তৃতীয় অধ্যায়	সরলরেখা (Straight line)

সূচনাঃ স্থানাঙ্ক = স্থান + অঙ্ক। স্থানাঙ্ক জ্যামিতিতে অবস্থান বা স্থানকে অঙ্কের সাহায্যে প্রকাশ করা হয়। অতএব, স্থানাঙ্ক জ্যামিতি গণিতের এমন একটি বিশেষ শাখা যেখানে বীজগণিতের সাহায্যে জ্যামিতি অধ্যায়ন করা হয়। বিখ্যাত ফরাসী দার্শনিক ও গণিতবিদ রেনে দেকার্তে (Rene Descartes) (1596 – 1650) সর্বপ্রথম জ্যামিতিতে গাণিতিক সূত্রের ব্যবহার করেন। এ অধ্যায়ে স্থানাঙ্ক জ্যামিতি পদ্ধতিতে সরলরেখা সম্পর্কে আলোচনা করা হয়েছে। গণিতবিদ Euclid সরলরেখাকে প্রস্থহীন দৈর্ঘ্য হিসাবে সংজ্ঞায়িত করেন। মূলত একটি বিন্দু-সেট দ্বারা সৃষ্ট সঞ্চারপথ দিক পরিবর্তন না করলে সে সঞ্চারপথকে সরলরেখা বলা হয়।

অধ্যায় শেষে পারীক্ষার্থীরা –

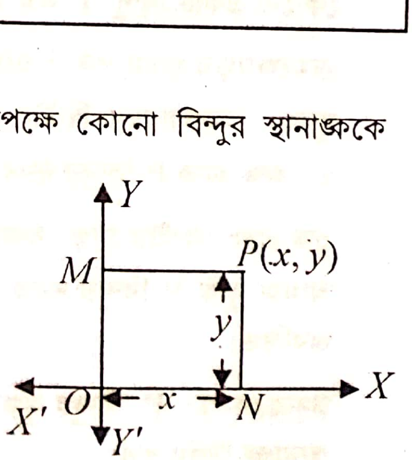
১. সমতলে কার্তেসীয় ও পোলার স্থানাঙ্কের ধারণা ব্যাখ্যা করতে পারবে; ২. কার্তেসীয় ও পোলার স্থানাঙ্কের মধ্যে সম্পর্ক প্রতিষ্ঠা ও প্রয়োগ করতে পারবে; ৩. দুইটি বিন্দুর মধ্যবর্তী দূরত্ব নির্ণয়ের সূত্র পতিষ্ঠা ও প্রয়োগ করতে পারবে; ৪. কোনো রেখাংশকে নির্দিষ্ট অনুপাতে বিভক্তকারী বিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় করতে পারবে; ৫. ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দুর স্থানাঙ্কের মাধ্যমে ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল নির্ণয়ের সূত্র পতিষ্ঠা ও প্রয়োগ করতে পারবে; ৬. সঞ্চারপথ কী ব্যাখ্যা করতে পারবে এবং দূরত সূত্র প্রয়োগ করে সঞ্চারপথের সমীকরণ নির্ণয় করতে পারবে; ৭. সরলরেখার ঢাল ব্যাখ্যা করতে পারবে; ৮. দুইটি বিন্দুর সংযোগ রেখার ঢাল নির্ণয় করতে পারবে; ৯. অক্ষের সমান্তরাল সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় করতে পারবে; ১০. বিভিন্ন আকারের সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় করতে পারবে; ১১. দুই চলকের একঘাত সমীকরণ একটি সরলরেখা প্রকাশ করে, প্রমাণ করতে পারে ; ১২. লেখচিত্রে সরলরেখা উপস্থাপন করতে পারবে; ১৩. দুইটি সরলরেখার ছেদবিন্দু নির্ণয় করতে পারবে; ১৪. y-অক্ষের সমান্তরাল নয় এমন দুইটি সরলরেখার অন্তর্ভুক্ত কোণ নির্ণয় করতে পারবে; ১৫. দুইটি সরলরেখার পরস্পর সমান্তরাল বা লম্ব হওয়ার শর্ত নির্ণয় করতে পারবে; ১৬. বিভিন্ন শর্তাধীনে সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় করতে পারবে; ১৭. কোনো বিন্দু থেকে একটি সরলরেখার লম্ব দূরত্ব নির্ণয় করতে পারবে; ১৮.দুইটি সরলরেখার অন্তর্ভুক্ত কোণের দ্বিখন্ডকের সমীকরণ নির্ণয় করতে পারবে।

