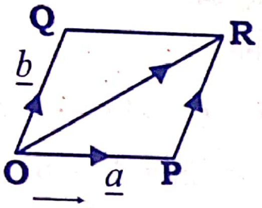
$\Rightarrow \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + 2(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA})$

$= \underline{a} + 2(\underline{b} - \underline{a})$

$[\because \overrightarrow{OA} = \underline{a}$ এবং $\overrightarrow{OB} = \underline{b}\ ]$

$\therefore\ \overrightarrow{OC} = 2\underline{b} - \underline{a}$ (Ans.)

2. (c) $\overrightarrow{OP} = \underline{a}$, $\overrightarrow{OQ} = \underline{b}$ এবং $\overrightarrow{OR} = \underline{a} + \underline{b}$ হলে OPRQ কি ধরনের চতুর্ভুজ তা নির্ধারন কর।



সমাধান ঃ দেওয়া আছে,

$\overrightarrow{OP} = \underline{a}$, $\overrightarrow{OQ} = \underline{b}$ এবং

$\overrightarrow{OR} = \underline{a} + \underline{b}$

এখন, $\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ} = \underline{a} + \underline{b} = \overrightarrow{OR}$

$\therefore\ \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OR}$; যা ভেক্টর যোগের সামান্তরিক সূত্রের শর্ত। অতএব, OPRQ একটি সামান্তরিক ।

3. যদি $\underline{a}$ ও $\underline{b}$ অসমরৈখিক ভেক্টর এবং $(x + 1)\underline{a} + (y - 2)\ \underline{b} = 2\underline{a} + \underline{b}$ হয় তবে x ও y এর মান নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ দেওয়া আছে, $\underline{a}$ ও $\underline{b}$ অসমরৈখিক ভেক্টর এবং

$(x + 1)\underline{a} + (y - 2)\underline{b} = 2\underline{a} + \underline{b}$

$\therefore\ x + 1 = 2 \Rightarrow x = 1,\ y - 2 = 1 \Rightarrow y = 3$

প্রশ্নমালা – II B

1. (a) $\vec{A} = \hat{i} + 3\hat{j} - 2\hat{k}$ এবং $\vec{B} = 4\hat{i} - 2\hat{j} + 4\hat{k}$ হলে $2\vec{A} + \vec{B}$ ও $6\vec{A} - 3\vec{B}$ এর মান নির্ণয় কর।

[কু.'০৭; চ.'০৪]

সমাধান ঃ $2\overline{A} + \overline{B} = 2(\hat{i} + 3\hat{j} - 2\hat{k})$

$+ 4\hat{i} - 2\hat{j} + 4\hat{k}$

$= 2\hat{i} + 6\hat{j} - 4\hat{k} + 4\hat{i} - 2\hat{j} + 4\hat{k}$

$= 6\hat{i} + 4\hat{j}$ (Ans.)

$6\overline{A} - 3\overline{B} = 6(\hat{i} + 3\hat{j} - 2\hat{k}) - 3(4\hat{i} - 2\hat{j} + 4\hat{k})$

$= 6\hat{i} + 18\hat{j} - 12\hat{k} - 12\hat{i} + 6\hat{j} - 12\hat{k}$

$= -6\hat{i} + 24\hat{j} - 24\hat{k}$ (Ans.)

1. (b) $\vec{A} = \hat{i} + 3\hat{j} - 2\hat{k}$ এবং $\vec{B} = 4\hat{i} - 2\hat{j} + 4\hat{k}$ হলে $|3\overline{A} + 2\overline{B}|$ এর মান নির্ণয় কর।

[কু.'০৭;বুয়েট.১১-১২]

সমাধান ঃ $3\overline{A} + 2\overline{B} = 3(\hat{i} + 3\hat{j} - 2\hat{k})$

$+ 2(4\hat{i} - 2\hat{j} + 4\hat{k})$

$= 3\hat{i} + 9\hat{j} - 6\hat{k} + 8\hat{i} - 4\hat{j} + 8\hat{k}$

$= 11\hat{i} + 5\hat{j} + 2\hat{k}$

$\therefore\ |3\overline{A} + 2\overline{B}| = \sqrt{11^2 + 5^2 + 2^2}$

$= \sqrt{121 + 25 + 4} = \sqrt{150}$

1(c) (2, 3,1) এবং (3,1, – 2) বিন্দুদ্বয়ের অবস্থান ভেক্টর দুইটির স্কেলার গুণফল নির্ণয় কর। [ঢা.'০২]

সমাধান ঃ (2, 3 , 1) ও (3 , 1 , – 2) বিন্দুদ্বয়ের অবস্থান ভেক্টর যথাক্রমে $2\hat{i} + 3\hat{j} + \hat{k}$ ও $3\hat{i} + \hat{j} - 2\hat{k}$.

$\therefore$ এ ভেক্টর দুইটির স্কেলার গুণফল

$= (2\hat{i} + 3\hat{j} + \hat{k}).(3\hat{i} + \hat{j} - 2\hat{k})$

$= 6 + 3 - 2 = 7$ (Ans.)

1. (d) $\overrightarrow{OA} = 2\hat{i} + 3\hat{j} - 4\hat{k}$, $\overrightarrow{OB} = 4\hat{i} - 3\hat{j} + 2\hat{k}$ হলে $|\overrightarrow{AB}|$ এর মান নির্ণয় কর। [রা.'১২; ব.'১০; য.'১২,'১৪; চ.'১২; দি.'০৯,'১১,'১৪;ঢা.'১৩; মা.'০৯, '১৩]

সমাধান ঃ $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$

$= 4\hat{i} - 3\hat{j} + 2\hat{k} - (2\hat{i} + 3\hat{j} - 4\hat{k})$

$= 4\hat{i} - 3\hat{j} + 2\hat{k} - 2\hat{i} - 3\hat{j} + 4\hat{k}$

$= 2\hat{i} - 6\hat{j} + 6\hat{k}$

$\therefore\ |\overrightarrow{AB}| = |2\hat{i} - 6\hat{j} + 6\hat{k}| = \sqrt{2^2 + 6^2 + 6^2}$

$= \sqrt{76} = 2\sqrt{19}$ (Ans.)

2. প্রতি জোড়া ভেক্টরের অন্তর্গত কোণ নির্ণয় কর ঃ

(a) $\vec{A} = 2\hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k}$ ও $\vec{B} = 2\hat{i} + 10\hat{j} - 11\hat{k}$

[য.'০৩; রা.'০৬]

সমাধান ঃ $|\overline{A}| = |2\hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k}|$

$= \sqrt{2^2 + 2^2 + 1^2} = \sqrt{9} = 3$

$|\overline{B}| = |2\hat{i} + 10\hat{j} - 11\hat{k}| = \sqrt{2^2 + 10^2 + 11^2}$

$= \sqrt{4 + 100 + 121} = \sqrt{225} = 15$ এবং

$\overline{A} \cdot \overline{B} = (2\hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k})\cdot(2\hat{i} + 10\hat{j} - 11\hat{k})$

$= 2.2 + 2.10 + 1.(-11)$

$= 4 + 20 - 11 = 13$

ভেক্টর দুইটির অন্তর্ভুক্ত কোণ θ হলে,

$$\cos\theta = \frac{\overline{A}.\overline{B}}{|\overline{A}||\overline{B}|} = \frac{13}{3\times 15} = \frac{13}{45}$$

$\therefore\ \theta = \cos^{-1}\frac{13}{45}$

$\therefore$ ভেক্টর দুইটির অন্তর্ভুক্ত কোণ $\cos^{-1}\frac{13}{45}$

(b) $\vec{A} = 2\hat{i} - 3\hat{j} - \hat{k}$ ও $\vec{B} = \hat{i} + 4\hat{j} + 3\hat{k}$

[ঢা. '০৩; রা. '০৪,'১১; য. '০৭,'১৩; সি. '০৮,'১৪; ব.'১১]

সমাধান ঃ $|\overline{A}| = |2\hat{i} - 3\hat{j} - \hat{k}|$

$= \sqrt{2^2 + 3^2 + 1^2} = \sqrt{4+9+1} = \sqrt{14}$

$|\overline{B}| = |\hat{i} + 4\hat{j} + 3\hat{k}| = \sqrt{1^2 + 4^2 + 3^2}$

$= \sqrt{1+16+9} = \sqrt{26}$ এবং

$\overline{A}\cdot\overline{B} = (2\hat{i} - 3\hat{j} - \hat{k})\cdot(\hat{i} + 4\hat{j} + 3\hat{k})$

$= 2 - 12 - 3 = -13$

ভেক্টর দুইটির অন্তর্ভুক্ত কোণ θ হলে,

$$\cos\theta = \frac{\overline{A}.\overline{B}}{|\overline{A}||\overline{B}|} = \frac{-13}{\sqrt{14}\times\sqrt{26}}$$

$$= \frac{-13}{2\sqrt{7}\sqrt{13}} = \frac{-\sqrt{13}}{2\sqrt{7}}$$

$\therefore\ \theta = \cos^{-1}\frac{-\sqrt{13}}{2\sqrt{7}}$

$\therefore$ ভেক্টর দুইটির অন্তর্ভুক্ত কোণ $\cos^{-1}(-\frac{\sqrt{13}}{2\sqrt{7}})$

2(c) $\vec{A} = 2\hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k}$ ও $\vec{B} = \hat{i} - 3\hat{j} + 5\hat{k}$

[য.'০১; চ.'০৪,'০৮; ব.'০৫]

সমাধান ঃ $|\overline{A}| = |2\hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k}|$

$= \sqrt{2^2 + 2^2 + 1^2} = \sqrt{9} = 3$

$|\overline{B}| = |\hat{i} - 3\hat{j} + 5\hat{k}| = \sqrt{1^2 + 3^2 + 5^2}$

$= \sqrt{1+9+25} = \sqrt{35}$ এবং

$\overline{A}\cdot\overline{B} = (2\hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k})\cdot(\hat{i} - 3\hat{j} + 5\hat{k})$

$= 2 - 6 - 5 = -9$

ভেক্টর দুইটির অন্তর্ভুক্ত কোণ θ হলে,

$$\cos\theta = \frac{\overline{A}.\overline{B}}{|\overline{A}||\overline{B}|} = \frac{-9}{3\times\sqrt{35}} = \frac{-3}{\sqrt{35}}$$

