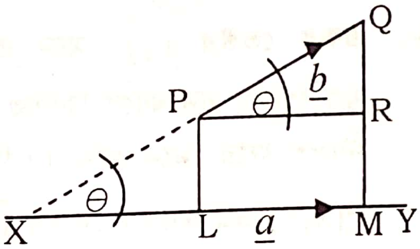
উঃ সামান্তরিক।

3. যদি $\underline{a}$ ও $\underline{b}$ অসমরৈখিক ভেক্টর এবং $(x+1)\underline{a}+(y-2)\underline{b}=2\underline{a}+\underline{b}$ হয় তবে x ও y এর মান নির্ণয় কর। উত্তর: $x=1$, $y=3$

৬. সমতলে ভেক্টরের অংশক (Components of a vector in a Plane)

ভেক্টরের অভিক্ষেপ (Projection):



মনে করি, $\underline{b}=\overrightarrow{PQ}$ এবং $\underline{a}$ ভেক্টরের ধারক রেখা XY । P ও Q বিন্দু হতে অঙ্কিত লম্ব XY রেখাকে যথাক্রমে L ও M বিন্দুতে ছেদ করে। আবার, P বিন্দু হতে অঙ্কিত লম্ব QM রেখাংশকে R বিন্দুতে ছেদ করে।

XY রেখার উপর $\underline{b}$ এর অভিক্ষেপ $= LM = PR = |\overrightarrow{PQ}|\cos\theta$

$=|\underline{b}|\cos\theta$; যেখানে $\underline{a}$ ও $\underline{b}$ ভেক্টর দুইটির অন্তর্ভুক্ত কোণ θ এবং $0<\theta<\pi$.

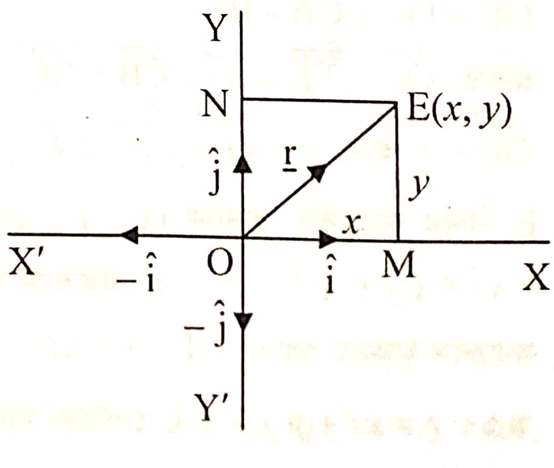
অংশক (component): একটি ভেক্টরকে দুই বা ততোধিক ভেক্টর রাশিতে বিভক্ত করে ভেক্টরটির অংশক বা উপাংশ পাওয়া যায়। $\underline{a}$ ভেক্টরের দিক বরাবর $\underline{b}$ ভেক্টরের অংশক একটি ভেক্টর যার দৈর্ঘ্য হচ্ছে $\underline{a}$ ভেক্টরের উপর $\underline{b}$ ভেক্টরের অভিক্ষেপ এবং দিক হচ্ছে $\underline{a}$ ভেক্টরের দিক ।

∴ $\underline{a}$ ও $\underline{b}$ ভেক্টর দুইটির অন্তর্ভুক্ত কোণ θ হলে $\underline{a}$ ভেক্টরের দিক বরাবর $\underline{b}$ ভেক্টরের অংশক $=|\underline{b}|\cos\theta\ \hat{a}$; যেখানে $\hat{a}$, $\underline{a}$ ভেক্টরের দিক বরাবর একটি একক ভেক্টর।

যদি $\underline{r}$, $\underline{a}$, $\underline{b}$ ভেক্টরত্রয়ের $\underline{a}$ ও $\underline{b}$ অসমরৈখিক হয় তবে $\underline{r}=m\underline{a}+n\underline{b}$; যেখানে m, n স্কেলার। এখানে $m\underline{a}$ ও $n\underline{b}$ কে যথাক্রমে $\underline{a}$ ও $\underline{b}$ এর দিক বরাবর $\underline{r}$ এর অংশক ভেক্টর বলে। আবার, $x\hat{i}$ ও $y\hat{j}$ ভেক্টরদ্বয় যথাক্রমে x-অক্ষ ও y-অক্ষ বরাবর $\underline{r}=x\hat{i}+y\hat{j}$ ভেক্টরের অংশক।

৭. ভেক্টরকে কার্তেসীয় স্থানাঙ্কে প্রকাশ (Representation of Vector in Cartesian coodinates)

মনে করি, $X'X$ ও YY' রেখাদ্বয় পরস্পর O মূলবিন্দুতে সমকোণে মিলিত হয়েছে এবং রেখাদ্বয় যথাক্রমে x ও y অক্ষ নির্দেশ করে। মনে করি, O বিন্দুর সাপেক্ষে প্রথম চতুর্ভাগের যেকোনো বিন্দু E এর অবস্থান ভেক্টর $\overrightarrow{OE}=\underline{r}$. E বিন্দু হতে OX ও OY এর উপর যথাক্রমে EM ও EN লম্ব টানি।



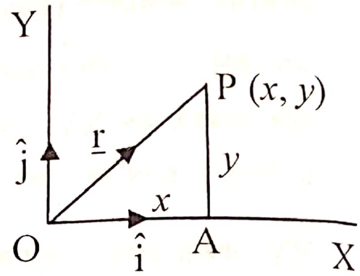
∴ x ও y অক্ষের উপর $\underline{r}$ এর অভিক্ষেপ যথাক্রমে $OM = x$ ও $ON = ME = y$ হলে অক্ষদ্বয় বরাবর $\underline{r}$ এর অংশক যথাক্রমে $\overrightarrow{OM}=x\hat{i}$ ও $\overrightarrow{ON}=\overrightarrow{ME}=y\hat{j}$; যেখানে $\hat{i}$ ও $\hat{j}$ যথাক্রমে OX ও OY বরাবর অর্থাৎ x ও y অক্ষের ধনাত্মক দিক বরাবর একক ভেক্টর।

∴ $\underline{r}=\overrightarrow{OE}=\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{ME}=x\hat{i}+y\hat{j}$ এবং E এর কার্তেসীয় স্থানাঙ্ক (x, y) । সুতরাং আমরা লিখতে

পারি, $\hat{i} = (1,0)$, $\hat{j} = (0,1)$ এবং $\underline{r} = \overrightarrow{OE} = (x, y) = x\hat{i} + y\hat{j}$ ।

OX ও OY বরাবর একক ভেক্টর যথাক্রমে $\hat{i}$ ও $\hat{j}$ বলে OX' ও OY' বরাবর একক ভেক্টর যথাক্রমে $-\hat{i}$ ও $-\hat{j}$ হবে এবং দ্বিতীয় , তৃতীয় ও চতুর্থ চতুর্ভাগে যেকোনো বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর $-x\hat{i} + y\hat{j}$, $-x\hat{i} - y\hat{j}$ ও $x\hat{i} - y\hat{j}$ এর কার্তেসীয় স্থানাঙ্ক হবে যথাক্রমে $(-x, y)$, $(-x, -y)$ ও $(x, -y)$ ।

৮. **একক ভেক্টর $\hat{i}, \hat{j}$:** মনে করি, $X'X$ ও YY' রেখাদ্বয় পরস্পর O মূলবিন্দুতে সমকোণে মিলিত হয়েছে এবং রেখাদ্বয় যথাক্রমে x ও y অক্ষ নির্দেশ করে। মনে করি, O বিন্দুর সাপেক্ষে প্রথম চতুর্ভাগের যেকোনো বিন্দু P(x,y) এর অবস্থান ভেক্টর $\overrightarrow{OP} = \underline{r}$. P বিন্দু হতে *x- অক্ষের উপর* PA লম্ব টানি। তাহলে, OA = x এবং AP = y



x ও y অক্ষের ধনাত্মক দিক বরাবর একক ভেক্টর যথাক্রমে $\hat{i}$ ও $\hat{j}$ হলে,

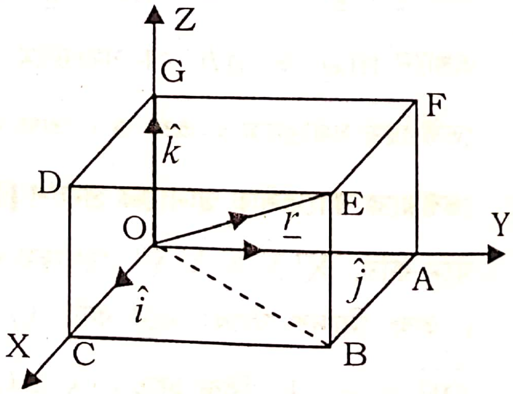
$$\hat{i} = \frac{\overrightarrow{OA}}{|\overrightarrow{OA}|} = \frac{\overrightarrow{OA}}{OA} = \frac{\overrightarrow{OA}}{x} \Rightarrow \overrightarrow{OA} = x\hat{i} \text{ এবং } \hat{j} = \frac{\overrightarrow{AP}}{|\overrightarrow{AP}|} = \frac{\overrightarrow{AP}}{AP} = \frac{\overrightarrow{AP}}{y} \Rightarrow \overrightarrow{AP} = y\hat{j}$$

ΔOAP হতে, $\underline{r} = \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AP} = x\hat{i} + y\hat{j}$ এবং $OP^2 = OA^2 + AP^2 \Rightarrow r^2 = x^2 + y^2$

$\therefore$ $\overrightarrow{OP} = \underline{r}$ ভেক্টরের দিক বরাবর একক ভেক্টর $= \dfrac{\overrightarrow{OP}}{OP} = \dfrac{\underline{r}}{r} = \dfrac{xi + yj}{\sqrt{x^2 + y^2}}$

৯. **ত্রিমাত্রিক জগতে ভেক্টরের অংশক নির্ণয়**

মনে করি, OX , OY ও OZ রেখাত্রয় পরস্পর O মূলবিন্দুতে সমকোণে মিলিত হয়েছে এবং রেখাত্রয় যথাক্রমে x , y ও z অক্ষ নির্দেশ করে। মনে করি, E বিন্দুর কার্তেসীয় স্থানাঙ্ক (x, y, z) এবং OX , OY ও OZ বরাবর একক ভেক্টর যথাক্রমে $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$ যারা পরস্পর পরস্পরের উপর লম্ব । XY সমতলের উপর EB এবং OX সরলরেখার উপর BC লম্ব টানি।



$\therefore$ $\overrightarrow{OE} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BE}$. কিন্তু $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CB}$

$\therefore$ $\overrightarrow{OE} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BE}$

আবার, $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{FE} = x\hat{i}$, $\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{DE} = \overrightarrow{OA} = y\hat{j}$, $\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{OG} = z\hat{k}$

$\overrightarrow{OE} = \underline{r}$ হলে, $\underline{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$

$\therefore$ E বিন্দুর কার্তেসীয় স্থানাঙ্ক (x, y, z) হলে মূলবিন্দু O এর সাপেক্ষে এর অবস্থান ভেক্টর, $\overrightarrow{OE} = \underline{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$ । x, y, z যথাক্রমে অক্ষত্রয়ের উপর $\overrightarrow{OE}$ ভেক্টরের লম্ব অভিক্ষেপ এবং $x\hat{i}$, $y\hat{j}$ ও $z\hat{k}$ যথাক্রমে অক্ষত্রয় বরাবর $\overrightarrow{OE} = \underline{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$ ভেক্টরের অংশক ।

৯.১ : $\underline{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$ ভেক্টরের মান:

সমকোণী ত্রিভুজ OAB এ, $OB^2 = OA^2 + AB^2$

সমকোণী ত্রিভুজ OBE এ, $OE^2 = OB^2 + BE^2 = OA^2 + AB^2 + BE^2 = y^2 + x^2 + z^2$

$\therefore$ $OE = |\underline{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

$\therefore$ $\underline{r}$ এর মান $= |\underline{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ এবং OE বরাবর একক ভেক্টর $= \dfrac{x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$

অনুসিদ্ধান্ত-১: $P(x_1, y_1, z_1)$ এবং $Q(x_2, y_2, z_2)$ হলে P বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর $= x_1\hat{i} + y_1\hat{j} + z_1\hat{k}$ এবং Q বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর $= x_2\hat{i} + y_2\hat{j} + z_2\hat{k}$