(ব্যবহারিক)

১. রেখা বিভক্তকারী বিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় করতে পারবে; ২. শীর্ষবিন্দুর স্থানাঙ্কের মাধ্যমে ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল নির্ণয় করতে পারবে; ৩. সরলরেখার সমীকরণের লেখচিত্র অঙ্কন করতে পারবে; ৪. লেখচিত্র হতে সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় করতে পারবে; ৫. অক্ষরেখার সাপেক্ষে বিন্দু ও রেখাংশের প্রতিচ্ছবি নির্ণয় করতে পারবে; ৬. নির্দিষ্ট রেখার সাপেক্ষে বিন্দু ও রেখাংশের প্রতিচ্ছবি নির্ণয় করতে পারবে।

১. সমতলে কার্তেসীয় ও পোলার স্থানাঙ্ক

কার্তেসীয় স্থানাঙ্ক : পরস্পর সমকোণে ছেদ করে এরূপ একজোড়া সরলরেখার সাপেক্ষে কোনো বিন্দুর স্থানাঙ্ককে আয়তাকার কর্তেসীয় স্থানাঙ্ক বলা হয়।



মনে করি, কোনো সমতলে $X'OX$ ও YOY' সরলরেখা দুইটি পরস্পরকে O বিন্দুতে সমকোণে ছেদ করে। সমতলস্থ যেকোনো বিন্দু P হতে $X'X$ ও YY' এর উপর যথাক্রমে PN ও PM লম্ব অঙ্কন করি। ধরি, $ON = PM = x$ এবং $PN = OM = y$. তাহলে ON ও NP কে P এর স্থানাঙ্ক বলা হয় এবং x ও y দ্বারা P বিন্দুর অবস্থান নির্দেশিত হয়। সুতরাং x ও y এর মান জানা থাকলে P এর অবস্থান নির্ণয় করা যায়। x এবং y কে P বিন্দুর কার্তেসীয় স্থানাঙ্ক বলা হয় এবং P বিন্দুকে ক্রমজোড় (x, y) আকারে প্রকাশ করা হয়।

x কে ভুজ (abscissa) বা x-স্থানাঙ্ক এবং y কে কোটি (ordinate) বা y -স্থানাঙ্ক বলা হয়। $X'OX$ এবং YOY' কে স্থানাঙ্কের অক্ষ বা সংক্ষেপে অক্ষ বলা হয়। স্থানাঙ্কের অক্ষদ্বয়ের ছেদ বিন্দু O কে মূলবিন্দু বলা হয়।

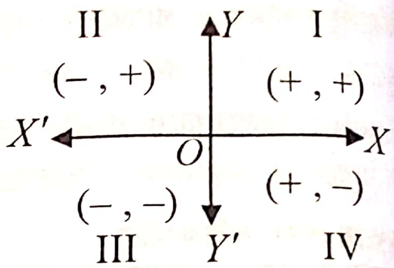
$X'OX$ ও YOY' অক্ষ দুইটি সমগ্র সমতলটিকে যে XOY, $X'OY$, $X'OY'$ এবং $Y'OX$ চারটি সমান ভাগে বিভক্ত করেছে, এদেরকে যথাক্রমে প্রথম, দ্বিতীয়, তৃতীয় এবং চতুর্থ চতুর্ভাগ বলে। বিভিন্ন চতুর্ভাগে কোন একটি বিন্দু এর চিহ্ন নিম্নে দেখানো হলোঃ

(i) প্রথম চতুর্ভগে x এবং y উভয়ে ধনাত্মক,

(ii) দ্বিতীয় চতুর্ভগে x ঋণাত্মক এবং y ধনাত্মক,

(iii) তৃতীয় চতুর্ভাগে x এবং y উভয়ে ঋণাত্মক ,

(iv) চতুর্থ চতুর্ভগে x ধনাত্মক এবং y ঋণাত্মক।



বি.দ্র.: (i) মূলবিন্দুর স্থানাংক O(0, 0).