$\therefore\ \theta = \cos^{-1}\frac{-3}{\sqrt{35}}$

$\therefore$ ভেক্টর দুইটির অন্তর্ভুক্ত কোণ $\cos^{-1}\frac{-3}{\sqrt{35}}$

3. $\underline{a} = \hat{i} + 2\hat{j} - 3\hat{k}$, $\underline{b} = 3\hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k}$ হলে, $2\underline{a} + \underline{b}$ ও $\underline{a} + 2\underline{b}$ ভেক্টর দুইটির অন্তর্গত কোণ নির্ণয় কর। [য.'০৪; ব.'০৪; ব.'০৬]

সমাধান ঃ

$2\underline{a} + \underline{b} = 2(\hat{i} + 2\hat{j} - 3\hat{k}) + 3\hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k}$

$= 2\hat{i} + 4\hat{j} - 6\hat{k} + 3\hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k}$

$= 5\hat{i} + 3\hat{j} - 4\hat{k}$

$\underline{a} + 2\underline{b} = \hat{i} + 2\hat{j} - 3\hat{k} + 2(3\hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k})$

$= \hat{i} + 2\hat{j} - 3\hat{k} + 6\hat{i} - 2\hat{j} + 4\hat{k} = 7\hat{i} + \hat{k}$

$\therefore\ |2\underline{a} + \underline{b}| = \sqrt{5^2 + 3^2 + 4^2}$

$= \sqrt{25+9+16} = \sqrt{50}$

$|\underline{a} + 2\underline{b}| = \sqrt{7^2 + 1^2} = \sqrt{50}$ এবং

$(2\underline{a} + \underline{b})\cdot(\underline{a} + 2\underline{b})$

$= (5\hat{i} + 3\hat{j} - 4\hat{k})\cdot(7\hat{i} + \hat{k}) = 35 - 4 = 31$

ভেক্টর দুইটির অন্তর্ভুক্ত কোণ θ হলে,

$$\cos\theta = \frac{(2\underline{a} + \underline{b}).(\underline{a} + 2\underline{b})}{|2\underline{a} + \underline{b}||\underline{a} + 2\underline{b}|} = \frac{31}{\sqrt{50}\times\sqrt{50}}$$

$\therefore\ \theta = \cos^{-1}\frac{31}{50}$

$\therefore$ ভেক্টর দুইটির অন্তর্ভুক্ত কোণ $\cos^{-1}\frac{31}{50}$

4. নিচের ভেক্টরগুলি অক্ষত্রয়ের সাথে যে কোণ উৎপন্ন করে তা নির্ণয় করে ঃ

(a) $2\hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k}$

[ঢা., চ.'১১; দি.,রা.,কু.,য'১০; রা.,দি.,সি.,চ.'১৩]

সমাধান ঃ ধরি, x , y ও z-অক্ষ প্রদত্ত ভেক্টর $2\hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k}$ এর সাথে যথাক্রমে α , β ও γ কোণ উৎপন্ন করে।

$$\therefore\ \cos\alpha = \frac{\hat{i}\cdot(2\hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k})}{\sqrt{1^2}\sqrt{2^2 + 1^2 + 2^2}} = \frac{2}{\sqrt{9}} = \frac{2}{3}$$

$\therefore \quad \alpha = \cos^{-1}(2/3)$

$$\cos\beta = \frac{\hat{j}\cdot(2\hat{i}-\hat{j}+2\hat{k})}{\sqrt{1^2}\sqrt{2^2+1^2+2^2}} = \frac{-1}{3}$$

$\therefore \quad \beta = \cos^{-1}(-1/3)$ এবং

$$\cos\gamma = \frac{\hat{k}\cdot(2\hat{i}-\hat{j}+2\hat{k})}{\sqrt{1^2}\sqrt{2^2+1^2+2^2}} = \frac{2}{3}$$

$\therefore \quad \gamma = \cos^{-1}(2/3)$

$\therefore$ প্রদত্ত ভেক্টরটি অক্ষত্রয়ের সাথে $\cos^{-1}(2/3)$, $\cos^{-1}(-1/3)$ ও $\cos^{-1}(2/3)$ কোণ উৎপন্ন করে।

4. (b) $\hat{j}+2\hat{k}$ **[রা.'০৮]**

সমাধান ঃ ধরি, x , y ও z-অক্ষ প্রদত্ত ভেক্টর $\hat{j}+2\hat{k}$ এর সাথে যথাক্রমে α , β ও γ কোণ উৎপন্ন করে।

$$\therefore \quad \cos\alpha = \frac{\hat{i}\cdot(\hat{j}+2\hat{k})}{\sqrt{1^2}\sqrt{1^2+2^2}} = \frac{0}{\sqrt{5}} = 0 = \cos\frac{\pi}{2}$$

$$\therefore \quad \alpha = \frac{\pi}{2}$$

$$\cos\beta = \frac{\hat{j}\cdot(\hat{j}+2\hat{k})}{\sqrt{1^2}\sqrt{1^2+2^2}} = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

$\therefore \quad \beta = \cos^{-1}(1/\sqrt{5})$ এবং

$$\cos\gamma = \frac{\hat{k}\cdot(\hat{j}+2\hat{k})}{\sqrt{1^2}\sqrt{1^2+2^2}} = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

$\therefore \quad \gamma = \cos^{-1}(2/\sqrt{5})$

$\therefore$ প্রদত্ত ভেক্টরটি অক্ষত্রয়ের সাথে $\frac{\pi}{2}$, $\cos^{-1}(1/\sqrt{5})$ ও $\cos^{-1}(2/\sqrt{5})$ কোণ উৎপন্ন করে।

4. (c) $3\hat{i}-6\hat{j}+2\hat{k}$ **[য.'০৮]**

সমাধান ঃ ধরি, x , y ও z-অক্ষ প্রদত্ত ভেক্টর $3\hat{i}-6\hat{j}+2\hat{k}$ এর সাথে যথাক্রমে α , β ও γ কোণ উৎপন্ন করে।

$$\therefore \quad \cos\alpha = \frac{\hat{i}\cdot(3\hat{i}-6\hat{j}+2\hat{k})}{\sqrt{1^2}\sqrt{3^2+6^2+2^2}} = \frac{3}{\sqrt{49}} = \frac{3}{7}$$

$\therefore \quad \alpha = \cos^{-1}(3/7)$

$$\cos\beta = \frac{\hat{j}\cdot(3\hat{i}-6\hat{j}+2\hat{k})}{\sqrt{1^2}\sqrt{3^2+6^2+2^2}} = \frac{-6}{\sqrt{49}} = -\frac{6}{7}$$

$\therefore \quad \beta = \cos^{-1}(-6/7)$ এবং

$$\cos\gamma = \frac{\hat{k}\cdot(3\hat{i}-6\hat{j}+2\hat{k})}{\sqrt{1^2}\sqrt{3^2+6^2+2^2}} = \frac{2}{\sqrt{49}} = \frac{2}{7}$$

$\therefore \quad \gamma = \cos^{-1}(2/7)$

$\therefore$ প্রদত্ত ভেক্টরটি অক্ষত্রয়ের সাথে $\cos^{-1}(3/7)$, $\cos^{-1}(-6/7)$ ও $\cos^{-1}(2/7)$ কোণ উৎপন্ন করে।

5. (a) $\vec{B} = 6\hat{i}-3\hat{j}+2\hat{k}$ ভেক্টরের উপর $\vec{A} = 2\hat{i}+2\hat{j}+\hat{k}$ ভেক্টরের অভিক্ষেপ নির্ণয় কর।

[কু.'০৮,'১১; রা.'০৪,'১৩; চ.'০৫; য.'১২; সি.'১২ ; কুয়েট'০৫-০৬]

সমাধান ঃ $\vec{B}$ ভেক্টরের উপর $\vec{A}$ ভেক্টরের অভিক্ষেপ

$$= \frac{\vec{A}\cdot\vec{B}}{|\vec{B}|} = \frac{(6\hat{i}-3\hat{j}+2\hat{k})\cdot(2\hat{i}+2\hat{j}+\hat{k})}{|6\hat{i}-3\hat{j}+2\hat{k}|}$$

$$= \frac{6\times2+(-3\times2)+2\times1}{\sqrt{6^2+3^2+2^2}} = \frac{12-6+2}{\sqrt{36+9+4}}$$

$$= \frac{8}{\sqrt{49}} = \frac{8}{7} \text{ (Ans.)}$$

5. (b) $\underline{a} = \hat{i}+\hat{j}+\hat{k}$, $\underline{b} = \sqrt{3}\,\hat{i}+3\hat{j}-2\hat{k}$; $\underline{b}$ ভেক্টরের উপর $\underline{a}$ ভেক্টরের অভিক্ষেপ নির্ণয় কর।

[চ.'১২; কু.'১২; ব.'০৭; দি.'১১]

সমাধান ঃ $\underline{b}$ ভেক্টরের উপর $\underline{a}$ ভেক্টরের অভিক্ষেপ

$$= \frac{\underline{a}\cdot\underline{b}}{|\underline{b}|} = \frac{(\hat{i}+\hat{j}+\hat{k})\cdot(\sqrt{3}\hat{i}+3\hat{j}-2\hat{k})}{|\sqrt{3}\hat{i}+3\hat{j}-2\hat{k}|}$$

$$= \frac{1\times\sqrt{3}+(1\times3)+1\times-2}{\sqrt{(\sqrt{3})^2+3^2+2^2}} = \frac{\sqrt{3}+3-2}{\sqrt{3+9+4}}$$

$$= \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{16}} = \frac{\sqrt{3}+1}{4} \text{ (Ans.)}$$

5. (e) A(2 , 3, −1) ও B (− 2, −4, 3) বিন্দুদ্বয়ের সংযোগ সরলরেখার উপর $4\hat{i}-3\hat{j}+\hat{k}$ ভেক্টরের অভিক্ষেপ নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ $A(2, 3, -1)$ ও $B(-2, -4, 3)$ বিন্দুদ্বয়ের অবস্থান ভেক্টর যথাক্রমে $2\hat{i}+3\hat{j}-\hat{k}$ ও $-2\hat{i}-4\hat{j}+3\hat{k}$.

$$\overrightarrow{AB}=(-2\hat{i}-4\hat{j}+3\hat{k})-(2\hat{i}+3\hat{j}-\hat{k})$$
$$=-4\hat{i}-7\hat{j}+4\hat{k}$$