$\therefore$ $\overrightarrow{PQ}$ = Q বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর – P বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর $= (x_2\hat{i} + y_2\hat{j} + z_2\hat{k}) - (x_1\hat{i} + y_1\hat{j} + z_1\hat{k})$

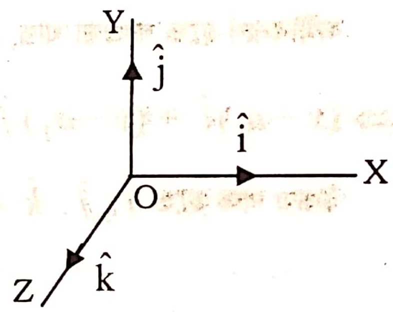
$$= (x_2 - x_1)\hat{i} + (y_2 - y_1)\hat{j} + (z_2 - z_1)\hat{k}$$

অনুসিদ্ধান্ত-২: $\underline{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$ ভেক্টরটি যদি x অক্ষ, y অক্ষ ও z অক্ষের ধনাত্মক দিকের সাথে যথাক্রমে α, β ও γ কোণ উৎপন্ন করে তবে $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ কে $\underline{r}$ ভেক্টরের দিক কোসাইন বলে

১০. ত্রিমাত্রিক জগতে $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$ (**$\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$ in three dimensional space)**

মনে করি, OX, OY, OZ তিনটি সরলরেখা পরস্পর O বিন্দুতে ছেদ করে। ত্রিমাত্রিক জগতে OX, OY, OZ যথাক্রমে x-অক্ষ, y-অক্ষ, এবং z-অক্ষ। ত্রিমাত্রিক জগতে x, y ও z অক্ষের ধনাত্মক দিক বরাবর একক ভেক্টর যথাক্রমে $\hat{i}, \hat{j}$ ও $\hat{k}$ দ্বারা প্রকাশ করা হয়। স্পষ্টত $|\hat{i}| = |\hat{j}| = |\hat{k}| = 1$.

এখানে, $\hat{i} = (1,0,0)$, $\hat{j} = (0,1,0)$, $\hat{k} = (0,0,1)$.



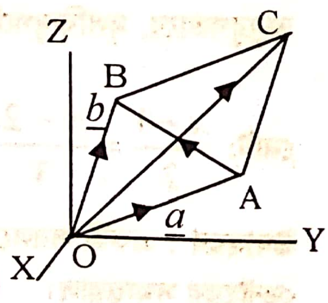
১১. **ভেক্টরকে $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$ এর মাধ্যমে প্রকাশ** : $\underline{r}(x, y, z)$ ভেক্টরকে $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$ এর মাধ্যমে প্রকাশ করা যায় $\underline{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$ আকারে। যেমন $\underline{a}\,(a_1, a_2, a_3) = a_1\hat{i} + a_2\hat{j} + a_3\hat{k}$.

১২. **ত্রিমাত্রিক জগতে ভেক্টরের যোগফল ও স্কেলার গুণিতককে $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$ এর মাধ্যমে প্রকাশ**

মনে করি, O শীর্ষ বিন্দুর সাপেক্ষে A ও B এর অবস্থান ভেক্টর যথাক্রমে $\overrightarrow{OA} = \underline{a} = a_1\hat{i} + a_2\hat{j} + a_3\hat{k}$ ও $\overrightarrow{OB} = \underline{b} = b_1\hat{i} + b_2\hat{j} + b_3\hat{k}$.

OACB সামান্তরিক অঙ্কন করে এর কর্ণদ্বয় যোগ করি।

ভেক্টর যোগের সামান্তরিক সূত্র হতে পাই,



$\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = \underline{a} + \underline{b} = (a_1\hat{i} + a_2\hat{j} + a_3\hat{k}) + (b_1\hat{i} + b_2\hat{j} + b_3\hat{k})$

$$= (a_1 + b_1)\hat{i} + (a_2 + b_2)\hat{j} + (a_3 + b_3)\hat{k}\,(a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3)$$

$\therefore$ (a_1, a_2, a_3) ও (b_1, b_2, b_3) ভেক্টরের যোগফল (লব্ধি) $= (a_1 + b_1)\hat{i} + (a_2 + b_2)\hat{j} + (a_3 + b_3)\hat{k}$

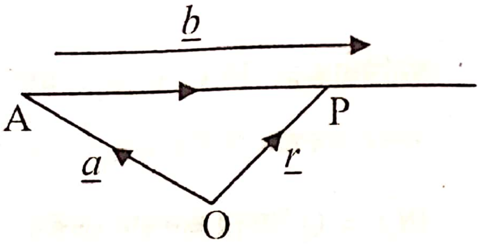
ΔOAB হতে পাই, $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \underline{b} - \underline{a} = (b_1\hat{i} + b_2\hat{j} + b_3\hat{k}) - (a_1\hat{i} + a_2\hat{j} + a_3\hat{k})$

$$= (b_1 - a_1)\hat{i} + (b_2 - a_2)\hat{j} + (b_3 - a_3)\hat{k}$$

এখন, $m\underline{a} = m(a_1\hat{i} + a_2\hat{j} + a_3\hat{k}) = ma_1\hat{i} + ma_2\hat{j} + ma_3\hat{k} = (ma_1, ma_2, ma_3)$; যেখানে m একটি স্কেলার।

১৩. সরলরেখার ভেক্টর সমীকরণ

(i) A($\underline{a}$) বিন্দুগামী এবং $\underline{b}$ ভেক্টরের সমান্তরাল সরলরেখার ভেক্টর সমীকরণ $\underline{r} = \underline{a} + t\underline{b}$; যেখানে t একটি প্যারামিটার।



মনে করি, O মূলন্দু এবং A বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর $\overrightarrow{OA} = \underline{a}$। ধরি, A বিন্দুগামী এবং $\underline{b}$ ভেক্টরের সমান্তরাল সরলরেখার উপর যেকোনো বিন্দু P এর অবস্থান ভেক্টর $\overrightarrow{OP} = \underline{r}$। $\overrightarrow{AP}$ ভেক্টর $\underline{b}$ ভেক্টরের সমান্তরাল বলে $\overrightarrow{AP} = t\underline{b}$; যেখানে t যেকোনো স্কেলার।

এখন, $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AP} \Rightarrow \underline{r} = \underline{a} + t\underline{b}$; যা সরলরেখার নির্ণেয় ভেক্টর সমীকরণ।

t এর ভিন্ন ভিন্ন মানের জন্য সরলরেখাটির উপর বিভিন্ন বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর পাওয়া যায়।

অনুসিদ্ধান্ত : $\underline{a} = a_1\hat{i} + a_2\hat{j} + a_3\hat{k}$, $\underline{b} = b_1\hat{i} + b_2\hat{j} + b_3\hat{k}$ ও $\underline{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$ হলে $\underline{r} = \underline{a} + t\underline{b}$ সমীকরণ হতে পাওয়া যায়, $x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k} = a_1\hat{i} + a_2\hat{j} + a_3\hat{k} + t(b_1\hat{i} + b_2\hat{j} + b_3\hat{k})$

$$\Rightarrow (x - a_1)\hat{i} + (y - a_2)\hat{j} + (z - a_3)\hat{k} = t(b_1\hat{i} + b_2\hat{j} + b_3\hat{k})$$

উভয় পক্ষ হতে $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$ এর সহগ সমীকৃত করে পাই, $(x - a_1) = tb_1$, $(y - a_2) = tb_2$, $(z - a_3) = tb_3$

$$\Rightarrow \frac{x - a_1}{b_1} = \frac{y - a_2}{b_2} = \frac{z - a_3}{b_3} = t$$

অর্থাৎ, সরলরেখার ভেক্টর সমীকরণ $\underline{r} = \underline{a} + t\underline{b}$ এর কার্তেসীয় সমীকরণ $\frac{x - a_1}{b_1} = \frac{y - a_2}{b_2} = \frac{z - a_3}{b_3}$ $(= t)$

অনুরূপভাবে, মূলবিন্দুগামী এবং $\underline{b}$ ভেক্টরের সমান্তরাল $\underline{r} = t\underline{b}$ এর কার্তেসীয় সমীকরণ $\frac{x}{b_1} = \frac{y}{b_2} = \frac{z}{b_3}$ $(= t)$

নোট: $\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{3} = \frac{z+3}{4}$ এর ভেক্টর সমীকরণ $\underline{r} = \hat{i} + 2\hat{j} - 3\hat{k} + t(2\hat{i} + 3\hat{j} + 4\hat{k})$

উদাহরণ : একটি সরলরেখার ভেক্টর সমীকরণ নির্ণয় কর যা A(0, −1, 2) বিন্দুগামী এবং $\underline{b} = \hat{i} + 5\hat{j} - 2\hat{k}$ ভেক্টরের সমান্তরাল।

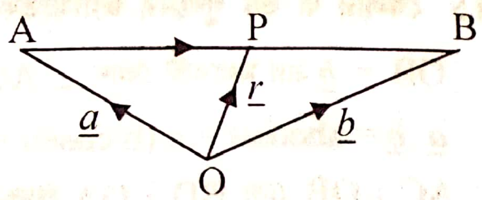
সমাধান: A(0, −1, 2) বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর $\underline{a} = -\hat{j} + 2\hat{k}$.

∴ সরলরেখাটির ভেক্টর সমীকরণ, $\underline{r} = \underline{a} + t\underline{b} = -\hat{j} + 2\hat{k} + t(\hat{i} + 5\hat{j} - 2\hat{k})$

$$\Rightarrow \underline{r} = t\hat{i} + (-1 + 5t)\hat{j} + (2 - 2t)\hat{k}$$

(ii) A($\underline{a}$) ও B($\underline{b}$) বিন্দুগামী সরলরেখার ভেক্টর সমীকরণ $\underline{r} = \underline{a} + t(\underline{b} - \underline{a})$ অর্থাৎ

$\underline{r} = (1 - t)\underline{a} + t\underline{b}$ [রা.'১৫]



মনে করি, O মূলবিন্দু এবং A, B ও AB এর উপর যেকোনো বিন্দু P এর অবস্থান ভেক্টর যথাক্রমে $\overrightarrow{OA} = \underline{a}$, $\overrightarrow{OB} = \underline{b}$ ও $\overrightarrow{OP} = \underline{r}$ ।

$\therefore \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \underline{b} - \underline{a}$

$\therefore \overrightarrow{AP} = t\overrightarrow{AB} = t(\underline{b} - \underline{a})$; [$\because$ P , AB এর উপর অবস্থিত।]

এখন, $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AP}$ $\therefore \underline{r} = \underline{a} + t(\underline{b} - \underline{a}) = (1-t)\underline{a} + t\underline{b}$

আবার, $\overrightarrow{AP}$ ও $\overrightarrow{AB}$ ভেক্টর একই রেখায় অবস্থিত হওয়ায় এদের ভেক্টর গুণন শূন্য হবে।

$\therefore \overrightarrow{AP} \times \overrightarrow{AB} = \underline{0} \Rightarrow (\underline{r} - \underline{a}) + (\underline{b} - \underline{a}) = \underline{0}$; ইহাও ভেক্টর সমীকরণ।

অনুসিদ্ধান্ত : $\underline{a}(a_1, a_2, a_3)$ ও $\underline{b}(b_1, b_2, b_3)$ বিন্দুগামী সরলরেখার ভেক্টর সমীকরণ $\underline{r} = \underline{a} + t(\underline{b} - \underline{a})$ এর কার্তেসীয় সমীকরণ $\dfrac{x-a_1}{b_1-a_1} = \dfrac{y-a_2}{b_2-a_2} = \dfrac{z-a_3}{b_3-a_3}$

উদাহরণ : একটি সরলরেখার ভেক্টর সমীকরণ নির্ণয় কর যা A(3, –2, 1) এবং B(1, –3, 0) বিন্দুগামী।

সমাধান: A(3, –2, 1) বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর $\underline{a} = 3\hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k}$ এবং

B(1, 5, 0) বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর $\underline{b} = \hat{i} - 3\hat{j}$