(ii) x-অক্ষের উপর যেকোনো বিন্দুর কোটি বা y-স্থানাঙ্ক শূন্য। যেমন, (2 , 0), (– 3 , 0) , (– 4 , 0) ইত্যাদি বিন্দুগুলি x- অক্ষের উপর অবস্থিত।

(iii) y-অক্ষের উপর যেকোনো বিন্দুর ভূজ বা x - স্থানাঙ্ক শূন্য। যেমন, (0, – 3), (0 , 2), (0 , 5) ইত্যাদি বিন্দুগুলি y - অক্ষের উপর অবস্থিত।

সারসারিবন্দীঃ একটি বিন্দুর স্থানাঙ্ক বলতে আমরা বুঝি, অঙ্কের সাহায্যে একটি বিন্দুর স্থান বা অবস্থানের বর্ণনা। দ্বিমাত্রিক জ্যামিতিতে একটি বিন্দুর স্থানাঙ্ককে (x , y) ক্রমজোড়ের আকারে প্রকাশ করা হয়। ক্রোমজোড়ের প্রথম উপাদানকে বিন্দুর x- স্থানাঙ্ক বা ভুজ বলে এবং দ্বিতীয় উপাদানকে বিন্দুর y-স্থানাঙ্ক বা কোটি বলা হয়। ভুজের পরমমান $|x|$, y-অক্ষ থেকে বিন্দুটির দূরত্ব নির্দেশ করে এবং কোটির পরমমান $|y|$, x -অক্ষ থেকে বিন্দুটির দূরত্ব নির্দেশ করে। x ও y এর চিহ্ন থেকে বিন্দুটি কোন চতুর্ভাগে অবস্থিত তার নির্দেশনা আমরা পেয়ে থাকি।

x -অক্ষ থেকে একটি বিন্দুর দূরত্ব 3 একক হলে বিন্দুটির কোটি নির্ণয় কর?

ধরি, বিন্দুটির কোটি y । $\therefore$ x -অক্ষ থেকে বিন্দুটির দূরত্ব , $|y| = 3 \Rightarrow y = \pm 3$

y -অক্ষ থেকে একটি বিন্দুর দূরত্ব 4 একক হলে বিন্দুটির ভুজ নির্ণয় কর?

ধরি, বিন্দুটির কোটি $\cancel{y}$ x । $\therefore$ y -অক্ষ থেকে বিন্দুটির দূরত্ব , $|x| = 4 \Rightarrow x = \pm 4$

কোনো একটি বিন্দু P এর স্থানাঙ্ক (2 , – 3) বলতে আমরা কি বুঝি?

ক্রমজোড়ের প্রথম পদ 2 হচ্ছে P বিন্দুর x- স্থানাঙ্ক বা ভুজ। এর মান $|2| = 2$ নির্দেশ করে y-অক্ষ হতে P বিন্দুর দূরত্ব। ক্রমজোড়ের দ্বিতীয় পদ –3 হচ্ছে P বিন্দুর y-স্থানাঙ্ক বা কোটি। এর মান $|-3| = 3$ নির্দেশ করে x -অক্ষ হতে P বিন্দুর দূরত্ব।

ভুজ এবং কোটির চিহ্ন যথাক্রমে x এবং y-অক্ষের দিক নির্দেশ করে। সুতরাং P এর স্থানাঙ্ক (2 , – 3) বলতে আমরা বুঝি P বিন্দুর দূরত্ব y-অক্ষ হতে $|2| = 2$ এবং x -অক্ষ হতে $|-3| = 3$, এবং বিন্দুটি চতুর্থ চতুর্ভাগে অবস্থিত।

উদাহরণ–1: P বিন্দুর ভূজ 4 । x- অক্ষ হতে P বিন্দুর দূরত্ব y-অক্ষ হতে এর দূরত্বের দ্বিগুণ হলে, P বিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

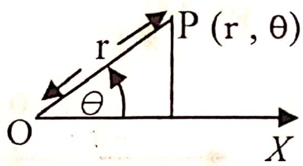
সমাধানঃ মরে করি, বিন্দুর স্থানাঙ্ক (4 , k).