$\therefore$ $-4\hat{i}-7\hat{j}+4\hat{k}$ ভেক্টরের উপর $4\hat{i}-3\hat{j}+\hat{k}$ এর অভিক্ষেপ $=\dfrac{(-4\hat{i}-7\hat{j}+4\hat{k})\cdot(4\hat{i}-3\hat{j}+\hat{k})}{|-4\hat{i}-7\hat{j}+4\hat{k}|}$

$$=\frac{-16+21+4}{\sqrt{16+49+16}}=\frac{9}{9}=1 \text{ (Ans.)}$$

6. (a) $\vec{B}=2\hat{i}+10\hat{j}-11\hat{k}$ **ভেক্টর বরাবর** $\vec{A}=2\hat{i}+2\hat{j}+\hat{k}$ **ভেক্টরের উপাংশ নির্ণয় কর।**

[ব.'০১,'০৯; রা.'০৫; সি.'০৭,'১১; কু.,দি.'১০]

সমাধান ঃ $|\vec{B}|=|2\hat{i}+10\hat{j}-11\hat{k}|$

$$=\sqrt{2^2+10^2+11^2}=\sqrt{4+100+121}$$
$$=\sqrt{225}=15$$

$\therefore$ $\vec{B}$ ভেক্টরের দিক বরাবর একক ভেক্টর

$$=\frac{\vec{B}}{|\vec{B}|}=\frac{2\hat{i}+10\hat{j}-11\hat{k}}{15}=\hat{n} \text{ (ধরি)}$$

$\therefore$ $\vec{B}$ ভেক্টর বরাবর $\vec{A}$ ভেক্টরের উপাংশ $=(\hat{n}.\vec{A})\hat{n}$

$$=\{\frac{1}{15}(2\hat{i}+10\hat{j}-11\hat{k})\cdot(2\hat{i}+2\hat{j}+\hat{k})\}\hat{n}$$
$$=\frac{4+20-11}{15}\cdot\frac{2\hat{i}+10\hat{j}-11\hat{k}}{15}$$
$$=\frac{13}{225}(2\hat{i}+10\hat{j}-11\hat{k}) \text{ (Ans.)}$$

6. (b) $\vec{A}=\hat{i}-2\hat{j}-2\hat{k}$ **এবং** $\vec{B}=6\hat{i}+3\hat{j}+2\hat{k}$ **ভেক্টর দুইটির অন্তর্গত কোণ নির্ণয় কর।** $\vec{A}$ **ভেক্টর বরাবর** $\vec{B}$ **ভেক্টরের উপাংশ এবং অভিক্ষেপ নির্ণয় কর এবং দেখাও যে এদের সাংখ্যিক মান সমান।** [য.'০৭;ঢা.'০৯; চ.'১০]

সমাধান ঃ $|\vec{A}|=|\hat{i}-2\hat{j}-2\hat{k}|$

$$=\sqrt{1^2+2^2+2^2}=\sqrt{9}=3$$

$$|\vec{B}|=|6\hat{i}+3\hat{j}+2\hat{k}|=\sqrt{36+9+4}=7$$
$$\vec{A}\cdot\vec{B}=(\hat{i}-2\hat{j}-2\hat{k})\cdot(6\hat{i}+3\hat{j}+2\hat{k})$$
$$=6-6-4=-4$$

প্রদত্ত ভেক্টর $\vec{A}$ ও $\vec{B}$ এর অন্তর্ভুক্ত কোণ θ হলে,

$$\cos\theta=\frac{\vec{A}\cdot\vec{B}}{|\vec{A}||\vec{B}|}=\frac{-4}{3\times7} \quad \therefore \theta=\cos^{-1}(-\frac{4}{21})$$

$\therefore$ $\vec{A}$ ভেক্টরের দিক বরাবর একক ভেক্টর $=\dfrac{\vec{A}}{|\vec{A}|}$

$$=\frac{1}{3}(\hat{i}-2\hat{j}-2\hat{k})=\hat{a} \text{ (ধরি)}$$

$\vec{A}$ ভেক্টর বরাবর $\vec{B}$ ভেক্টরের উপাংশ $=\dfrac{\vec{A}\cdot\vec{B}}{|\vec{A}|}\hat{a}$

$$=\frac{-4}{3}\{\frac{1}{3}(\hat{i}-2\hat{j}-2\hat{k})\}$$
$$=\frac{-4}{9}\hat{i}+\frac{8}{9}\hat{j}+\frac{8}{9}\hat{k} \quad \text{(Ans.)}$$

$\therefore$ $\vec{A}$ ভেক্টর বরাবর $\vec{B}$ ভেক্টরের উপাংশের মান

$$=|\frac{-4}{9}\hat{i}+\frac{8}{9}\hat{j}+\frac{8}{9}\hat{k}|=\sqrt{\frac{16}{91}+\frac{64}{91}+\frac{64}{91}}$$
$$=\sqrt{\frac{16+64+64}{91}}=\sqrt{\frac{144}{91}}=\frac{12}{9}=\frac{4}{3}$$

$\vec{A}$ ভেক্টর বরাবর $\vec{B}$ ভেক্টরের অভিক্ষেপ $=\dfrac{\vec{A}\cdot\vec{B}}{|\vec{A}|}=\dfrac{-4}{3}$

$\therefore$ $\vec{A}$ ভেক্টর বরাবর $\vec{B}$ ভেক্টরের অভিক্ষেপ এবং উপাংশের সাংখ্যিক মান সমান।

7. (a) $2\hat{i}+10\hat{j}-11\hat{k}$ **ভেক্টরটির সমান্তরালে একক ভেক্টর নির্ণয় কর।** [সি.'০৫,'০৯]

সমাধান ঃ ধরি, $\vec{A}=2\hat{i}+10\hat{j}-11\hat{k}$

$$\therefore |\vec{A}|=\sqrt{2^2+10^2+11^2}$$
$$=\sqrt{4+100+121}=\sqrt{225}=15$$

$\therefore$ $\vec{A}$ ভেক্টরের সমান্তরালে একক ভেক্টর $=\pm\dfrac{\vec{A}}{|\vec{A}|}$

$$=\pm\frac{1}{15}(2\hat{i}+10\hat{j}-11\hat{k}) \text{ (Ans.)}$$

7. (b) $\vec{A} = 2\hat{i} + 4\hat{j} + 5\hat{k}$ এবং $\vec{B} = \hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}$ হলে ভেক্টর দুইটির লব্ধির সমান্তরাল একক ভেক্টর নির্ণয় কর। [চ.'১০; সি.'১১]

সমাধান : প্রদত্ত ভেক্টর দুইটির লব্ধি ভেক্টর $= \vec{A} + \vec{B}$

$= 2\hat{i} + 4\hat{j} + 5\hat{k} + \hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}$

$= 3\hat{i} + 6\hat{j} + 8\hat{k}$

$\therefore |\vec{A} + \vec{B}| = \sqrt{9+36+64} = \sqrt{109}$

$\therefore$ নির্ণেয় একক ভেক্টর $= \pm \dfrac{\vec{A}+\vec{B}}{|\vec{A}+\vec{B}|}$

$= \pm \dfrac{1}{\sqrt{109}}(3\hat{i} + 6\hat{j} + 8\hat{k})$

7. (c) $\vec{A} = 4\hat{i} + 5\hat{j} - 3\hat{k}$ এবং $\vec{B} = -\hat{i} - 5\hat{j} - \hat{k}$ হলে, (i) ভেক্টর দুইটির লব্ধির সমান্তরালে একক ভেক্টর নির্ণয় কর। [ব.'০৪]

(ii) ভেক্টর দুইটির লব্ধির দিক বরাবর একক ভেক্টর নির্ণয় কর।

(iii) ভেক্টর দুইটির লব্ধির বিসদৃশ সমান্তরাল একক ভেক্টর নির্ণয় কর।

সমাধান : প্রদত্ত ভেক্টর দুইটির লব্ধি ভেক্টর $= \vec{A} + \vec{B}$

$= 4\hat{i} + 5\hat{j} - 3\hat{k} + (-\hat{i} - 5\hat{j} - \hat{k})$

$= 3\hat{i} - 4\hat{k}$

$\therefore |\vec{A} + \vec{B}| = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$

(i) ভেক্টর দুইটির লব্ধির সমান্তরালে একক ভেক্টর

$= \pm \dfrac{\vec{A}+\vec{B}}{|\vec{A}+\vec{B}|} = \pm \dfrac{1}{5}(3\hat{i} - 4\hat{k})$

(ii) ভেক্টর দুইটির লব্ধির দিক বরাবর একক ভেক্টর

$= \dfrac{\vec{A}+\vec{B}}{|\vec{A}+\vec{B}|} = \dfrac{1}{5}(3\hat{i} - 4\hat{k})$

(iii) ভেক্টর দুইটির লব্ধির বিসদৃশ সমান্তরাল একক ভেক্টর

$= -\dfrac{\vec{A}+\vec{B}}{|\vec{A}+\vec{B}|} = -\dfrac{1}{5}(3\hat{i} - 4\hat{k})$

8(a) (i) $2\hat{i} + \hat{j} + \hat{k}$ এবং $\hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k}$ ভেক্টর দুইটির উপর লম্ব একক ভেক্টর নির্ণয় কর।

[ব.'০১; চ.'০৫,'১০; ঢা.,কু.'১১;বুয়েট'১১-১২]

সমাধানঃ প্রদত্ত ভেক্টর দুইটির উপর লম্ব ভেক্টর,

$$\vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix}$$

$= (1+2)\hat{i} - (2-1)\hat{j} + (-4-1)\hat{k}$

$= 3\hat{i} - \hat{j} - 5\hat{k}$

$\therefore |\vec{A} \times \vec{B}| = \sqrt{9+1+25} = \sqrt{35}$

(i) প্রদত্ত ভেক্টর দুইটির উপর লম্ব একক ভেক্টর

$= \pm \dfrac{\vec{A}\times\vec{B}}{|\vec{A}\times\vec{B}|} = \pm \dfrac{1}{\sqrt{35}}(3\hat{i} - \hat{j} - 5\hat{k})$

(ii) প্রদত্ত ভেক্টর দুইটির উপর লম্ব 5 একক মান বিশিষ্ট

ভেক্টর $= \pm 5 \dfrac{\vec{A}\times\vec{B}}{|\vec{A}\times\vec{B}|}$

$= \pm \dfrac{5}{\sqrt{35}}(3\hat{i} - \hat{j} - 5\hat{k})$ (Ans.)