$\therefore$ সরলরেখাটির ভেক্টর সমীকরণ, $\underline{r} = \underline{a} + t(\underline{b} - \underline{a})$

$$\Rightarrow \underline{r} = 3\hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k} + t\{\hat{i} - 3\hat{j} - (3\hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k})\}$$

$$\Rightarrow \underline{r} = 3\hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k} + t(\hat{i} - 3\hat{j} - 3\hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k})$$

$$\Rightarrow \underline{r} = 3\hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k} + t(-2\hat{i} - \hat{j} - \hat{k})$$

$$\Rightarrow \underline{r} = (3-2t)\hat{i} + (-2-t)\hat{j} + (1-t)\hat{k}$$

১৪. দুইটি ভেক্টরের স্কেলার বা ডট গুণন (Scalar product or dot product of two vectors) [চ.'১১]

যদি দুইটি ভেক্টরের গুণনে একটি স্কেলার রাশি পাওয়া যায়, তবে এই গুণনকে স্কেলার বা ডট গুণন বলে। এ গুণফলের মান ভেক্টরদ্বয়ের মান এবং তাদের মধ্যবর্তী ক্ষুদ্রতর কোণের কোসাইন (cosine) এর গুণফলের সমান। $\underline{a}$ ও $\underline{b}$ ভেক্টর দুইটির মধ্যবর্তী কোণ θ $(0 \le \theta \le \pi)$ হলে, ভেক্টর দুইটির স্কেলার গুণনকে $\underline{a} \cdot \underline{b}$ দ্বারা সূচিত করা হয় এবং একে $\underline{a} \cdot \underline{b} = |\underline{a}||\underline{b}|\cos\theta$ দ্বারা সংজ্ঞায়িত করা হয়।

θ সূক্ষ্মকোণ হলে, $\cos\theta > 0$ এবং $\underline{a} \cdot \underline{b} > 0$; θ স্থূলকোণ হলে, $\cos\theta < 0$ এবং $\underline{a} \cdot \underline{b} < 0$;

ভেক্টর দুইটি পরস্পর লম্ব হলে, $\cos\theta = 0$ এবং $\underline{a} \cdot \underline{b} = 0$;

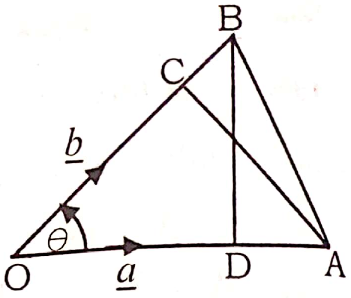
ভেক্টর দুইটি পরস্পর সমান্তরাল বা সমরেখ হলে, $\cos\theta = 1$ এবং $\underline{a} \cdot \underline{b} = |\underline{a}||\underline{b}|$

ভেক্টর দুইটির দিক বিপরীত হলে, $\underline{a} \cdot \underline{b} = -|\underline{a}||\underline{b}|$

দ্রষ্টব্যঃ $\underline{a} \cdot \underline{a} = |\underline{a}||\underline{a}|\cos 0^0 = a^2 .1 = a^2$

$\hat{i} \cdot \hat{i} = 1,\ \hat{j} \cdot \hat{j} = 1,\ \hat{k} \cdot \hat{k} = 1,\ \hat{i} \cdot \hat{j} = \hat{j} \cdot \hat{i} = 0,\ \hat{j} \cdot \hat{k} = \hat{k} \cdot \hat{j} = 0,\ \hat{k} \cdot \hat{i} = \hat{k} \cdot \hat{i} = 0$

১৪.১ স্কেলার বা ডট গুণনের জ্যামিতিক ব্যাখ্যা : দুইটি ভেক্টর $\overrightarrow{OA} = \underline{a}$ ও $\overrightarrow{OB} = \underline{b}$ এর মধ্যবর্তী কোণ $\angle AOB = \theta$ হলে ভেক্টরদ্বয়ের স্কেলার গুণন



$\underline{a} . \underline{b} = ab\cos\theta = a\,(b\cos\theta) = b\,(a\cos\theta)$

$AC \perp OB$ এবং $BD \perp OA$ অঙ্কন করি। তাহলে,

$\underline{a}$ এর উপর $\underline{b}$ এর লম্ব অভিক্ষেপ $= OD = OB\cos\theta = b\cos\theta$ এবং

$\underline{b}$ এর উপর $\underline{a}$ এর লম্ব অভিক্ষেপ $OC = OA\cos\theta = a\cos\theta$

তাহলে, $\underline{a} . \underline{b} = a\,(b\cos\theta) =$ ($\underline{a}$ ভেক্টরের মান) ($\underline{a}$ এর উপর $\underline{b}$ এর লম্ব অভিক্ষেপ)

অথবা, $\underline{a} . \underline{b} = b\,(a\cos\theta) =$ ($\underline{b}$ ভেক্টরের মান)($\underline{b}$ এর উপর $\underline{a}$ এর লম্ব অভিক্ষেপ)

সুতরাং, দুইটি ভেক্টরের স্কেলার বা ডট গুণন বলতে যেকোনো একটি ভেক্টরের মান এবং সেই ভেক্টরের উপর অপর ভেক্টরের লম্ব অভিক্ষেপের গুণফল বুঝায়। তাই দুইটি ভেক্টরের স্কেলার গুণফল একটি ভেক্টর ও সেই ভেক্টরের উপর অপর ভেক্টরের লম্ব অভিক্ষেপকে সন্নিহিত বাহু ধরে অঙ্কিত আয়তক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্দেশ করে।

দুইটি ভেক্টরের অন্তর্ভুক্ত কোণ

> **$\underline{a}$ ও $\underline{b}$ দুইটি অশূন্য ভেক্টরের অন্তর্ভুক্ত কোণ θ হলে, $\underline{a} . \underline{b} = |\underline{a}||\underline{b}|\cos\theta$**
>
> $\therefore \cos\theta = \dfrac{\underline{a} . \underline{b}}{|\underline{a}||\underline{b}|} \Rightarrow \theta = \cos^{-1}\dfrac{\underline{a} . \underline{b}}{|\underline{a}||\underline{b}|}$.

$\underline{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$ ভেক্টর যদি x অক্ষ, y অক্ষ ও z অক্ষের ধনাত্মক দিকের সাথে যথাক্রমে α, β ও γ কোণ উৎপন্ন করে তবে $\alpha = \cos^{-1}\dfrac{(x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k})\cdot\hat{i}}{|x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}||\hat{i}|} = \cos^{-1}\dfrac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$.

তদ্রূপ, $\beta = \cos^{-1}\dfrac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$, $\gamma = \cos^{-1}\dfrac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$

উদাহরণ: $3\hat{i} - 4\hat{k}$ ভেক্টরটি x–অক্ষের সাথে $\cos^{-1}\dfrac{3}{\sqrt{3^2 + 0^2 + 4^2}} = \cos^{-1}\dfrac{3}{5}$, y -অক্ষের সাথে $\cos^{-1}\dfrac{0}{5} = \dfrac{\pi}{2}$ এবং z –অক্ষের সাথে $\cos^{-1}\dfrac{-4}{5}$ কোণ উৎপন্ন করে।

দ্রষ্টব্যঃ $\underline{a} . \underline{b} = |\underline{a}||\underline{b}|\cos\theta \Rightarrow |\underline{b}|\cos\theta = \dfrac{\underline{a} . \underline{b}}{|\underline{a}|}$

> $\therefore$ **$\underline{a}$ ভেক্টরের উপর $\underline{b}$ ভেক্টরের অভিক্ষেপ** $= |\underline{b}|\cos\theta = \dfrac{\underline{a} . \underline{b}}{|\underline{a}|}$
>
> **তদ্রূপ, $\underline{b}$ ভেক্টরের উপর $\underline{a}$ ভেক্টরের অভিক্ষেপ** $= |\underline{a}|\cos\theta = \dfrac{\underline{a} . \underline{b}}{|\underline{b}|}$
>
> $\therefore$ **$\underline{a}$ ভেক্টরের দিক বরাবর $\underline{b}$ ভেক্টরের উপাংশ** $= |\underline{b}|\cos\theta\,\hat{a} = \dfrac{\underline{a}\cdot\underline{b}}{|\underline{a}|}\hat{a} = \dfrac{\underline{a}\cdot\underline{b}}{|\underline{a}|^2}\underline{a}$

তদ্রূপ, $\underline{b}$ ভেক্টরের দিক বরাবর $\underline{a}$ ভেক্টরের উপাংশ $=|\underline{a}|\cos\theta\ \hat{b}=\dfrac{\underline{a}\cdot\underline{b}}{|\underline{b}|}\hat{b}=\dfrac{\underline{a}\cdot\underline{b}}{|\underline{b}|^2}\underline{b}$

দ্রষ্টব্যঃ $\underline{a}$ **ভেক্টরের বরাবর** $\underline{b}$ **এর উপাংশের মান ও** $\underline{a}$ **এর উপর** $\underline{b}$ **এর লম্ব অভিক্ষেপ পরস্পর সমান।**

উদাহরণ : $\overline{A}=3\hat{i}-2\hat{j}+5\hat{k}$ ভেক্টর বরাবর $\overline{B}=2\hat{i}-\hat{j}+\hat{k}$ ভেক্টরের উপাংশ নির্ণয় কর।

সমাধান: $\overline{A}$ ভেক্টর বরাবর $\overline{B}$ ভেক্টরের উপাংশ $=\left(\dfrac{\overline{A}\cdot\overline{B}}{|\overline{A}|^2}\right)\overline{A}=\dfrac{(3\hat{i}-2\hat{j}+5\hat{k}).(2\hat{i}-\hat{j}+\hat{k})}{|3\hat{i}-2\hat{j}+5\hat{k}|^2}\overline{A}$

$$=\frac{6+2+5}{\{\sqrt{3^2+(-2)^2+5^2}\}^2}\overline{A}=\frac{13}{9+4+25}(3\hat{i}-2\hat{j}+5\hat{k})=\frac{13}{38}(3\hat{i}-2\hat{j}+5\hat{k})$$

১৫. স্কেলার গুণজের ধর্ম :

$\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$ যেকোনো ভেক্টর এবং m , n যেকোনো স্কেলার হলে,

(i) $\underline{a}.\underline{b}=\underline{b}.\underline{a}$ (ii) $\underline{a}.(-\underline{b})=-(\underline{a}.\underline{b})$ এবং $(-\underline{a}).(-\underline{b})=(\underline{a}.\underline{b})$

(iii) $m\underline{a}.n\underline{b}=mn(\underline{a}.\underline{b})$ (iv) $\underline{a}.(\underline{b}+\underline{c})=\underline{a}.\underline{b}+\underline{a}.\underline{c}$.