$\therefore$ x- অক্ষ হতে P বিন্দুর দূরত্ব $= |k|$ এবং y-অক্ষ হতে P বিন্দুর দূরত্ব $= |4| = 4$

প্রশ্নমতে, $|k| = 2 \times 4 \Rightarrow k = \pm 8$

$\therefore$ P বিন্দুর স্থানাঙ্ক (4 , 8) অথবা, (4, – 8)

পোলার স্থানাংক (Polar coordinate system) : সমতলে কোনো একটি বিন্দুর অবস্থান নির্ণয় করার জন্য কর্তেসীয় স্থানাঙ্ক পদ্ধতি ছাড়াও আরেকটি পোলার স্থানাঙ্ক পদ্ধতি আছে। পোলার স্থানাঙ্ক পদ্ধতি দুই মাত্রার স্থানাঙ্ক পদ্ধতি যা দ্বারা সমতলে কোনো বিন্দুর দুইটি পোলার স্থানাঙ্ক নির্ণয় করা হয়। একটি বর্গমূলযুক্ত স্থানাঙ্ক এবং আরেকটি কোণযুক্ত স্থানাঙ্ক। বর্গমূলযুক্ত স্থানাঙ্ক হচ্ছে একটি কেন্দ্রীয় মান হতে কোনো বিন্দুর দূরত্ব । এ কেন্দ্রীয় মানকে মেরু বা পোল (*pole*) বলে যা কার্তেসীয় স্থানাঙ্কের মূলবিন্দু। বর্গমূলযুক্ত স্থানাঙ্ককে সাধারণত r *দ্বারা প্রকাশ করা হয় এবং ইহাকে ব্যাসার্ধ ভেক্টর* (radius vector) *বলা হয়।*



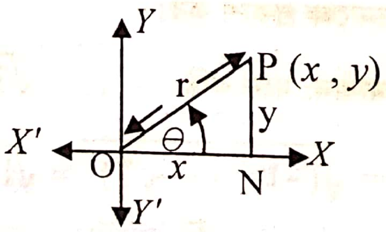
কোণযুক্ত স্থানাঙ্ক হচ্ছে 0° রশ্মি হতে সে বিন্দুতে পৌঁছতে যে কোণ উৎপন্ন হয়। 0° রশ্মিকে পোলার অক্ষ বা মেরু অক্ষ বা আদি রেখা বলা হয় যা কার্তেসীয় স্থানাঙ্কের x-অক্ষের ধনাত্মক দিক। কোণযুক্ত স্থানাঙ্ককে সাধারণত θ দ্বারা প্রকাশ করা হয় এবং ইহাকে ভেক্টর কোণ (vectorial angle) বলা হয়।

পোলার স্থানাঙ্কে একটি বিশেষ বৈশিষ্ট আছে যা কার্তেসীয় স্থানাঙ্কে নেই। তাহলো একটি বিন্দুর অসংখ্য ভিন্ন ভিন্ন পোলার স্থানাঙ্ক থাকতে পারে। কেননা কোনো একটি বিন্দুর প্রকৃত অবস্থার কোনোরূপ পরিবর্তন না করে পোলের চারিদিকে পোলার অক্ষের যেকোনো সংখ্যকবার ঘূর্ণায়ন সম্ভব। যেমন যেকোনো অখন্ড সংখ্যা n *এর জন্য* (r, θ) বিন্দুটিকে $(r , \theta \pm 2n\pi)$ আকারে প্রকাশ করা যায়।

একটি বিন্দুর পোলার স্থানাঙ্ক একভাবে প্রকাশের জন্য সাধারণত $r \geq 0$ এবং $0° \leq \theta < 360°$ বা, $-180° < \theta \leq 180°$ ধরা হয়।