8(b) $\underline{a} = \hat{i} + \hat{j} - \hat{k}$, $\underline{b} = \hat{i} - \hat{j} + \hat{k}$ হলে, এমন একটি একক ভেক্টর $\underline{c}$ নির্ণয় কর, যা $\underline{a}$ এবং $\underline{b}$ এর সাথে সমতলীয় হবে এবং $\underline{a}$ এর লম্ব হবে।

সমাধানঃ ধরি, $\underline{a}$ ও $\underline{b}$ এর সাথে সমতলীয় যেকোন ভেক্টর $\lambda(\hat{i} + \hat{j} - \hat{k}) + \mu(\hat{i} - \hat{j} + \hat{k})$ অর্থাৎ $(\lambda + \mu)\hat{i} + (\lambda - \mu)\hat{j} + (-\lambda + \mu)\hat{k}$.

এ ভেক্টর $\underline{a}$ -এর উপর লম্ব হলে,

$(\lambda + \mu)(1) + (\lambda - \mu)(1) + (-\lambda + \mu)(-1) = 0$

$\Rightarrow \lambda + \mu + \lambda - \mu + \lambda - \mu = 0$

$\Rightarrow 3\lambda = \mu$

$\therefore$ $\underline{a}$ -এর উপর লম্ব ভেক্টরটি হচ্ছে,

$4\lambda\hat{i} - 2\lambda\hat{j} + 2\lambda\hat{k}$

$\therefore \underline{c} = \pm \dfrac{4\lambda\hat{i} - 2\lambda\hat{j} + 2\lambda\hat{k}}{\sqrt{16\lambda^2 + 4\lambda^2 + 4\lambda^2}}$

$= \pm \dfrac{2\lambda(2\hat{i} - \hat{j} + \hat{k})}{\sqrt{24\lambda^2}} = \pm \dfrac{2\lambda(2\hat{i} - \hat{j} + \hat{k})}{2\lambda\sqrt{6}}$

$= \pm \dfrac{1}{\sqrt{6}}(2\hat{i} - \hat{j} + \hat{k})$ (Ans.)

8.(c) $\hat{i}-\hat{j}+\hat{k}$ এবং $\hat{i}+2\hat{j}-\hat{k}$ ভেক্টর দুইটির উপর লম্ব একক ভেক্টর নির্ণয় কর। [রা.'০৮; কু. '০৮; য.'১০]

সমাধান ঃ ধরি, $\vec{A}=\hat{i}-\hat{j}+\hat{k}$ এবং $\vec{B}=\hat{i}+2\hat{j}-\hat{k}$

$\therefore$ প্রদত্ত ভেক্টর দুইটির উপর লম্ব ভেক্টর,

$$\vec{A}\times\vec{B}=\begin{vmatrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k}\\ 1 & -1 & 1\\ 1 & 2 & -1\end{vmatrix}$$

$$=(1-2)\hat{i}-(-1-1)\hat{j}+(2+1)\hat{k}$$

$$=-\hat{i}-2\hat{j}+3\hat{k}$$

$\therefore\ |\vec{A}\times\vec{B}|=\sqrt{1+4+9}=\sqrt{14}$

$\therefore$ প্রদত্ত ভেক্টর দুইটির উপর লম্ব একক ভেক্টর

$$=\pm\frac{\vec{A}\times\vec{B}}{|\vec{A}\times\vec{B}|}=\pm\frac{1}{\sqrt{14}}(-\hat{i}-2\hat{j}+3\hat{k})$$

9.(a) P(1 , 1, 1) এবং Q(3, 2, – 1) শূন্যে অবস্থিত দুইটি বিন্দু । $\overrightarrow{PQ}$ ভেক্টর নির্ণয় কর এবং এর সমান্তরাল একটি একক ভেক্টর নির্ণয় কর।

[য.'০৯; বুয়েট'০৩-০৪]

সমাধান ঃ P(1 , 1, 1) ও Q(3, 2, – 1) বিন্দু দুইটির অবস্থান ভেক্টর যথাক্রমে $\hat{i}+\hat{j}+\hat{k}$, ও $3\hat{i}+2\hat{j}-\hat{k}$.

$\therefore\ \overrightarrow{PQ}=(3\hat{i}+2\hat{j}-\hat{k})-(\hat{i}+\hat{j}+\hat{k})$

$$=2\hat{i}+\hat{j}-2\hat{k}\ \text{(Ans.)}$$

$\therefore\ |\overrightarrow{PQ}|=\sqrt{2^2+1^2+2^2}=\sqrt{9}=3$

$\therefore\ \overrightarrow{PQ}$ ভেক্টরের সমান্তরাল একক ভেক্টর

$$=\pm\frac{\overrightarrow{PQ}}{|\overrightarrow{PQ}|}=\pm\frac{1}{3}(2\hat{i}+\hat{j}-2\hat{k})$$

$\therefore\ \overrightarrow{PQ}$ ভেক্টরের সমান্তরাল একটি একক ভেক্টর $\frac{1}{3}(2\hat{i}+\hat{j}-2\hat{k})$ বা, $-\frac{1}{3}(2\hat{i}+\hat{j}-2\hat{k})$

9. (b) মূলবিন্দু O এর সাপেক্ষে P(2 , –1, 7) এবং Q(–4, 5, 0) হলে । $\overrightarrow{PQ}$ । নির্ণয় কর । [সি.'০৯]

সমাধান ঃ $\overrightarrow{OP}=2\hat{i}-\hat{j}+7\hat{k}$, $\overrightarrow{OQ}=-4\hat{i}+5\hat{j}$

$\therefore\ \overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{OQ}-\overrightarrow{OP}$

$$=-4\hat{i}+5\hat{j}-(2\hat{i}-\hat{j}+7\hat{k})$$

$$=-6\hat{i}+6\hat{j}-7\hat{k}$$

$\therefore\ |\overrightarrow{PQ}|=\sqrt{36+36+49}=\sqrt{121}=11$

10. (a) দেখাও যে, $\underline{a}=9\hat{i}+\hat{j}-6\hat{k}$ এবং $\underline{b}=4\hat{i}-6\hat{j}+5\hat{k}$ ভেক্টর দুইটি পরস্পর লম্ব।

[ব.'০৮; বুয়েট'০৭-০৮]

প্রমাণ ঃ $\underline{a}=9\hat{i}+\hat{j}-6\hat{k}$ ও $\underline{b}=4\hat{i}-6\hat{j}+5\hat{k}$ ভেক্টর দুইটি পরস্পর লম্ব হলে এদের স্কেলার গুণফল শূন্য হবে।

এখন, $\vec{a}\cdot\vec{b}=(9\hat{i}+\hat{j}-6\hat{k})\cdot(4\hat{i}-6\hat{j}+5\hat{k})$

$$=36-6-30=36-36=0$$

$\therefore$ প্রদত্ত ভেক্টর দুইটি পরস্পর লম্ব ।

10 (b) দেখাও যে, $\vec{A}=8\hat{i}+\hat{j}-6\hat{k}$ এবং $\vec{B}=4\hat{i}-2\hat{j}+5\hat{k}$ ভেক্টর দুইটি পরস্পর লম্ব।

[রা.'০৭; '০৭; য.'১২; বুয়েট' ০৫-০৬; ১০-১১]

প্রমাণ ঃ $\underline{a}=8\hat{i}+\hat{j}-6\hat{k}$ ও $\underline{b}=4\hat{i}-2\hat{j}+5\hat{k}$ ভেক্টর দুইটি পরস্পর লম্ব হলে এদের স্কেলার গুণন শূন্য হবে।

এখন, $\vec{a}\cdot\vec{b}=(8\hat{i}+\hat{j}-6\hat{k})\cdot(4\hat{i}-2\hat{j}+5\hat{k})$

$$=36-6-30=36-36=0$$

$\therefore$ প্রদত্ত ভেক্টর দুইটি পরস্পর লম্ব ।

10(c) $\vec{A}=\hat{i}+2\hat{j}-3\hat{k}$ এবং $\vec{B}=3\hat{i}-\hat{j}+2\hat{k}$ হলে দেখাও যে, $\vec{A}+\vec{B}$ এবং $\vec{A}-\vec{B}$ ভেক্টর দুইটি পরস্পর লম্ব। [রা.'০৬; ঢা.'০৮; য.'০৭; চ.'১২,'১৪; মা.বো.'০৮; দি.'১০; ব.'১০,'১২; মা.'১৪; বুয়েট'১১-১২]

প্রমাণ ঃ $\vec{A}+\vec{B}=(1+3)\hat{i}+(2-1)\hat{j}+(-3+2)\hat{k}$

$$=4\hat{i}+\hat{j}-\hat{k}$$

$\vec{A}-\vec{B}=(1-3)\hat{i}+(2+1)\hat{j}+(-3-2)\hat{k}$

$$=-2\hat{i}+3\hat{j}-5\hat{k}$$

এখন, $(\vec{A}+\vec{B})\cdot(\vec{A}-\vec{B})$

$$=(4\hat{i}+\hat{j}-\hat{k})\cdot(-2\hat{i}+3\hat{j}-5\hat{k})$$

$$=-8+3+5=0$$

$\therefore$ ভেক্টর দুইটির স্কেলার গুণন শূন্য বলে তারা পরস্পর লম্ব।

10 (d) দেখাও যে, $\underline{a} = 3\hat{i} + 2\hat{j} - 6\hat{k}$ এবং $\underline{b} = 4\hat{i} - 3\hat{j} + \hat{k}$ ভেক্টর দুইটি পরস্পর লম্ব । এ ভেক্টর দুইটির উপর লম্ব একক ভেক্টর নির্ণয় কর।

[ঢা.'০২; কু.'০৫]

প্রমাণ ঃ $\vec{a}\cdot\vec{b} = (3\hat{i} + 2\hat{j} - 6\hat{k})\cdot(4\hat{i} - 3\hat{j} + \hat{k})$

$= 12 - 6 - 6 = 12 - 12 = 0$

$\therefore$ ভেক্টর দুইটির স্কেলার গুণন শূন্য বলে তারা পরস্পর লম্ব।

২য় অংশ ঃ প্রদত্ত ভেক্টর দুইটির উপর লম্ব ভেক্টর,

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 3 & 2 & -6 \\ 4 & -3 & 1 \end{vmatrix}$$

