 2 = 7$ (Ans.)

1. (d) $\overrightarrow{OA} = 2\hat{i} + 3\hat{j} - 4\hat{k}$, $\overrightarrow{OB} = 4\hat{i} - 3\hat{j} + 2\hat{k}$ হলে $|\overrightarrow{AB}|$ এর মান নির্ণয় কর। [রা.'১২; ব.'১০; য.'১২,'১৪; চ.'১২; দি.'০৯,'১১,'১৪;ঢা.'১৩; মা.'০৯, '১৩]

সমাধান ঃ $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$

$= 4\hat{i} - 3\hat{j} + 2\hat{k} - (2\hat{i} + 3\hat{j} - 4\hat{k})$

$= 4\hat{i} - 3\hat{j} + 2\hat{k} - 2\hat{i} - 3\hat{j} + 4\hat{k}$

$= 2\hat{i} - 6\hat{j} + 6\hat{k}$

$\therefore |\overrightarrow{AB}| = |2\hat{i} - 6\hat{j} + 6\hat{k}| = \sqrt{2^2 + 6^2 + 6^2}$

$= \sqrt{76} = 2\sqrt{19}$ (Ans.)

2. প্রতি জোড়া ভেক্টরের অন্তর্গত কোণ নির্ণয় কর ঃ

(a) $\vec{A} = 2\hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k}$ ও $\vec{B} = 2\hat{i} + 10\hat{j} - 11\hat{k}$ [য.'০৩; রা.'০৬]

সমাধান ঃ $|\overline{A}| = |2\hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k}|$

$= \sqrt{2^2 + 2^2 + 1^2} = \sqrt{9} = 3$

$|\overline{B}| = |2\hat{i} + 10\hat{j} - 11\hat{k}| = \sqrt{2^2 + 10^2 + 11^2}$

$= \sqrt{4 + 100 + 121} = \sqrt{225} = 15$ এবং

$\overline{A} \cdot \overline{B} = (2\hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k}) \cdot (2\hat{i} + 10\hat{j} - 11\hat{k})$

$= 2.2 + 2.10 + 1.(-11)$

$= 4 + 20 - 11 = 13$