২. কার্তেসীয় ও পোলার স্থানাঙ্কের সম্পর্ক : **[ব.'১৫]**

মনে করি, কোনো সমতলে X′OX ও YOY′ সরলরেখা দুইটি পরস্পরকে O বিন্দুতে সমকোণে ছেদ করে। মনে করি, P বিন্দুর কর্তেসীয় স্থানাঙ্ক (x , y) এবং পোলার স্থানাঙ্ক (r , θ) যখন O মেরু (মূলবিন্দু) এবং OX মেরু অক্ষ (x- অক্ষে ধনাত্মক দিক)। O, P যোগ করি এবং OX এর উপর লম্ব PN টানি। তাহলে, $ON = x$, $PN = y$, $OP = r$ এবং $\angle PON = \theta$.



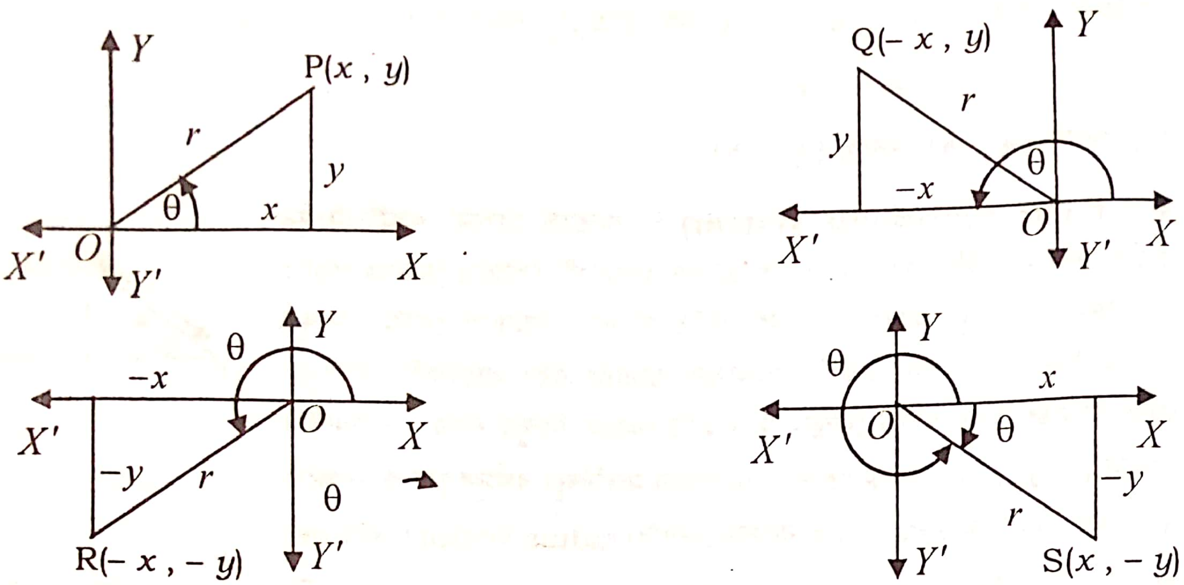
$$\therefore \sin\theta = \frac{PN}{OP} = \frac{y}{r} \quad \therefore y = r\sin\theta \cdots\cdots (1)$$

$$\cos\theta = \frac{ON}{OP} = \frac{x}{r} \quad \therefore x = r\cos\theta \cdots\cdots (2)$$

এখন, (1) ও (2) হতে $y^2 + x^2 = r^2(\sin^2\theta + \cos^2\theta) = r^2.1 = r^2 \quad \therefore r = \sqrt{x^2+y^2} \cdots (3)$

এবং $\dfrac{y}{x} = \dfrac{r\sin\theta}{r\cos\theta} = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta} = \tan\theta \quad \therefore \theta = \tan^{-1}\left(\dfrac{y}{x}\right) \cdots\cdots (4)$

$x > 0$ এবং $y > 0$ হলে $P(x , y)$, $Q(-x , y)$, $R(-x , -y)$ এবং $S(x, -y)$ বিন্দু চারটি যথাক্রমে প্রথম, দ্বিতীয়, তৃতীয় এবং চতুর্থ চতুর্ভাগে অবস্থিত।