$= (2-18)\hat{i} - (3+24)\hat{j} + (-9-8)\hat{k}$

$= -16\hat{i} - 27\hat{j} - 17\hat{k}$

$\therefore\ |\vec{A} \times \vec{B}| = \sqrt{256 + 729 + 289} = \sqrt{1274}$

$\therefore$ প্রদত্ত ভেক্টর দুইটির উপর লম্ব একক ভেক্টর

$$= \pm \frac{\vec{A} \times \vec{B}}{|\vec{A} \times \vec{B}|} = \pm \frac{1}{\sqrt{1274}}(-16\hat{i} - 27\hat{j} - 17\hat{k})$$

10 (e) A ও B বিন্দু দুইটির অবস্থান ভেক্টর যথাক্রমে $(2\hat{i} + 3\hat{j} - 4\hat{k})$ ও $(4\hat{i} - 3\hat{j} + 2\hat{k})$ হলে $\overrightarrow{AB}$ এর দৈর্ঘ্য এবং $\overrightarrow{AB}$ বরাবর একটি একক ভেক্টর নির্ণয় কর।

[বুয়েট'০৬-০৭]

সমাধানঃ $\overrightarrow{AB} = 4\hat{i} - 3\hat{j} + 2\hat{k} - (2\hat{i} + 3\hat{j} - 4\hat{k})$

$= 2\hat{i} - 6\hat{j} + 6\hat{k}$

$\therefore$ $\overrightarrow{AB}$ এর দৈর্ঘ্য $= |\overrightarrow{AB}| = |2\hat{i} - 6\hat{j} + 6\hat{k}|$

$= \sqrt{4 + 36 + 36} = \sqrt{76} = 2\sqrt{19}$ এবং

$\overrightarrow{AB}$ বরাবর একটি একক ভেক্টর $= \dfrac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|}$

$$= \frac{2\hat{i} - 6\hat{j} + 6\hat{k}}{2\sqrt{19}} = \frac{1}{\sqrt{19}}\hat{i} - \frac{3}{\sqrt{19}}\hat{j} + \frac{3}{\sqrt{19}}\hat{k}$$

11. (a) $a\hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k}$ এবং $2a\hat{i} - a\hat{j} - 4\hat{k}$ ভেক্টর দুইটি পরস্পর লম্ব হলে a এর মান নির্ণয় কর। [রা.'০৯, '১২; য.'০৫,'০৯,'১৩; ঢা.'০৬,'১০; সি.'০৮,'১২; চ.'০৯; কু.'১৩; দি.'১৪]

সমাধানঃ $a\hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k}$ এবং $2a\hat{i} - a\hat{j} - 4\hat{k}$ ভেক্টর দুইটি পরস্পর লম্ব বলে এদের স্কেলার গুণন শূন্য।

$\therefore\ (a\hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k})\cdot(2a\hat{i} - a\hat{j} - 4\hat{k}) = 0$

$\Rightarrow 2a^2 + 2a - 4 = 0 \Rightarrow a^2 + a - 2 = 0$

$\Rightarrow (a+2)(a-1) = 0 \ \therefore\ a = 1, -2$

11(b) $2\hat{i} + a\hat{j} + \hat{k}$ এবং $4\hat{i} - 2\hat{j} - 2\hat{k}$ ভেক্টর দুইটি পরস্পর লম্ব হলে a এর মান নির্ণয় কর। [ঢা.'০২; ব.'০৪]

সমাধানঃ $2\hat{i} + a\hat{j} + \hat{k}$ এবং $4\hat{i} - 2\hat{j} - 2\hat{k}$ ভেক্টর দুইটি পরস্পর লম্ব বলে এদের স্কেলার গুণন শূন্য।

$\therefore\ (2\hat{i} + a\hat{j} + \hat{k})\cdot(4\hat{i} - 2\hat{j} - 2\hat{k}) = 0$

$\Rightarrow 8 - 2a - 2 = 0 \Rightarrow 2a = 6 \ \therefore\ a = 3$

12. দেখাও যে, $\underline{a} = 3\hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k}$, $\underline{b} = \hat{i} - 3\hat{j} + 5\hat{k}$ ও $\underline{c} = 2\hat{i} + \hat{j} - 4\hat{k}$ ভেক্টর তিনটি সমতলীয়। [ঢা.'০৬]

প্রমাণ ঃ প্রদত্ত ভেক্টর তিনটি সমতলীয় হবে যদি এদের যেকোন দুইটির ক্রস গুণনের সাথে অপরটির ডট গুণন শূন্য হয়।

$$\text{এখন, } (\underline{a} \times \underline{b})\cdot\underline{c} = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 1 & -3 & 5 \\ 2 & 1 & -4 \end{vmatrix}$$

$= 3(12-5) + 2(-4-10) + 1(1+6)$

$= 21 - 28 + 7 = 28 - 28 = 0$

$\therefore$ প্রদত্ত ভেক্টর তিনটি সমতলীয় ।

13. (a) দেখাও যে, $\underline{a} = 3\hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k}$, $\underline{b} = \hat{i} - 3\hat{j} + 5\hat{k}$ এবং $\underline{c} = 2\hat{i} + \hat{j} - 4\hat{k}$ ভেক্টর তিনটি একটি সমকোণী ত্রিভুজ গঠন করে।

[ব.'০৩,'১২; ঢা.'০৪,'১৪; রা.'০৭,'১৪; বুয়েট'০৩-০৪]

প্রমাণ : $|\underline{a}| = |3\hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k}| = \sqrt{9+4+1} = \sqrt{14}$

$|\underline{b}| = |\hat{i} - 3\hat{j} + 5\hat{k}| = \sqrt{1+9+25} = \sqrt{35}$

$|\underline{c}| = |2\hat{i} + \hat{j} - 4\hat{k}| = \sqrt{4+1+16} = \sqrt{21}$

$\sqrt{14}$, $\sqrt{35}$ ও $\sqrt{21}$ এর যেকোন দুইটির সমষ্টি তৃতীয়টি অপেক্ষা বৃহত্তর এবং $|\underline{a}|^2 + |\underline{c}|^2 = 14 + 21 = 35 = |\underline{b}|^2$

$\therefore$ প্রদত্ত ভেক্টর তিনটি একটি সমকোণী ত্রিভুজ গঠন করে।

13. (b) তিনটি বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর $\hat{i}+2\hat{j}+3\hat{k}$, $-\hat{i}-\hat{j}+8\hat{k}$ এবং $-4\hat{i}+4\hat{j}+6\hat{k}$; দেখাও যে, বিন্দু তিনটি একটি সমবাহু ত্রিভুজ গঠন করে।

[ঢা.'০৫,'১৩; সি.,চ.'১০,'১৩; কু.'১৪]

প্রমাণ ঃ ধরি , A, B ও C বিন্দু তিনটির অবস্থান ভেক্টর যথাক্রমে $\hat{i}+2\hat{j}+3\hat{k}$, $-\hat{i}-\hat{j}+8\hat{k}$ এবং $-4\hat{i}+4\hat{j}+6\hat{k}$.

$\overrightarrow{AB} = -\hat{i}-\hat{j}+8\hat{k}-(\hat{i}+2\hat{j}+3\hat{k})$

$= -2\hat{i}-3\hat{j}+5\hat{k}$

$\therefore \ |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{4+9+25} = \sqrt{38}$

$\overrightarrow{BC} = -4\hat{i}+4\hat{j}+6\hat{k}-(-\hat{i}-\hat{j}+8\hat{k})$

$= -3\hat{i}+5\hat{j}-2\hat{k}$

$\therefore \ |\overrightarrow{BC}| = \sqrt{9+25+4} = \sqrt{38}$

$\overrightarrow{CA} = \hat{i}+2\hat{j}+3\hat{k}-(-4\hat{i}+4\hat{j}+6\hat{k})$

$= 5\hat{i}-2\hat{j}-3\hat{k}$

$\therefore \ |\overrightarrow{CA}| = \sqrt{25+4+9} = \sqrt{38}$

$|\overrightarrow{AB}|$, $|\overrightarrow{BC}|$ ও $|\overrightarrow{CA}|$ এর যেকোন দুইটির সমষ্টি তৃতীয়টি অপেক্ষা বৃহত্তর এবং $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{BC}| = |\overrightarrow{CA}| = \sqrt{38}$

$\therefore$ প্রদত্ত বিন্দু তিনটি একটি সমবাহু ত্রিভুজ গঠন করে।

13. (c) ভেক্টরের সাহায্যে দেখাও যে, A (1,–1, –1) , B (3 , 3 , 1) এবং C(– 1, 4 , 4) বিন্দু তিনটি একটি গোলকের উপর অবস্থিত যার কেন্দ্র P(0,1,2)

প্রমাণ ঃ $\overrightarrow{PA} = (1-0)\hat{i}+(-1-1)\hat{j}+(-1-2)\hat{k}$

$= \hat{i}-2\hat{j}-3\hat{k}$

$\therefore \ |\overrightarrow{PA}| = \sqrt{1+4+9} = \sqrt{14}$

$\overrightarrow{PB} = (3-0)\hat{i}+(3-1)\hat{j}+(1-2)\hat{k}$

$= 3\hat{i}+2\hat{j}-\hat{k}$

$\therefore \ |\overrightarrow{PB}| = \sqrt{9+4+1} = \sqrt{14}$

$\overrightarrow{PC} = (-1-0)\hat{i}+(4-1)\hat{j}+(4-2)\hat{k}$

$= -\hat{i}+3\hat{j}+2\hat{k}$

$\therefore \ |\overrightarrow{PC}| = \sqrt{1+9+4} = \sqrt{14}$

$\therefore \ |\overrightarrow{PA}| = |\overrightarrow{PB}| = |\overrightarrow{PC}| = \sqrt{14}$

$\therefore$ প্রদত্ত বিন্দু তিনটি P(0,1,2) কেন্দ্র বিশিষ্ট একটি গোলকের উপর অবস্থিত ।

13.(d) A(0, 1 , 2) , B (–1,3 , 0) , C(1, –1, 1) বিন্দু তিনটির অবস্থান ভেক্টর নির্ণয় কর এবং । $\overrightarrow{AB}$ । এবং । $\overrightarrow{AC}$ । নির্ণয় কর **[ঢা.'০৩]**

সমাধানঃA(0,1,2) বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর $= \hat{j}+2\hat{k}$

B (–1,3 , 0) বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর $= -\hat{i}+3\hat{j}$,

C(1, –1, 1) বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর $= \hat{i}-\hat{j}+\hat{k}$