(v) স্কেলার গুণনের জন্য সংযোজন বিধি $(\underline{a}.\underline{b}).\underline{c}$ অর্থহীন । কেননা, $\underline{a}.\underline{b}$ একটি স্কেলার রাশি যার সাথে $\underline{c}$ ভেক্টরের স্কেলার গুণন হতে পারেনা।

১৬. অংশকের মাধ্যমে দুইটি ভেক্টরের স্কেলার গুণজ

মনে করি, $\underline{a}=a_1\hat{i}+a_2\hat{j}+a_3\hat{k}$ এবং $\underline{b}=b_1\hat{i}+b_2\hat{j}+b_3\hat{k}$

$\underline{a}.\underline{b}=(a_1\hat{i}+a_2\hat{j}+a_3\hat{k}).(b_1\hat{i}+b_2\hat{j}+b_3\hat{k})=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3$

দ্রষ্টব্যঃ দুইটি ভেক্টর লম্ব হওয়ার শর্ত , $\underline{a}.\underline{b}=0$, i.e., $a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3=0$

১৬.১ ভেক্টরের দৈর্ঘ্য ও দুইটি ভেক্টরের অন্তর্ভুক্ত কোণ

মনে করি, $\underline{a}=a_1\hat{i}+a_2\hat{j}+a_3\hat{k}$ এবং $\underline{b}=b_1\hat{i}+b_2\hat{j}+b_3\hat{k}$

$|\underline{a}|^2=\underline{a}.\underline{a}=(a_1\hat{i}+a_2\hat{j}+a_3\hat{k}).(a_1\hat{i}+a_2\hat{j}+a_3\hat{k})=a_1^2+a_2^2+a_3^2$

$\therefore\ |\underline{a}|=\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}$

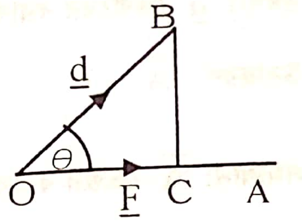
$\underline{a}$ ও $\underline{b}$ ভেক্টর দুইটির অন্তর্ভুক্ত কোণ θ হলে, $\cos\theta=\dfrac{\underline{a}.\underline{b}}{|\underline{a}||\underline{b}|}=\dfrac{a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}\sqrt{b_1^2+b_2^2+b_3^2}}$

উদাহরণ : $\overline{A}=\hat{i}+2\hat{j}+\hat{k}$ ও $\overline{B}=2\hat{i}-10\hat{j}+5\hat{k}$ এর মধ্যবর্তী কোণ নির্ণয় কর।

সমাধান: $\overline{A}$ ও $\overline{B}$ এর মধ্যবর্তী কোণ θ হলে, $\cos\theta=\dfrac{\overline{A}.\overline{B}}{|\overline{A}||\overline{B}|}=\dfrac{(\hat{i}+2\hat{j}+\hat{k})\cdot(2\hat{i}-10\hat{j}+5\hat{k})}{|\hat{i}+2\hat{j}+\hat{k}||2\hat{i}-10\hat{j}+5\hat{k}|}$

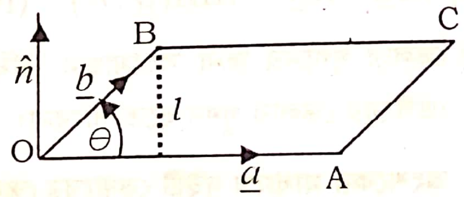
$$\Rightarrow\ \cos\theta=\frac{1\times2+2\times(-10)+1\times5}{\sqrt{1^2+2^2+1^2}\times\sqrt{2^2+(-10)^2+5^2}}=\frac{2-20+5}{\sqrt{1+4+1}\times\sqrt{4+100+25}}$$

$$= \frac{-13}{\sqrt{6}\times\sqrt{129}} \quad \therefore \theta = \cos^{-1}\left(\frac{-13}{\sqrt{6}\times\sqrt{129}}\right) \quad \text{(Ans.)}$$



স্কেলার গুণজের উদাহরণ হিসাবে কাজ: কোনো বস্তুকণার উপর F মানের বল ক্রিয়াশীল হওয়ায় বলের দিকে বস্তুটির সরণ d হলে কৃত কাজ = Fd । কিন্তু যদি একটি বস্তুর উপর ধ্রুবক বল $\underline{F}$, OA বরাবর প্রযুক্ত হওয়ায় বস্তুটি বলের ক্রিয়ারেখার সাথে θ কোণ উৎপন্ন করে OB বরাবর d দূরত্ব অতিক্রম করে B বিন্দুতে পৌঁছে তবে $\underline{F}=\overrightarrow{OA}$, $\underline{d}=\overrightarrow{OB}$ এবং $\underline{F}$ বরাবর বস্তুকণার সরণ $=\underline{F}$ এর উপর $\underline{d}$ এর লম্ব অভিক্ষেপ $= OC = d\cos\theta$. সুতরাং কাজ $= F(d\cos\theta) = \underline{F}.\underline{d}$.

১৭. দুইটি ভেক্টরের ভেক্টর গুণন বা ক্রস গুণন : যদি দুইটি ভেক্টরের গুণনে অপর একটি ভেক্টর রাশি পাওয়া যায়, তবে এই গুণনকে ভেক্টর গুণন বা ক্রস গুণন বলে। এ গুণফলের মান ভেক্টরদ্বয়ের মান এবং তাদের মধ্যবর্তী ক্ষুদ্রতর কোণের সাইন (sine) এর গুণফলের সমান। ভেক্টর গুণফলের দিক হয় প্রদত্ত ভেক্টরদ্বয়ের সমতলে লম্বভাবে স্থাপিত একটি ডানহাতি স্ক্রুকে প্রথম ভেক্টর থেকে দ্বিতীয় ভেক্টরের দিকে ক্ষুদ্রতর কোণে ঘুরালে যে দিকে অগ্রসর হয় সে দিক।



$\underline{a}$ ও $\underline{b}$ ভক্টর দুইটির ভেক্টর গুণনকে $\underline{a}\times\underline{b} = |\underline{a}||\underline{b}|\sin\theta\,\hat{n}$ দ্বারা সংজ্ঞায়িত করা হয়, যেখানে θ হচ্ছে $\underline{a}$ ভেক্টর হতে $\underline{b}$ ভেক্টরের দিকে একটি ডানহাতি স্ক্রুর ঘূর্ণনে যে ক্ষুদ্রতর কোণ উৎপন্ন হয় তা এবং $\hat{n}$ হচ্ছে একটি একক ভেক্টর যা $\underline{a}$ ও $\underline{b}$ ভেক্টর দুইটির সমতলের উপর লম্ব । $\hat{n}$ এর দিক $\underline{a}$ ভেক্টর হতে $\underline{b}$ ভেক্টরের দিকে ঘূর্ণায়মান একটি ডানহাতি স্ক্রুর অগ্রসর হওয়ার দিক

$\therefore$ $\hat{n}$ এর দিক অর্থাৎ $\underline{a}\times\underline{b}$ এর দিক $\underline{a}$ ও $\underline{b}$ ভেক্টর দুইটির সমতলের উপরের দিকে যখন একটি ডানহাতি স্ক্রুর ঘূর্ণন ঘড়ির কাঁটা ঘূর্ণনের বিপরীত দিকে হয় অর্থাৎ θ ধনাত্মক হয় ; অথবা নিচের দিকে যখন ডানহাতি স্ক্রুর ঘূর্ণন ঘড়ির কাঁটা ঘূর্ণনের দিকে হয় অর্থাৎ θ ঋণাত্মক হয়।

মনে করি, OACB সামান্তরিকের $\overrightarrow{OA} = \underline{a}$, $\overrightarrow{OB} = \underline{b}$ এবং $\angle AOB = \theta$, B হতে OA এর উপর লম্ব l ।

$$\therefore \underline{a}\times\underline{b} = |\underline{a}||\underline{b}|\sin\theta\,\hat{n} = a(b\sin\theta)\hat{n} = al\,\hat{n},\ [\because \sin\theta = \frac{l}{OB} \Rightarrow l = OB\sin\theta = b\sin\theta]$$

$=\underline{a}$ ও $\underline{b}$ ভেক্টরের সমতলের উপরে লম্ব দিকে OACB সামান্তরিকের ক্ষেত্রফল

সুতরাং, দুইটি ভেক্টর রাশির ভেক্টর গুণফলের মান ভেক্টর দুইটিকে সন্নিহিত বাহু ধরে অঙ্কিত সামান্তরিকের ক্ষেত্রফলের সমান।

$\therefore$ OACB সামান্তরিকের $\overrightarrow{OA} = \underline{a}$ এবং $\overrightarrow{OB} = \underline{b}$ হলে তার ক্ষেত্রফল $|\underline{a}\times\underline{b}|$ । অতএব, OAB ত্রিভুজের $\overrightarrow{OA} = \underline{a}$ এবং $\overrightarrow{OB} = \underline{b}$ হলে তার ক্ষেত্রফল $\frac{1}{2}|\underline{a}\times\underline{b}|$ এবং B হতে OA এর লম্ব দূরত্ব $= \frac{|\underline{a}\times\underline{b}|}{|\underline{a}|}$

দ্রষ্টব্য: $\hat{i}\times\hat{j}=|\hat{i}||\hat{j}|\sin 90^\circ\,\hat{n}=\hat{k}$; $\hat{j}\times\hat{i}=|\hat{j}||\hat{i}|\sin(-90^\circ)\hat{n}=-\hat{k}$, $\hat{j}\times\hat{k}=\hat{i}$, $\hat{k}\times\hat{j}=-\hat{i}$, $\hat{k}\times\hat{i}=\hat{j}$, $\hat{i}\times\hat{k}=-\hat{j}$, $\hat{i}\times\hat{i}=|\hat{i}||\hat{i}|\sin 0^\circ\,\hat{n}=\underline{0}$, $\hat{j}\times\hat{j}=\underline{0}$, $\hat{k}\times\hat{k}=\underline{0}$

অনুসিদ্ধান্ত: এখানে, $|\underline{a}\times\underline{b}|=ab\sin\theta|\hat{n}|=ab\sin\theta\Rightarrow\theta=\sin^{-1}\dfrac{\underline{a}\times\underline{b}}{|\underline{a}||\underline{b}|}$; এই সূত্রের সাহায্যেও $\underline{a}$ ও $\underline{b}$ ভেক্টর দুইটির মধ্যবর্তী কোণ নির্ণয় করা যায়।

১৮. ভেক্টর গুণজের ধর্মঃ

(i) ভেক্টর গুণন বিনিময় বিধি মেনে চলেনা অর্থাৎ, $\underline{a}\times\underline{b}\neq\underline{b}\times\underline{a}$.

(ii) $\underline{a}\times\underline{b}=\hat{n}\,ab\sin\theta=-(-\hat{n}\,ba\sin\theta)=-(\underline{b}\times\underline{a})$

(iii) $\underline{a}$ ও $\underline{b}$ দ্বারা কোনো সামান্তরিকের কর্ণদ্বয় সূচিত হলে, সামান্তরিকটির ক্ষেত্রফল $=\dfrac{1}{2}|\underline{a}\times\underline{b}|$

(iv) দুইটি অশূন্য ভেক্টর $\underline{a}$, $\underline{b}$ পরস্পর সমান্তরাল হলে, $\underline{a}\times\underline{b}=\underline{0}$. অন্যভাবে, $\dfrac{a_1}{b_1}=\dfrac{a_2}{b_2}=\dfrac{a_3}{b_3}$

(v) $m(\underline{a}\times\underline{b})=(m\underline{a})\times\underline{b}=\underline{a}\times(m\underline{b})$ **(vi)** $\underline{a}\times(\underline{b}+\underline{c})=\underline{a}\times\underline{b}+\underline{a}\times\underline{c}$

১৯. অংশকের মাধ্যমে দুইটি ভেক্টরের ভেক্টর গুণজ :

মনে করি, $\underline{a}=a_1\hat{i}+a_2\hat{j}+a_3\hat{k}$ এবং $\underline{b}=b_1\hat{i}+b_2\hat{j}+b_3\hat{k}$

$\underline{a}\times\underline{b}=(a_1\hat{i}+a_2\hat{j}+a_3\hat{k})\times(b_1\hat{i}+b_2\hat{j}+b_3\hat{k})$

$=a_1b_2(\hat{i}\times\hat{j})+a_1b_3(\hat{i}\times\hat{k})+a_2b_1(\hat{j}\times\hat{i})+a_2b_3(\hat{j}\times\hat{k})+a_3b_1(\hat{k}\times\hat{i})+a_3b_2(\hat{k}\times\hat{j})$

$=a_1b_2(\hat{k})+a_1b_3(-\hat{j})+a_2b_1(-\hat{k})+a_2b_3(\hat{i})+a_3b_1(\hat{j})+a_3b_2(-\hat{i})$

$$=(a_2b_3-a_3b_2)\hat{i}+(a_3b_1-a_1b_3)\hat{j}+(a_1b_2-a_2b_1)\hat{k}=\begin{vmatrix}\hat{i}&\hat{j}&\hat{k}\\a_1&a_2&a_3\\b_1&b_2&b_3\end{vmatrix}$$

দ্রষ্টব্য: $\underline{a}\times\underline{b}$ ভেক্টরটি $\underline{a}$ ও $\underline{b}$ ভেক্টর দুইটির সমতলের ওপর লম্ব।

সুতরাং, $\underline{a}$ ও $\underline{b}$ ভেক্টর দুইটির সমতলের ওপর লম্ব একক ভেক্টর $=\pm\dfrac{\underline{a}\times\underline{b}}{|\underline{a}\times\underline{b}|}$

১৯.১ তিনটি ভেক্টর সমতলীয় হওয়ার শর্ত : মনে করি, $\underline{a}=a_1\hat{i}+a_2\hat{j}+a_3\hat{k}$, $\underline{b}=b_1\hat{i}+b_2\hat{j}+b_3\hat{k}$ এবং $\underline{c}=c_1\hat{i}+c_2\hat{j}+c_3\hat{k}$ ভেক্টর তিনটি সমতলীয়।