∴ প্রথম চতুর্ভাগের বিন্দু $P(x, y)$ এর জন্য, $\theta = \tan^{-1}\dfrac{y}{x}$; $0 \le \theta < 2\pi$ অথবা, $-\pi < \theta \le \pi$

দ্বিতীয় চতুর্ভাগের বিন্দু $Q(-x, y)$ এর জন্য, $\theta = \tan^{-1}\dfrac{y}{-x} = \pi - \tan^{-1}\dfrac{y}{x}$; $0 \le \theta < 2\pi$ অথবা, $-\pi < \theta \le \pi$

তৃতীয় চতুর্ভাগের বিন্দু $R(-x, -y)$ এর জন্য, $\theta = \tan^{-1}\dfrac{-y}{-x} = \pi + \tan^{-1}\dfrac{y}{x}$; যখন $0 \le \theta < 2\pi$

$$= -\pi + \tan^{-1}\frac{y}{x}\ ;\ \text{যখন}\ -\pi < \theta \le \pi$$

চতুর্থ চতুর্ভাগের বিন্দু $S(x, -y)$ এর জন্য, $\theta = \tan^{-1}\dfrac{-y}{x} = 2\pi - \tan^{-1}\dfrac{y}{x}$; যখন $0 \le \theta < 2\pi$

$$= -\tan^{-1}\frac{y}{x}\ ;\ \text{যখন}\ -\pi < \theta \le \pi$$

উদাহরণ 2. $(-1, -\sqrt{3})$ কার্তেসীয় স্থানাঙ্ককে পোলার স্থানাঙ্কে, এবং $(4, \dfrac{\pi}{4})$ পোলার স্থানাঙ্ককে কার্তেসীয় স্থানাঙ্কে প্রকাশ কর।

সমাধান: মনে করি, $(-1, -\sqrt{3})$ বিন্দুর পোলার স্থানাঙ্ক (r, θ) ; যেখানে,

$r = \sqrt{(-1)^2 + (-\sqrt{3})^2} = \sqrt{1+3} = 2$ এবং

$$\theta = \tan^{-1}\frac{-\sqrt{3}}{-1} = \pi + \tan^{-1}(\sqrt{3}) = \pi + \frac{\pi}{3} = \frac{4\pi}{3}$$

∴ প্রদত্ত বিন্দুর পোলার স্থানাঙ্ক $(2, \dfrac{4\pi}{3})$

এখন, মনে করি, $(4, \dfrac{\pi}{4})$ বিন্দুর কার্তেসীয় স্থানাঙ্ক (x, y).

$\therefore\ x = 4\cos\frac{\pi}{4} = 4\,.\frac{1}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$ এবং $y = 4\sin\frac{\pi}{4} = 4.\frac{1}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$.

$\therefore$ প্রদত্ত বিন্দুর কার্তেসীয় স্থানাঙ্ক $(2\sqrt{2}\,, 2\sqrt{2}\,)$

উদাহরণ 3. $\mathbf{r(1+\cos\theta) = 2}$ পোলার সমীকরণকে কার্তেসীয় সমীকরণে প্রকাশ কর। [কু.'০৮]

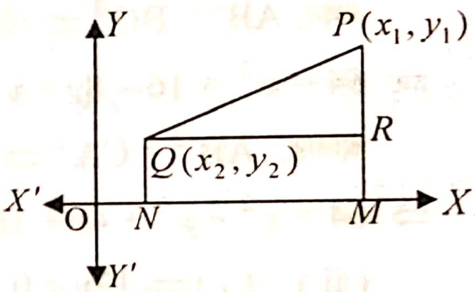
সমাধানঃ $r(1+\cos\theta) = 2 \Rightarrow r + r\cos\theta = 2 \Rightarrow \sqrt{x^2+y^2} + x = 2$ $[\because r = \sqrt{x^2+y^2}\,,\ r\cos\theta = x]$