$\overrightarrow{AB} = (-1-0)\hat{i}+(3-1)\hat{j}+(0-2)\hat{k}$

$= -\hat{i}+2\hat{j}-2\hat{k}$

$\therefore \ |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{1+4+4} = \sqrt{9} = 3$

এবং $\overrightarrow{AC} = (1-0)\hat{i}+(-1-1)\hat{j}+(1-2)\hat{k}$

$= \hat{i}-2\hat{j}-\hat{k}$

$\therefore \ |\overrightarrow{AC}| = \sqrt{1+4+1} = \sqrt{6}$

14. (a) $\vec{A} = 2\hat{i}+2\hat{j}+\hat{k}$ এবং $\vec{B} = \hat{i}+3\hat{j}+2\hat{k}$ হলে, $\vec{A}\times\vec{B}$ হতে তাদের অন্তর্ভুক্ত কোণ নির্ণয় কর। **[কু.'০৪]**

সমাধান ঃ $|\vec{A}| = |2\hat{i}+2\hat{j}+\hat{k}| = \sqrt{4+4+1} = 3$

$|\vec{B}| = |\hat{i}+3\hat{j}+2\hat{k}| = \sqrt{1+9+4} = \sqrt{14}$

$$\vec{A}\times\vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix}$$

$= (4-3)\hat{i}-(4-1)\hat{j}+(6-2)\hat{k}$

$= \hat{i}-3\hat{j}+4\hat{k}$

$\therefore \ |\vec{A}\times\vec{B}| = \sqrt{1+9+16} = \sqrt{26}$

ভেক্টর দুইটির অন্তর্ভুক্ত কোণ θ হলে,

$$\sin\theta = \frac{|\vec{A}\times\vec{B}|}{|\vec{A}||\vec{B}|} = \frac{\sqrt{26}}{3\sqrt{14}} \quad \therefore \theta = \sin^{-1}\frac{\sqrt{13}}{3\sqrt{7}}$$

14(b) $\vec{A} = \hat{i}+2\hat{j}+3\hat{k}$ এবং $\vec{B} = 3\hat{i}-2\hat{j}-\hat{k}$ হলে, $|\vec{A}\times\vec{B}|$ নির্ণয় কর। **[বুয়েট'০০-০১]**

সমাধানঃ $\vec{A}\times\vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & -2 & -1 \end{vmatrix}$

$= (-2+6)\hat{i} - (-1-9)\hat{j} + (-2-6)\hat{k}$
$= 4\hat{i} + 10\hat{j} - 8\hat{k}$

$\therefore\ |\vec{A}\times\vec{B}| = \sqrt{16+100+64} = \sqrt{180}$
$= 6\sqrt{5}$

14(c) $(a\hat{i} + b\hat{j} + \hat{k})\times(2\hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}) = \hat{i} - \hat{j}$ হলে, a ও b এর মান নির্ণয় কর। [বুয়েট'০১-০২]

সমাধান ঃ দেওয়া আছে,
$(a\hat{i} + b\hat{j} + \hat{k})\times(2\hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}) = \hat{i} - \hat{j}$

$\Rightarrow \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ a & b & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{vmatrix} = \hat{i} - \hat{j}$

$\Rightarrow (3b-2)\hat{i} - (3a-2)\hat{j} + (2a-2b)\hat{k}$
$= \hat{i} - \hat{j}$

$\therefore\ 3b - 2 = 1 \Rightarrow 3b = 3\ \therefore\ b = 1$
$3a - 2 = 1 \Rightarrow 3a = 3\ \therefore\ a = 1$

14(d) $\vec{A} = 3\hat{i} + \hat{j} - 2\hat{k}$, $\vec{B} = 2\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}$ এবং $\vec{C} = \hat{i} + 3\hat{j} - 2\hat{k}$ হলে, $\vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C})$ নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ $\vec{B}\times\vec{C} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & -2 \end{vmatrix}$

$= (2-3)\hat{i} - (-4-1)\hat{j} + (6+1)\hat{k}$
$= -\hat{i} + 5\hat{j} + 7\hat{k}$

$\therefore\ \vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C}) = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 3 & 1 & -2 \\ -1 & 5 & 7 \end{vmatrix}$

$= (7+10)\hat{i} - (21-2)\hat{j} + (15+1)\hat{k}$
$= 17\hat{i} - 19\hat{j} + 16\hat{k}$ (Ans.)

14(e) $\underline{a} = 2\hat{i} - 3\hat{j} + 5\hat{k}$, $\underline{b} = -\hat{i} + 2\hat{j} - 7\hat{k}$ হলে $5\underline{a}\times\underline{b}$ এবং $\frac{\underline{b}}{|\underline{a}|}$ নির্ণয় কর। [চ.'০২]

সমাধান ঃ $5\underline{a}\times\underline{b} = 5\begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 2 & -3 & 5 \\ -1 & 2 & -7 \end{vmatrix}$

$= 5\{(21-10)\hat{i} - (-14+5)\hat{j} + (4-3)\hat{k}\}$
$= 5\{11\hat{i} + 9\hat{j} + \hat{k}\} = 55\hat{i} + 45\hat{j} + 5\hat{k}$

$\frac{\underline{b}}{|\underline{a}|} = \frac{-\hat{i} + 2\hat{j} - 7\hat{k}}{|2\hat{i} - 3\hat{j} + 5\hat{k}|} = \frac{-\hat{i} + 2\hat{j} - 7\hat{k}}{\sqrt{4+9+25}}$

$= \frac{1}{\sqrt{38}}(-\hat{i} + 2\hat{j} - 7\hat{k})$

14(f) যেকোন দুইটি ভেক্টর $\vec{A}$ ও $\vec{B}$ এর জন্য প্রমাণ কর যে, $\vec{A}\cdot\vec{B} = \vec{B}\cdot\vec{A}$ এবং $\vec{A}\times\vec{B} = -\vec{B}\times\vec{A}$. [চ.'০২]

প্রমাণ ঃ মনে করি, $\vec{A} = a_1\hat{i} + a_2\hat{j} + a_3\hat{k}$,
$\vec{B} = b_1\hat{i} + b_2\hat{j} + b_3\hat{k}$

$\therefore \vec{A}\cdot\vec{B} = (a_1\hat{i} + a_2\hat{j} + a_3\hat{k})\cdot(b_1\hat{i} + b_2\hat{j} + b_3\hat{k})$
$= a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$
$= b_1a_1 + b_2a_2 + b_3a_3$
$= (b_1\hat{i} + b_2\hat{j} + b_3\hat{k})\cdot(a_1\hat{i} + a_2\hat{j} + a_3\hat{k})$
$= \vec{B}\cdot\vec{A}$

$\therefore\ \vec{A}\cdot\vec{B} = \vec{B}\cdot\vec{A}$

আবার, $\vec{A}\times\vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}$

$= -\begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_1 & b_1 & c_1 \end{vmatrix} = -\vec{B}\times\vec{A}$

$\therefore\ \vec{A}\times\vec{B} = -\vec{B}\times\vec{A}$

14(g) প্রমাণ কর যে, $\vec{A}\times\vec{B}=\begin{vmatrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k}\\ a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\end{vmatrix}$,

যেখানে $\vec{A}=a_1\hat{i}+a_2\hat{j}+a_3\hat{k}$,
$\vec{B}=b_1\hat{i}+b_2\hat{j}+b_3\hat{k}$ **[ঢা.'০১; ব.'০২]**

প্রমাণঃ L.H.S. $=\vec{A}\times\vec{B}$

$=(a_1\hat{i}+a_2\hat{j}+a_3\hat{k})\times(b_1\hat{i}+b_2\hat{j}+b_3\hat{k})$

$=a_1b_1(\hat{i}\times\hat{i})+a_1b_2(\hat{i}\times\hat{j})+a_1b_3(\hat{i}\times\hat{k})$
$+a_2b_1(\hat{j}\times\hat{i})+a_2b_2(\hat{j}\times\hat{j})+a_2b_3(\hat{j}\times\hat{k})$
$+a_3b_1(\hat{k}\times\hat{i})+a_3b_2(\hat{k}\times\hat{j})+a_3b_3(\hat{k}\times\hat{k})$

$=a_1b_1(\underline{0})+a_1b_2(\hat{k})+a_1b_3(-\hat{j})$
$+a_2b_1(-\hat{k})+a_2b_2(\underline{0})+a_2b_3(\hat{i})$
$+a_3b_1(\hat{j})+a_3b_2(-\hat{i})+a_3b_3(\underline{0})$

$=(a_2b_3-a_3b_2)\hat{i}-(a_1b_3-a_3b_1)\hat{j}$
$+(a_1b_2-a_2b_1)\hat{k}$

$=\begin{vmatrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k}\\ a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\end{vmatrix}=$ R.H.S. (Proved)

14(h) দুইটি ভেক্টর $\bar{a}$ ও $\bar{b}$ এর স্কেলার বা ডট গুণনের সংজ্ঞা দাও। প্রমাণ কর যে, $\hat{i}.\hat{j}=0$, $\hat{i}.\hat{i}=1$; যেখানে $\hat{i}$ ও $\hat{j}$ যথাক্রমে x ও y অক্ষ পরাবর একক ভেক্টর। [চ.'১১]

স্কেলার বা ডট গুণনের সংজ্ঞা ঃ $\underline{a}$ ও $\underline{b}$ ভেক্টর দুইটির মধ্যবর্তী কোণ θ $(0\le\theta\le\pi)$ হলে, ভেক্টর দুইটির স্কেলার গুণনকে $\underline{a}.\underline{b}$ দ্বারা সূচিত করা হয় এবং একে $\underline{a}.\underline{b}=|\underline{a}||\underline{b}|\cos\theta$ দ্বারা সংজ্ঞায়িত করা হয়। দুইটি ভেক্টরের স্কেলার গুণন একটি স্কেলার রাশি।

এখন, $\hat{i}.\hat{j}=|\hat{i}||\hat{j}|\cos 90^0=1\times1\times0=0$

$\hat{i}.\hat{i}=|\hat{i}||\hat{i}|\cos 0^0=1\times1\times1=1$

15. (a) ভেক্টরের সাহায্যে A(1,3,2), B(2,–1, 1) ও C(– 1, 2 , 3) শীর্ষ দ্বারা গঠিত ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। [বুয়েট'০৪-০৫]