তাহলে, $\underline{a}\times\underline{b}=(a_2b_3-a_3b_2)\hat{i}+(a_3b_1-a_1b_3)\hat{j}+(a_1b_2-a_2b_1)\hat{k}$

$\therefore(\underline{a}\times\underline{b}).\underline{c}=(a_2b_3-a_3b_2)c_1+(a_3b_1-a_1b_3)c_2+(a_1b_2-a_2b_1)c_3$

$$=a_1(b_2c_3-b_3c_2)-a_2(b_1c_3-b_3c_1)+a_3(b_1c_2-b_2c_1)=\begin{vmatrix}a_1&a_2&a_3\\b_1&b_2&b_3\\c_1&c_2&c_3\end{vmatrix}$$

$\therefore\ \underline{a}=a_1\hat{i}+a_2\hat{j}+a_3\hat{k}$, $\underline{b}=b_1\hat{i}+b_2\hat{j}+b_3\hat{k}$ এবং $\underline{c}=c_1\hat{i}+c_2\hat{j}+c_3\hat{k}$ ভেক্টর তিনটি সমতলীয় হওয়ার নির্ণেয় শর্ত, $(\underline{a}\times\underline{b}).\underline{c}=0$ অর্থাৎ, $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}=0$

দ্রষ্টব্য: (i) $(\underline{a}\times\underline{b}).\underline{c}=\underline{c}.(\underline{a}\times\underline{b})$ (ii) $\underline{a}.(\underline{b}\times\underline{c})=\underline{b}.(\underline{c}\times\underline{a})=\underline{c}.(\underline{a}\times\underline{b})$
(iii) $\underline{a}.(\underline{b}\times\underline{c})$ ত্রয়ী স্কেলার গুণন নামে পরিচি যা দ্বারা a, b, c ধারবিশিষ্ট সামান্তরিক আকারের ঘনবস্তুর আয়তন নির্দেশ করে।

উদাহরণ : A(2, −3, 1), B(−1, 3, −2) ও C(−3, 1, 1) একটি ত্রিভুজের শীর্ষত্রয় হলে এর ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

সমাধান: $\overrightarrow{AB}=(-1-2)\hat{i}+(3+3)\hat{j}+(-2-1)\hat{k}=-3\hat{i}+6\hat{j}-3\hat{k}$

$\overrightarrow{AC}=(-3-2)\hat{i}+(1+3)\hat{j}+(1-1)\hat{k}=-5\hat{i}+4\hat{j}+0\hat{k}$

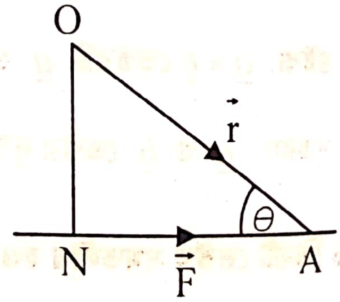
$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ -3 & 6 & -3 \\ -5 & 4 & 0 \end{vmatrix}=(0+12)\hat{i}-(0-15)\hat{j}+(-12+30)\hat{k}$$

$$=12\hat{i}+15\hat{j}+18\hat{k}$$

$\therefore$ ABC ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল $=\frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}|=\frac{1}{2}|12\hat{i}+15\hat{j}+18\hat{k}|=\frac{1}{2}\sqrt{12^2+15^2+18^2}$

$=\frac{1}{2}\sqrt{693}=\frac{3}{2}\sqrt{77}$ বর্গ একক।

ভেক্টর গুণজের উদাহরণ হিসাবে ভ্রামক: কোনো বলের ঘূর্ণন প্রভাবকে সেই বলের ভ্রামক বলে। কোনো বস্তুর উপর একটি বল প্রয়োগ করা হলে, কোনো নির্দিষ্ট বিন্দু বা সরলরেখার চতুর্দিকে ঐ বস্তুর ঘূর্ণন প্রবণতাকে ঐ বিন্দু বা ঐ সরলরেখার চতুর্দিকে বলটির ভ্রামক বা মোমেন্ট বলা হয়। একটি নির্দিষ্ট বিন্দু বা সরলরেখার চতুর্দিকে একটি বলের মোমেন্ট হল প্রযুক্ত বল এবং ঐ বিন্দু বা ঐ সরলরেখা থেকে বলটির ক্রিয়ারেখার লম্বদূরত্বের গুণফল।



মনে করি, O একটি নির্দিষ্ট বিন্দু এবং $\vec{F}$ একটি প্রযুক্ত বল। ধরি, O এর সাপেক্ষে $\vec{F}$ বলের ক্রিয়ারেখার উপরস্থ কোনো বিন্দু A এর অবস্থান ভেক্টর $\overrightarrow{OA}=\bar{r}$, O থেকে বলের ক্রিয়ারেখার লম্বদূরত্ব ON এবং $\angle OAN=\theta$.

O বিন্দুর চতুর্দিকে $\vec{F}$ এর মোমেন্ট $=F\times ON=F\times r\sin\theta$

$=r\times F\sin\theta=|\vec{r}\times\vec{F}|$

$\therefore$ একটি নির্দিষ্ট বিন্দুর সাপেক্ষে কোনো বলের মোমেন্ট বা ভ্রামক হলো বল এবং ব্যাসার্ধ ভেক্টরের ক্রস বা ভেক্টর গুণফলের মান এবং দিক হচ্ছে একটি ডানহাতি স্ক্রুকে $\vec{r}$ ও $\vec{F}$ এর সমতলে লম্বভাবে স্থাপন $\vec{r}$ থেকে $\vec{F}$ এর দিকে ক্ষুদ্রতর কোণে ঘূরালে যেদিকে অগ্রসর হবে সেদিকে।

উদাহরণমালা

উদাহরণ −1: $\underline{a}=3\hat{i}+\hat{j}-2\hat{k}$, $\underline{b}=2\hat{i}-\hat{j}+\hat{k}$ ও $\underline{c}=\hat{i}+3\hat{j}-2\hat{k}$ হলে $(\underline{b}+2\underline{a})\cdot(\underline{c}-\underline{a})$ এর মান নির্ণয় কর। [য.'০১; সি.'০২]

সমাধান : $\underline{b}+2\underline{a} = 2\hat{i}-\hat{j}+\hat{k}+2(3\hat{i}+\hat{j}-2\hat{k})$

$= (2+6)\hat{i}+(-1+2)\hat{j}+(1-4)\hat{k} = 8\hat{i}+\hat{j}-3\hat{k}$

$\underline{c}-\underline{a} = \hat{i}+3\hat{j}-2\hat{k}-(3\hat{i}+\hat{j}-2\hat{k}) = (1-3)\hat{i}+(3-1)\hat{j}+(-2+2)\hat{j}$

$= -2\hat{i}+2\hat{j}$

$\therefore$ $(\underline{b}+2\underline{a})\cdot(\underline{c}-\underline{a}) = (8\hat{i}+\hat{j}-5\hat{k})\cdot(-2\hat{i}+2\hat{j}) = -16+2 = -14$ (Ans.)

উদাহরণ-2: $\underline{a} = 2\hat{i}+2\hat{j}+\hat{k}$ ও $\underline{b} = 2\hat{i}+10\hat{j}-11\hat{k}$ ভেক্টর দুইটির অন্তর্ভুক্ত কোণের পরিমাণ নির্ণয় কর। [রা.'০৬; সি.'১০; ব.'১৫]

সমাধান : $|\underline{a}| = \sqrt{2^2+2^2+1^2} = \sqrt{9} = 3,$

$|\underline{b}| = \sqrt{2^2+10^2+11^2} = \sqrt{4+100+121} = \sqrt{225} = 15$ এবং

$\underline{a}\cdot\underline{b} = 2.2+2.10+1.(-11) = 4+20-11 = 13$

ভেক্টর দুইটির অন্তর্ভুক্ত কোণ θ হলে, $\cos\theta = \dfrac{\underline{a}.\underline{b}}{|\underline{a}||\underline{b}|} = \dfrac{13}{3\times15} = \dfrac{13}{45}$ $\therefore \theta = \cos^{-1}\dfrac{13}{45}$

$\therefore$ ভেক্টর দুইটির অন্তর্ভুক্ত কোণ $\cos^{-1}\dfrac{13}{45}$

উদাহরণ-3: $\underline{a} = 2\hat{i}-3\hat{j}+\hat{k}$, $\underline{b} = -\hat{i}+2\hat{j}-\hat{k}$; $\underline{b}$ ভেক্টরের উপর $\underline{a}$ ভেক্টরের অভিক্ষেপ এবং $\underline{a}$ ভেক্টরের উপর $\underline{b}$ ভেক্টরের অভিক্ষেপ নির্ণয় কর। [য.'০৬]

সমাধান : $\underline{a}\cdot\underline{b} = (2\hat{i}-3\hat{j}+\hat{k})\cdot(-\hat{i}+2\hat{j}-\hat{k}) = 2\times-1-3\times2+1\times-1 = -2-6-1 = -9$

$|\underline{a}| = \sqrt{2^2+3^2+1^2} = \sqrt{4+9+1} = \sqrt{14}$ এবং $|\underline{b}| = \sqrt{1^2+2^2+1^2} = \sqrt{6}$

$\therefore$ $\underline{b}$ ভেক্টরের উপর $\underline{a}$ ভেক্টরের অভিক্ষেপ $= \dfrac{\underline{a}.\underline{b}}{|\underline{b}|} = \dfrac{-9}{\sqrt{6}} = -\dfrac{9}{\sqrt{6}}$ (Ans.)

$\underline{a}$ ভেক্টরের উপর $\underline{b}$ ভেক্টরের অভিক্ষেপ $= \dfrac{\underline{a}.\underline{b}}{|\underline{a}|} = \dfrac{-9}{\sqrt{14}} = -\dfrac{9}{\sqrt{14}}$ (Ans.)

উদাহরণ-4: $\underline{a} = 2\hat{i}+\hat{j}-2\hat{k}$ ভেক্টর বরাবর $\underline{b} = 5\hat{i}-3\hat{j}+2\hat{k}$ ভেক্টরের অংশক নির্ণয় কর।

[কু.'০৬; য.'১১,'১৪; ব.'০৬,'১১,'১৪; রা.'০৯,'১১; চ.'০৯,'১১; ঢা.'১০,'১২; দি.'১৪; সি.'১৪; মা.'১৪]

সমাধান : $|\underline{a}| = \sqrt{2^2+1^2+2^2} = \sqrt{9} = 3$ এবং

$\underline{a}\cdot\underline{b} = (2\hat{i}+\hat{j}-2\hat{k})\cdot(5\hat{i}-3\hat{j}+2\hat{k}) = 10-3-4 = 3$

$\therefore$ $\underline{a}$ ভেক্টর বরাবর $\underline{b}$ ভেক্টরের অংশক $= \dfrac{\underline{a}\cdot\underline{b}}{|\underline{a}|^2}\underline{a} = \dfrac{3}{3^2}(2\hat{i}+\hat{j}-2\hat{k}) = \dfrac{1}{3}(2\hat{i}+\hat{j}-2\hat{k})$ (Ans.)

উদাহরণ-5: $\underline{a} = 3\hat{i}+2\hat{j}-2\hat{k}$ ও $\underline{b} = -\hat{i}+\hat{j}-4\hat{k}$ হলে $\underline{a}$ ও $\underline{b}$ এর লব্ধি ভেক্টরের সমান্তরাল একক ভেক্টর নির্ণয় কর।

[রা. '০৬,'১৪; ঢা.'০৭,'১২,'১৪; চ. '০৬,'০৮,'১৪; ব. '০৫,'০৭; সি. '০৭; মা.বো.'০৯; য.'১১,'১৩; দি.'১৩]

সমাধান : দেওয়া আছে, $\underline{a} = 3\hat{i} + 2\hat{j} - 2\hat{k}$ এবং $\underline{b} = -\hat{i} + \hat{j} - 4\hat{k}$

প্রদত্ত ভেক্টর দুইটির লব্ধি ভেক্টর $= \underline{a} + \underline{b} = (3-1)\hat{i} + (2+1)\hat{j} + (-2-4)\hat{k} = 2\hat{i} + 3\hat{j} - 6\hat{k}$

$\therefore \quad |\underline{a} + \underline{b}| = \sqrt{2^2 + 3^2 + 6^2} = \sqrt{4+9+36} = \sqrt{49} = 7$

$\therefore$ নির্ণেয় একক ভেক্টর $= \pm \dfrac{\underline{a} + \underline{b}}{|\underline{a} + \underline{b}|} = \pm \dfrac{2\hat{i} + 3\hat{j} - 6\hat{k}}{7} = \pm \dfrac{1}{7}(2\hat{i} + 3\hat{j} - 6\hat{k})$ (Ans.)