সমাধান ঃ $\overrightarrow{AB}=(2-1)\hat{i}+(-1-3)\hat{j}+(1-2)\hat{k}$
$=\hat{i}-4\hat{j}-\hat{k}$

$\overrightarrow{AC}=(-1-1)\hat{i}+(2-3)\hat{j}+(3-2)\hat{k}$
$=-2\hat{i}-\hat{j}+\hat{k}$

$\therefore\ \overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k}\\ 1 & -4 & -1\\ -2 & -1 & 1\end{vmatrix}$

$=(-4-1)\hat{i}-(1-2)\hat{j}+(-1-8)\hat{k}$

$=-5\hat{i}+\hat{j}-9\hat{k}$

$\therefore$ ABC ত্রিভুজটির ক্ষেত্রফল $=\frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}|$

$=\frac{1}{2}|-5\hat{i}+\hat{j}-9\hat{k}|=\frac{1}{2}\sqrt{5^2+1^2+9^2}$

$=\frac{1}{2}\sqrt{25+1+81}=\frac{1}{2}\sqrt{107}$ বর্গ একক।

15 (b) $\vec{P}=4\hat{i}-4\hat{j}+\hat{k}$ **এবং** $\vec{Q}=2\hat{i}-2\hat{j}-\hat{k}$ **একটি সামান্তরিকের দুইটি সন্নিহিত বাহু নির্দেশ করলে এর ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। [বুয়েট'০৬-০৭]**

সমাধান ঃ $\vec{P}\times\vec{Q}=\begin{vmatrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k}\\ 4 & -4 & 1\\ 2 & -2 & -1\end{vmatrix}$

$=(4+2)\hat{i}-(-4-2)\hat{j}+(-8+8)\hat{k}$
$=6\hat{i}-6\hat{j}$

$\therefore$ সামান্তরিকের নির্ণেয় ক্ষেত্রফল $=|\vec{P}\times\vec{Q}|$
$=\sqrt{36+36}$ বর্গ একক $=\sqrt{72}$ বর্গ একক।

15(c) একটি ত্রিভুজের শীর্ষ তিনটির অবস্থান ভেক্টর $\hat{i}-2\hat{j}+3\hat{k}$, $3\hat{i}+5\hat{j}-\hat{k}$ **ও** $2\hat{i}+3\hat{j}-4\hat{k}$; **ত্রিভুজটির ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।**

সমাধান ঃ ধরি, ABC ত্রিভুজের A, B ও C শীর্ষ তিনটির অবস্থান ভেক্টর যথাক্রমে $\hat{i}-2\hat{j}+3\hat{k}$, $3\hat{i}+5\hat{j}-\hat{k}$ ও $2\hat{i}+3\hat{j}-4\hat{k}$.

$\therefore\ \overrightarrow{AB}=3\hat{i}+5\hat{j}-\hat{k}-(\hat{i}-2\hat{j}+3\hat{k})$

$= 2\hat{i} + 7\hat{j} - 4\hat{k}$

$\overrightarrow{AC} = 2\hat{i} + 3\hat{j} - 4\hat{k} - (\hat{i} - 2\hat{j} + 3\hat{k})$

$= \hat{i} + 5\hat{j} - 7\hat{k}$

$$\therefore \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 2 & 7 & -4 \\ 1 & 5 & -7 \end{vmatrix}$$

$= (-49 + 20)\hat{i} - (-14 + 4)\hat{j} + (10 - 7)\hat{k}$

$= -29\hat{i} + 10\hat{j} + 3\hat{k}$

$\therefore$ ABC ত্রিভুজটির ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2} |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}|$

$= \frac{1}{2} |-29\hat{i} + 10\hat{j} + 3\hat{k}|$

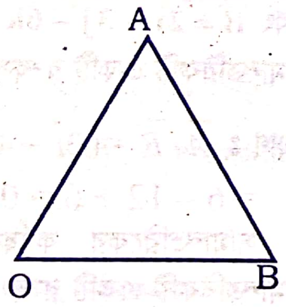
$= \frac{1}{2}\sqrt{29^2 + 10^2 + 3^2}$ বর্গ একক।

$= \frac{1}{2}\sqrt{841 + 100 + 9}$ বর্গ একক।

$= \frac{1}{2}\sqrt{950}$ বর্গ একক $= \frac{5}{2}\sqrt{38}$ বর্গ একক।

15(d) $\overrightarrow{OA} = 2\hat{i} - 3\hat{j} - \hat{k}$ এবং $\overrightarrow{OB} = \hat{i} + 4\hat{j} + 3\hat{k}$ হলে, OAB ত্রিভুজটির কোণ তিনটি নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ দেওয়া আছে, OAB ত্রিভুজে,



$\overrightarrow{OA} = 2\hat{i} - 3\hat{j} - \hat{k}$

$\therefore \overrightarrow{AO} = -2\hat{i} + 3\hat{j} + \hat{k}$

এবং $\overrightarrow{OB} = \hat{i} + 4\hat{j} + 3\hat{k}$

$\therefore \overrightarrow{BO} = -\hat{i} - 4\hat{j} - 3\hat{k}$

এখন, $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB}$

$= -2\hat{i} + 3\hat{j} + \hat{k} + \hat{i} + 4\hat{j} + 3\hat{k}$

$= -\hat{i} + 7\hat{j} + 4\hat{k}$ $\therefore \overrightarrow{BA} = \hat{i} - 7\hat{j} - 4\hat{k}$

$$\therefore \cos AOB = \frac{\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}}{|\overrightarrow{OA}||\overrightarrow{OB}|}$$

$$= \frac{(2\hat{i} - 3\hat{j} - \hat{k}) \cdot (\hat{i} + 4\hat{j} + 3\hat{k})}{\sqrt{4+9+1}\sqrt{1+16+9}}$$

$$= \frac{2 - 12 - 3}{\sqrt{14}\sqrt{26}} = \frac{-13}{\sqrt{364}}$$

$$\therefore \angle AOB = \cos^{-1}\left(\frac{-13}{\sqrt{364}}\right)$$

$$\cos OAB = \frac{\overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AO}||\overrightarrow{AB}|}$$

$$= \frac{(-2\hat{i} + 3\hat{j} + \hat{k}) \cdot (-\hat{i} + 7\hat{j} + 4\hat{k})}{\sqrt{4+9+1}\sqrt{1+49+16}}$$

$$= \frac{2 + 21 + 4}{\sqrt{14}\sqrt{66}} = \frac{27}{\sqrt{924}}$$

$$\angle OAB = \cos^{-1}\left(\frac{27}{\sqrt{924}}\right)$$

$$\cos OBA = \frac{\overrightarrow{BO} \cdot \overrightarrow{BA}}{|\overrightarrow{BO}||\overrightarrow{BA}|}$$

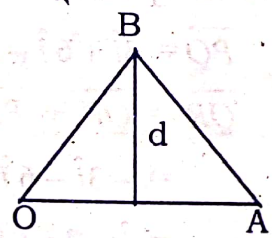
$$= \frac{(-\hat{i} - 4\hat{j} - 3\hat{k}) \cdot (\hat{i} - 7\hat{j} - 4\hat{k})}{\sqrt{1+16+9}\sqrt{1+49+16}}$$

$$= \frac{-1 + 28 + 12}{\sqrt{26}\sqrt{66}} = \frac{39}{\sqrt{1716}}$$

$$\angle OBA = \cos^{-1}\left(\frac{39}{\sqrt{1716}}\right)$$

15. (e) $\overrightarrow{OA} = 2\hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k}$ এবং $\overrightarrow{OB} = 6\hat{i} - 3\hat{j} - 2\hat{k}$ হলে, B বিন্দু হতে OA এর লম্ব দূরত্ব নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ ধরি, OAB ত্রিভুজে,



$\overrightarrow{OA} = 2\hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k}$,

$\overrightarrow{OB} = 6\hat{i} - 3\hat{j} - 2\hat{k}$ এবং

B বিন্দু হতে OA এর লম্ব দূরত্ব d.

$$\text{এখন, } \overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OB} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 2 & 2 & -1 \\ 6 & -3 & -2 \end{vmatrix}$$

$= (-4 - 3)\hat{i} - (-4 + 6)\hat{j} + (-6 - 12)\hat{k}$

$= -7\hat{i} - 2\hat{j} - 18\hat{k}$

$\therefore \Delta OAB = \frac{1}{2}|\overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OB}| = \frac{1}{2}|\overrightarrow{OA}| \times d$

$\Rightarrow \sqrt{7^2+2^2+18^2} = \sqrt{2^2+2^2+1^2}\ d$

$\Rightarrow d = \dfrac{\sqrt{377}}{\sqrt{9}} = \dfrac{\sqrt{377}}{3}$ একক। (Ans.)

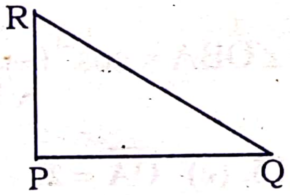
15(f) একটি আয়তাকার ঘনবস্তুর ধারগুলো $\vec{A} = 2\hat{i} - 3\hat{j} + 2\hat{k}$, $\vec{B} = \hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k}$, $\vec{C} = 3\hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k}$ ভেক্টর দ্বারা নির্দেশিত। ঘনবস্তুটির আয়তন নির্ণয় কর ।

সমাধান ঃ আয়তাকার ঘনবস্তুটির আয়তন

$$= \vec{A}\cdot(\vec{B}\times\vec{C}) = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix}$$

$= 2(4-1) + 3(2+3) + 2(-1-6)$
$= 6 + 15 - 14 = 7$ ঘন একক

15(g) একটি ত্রিভুজের দুইটি বাহু $\vec{A} = 3\hat{i} + 6\hat{j} - 2\hat{k}$, $\vec{B} = 4\hat{i} - \hat{j} + 3\hat{k}$ ভেক্টর দ্বারা নির্দেশিত। ত্রিভুজটির কোণগুলো নির্ণয় কর।



সমাধান ঃ ধরি, PQR ত্রিভুজে PQ ও PR বাহু দুইটি যথাক্রমে $\vec{A} = 3\hat{i} + 6\hat{j} - 2\hat{k}$ ও $\vec{B} = 4\hat{i} - \hat{j} + 3\hat{k}$ দ্বারা নির্দেশিত।

$\therefore\ \overrightarrow{PQ} = 3\hat{i} + 6\hat{j} - 2\hat{k}$ এবং $\overrightarrow{PR} = 4\hat{i} - \hat{j} + 3\hat{k}$

$\therefore\ \overrightarrow{QR} = \overrightarrow{QP} + \overrightarrow{PR}$

$= -3\hat{i} - 6\hat{j} + 2\hat{k} + 4\hat{i} - \hat{j} + 3\hat{k}$

$= \hat{i} - 7\hat{j} + 5\hat{k}$

$\therefore\ \cos QPR = \dfrac{\overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{PR}}{|\overrightarrow{PQ}||\overrightarrow{PR}|}$

$= \dfrac{(3\hat{i} + 6\hat{j} - 2\hat{k})\cdot(4\hat{i} - \hat{j} + 3\hat{k})}{\sqrt{9+36+4}\ \sqrt{16+1+9}}$

$= \dfrac{12-6-6}{\sqrt{49}\ \sqrt{26}} = \dfrac{0}{7\sqrt{26}} = 0 = \cos 90^0$

$\therefore\ \angle QPR = 90^0$

$\cos PQR = \dfrac{\overrightarrow{QP}\cdot\overrightarrow{QR}}{|\overrightarrow{QP}||\overrightarrow{QR}|}$

$= \dfrac{(-3\hat{i} - 6\hat{j} + 2\hat{k})\cdot(\hat{i} - 7\hat{j} + 5\hat{k})}{\sqrt{9+36+4}\ \sqrt{1+49+25}}$

$= \dfrac{-3+42+10}{\sqrt{49}\ \sqrt{75}} = \dfrac{49}{7\times 5\sqrt{3}} = \dfrac{7}{5\sqrt{3}}$

$\angle PQR = \cos^{-1}(\dfrac{7}{5\sqrt{3}})$ এবং

$\cos PRQ = \dfrac{\overrightarrow{RP}\cdot\overrightarrow{RQ}}{|\overrightarrow{RP}||\overrightarrow{RQ}|}$

$= \dfrac{(-4\hat{i} + \hat{j} - 3\hat{k})\cdot(-\hat{i} + 7\hat{j} - 5\hat{k})}{\sqrt{16+1+9}\ \sqrt{1+49+25}}$

$= \dfrac{4+7+15}{\sqrt{26}\ \sqrt{75}} = \dfrac{26}{\sqrt{26}\ 5\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{26}}{5\sqrt{3}}$

$\angle PQR = \cos^{-1}(\dfrac{\sqrt{26}}{5\sqrt{3}})$

$\therefore$ ত্রিভুজটির কোণগুলো 90^0 , $\cos^{-1}(\dfrac{7}{5\sqrt{3}})$ এবং $\cos^{-1}(\dfrac{\sqrt{26}}{5\sqrt{3}})$

15(h) একটি সামান্তরিকের কর্ণদ্বয় $\vec{A} = 3\hat{i} - 4\hat{j} - \hat{k}$ এবং $\vec{B} = 2\hat{i} + 3\hat{j} - 6\hat{k}$ ভেক্টর দ্বারা সূচিত। দেখাও যে, সামান্তরিকটি একটি রম্বস এবং এর ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

পমাণ ঃ $\vec{A}\cdot\vec{B} = (3\hat{i} - 4\hat{j} - \hat{k})\cdot(2\hat{i} + 3\hat{j} - 6\hat{k})$

$= 6 - 12 + 6 = 0.$

$\therefore$ সামান্তরিকের কর্ণদ্বয় পরস্পর লম্ব । অতএব, সামান্তরিকটি একটি রম্বস ।

এর ক্ষেত্রফল $= \dfrac{1}{2}|\vec{A}||\vec{B}|$

$= \dfrac{1}{2}\sqrt{3^2+4^2+1^2}\ \sqrt{2^2+3^2+6^2}$

$= \dfrac{1}{2}\sqrt{9+16+1}\ \sqrt{4+9+36}$

$= \dfrac{1}{2}\sqrt{1274} = 17.85$ বর্গ একক (প্রায়)

16.(a) $2\hat{i} + 3\hat{j} - 4\hat{k}$ বিন্দুগামী এবং $5\hat{i} + 6\hat{j} + 8\hat{k}$ ভেক্টরের সমান্তরাল সরলরেখার ভেক্টর সমীকরণ নির্ণয় কর।

সমাধান: ধরি, $\underline{a} = 2\hat{i}+3\hat{j}-4\hat{k}$ এবং $\underline{b} = 5\hat{i}+6\hat{j}+8\hat{k}$

$\underline{a}$ বিন্দুগামী এবং $\underline{b}$ ভেক্টরের সমান্তরাল সরলরেখার ভেক্টর সমীকরণ $\underline{r} = \underline{a} + t\underline{b}$, যেখানে t একটি প্যারামিটার।

$\therefore$ নির্ণেয় রেখার ভেক্টর সমীকরণ,

$\underline{r} = 2\hat{i}+3\hat{j}-4\hat{k} + t(5\hat{i}+6\hat{j}+8\hat{k})$

(b) $\hat{i}$ ও $\hat{j}$ **বিন্দুগামী সরলরেখার ভেক্টর সমীকরণ নির্ণয় কর।**

সমাধান: ধরি, $\underline{a} = \hat{i}$ ও $\underline{b} = \hat{j}$.

$\underline{a}$ ও $\underline{b}$ বিন্দুগামী সরলরেখার ভেক্টর সমীকরণ

$\underline{r} = \underline{a} + t(\underline{b} - \underline{a})$, যেখানে t একটি প্যারামিটার।

$\therefore$ নির্ণেয় রেখার ভেক্টর সমীকরণ,

$\underline{r} = \hat{i} + t(\hat{j} - \hat{i}) \Rightarrow \underline{r} = (1-t)\hat{i} + t\hat{j}$

(c) দেখাও যে, (2, −3, 4) এবং (5, 7, −8) বিন্দুগামী সরলরেখার ভেক্টর সমীকরণ $\underline{r} = (2+3t)\hat{i} + (-3+10t)\hat{j} + (4-12t)\hat{k}$ যেখানে t একটি প্যারামিটার। এর সাহায্যে এর কার্তেসীয় সমীকরণ নির্ণয় কর।

প্রমাণ : মনে করি, (2, −3, 4) বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর $\underline{a} = 2\hat{i}-3\hat{j}+4\hat{k}$ এবং (5, 7, −8) বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর $\underline{b} = 5\hat{i}+7\hat{j}-8\hat{k}$.

$\underline{a}$ ও $\underline{b}$ বিন্দুগামী সরলরেখার ভেক্টর সমীকরণ

$\underline{r} = \underline{a} + t(\underline{b} - \underline{a})$

$\Rightarrow \underline{r} = 2\hat{i}-3\hat{j}+4\hat{k} + t\{(5\hat{i}+7\hat{j}-8\hat{k}) - (2\hat{i}-3\hat{j}+4\hat{k})\}$

$\Rightarrow \underline{r} = 2\hat{i}-3\hat{j}+4\hat{k} + t(3\hat{i}+10\hat{j}-12\hat{k})$

$\therefore \underline{r} = (2+3t)\hat{i} + (-3+10t)\hat{j} + (4-12t)\hat{k}$

দ্বিতীয় অংশ: কার্তেসীয় সমীকরণের ক্ষেত্রে,

$\underline{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$

$\therefore$ আমরা পাই,

$x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k} = (2+3t)\hat{i} + (-3+10t)\hat{j} + (4-12t)\hat{k}$

উভয় পক্ষ হতে $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$ এর সহগ সমীকৃত করে পাই,

$x = 2+3t,\ y = -3+10t;\ z = 4-12t$

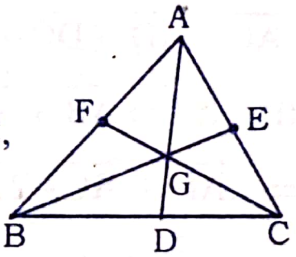
$$\Rightarrow \frac{x-2}{3} = t,\ \frac{y+3}{10} = t,\ \frac{z-4}{-12} = t$$

$\therefore$ নির্ণেয় কার্তেসীয় সমীকরণ,

$$\frac{x-2}{3} = \frac{y+3}{10} = \frac{z-4}{-12}$$

প্রশ্নমালা II C

1. ভেক্টর পদ্ধতিতে দেখাও যে, ত্রিভুজের মধ্যমা তিনটি সমবিন্দু। [ঢা. '১১,'১৪; রা. '১২; ব. '১০,'১৪; চ.'০৭; য.'১০; কু. '১০,'১২,'১৪; মা.বো.'০৯,'১২; দি.'১৪] প্রমাণ : মনে করি, ABC ত্রিভুজের B বিন্দুর সাপেক্ষে A ও C এর অবস্থান ভেক্টর যথাক্রমে $\underline{a}$ ও $\underline{c}$ এবং D, E, F বিন্দু তিনটি যথাক্রমে BC, CA, AB এর মধ্যবিন্দু ।



$\therefore$ D, E, F এর অবস্থান ভেক্টর যথাক্রমে $\frac{\underline{c}}{2}, \frac{\underline{c}+\underline{a}}{2}, \frac{\underline{a}}{2}$.

ধরি, BE ও CF মধ্যমা দুইটি যথাক্রমে m : 1 ও n : 1 অনুপাতে পরস্পরকে G বিন্দুতে ছেদ করে।

$\therefore$ G এর অবস্থান ভেক্টর $\dfrac{m\frac{\underline{c}+\underline{a}}{2}}{m+1} = \dfrac{m\underline{c}+m\underline{a}}{2(m+1)}$

এবং $\dfrac{n\frac{\underline{a}}{2}+\underline{c}}{n+1} = \dfrac{n\underline{a}+2\underline{c}}{2(n+1)}$ অভিন্ন হবে।

$$\therefore \frac{m}{2(m+1)} = \frac{n}{2(n+1)} \Rightarrow mn + m = mn + n$$

$$\Rightarrow m = n \text{ এবং } \frac{m}{2(m+1)} = \frac{2}{2(n+1)}$$

$$\Rightarrow \frac{m}{m+1} = \frac{2}{m+1} \ \therefore m = 2 = n$$

$\therefore$ BE ও CF মধ্যমা দুইটি 2 : 1 অনুপাতে পরস্পরকে G বিন্দুতে ছেদ করে।

অনুরূপভাবে প্রমাণ করা যায়, BE ও AD মধ্যমা দুইটি 2 : 1 অনুপাতে পরস্পরকে ছেদ করে। BE মধ্যমা একটি