উদাহরণ-6: $2\hat{i} + \hat{j} - \hat{k}$, $3\hat{i} - 2\hat{j} + 4\hat{k}$ ও $\hat{i} - 3\hat{j} + a\hat{k}$ ভেক্টর তিনটি একই সমতলে অবস্থিত হলে ধ্রুবক a এর মান নির্ণয় কর। [সি.'০৩,'১১; ঢা.'০৪; ব.'০৬; কু.'০৬,'১২; চ.'০৬; দি.'১১; চুয়েট'০৭-০৮]

সমাধান : $2\hat{i} + \hat{j} - \hat{k}$, $3\hat{i} - 2\hat{j} + 4\hat{k}$ ও $\hat{i} - 3\hat{j} + a\hat{k}$ ভেক্টর তিনটি সমতলীয় বলে,

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & -2 & 4 \\ 1 & -3 & a \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 2(-2a+12) - 1(3a-4) - 1(-9+2) = 0$$

$$\Rightarrow -4a + 24 - 3a + 4 + 7 = 0 \Rightarrow -7a = -35 \quad \therefore a = 5 \quad \text{(Ans.)}$$

উদাহরণ-7: $(\hat{i} - 5\hat{j}).[(2\hat{i} - 4\hat{j} + 3\hat{k}) \times (3\hat{j} - 2\hat{k})]$ এর মান নির্ণয় কর।

সমাধান: $(\hat{i} - 5\hat{j}).[(2\hat{i} - 4\hat{j} + 3\hat{k}) \times (3\hat{j} - 2\hat{k})] = \begin{vmatrix} 1 & -5 & 0 \\ 2 & -4 & 3 \\ 0 & 3 & -2 \end{vmatrix}$

$$= 1(8-9) + 5(-4-0) = -1 - 20 = -21$$

উদাহরণ-8: $\overline{a} = 2\hat{i} - 3\hat{j} + 2\hat{k}, \overline{b} = \hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k}$ এবং $\overline{c} = 2\hat{j} - \hat{k}$ হলে $\overline{a} \times (\overline{b} \times \overline{c})$ এর সমান্তরাল একক ভেক্টর নির্ণয় কর।

সমাধান: $\overline{b} \times \overline{c} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{vmatrix} = (2-2)\hat{i} - (-1-0)\hat{j} + (2+0)\hat{k} = 0\hat{i} + \hat{j} + 2\hat{k}$

$\therefore \quad \overline{a} \times (\overline{b} \times \overline{c}) = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 2 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = (-6-2)\hat{i} - (4-0)\hat{j} + (2+0)\hat{k} = -8\hat{i} - 4\hat{j} + 2\hat{k}$

$\therefore \quad \overline{a} \times (\overline{b} \times \overline{c})$ এর সমান্তরাল একক ভেক্টর $= \dfrac{\overline{a} \times (\overline{b} \times \overline{c})}{|\overline{a} \times (\overline{b} \times \overline{c})|} = \pm \dfrac{-8\hat{i} - 4\hat{j} + 2\hat{k}}{|-8\hat{i} - 4\hat{j} + 2\hat{k}|} = \pm \dfrac{-8\hat{i} - 4\hat{j} + 2\hat{k}}{\sqrt{64+16+4}}$

$$= \pm \frac{-8\hat{i} - 4\hat{j} + 2\hat{k}}{\sqrt{84}} = \pm \frac{-8\hat{i} - 4\hat{j} + 2\hat{k}}{2\sqrt{21}} \quad \text{(Ans.)}$$

উদাহরণ-9: (1, 2 , − 6) বিন্দুগামী এবং (2, − 3, 0) ও (4, − 4, 1) বিন্দুদ্বয়ের সংযোগ সরলরেখার সমান্তরাল সরলরেখার ভেক্টর সমীকরণ নির্ণয় কর।

সমাধান : মনে করি, $(1, 2, -6)$ বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর $\underline{a} = \hat{i} + 2\hat{j} - 6\hat{k}$ এবং $A(2, -3, 0)$ ও $B(4, -4, 1)$

বিন্দুদ্বয়ের অবস্থান ভেক্টর যথাক্রমে $2\hat{i}-3\hat{j}+0\hat{k}$ ও $4\hat{i}-4\hat{j}+\hat{k}$ ।

$\therefore$ $\overrightarrow{AB} = (4\hat{i}-4\hat{j}+\hat{k})-(2\hat{i}-3\hat{j}+0\hat{k}) = 2\hat{i}-\hat{j}+\hat{k} = \underline{b}$ (ধরি) । তাহলে, $\underline{a}$ বিন্দুগামী এবং $\underline{b}$ ভেক্টরের সমান্তরাল সমীকরণের ভেক্টর সমীকরণ $\underline{r} = \underline{a} + t\underline{b}$; যেখানে t একটি প্যারামিটার।

$$\Rightarrow \underline{r} = \hat{i}+2\hat{j}-6\hat{k}+t(2\hat{i}-\hat{j}+\hat{k}) \text{ (Ans.)}$$

উদাহরণ-10: ভেক্টর পদ্ধতির সাহায্যে দেখাও যে (x_1, x_2) ও (y_1, y_2) বিন্দুগামী সরলরেখার সমীকরণ $\dfrac{x-x_1}{x_2-x_1} = \dfrac{y-y_1}{y_2-y_1}$

প্রমাণ : মনে করি, $\underline{r} = (x, y) = x\hat{i}+y\hat{j}$, $\underline{a} = x_1\hat{i}+y_1\hat{j}$ এবং $\underline{b} = x_2\hat{i}+y_2\hat{j}$

$\therefore$ (x_1, x_2) ও (y_1, y_2) বিন্দুগামী সরলরেখার ভেক্টর সমীকরণ $\underline{r} = \underline{a} + t(\underline{b}-\underline{a})$; যেখানে t একটি প্যারামিটার।

$\Rightarrow x\hat{i}+y\hat{j} = x_1\hat{i}+y_1\hat{j} + t(x_2\hat{i}+y_2\hat{j}-x_1\hat{i}-y_1\hat{j})$

$\Rightarrow (x-x_1)\hat{i} + (y-y_2)\hat{j} = t(x_2-x_1)\hat{i} + t(y_2-y_1)\hat{j}$

উভয় পক্ষ হতে $\hat{i}$, $\hat{j}$ এর সহগ সমীকৃত করে পাই, $(x-x_1) = t(x_2-x_1), (y-y_2) = t(y_2-y_1)$

$$\Rightarrow \frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1} \ (=t)$$

উদাহরণ-11 : A(1, −2, −1), B(−2, 1, 3) ও C(−3, 3, 1) বিন্দুত্রয় যে সমতলে অবস্থিত তার সমীকরণ নির্কয় কর।

সমাধান : মনে করি, সমতলের উপর P(x, y, z) যেকোনো বিন্দু।

$\therefore$ $\overrightarrow{AP} = (x-1)\hat{i}+(y+2)\hat{j}+(z+1)\hat{k}$, $\overrightarrow{AB} = (-2-1)\hat{i}+(1+2)\hat{j}+(3+1)\hat{k} = -3\hat{i}+3\hat{j}+4\hat{k}$,

$\overrightarrow{AC} = (-3-1)\hat{i}+(3+2)\hat{j}+(1+1)\hat{k} = -4\hat{i}+5\hat{j}+2\hat{k}$ ভেক্টরগুলি একই সমতলে অবস্থিত।

$\therefore$ $\begin{vmatrix} x-1 & y+2 & z+1 \\ -3 & 3 & 4 \\ -4 & 5 & 2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (x-1)(6-20)-(y+2)(-6+16)+(z+1)(-15+12) = 0$

$\Rightarrow -14(x-1)-10(y+2)-3(z+1) \Rightarrow 14x-14+10y+20+3z+3 = 0$

$\Rightarrow 14x+10y+3z+9 = 0$, যা নির্ণেয় সমতলের সমীকরণ।

উদাহরণ-12 : A(2, −6, −3), B(4, 3, −1) এবং C(4, 3, −1) বিন্দুত্রয় ABC ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দু ।

ক. y-অক্ষের উপর $\underline{a} = 3\hat{i}-2\hat{j}+\hat{k}$ ও $\underline{b} = \hat{i}-3\hat{j}$ **ভেক্টরদ্বয়ের লব্ধি ভেক্টরের অভিক্ষেপ নির্ণয় কর।**

খ. **$\angle C$ নির্ণয় কর।**

গ. **A ও B বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর দুইটি দ্বারা গঠিত সমতলের উপর লম্ব একক ভেক্টর নির্ণয় কর।**

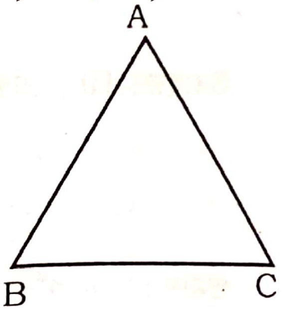
[ব.'১৩; ঢা.'০৯; রা.'১০; দি.'১৫; সি.'১৩]

(অথবা , এমন একটি একক ভেক্টর নির্ণয় কর যা A ও B বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর দুইটির উপর লম্ব।)

ক. **সমাধান:** প্রদত্ত ভেক্টর $\underline{a}$ ও $\underline{b}$ এর লব্ধি ভেক্টর = $\underline{a} + \underline{b} = 3\hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k} + \hat{i} - 3\hat{j} = 4\hat{i} - 5\hat{j} + \hat{k}$

$\therefore$ y- অক্ষের উপর $\underline{a} + \underline{b}$ এর অভিক্ষেপ = -5

খ. **সমাধান:** প্রশ্নমতে, ABC ত্রিভুজের শীর্ষত্রয় $A(2, -6, -3)$, $B(4, 3, -1)$ ও $C(1, -1, -3)$



$\therefore \overrightarrow{CA} = (2-1)\hat{i} + (-6+1)\hat{j} + (-3+3)\hat{k}) = \hat{i} - 5\hat{j}$

$\overrightarrow{CB} = ((4-1)\hat{i} + (3+1)\hat{j} + (-1+3)\hat{k}) = 3\hat{i} + 4\hat{j} + 2\hat{k}$

$$\therefore \cos C = \frac{\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB}}{|\overrightarrow{CA}||\overrightarrow{CB}|} = \frac{(\hat{i} - 5\hat{j}) \cdot (3\hat{i} + 4\hat{j} + 2\hat{k})}{\sqrt{1^2 + 5^2}\sqrt{3^2 + 4^2 + 2^2}} = \frac{3-20}{\sqrt{26}\sqrt{29}} = \frac{-17}{\sqrt{174}}$$

$$\Rightarrow \angle C = \cos^{-1}\frac{-17}{\sqrt{174}} \quad \text{(Ans.)}$$

গ. **A ও B বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর দুইটি দ্বারা গঠিত সমতলের উপর লম্ব একক ভেক্টর নির্ণয় কর।**

[ব.'১৩; ঢা.'০৯; রা.'১০; দি.'১৫; সি.'১৩]

(অথবা , এমন একটি একক ভেক্টর নির্ণয় কর যা A ও B বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর দুইটির উপর লম্ব।)

সমাধান : ধরি, A বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর $\underline{a} = 2\hat{i} - 6\hat{j} - 3\hat{k}$ এবং B বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর $\underline{b} = 4\hat{i} + 3\hat{j} - \hat{k}$.

এ ভেক্টর দুইটি দ্বারা গঠিত সমতলের উপর একটি লম্ব ভেক্টর, $\underline{a} \times \underline{b} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 2 & -6 & -3 \\ 4 & 3 & -1 \end{vmatrix}$

$$= (6+9)\hat{i} - (-2+12)\hat{j} + (6+24)\hat{k} = 15\hat{i} - 10\hat{j} + 30\hat{k}$$

$$\therefore |\underline{a} \times \underline{b}| = \sqrt{15^2 + 10^2 + 30^2} = \sqrt{5^2(3^2 + 2^2 + 6^2)} = 5\sqrt{9+4+36} = 35$$

$\therefore$ নির্ণেয় একক ভেক্টর $= \pm \dfrac{\underline{a} \times \underline{b}}{|\underline{a} \times \underline{b}|} = \pm \dfrac{5(3\hat{i} - 2\hat{j} + 6\hat{k})}{35} = \pm \dfrac{1}{7}(3\hat{i} - 2\hat{j} + 6\hat{k})$ (Ans.)

প্রশ্নমালা IIB

1. (a) $\overline{A} = \hat{i} + 3\hat{j} - 2\hat{k}$ এবং $\overline{B} = 4\hat{i} - 2\hat{j} + 4\hat{k}$ হলে $2\overline{A} + \overline{B}$ ও $6\overline{A} - 3\overline{B}$ এর মান নির্ণয় কর। [কু.'০৭]

(b) $\overline{A} = \hat{i} + 3\hat{j} - 2\hat{k}$ এবং $\overline{B} = 4\hat{i} - 2\hat{j} + 4\hat{k}$ হলে $|3\overline{A} + 2\overline{B}|$ এর মান নির্ণয় কর। [বুয়েট.১১-১২]

(c) (2, 3 , 1) এবং (3 , 1 , – 2) বিন্দুদ্বয়ের অবস্থান ভেক্টর দুইটির স্কেলার গুণফল নির্ণয় কর। [ঢা.'০২]

(d) $\overrightarrow{OA} = 2\hat{i} + 3\hat{j} - 4\hat{k}$ এবং $\overrightarrow{OB} = 4\hat{i} - 3\hat{j} + 2\hat{k}$ হলে $|\overrightarrow{AB}|$ এর মান নির্ণয় কর।

[রা.'১২; ব.'১০; য.'১২,'১৪; চ.'১২; দি.'০৯,'১১,'১৪;ঢা.'১৩; মা.'০৯,'১৩]

উত্তর : (a) $6\hat{i} + 4\hat{j}$, $-6\hat{i} + 24\hat{j} - 24\hat{k}$ (b) $\sqrt{150}$ (c) 7 (d) $2\sqrt{19}$

2. প্রতি জোড়া ভেক্টরের অন্তর্গত কোণ নির্ণয় করঃ

(a) $\overline{A} = 2\hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k}$ ও $\overline{B} = 2\hat{i} + 10\hat{j} - 11\hat{k}$ [কু.'০১; য.'০৩; রা.'০৬; ঢা.'১২]

(b) $\overline{A} = 2\hat{i} - 3\hat{j} - \hat{k}$ ও $\overline{B} = \hat{i} + 4\hat{j} + 3\hat{k}$ [ঢা. '০৩; রা. '০৪,'১১; য. '০৭,'১৩; সি. '০৮,'১৪; ব.'১১]

(c) $\overline{A} = 2\hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k}$ ও $\overline{B} = \hat{i} - 3\hat{j} + 5\hat{k}$ [চ.'০৪,'০৮; ব.'০৫]

উত্তর :(a) $\cos^{-1}(\frac{13}{45})$ (b) $\cos^{-1}(-\frac{\sqrt{13}}{2\sqrt{7}})$ (c) $\cos^{-1}(\frac{-3}{\sqrt{35}})$

3. $\underline{a} = \hat{i} + 2\hat{j} - 3\hat{k}$, $\underline{b} = 3\hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k}$ হলে, $2\underline{a} + \underline{b}$ ও $\underline{a} + 2\underline{b}$ ভেক্টর দুইটির অন্তর্গত কোণ নির্ণয় কর।

উত্তর : $\cos^{-1}(31/50)$ [ব.'০৬]

4. নিচের ভেক্টরগুলি অক্ষত্রয়ের সাথে যে কোণ উৎপন্ন করে তা নির্ণয় কর:

(a) $2\hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k}$ [ঢা.,চ.'১১; দি.,রা.,কু.,য'১০; রা.,দি.,সি.,চ.,মা.'১৩;ব.'১৫] উঃ $\cos^{-1}\frac{2}{3}, \cos^{-1}\frac{-1}{3}, \cos^{-1}\frac{2}{3}$

(b) $\hat{j} + 2\hat{k}$ উত্তরঃ $\frac{\pi}{2}$, $\cos^{-1}(1/\sqrt{5})$, $\cos^{-1}(2/\sqrt{5})$ [রা.'০৮]

(c) $3\hat{i} - 6\hat{j} + 2\hat{k}$ উত্তরঃ $\cos^{-1}(3/7)$, $\cos^{-1}(-6/7)$, $\cos^{-1}(2/7)$ [য.'০৮]

5. (a) $\overline{B} = 6\hat{i} - 3\hat{j} + 2\hat{k}$ ভেক্টরের উপর $\overline{A} = 2\hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k}$ ভেক্টরের অভিক্ষেপ নির্ণয় কর। উত্তরঃ $8/7$

[কু.'০৮,'১১; রা.'০৪,'১৩; চ.'০৫; য.'১২; সি.'১২ ; কুয়েট'০৫-০৬]

(b) $\underline{a} = \hat{i} + \hat{j} + \hat{k}$, $\underline{b} = \sqrt{3}\hat{i} + 3\hat{j} - 2\hat{k}$; $\underline{b}$ ভেক্টরের উপর $\underline{a}$ ভেক্টরের অভিক্ষেপ নির্ণয় কর।

উত্তরঃ $(\sqrt{3} + 1)/4$ [চ.'১২; কু.'১২; ব.'০৭; দি.'১১]

(c) A(2 , 3, −1) ও B (− 2, −4, 3) হলে $\overrightarrow{AB}$ এর উপর $4\hat{i} - 3\hat{j} + \hat{k}$ ভেক্টরের অভিক্ষেপ নির্ণয় কর।

উত্তর : 1

6. (a) $\overline{B} = 2\hat{i} + 10\hat{j} - 11\hat{k}$ ভেক্টর বরাবর $\overline{A} = 2\hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k}$ ভেক্টরের অংশক নির্ণয় কর। [সি.'১১]

(b) $\overline{A} = \hat{i} - 2\hat{j} - 2\hat{k}$ এবং $\overline{B} = 6\hat{i} + 3\hat{j} + 2\hat{k}$ ভেক্টর দুইটির অন্তর্গত কোণ নির্ণয় কর। $\overline{A}$ ভেক্টর বরাবর $\overline{B}$ ভেক্টরের অংশক এবং অভিক্ষেপ নির্ণয় কর এবং দেখাও যে এদের সাংখ্যিক মান সমান।

[ঢা.'০৯; চ.'১০; কু.'১৫]

উত্তর : (a) $\frac{13}{225}(2\hat{i} + 10\hat{j} - 11\hat{k})$ (b) $\theta = \cos^{-1}(-\frac{4}{21})$; $\frac{-4}{9}(\hat{i} - 2\hat{j} - 2\hat{k})$, $-\frac{4}{3}$

7. (a) $2\hat{i} + 10\hat{j} - 11\hat{k}$ ভেক্টরটির সমান্তরালে একক ভেক্টর নির্ণয় কর। [সি.'০৫,'০৯]

(b) $\overline{A} = 2\hat{i} + 4\hat{j} + 5\hat{k}$ এবং $\overline{B} = \hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}$ হলে ভেক্টর দুইটির লব্ধির সমান্তরাল একক ভেক্টর নির্ণয় কর।

(c) $\overline{A} = 4\hat{i} + 5\hat{j} - 3\hat{k}$ এবং $\overline{B} = -\hat{i} - 5\hat{j} - \hat{k}$ হলে,

(i) ভেক্টর দুইটির লব্ধির সমান্তরালে একক ভেক্টর নির্ণয় কর। [ব.'০৪]

(ii) ভেক্টর দুইটির লব্ধির দিক বরাবর একক ভেক্টর নির্ণয় কর।

(iii) ভেক্টর দুইটির লব্ধির বিসদৃশ সমান্তরাল একক ভেক্টর নির্ণয় কর।

উত্তর : (a) $\pm\frac{1}{15}(2\hat{i}+10\hat{j}-11\hat{k})$ (b) $\pm\frac{1}{\sqrt{109}}(3\hat{i}+6\hat{j}+8\hat{k})$ (c) (i) $\pm\frac{1}{5}(3\hat{i}-4\hat{k})$

(ii) $\frac{1}{5}(3\hat{i}-4\hat{k})$ (iii) $-\frac{1}{5}(3\hat{i}-4\hat{k})$

8. (a) (i) $2\hat{i}+\hat{j}+\hat{k}$ এবং $\hat{i}-2\hat{j}+\hat{k}$ ভেক্টর দুইটির উপর লম্ব একক ভেক্টর নির্ণয় কর। [ঢা.,কু.'১১;বুয়েট'১১-১২]

(ii) $2\hat{i}+\hat{j}+\hat{k}$ এবং $\hat{i}-2\hat{j}+\hat{k}$ ভেক্টর দুইটির উপর লম্ব 5 একক মান বিশিষ্ট ভেক্টর নির্ণয় কর।

(b) $\underline{a}=\hat{i}+\hat{j}-\hat{k}$, $\underline{b}=\hat{i}-\hat{j}+\hat{k}$ হলে, এমন একটি একক ভেক্টর $\underline{c}$ নির্ণয় কর, যা $\underline{a}$ এবং $\underline{b}$ এর সাথে সমতলীয় হবে এবং $\underline{a}$ এর লম্ব হবে।

(c) $\hat{i}-\hat{j}+\hat{k}$ এবং $\hat{i}+2\hat{j}-\hat{k}$ ভেক্টর দুইটির উপর লম্ব একক ভেক্টর নির্ণয় কর। [রা.'০৮; কু.'০৮; য.'১০]

উত্তর : (a) (i) $\pm\frac{1}{\sqrt{35}}(3\hat{i}-\hat{j}-5\hat{k})$ (ii) $\pm\frac{5}{\sqrt{35}}(3\hat{i}-\hat{j}-5\hat{k})$ (b) $\pm\frac{1}{\sqrt{6}}(2\hat{i}-\hat{j}+\hat{k})$

(c) $\pm\frac{1}{\sqrt{14}}(-\hat{i}+2\hat{j}+3\hat{k})$

9. (a) P(1 , 1, 1) এবং Q(3, 2, – 1) শূন্যে অবস্থিত দুইটি বিন্দু । $\overrightarrow{PQ}$ ভেক্টর নির্ণয় কর এবং এর সমান্তরাল একটি একক ভেক্টর নির্ণয় কর। [য.'০৯; বুয়েট'০৩-০৪]

(b) মূলবিন্দু O এর সাপেক্ষে P(2 , –1, 7) এবং Q(–4, 5, 0) হলে $|\overrightarrow{PQ}|$ নির্ণয় কর । [সি.'০৫,'০৯]

উত্তর : (a) $2\hat{i}+\hat{j}-2\hat{k}, \frac{1}{3}(2\hat{i}+\hat{j}-2\hat{k})$ বা, $-\frac{1}{3}(2\hat{i}+\hat{j}-2\hat{k})$ (b) 11

10. (a) দেখাও যে, $\underline{a}=9\hat{i}+\hat{j}-6\hat{k}$ এবং $\underline{b}=4\hat{i}-6\hat{j}+5\hat{k}$ ভেক্টর দুইটি পরস্পর লম্ব। [ব.'০৮; বুয়েট'০৭-০৮]

(b) দেখাও যে, $\overline{A}=8\hat{i}+\hat{j}-6\hat{k}$ এবং $\overline{B}=4\hat{i}-2\hat{j}+5\hat{k}$ ভেক্টর দুইটি পরস্পর লম্ব।

[রা.'০৭; য.'১২; বুয়েট' ০৫-০৬; ১০-১১]

(c) $\overline{A}=\hat{i}+2\hat{j}-3\hat{k}$ এবং $\overline{B}=3\hat{i}-\hat{j}+2\hat{k}$ হলে দেখাও যে, $\overline{A}+\overline{B}$ এবং $\overline{A}-\overline{B}$ ভেক্টর দুইটি পরস্পর লম্ব। [রা.'০৬; ঢা.'০৮; য.'০৭; চ.'০৭,'১২,'১৪; মা.বো.'০৮; দি.'১০; ব.'১০,'১২; মা.'১৪; বুয়েট'১১-১২]

(d) দেখাও যে, $\underline{a}=3\hat{i}+2\hat{j}-6\hat{k}$ এবং $\underline{b}=4\hat{i}-3\hat{j}+\hat{k}$ ভেক্টর দুইটি পরস্পর লম্ব । এ ভেক্টর দুইটির উপর লম্ব একক ভেক্টর নির্ণয় কর। [ঢা.'০২; কু.'০৫]

(e) A ও B বিন্দু দুইটির অবস্থান ভেক্টর যথাক্রমে $(2\hat{i}+3\hat{j}-4\hat{k})$ ও $(4\hat{i}-3\hat{j}+2\hat{k})$ হলে $\overrightarrow{AB}$ এর দৈর্ঘ্য এবং $\overrightarrow{AB}$ বরাবর একটি একক ভেক্টর নির্ণয় কর। [বুয়েট'০৬-০৭]

উত্তরঃ (d) $\pm\dfrac{1}{\sqrt{1274}}(-16\hat{i}-27\hat{j}-17\hat{k})$ (e) $|\overrightarrow{AB}|=2\sqrt{19}$; $\dfrac{1}{\sqrt{19}}\hat{i}-\dfrac{3}{\sqrt{19}}\hat{j}+\dfrac{3}{\sqrt{19}}\hat{k}$

11. (a) $a\hat{i}-2\hat{j}+\hat{k}$ এবং $2a\hat{i}-a\hat{j}-4\hat{k}$ ভেক্টর দুইটি পরস্পর লম্ব হলে a এর মান নির্ণয় কর। উঃ -2 , 1
[রা.'০৯,'১২; য.'০৫,'০৯,'১৩; ঢা.'০৬,'১০; সি.'০৮,'১২; চ.'০৯; কু.'১৩; দি.'১৪; মা.'১৫]

(b) $2\hat{i}+a\hat{j}+\hat{k}$ এবং $4\hat{i}-2\hat{j}-2\hat{k}$ ভেক্টর দুইটি পরস্পর লম্ব হলে a এর মান নির্ণয় কর। উঃ 3 [ব.'০৪]

12. দেখাও যে, $\underline{a}=3\hat{i}-2\hat{j}+\hat{k}$, $\underline{b}=\hat{i}-3\hat{j}+5\hat{k}$ ও $\underline{c}=2\hat{i}+\hat{j}-4\hat{k}$ ভেক্টর তিনটি সমতলীয়। [ঢা.'০৬]

13. (a) দেখাও যে, $\underline{a}=3\hat{i}-2\hat{j}+\hat{k}$, $\underline{b}=\hat{i}-3\hat{j}+5\hat{k}$ এবং $\underline{c}=2\hat{i}+\hat{j}-4\hat{k}$ ভেক্টর তিনটি একটি সমকোণী ত্রিভুজ গঠন করে।
[ব.'০৩,'১২; ঢা.'০৪,'১৪; রা.'০৭,'১৪; চ.'১৫; বুয়েট'০৩-০৪]

(b) তিনটি বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর $\hat{i}+2\hat{j}+3\hat{k}$, $-\hat{i}-\hat{j}+8\hat{k}$ এবং $-4\hat{i}+4\hat{j}+6\hat{k}$; দেখাও যে, বিন্দু তিনটি একটি সমবাহু ত্রিভুজ গঠন করে।
[ঢা.'০৫,'১৩; সি.,চ.'১০,'১৩; কু.'১৪]

(c) ভেক্টরের সাহায্যে দেখাও যে, A $(1,-1,-1)$, B $(3,3,1)$ এবং C $(-1,4,4)$ বিন্দু তিনটি একটি গোলকের উপর অবস্থিত যার কেন্দ্র P $(0,1,2)$.

(d) A$(0,1,2)$, B $(-1,3,0)$, C$(1,-1,1)$ বিন্দু তিনটির অবস্থান ভেক্টর নির্ণয় কর এবং $|\overrightarrow{AB}|$ এবং $|\overrightarrow{AC}|$ নির্ণয় কর।
উত্তরঃ $\hat{j}+2\hat{k}$, $-\hat{i}+3\hat{j}$, $\hat{i}-\hat{j}+\hat{k}$, 3 , $\sqrt{6}$ [ঢা.'০৩]

14. (a) $\overline{A}=2\hat{i}+2\hat{j}+\hat{k}$ এবং $\overline{B}=\hat{i}+3\hat{j}+2\hat{k}$ হলে, $\overline{A}\times\overline{B}$ হতে তাদের অন্তর্ভুক্ত কোণ নির্ণয় কর। [কু.'০৪]

(b) $\overline{A}=\hat{i}+2\hat{j}+3\hat{k}$ এবং $\overline{B}=3\hat{i}-2\hat{j}-\hat{k}$ হলে, $|\overline{A}\times\overline{B}|$ নির্ণয় কর। [বুয়েট'০০-০১]

(c) $(a\hat{i}+b\hat{j}+\hat{k})\times(2\hat{i}+2\hat{j}+3\hat{k})=\hat{i}-\hat{j}$ হলে, a ও b এর মান নির্ণয় কর। [বুয়েট'০১-০২]

(d) $\overline{A}=3\hat{i}+\hat{j}-2\hat{k}$, $\overline{B}=2\hat{i}-\hat{j}+\hat{k}$ এবং $\overline{C}=\hat{i}+3\hat{j}-2\hat{k}$ হলে, $\overline{A}\times(\overline{B}\times\overline{C})$ নির্ণয় কর।
[চ.'০০; ঢা.'১৫]

(e) $\underline{a}=2\hat{i}-3\hat{j}+5\hat{k}$, $\underline{b}=-\hat{i}+2\hat{j}-7\hat{k}$ হলে $5\underline{a}\times\underline{b}$ এবং $\dfrac{b}{|\underline{a}|}$ নির্ণয় কর। [চ.'০২]

উত্তরঃ (a) $\sin^{-1}\dfrac{\sqrt{13}}{3\sqrt{7}}$ b) $6\sqrt{5}$ (c) $a=1,\ b=1$ (d) $17\hat{i}-19\hat{j}+16\hat{k}$

(e) $55\hat{i}+45\hat{j}+5\hat{k}$, $\dfrac{1}{\sqrt{38}}(-\hat{i}+2\hat{j}-7\hat{k})$

(f) যেকোনো দুইটি ভেক্টর $\overline{A}$ ও $\overline{B}$ এর জন্য প্রমাণ কর যে, $\overline{A}\cdot\overline{B}=\overline{B}\cdot\overline{A}$ এবং $\overline{A}\times\overline{B}=-\overline{B}\times\overline{A}$.
[চ.'০২]

(g) প্রমাণ কর যে, $\overline{A}\times\overline{B}=\begin{vmatrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k}\\ a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\end{vmatrix}$, যেখানে $\overline{A}=a_1\hat{i}+a_2\hat{j}+a_3\hat{k}$, $\overline{B}=b_1\hat{i}+b_2\hat{j}+b_3\hat{k}$

(h) দুইটি ভেক্টর $\overline{a}$ ও $\overline{b}$ এর স্কেলার বা ডট গুণনের সংজ্ঞা দাও। প্রমাণ কর যে, $\hat{i}\,.\,\hat{j}=0$, $\hat{i}\,.\hat{i}=1$; যেখানে $\hat{i}$ ও $\hat{j}$ যথাক্রমে x ও y অক্ষ পরাবর অকক ভেক্টর। [চ.'১১]

15. (a) ভেক্টরের সাহায্যে A(1, 3, 2), B(2 , − 1 , 1) ও C(− 1, 2 , 3) শীর্ষ দ্বারা গঠিত ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। উত্তরঃ $\frac{1}{2}\sqrt{107}$ [বুয়েট'০৪-০৫]

(b) $\overline{P}=4\hat{i}-4\hat{j}+\hat{k}$ এবং $\overline{Q}=2\hat{i}-2\hat{j}-\hat{k}$ একটি সামান্তরিকের দুইটি সন্নিহিত বাহু নির্দেশ করলে এর ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। উত্তর ঃ $\sqrt{72}$ [বুয়েট'০৬-০৭]

(c) একটি ত্রিভুজের শীর্ষ তিনটির অবস্থান ভেক্টর $\hat{i}-2\hat{j}+3\hat{k}$, $3\hat{i}+5\hat{j}-\hat{k}$ ও $2\hat{i}+3\hat{j}-4\hat{k}$; ত্রিভুজটির ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। উত্তরঃ $\frac{5}{2}\sqrt{38}$ বর্গ একক।

(d) $\overrightarrow{OA}=2\hat{i}-3\hat{j}-\hat{k}$ এবং $\overrightarrow{OB}=\hat{i}+4\hat{j}+3\hat{k}$ হলে, OAB ত্রিভুজটির কোণ তিনটি নির্ণয় কর।

উত্তরঃ $\angle AOB=\cos^{-1}(\frac{-13}{\sqrt{364}})$, $\angle OAB=\cos^{-1}(\frac{27}{\sqrt{924}})$, $\angle OBA=\cos^{-1}(\frac{39}{\sqrt{1716}})$.

(e) $\overrightarrow{OA}=2\hat{i}+2\hat{j}-\hat{k}$ এবং $\overrightarrow{OB}=6\hat{i}-3\hat{j}-2\hat{k}$ হলে, B বিন্দু হতে OA এর লম্ব দূরত্ব নির্ণয় কর।

উঃ $\sqrt{377}/3$ একক।

(f) একটি আয়তাকার ঘনবস্তুর ধারগুলো $\overline{A}=2\hat{i}-3\hat{j}+2\hat{k}$, $\overline{B}=\hat{i}+2\hat{j}-\hat{k}$, $\overline{C}=3\hat{i}-\hat{j}+2\hat{k}$ ভেক্টর দ্বারা নির্দেশিত। ঘনবস্তুটির আয়তন নির্ণয় কর । উত্তর: 7 ঘন একক।

(g) একটি ত্রিভূজের দুইটি বাহু $\overline{A}=3\hat{i}+6\hat{j}-2\hat{k}$, $\overline{B}=4\hat{i}-\hat{j}+3\hat{k}$ ভেক্টর দ্বারা নির্দেশিত। ত্রিভুজটির কোণগুলি নির্ণয় কর। উত্তর: $\cos^{-1}7/\sqrt{75}$, $\cos^{-1}\sqrt{26/75}$, 90^0

(h) একটি সামান্তরিকের কর্ণদ্বয় $\overline{A}=3\hat{i}-4\hat{j}-\hat{k}$ এবং $\overline{B}=2\hat{i}+3\hat{j}-6\hat{k}$ ভেক্টর দ্বারা সূচিত। দেখাও যে, সামান্তরিকটি একটি রম্বস । ,এর ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। উত্তর: 17.85 বর্গ একক।

16. (a) $2\hat{i}+3\hat{j}-4\hat{k}$ বিন্দুগামী এবং $5\hat{i}+6\hat{j}+8\hat{k}$ ভেক্টরের সমান্তরাল সরলরেখার ভেক্টর সমীকরণ নির্ণয় কর।

(b) $\hat{i}$ ও $\hat{j}$ বিন্দুগামী সরলরেখার ভেক্টর সমীকরণ নির্ণয় কর।

(c) দেখাও যে, (2, −3, 4) এবং (5, 7, −8) বিন্দুগামী সরলরেখার ভেক্টর সমীকরণ $\underline{r}=(2+3t)\,\hat{i}+(-3+10t)\,\hat{j}+(4-12t)\hat{k}$ যেখানে t একটি প্যারামিটার। এর সাহায্যে এর কার্তেসীয় সমীকরণ নির্ণয় কর।

উত্তর: (a) $\underline{r}=2\hat{i}+3\hat{j}-4\hat{k}+t(5\hat{i}+6\hat{j}+8\hat{k})$, (b) $\underline{r}=(1-t)\,\hat{i}+t\,\hat{j}$ (c) $\frac{x-2}{3}=\frac{y+3}{10}=\frac{z-4}{-12}$

২০. জ্যামিতিক সমস্যা সমাধানের ভেক্টর