$\Rightarrow \sqrt{x^2+y^2} = 2 - x \Rightarrow x^2 + y^2 = 4 - 4x + x^2$ [বর্গ করে]

$\therefore$ নির্ণেয় কার্তেসীয় সমীকরণ, $y^2 = 4 - 4x$

৩. দুইটি বিন্দুর মধ্যবর্তী দূরত্ব (Distance between two points) :

(i) কার্তেসীয় স্থানাঙ্কঃ মনে করি, $P(x_1, y_1)$ এবং $Q(x_2, y_2)$ দুইটি বিন্দু। P এবং Q হতে OX এর উপর যথাক্রমে PM এবং QN লম্ব অঙ্কন করি। তাহলে, $OM = x_1, PM = y_1, ON = x_2, QN = y_2$



$QR = NM = OM - ON = x_1 - x_2$

$PR = PM - RM = PM - QN = y_1 - y_2$

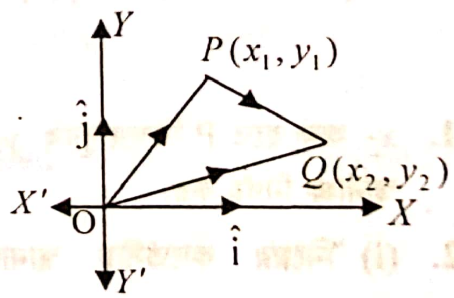
PQR সমকোণী ত্রিভুজ হতে আমরা পাই,

$PQ^2 = QR^2 + PR^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2$

$\therefore\ PQ = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$ [$\because$ দূরত্ব সর্বদা ধনাত্মক।]

$\therefore$ $\boxed{\text{দুইটি বিন্দুর দূরত্ব} = \sqrt{(\text{ভূজদ্বয়ের বিয়োগফল})^2 + (\text{কোটিদ্বয়ের বিয়োগফল})^2}}$

ভেক্টর পদ্ধতি: মনে করি, $P(x_1, y_1)$ এবং $Q(x_2, y_2)$ দুইটি বিন্দু । O বিন্দুর সাপেক্ষে বিন্দুদ্বয়ের অবস্থান ভেক্টর যথাক্রমে $\overrightarrow{OP} = x_1\hat{i} + y_1\hat{j}$ এবং $\overrightarrow{OQ} = x_2\hat{i} + y_2\hat{j}$ ।



ΔOPQ হতে পাই, $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP} = x_2\hat{i} + y_2\hat{j} - x_1\hat{i} - y_1\hat{j}$

$= (x_2 - x_1)\hat{i} + (y_2 - y_1)\hat{j}$

$\therefore$ P ও Q বিন্দুর দূরত্ব $= |\overrightarrow{PQ}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$

যেমন, $(1\,, 2)$ ও $(-2\,, 6)$ বিন্দুদ্বয়ের দূরত্ব $= \sqrt{(1+2)^2 + (2-6)^2} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$

অনুসিদ্ধান্ত : (x_1, y_1) এবং মূলবিন্দুর মধ্যবর্তী দূরত্ব $= \sqrt{(x_1 - 0)^2 + (y_1 - 0)^2} = \sqrt{x_1^2 + y_1^2}$

$P(x_1, \beta)$ ও $Q(x_2, \beta)$ বিন্দুর মধ্যবর্তী দূরত্ব $= \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (\beta - \beta)^2} = \sqrt{(x_1 - x_2)^2} = |x_1 - x_2|$

$P(\alpha, y_1)$ ও $Q(\alpha, y_2)$ বিন্দুর মধ্যবর্তী দূরত্ব $= |y_1 - y_2|$

যেমন, $(12\,, 3)$ ও $(-2\,, 3)$ বিন্দুর মধ্যবর্তী দূরত্ব $= |12 - (-2)| = |12 + 2| = 14$

$(0\,, 8)$ ও $(0\,, 1)$ বিন্দুর মধ্যবর্তী দূরত্ব $= |8 - 1| = 7$

(ii) পোলার স্থানাঙ্কঃ $A(r_1,\theta_1)$ ও $B(r_2,\theta_2)$ বিন্দুদ্বয়ের কার্তেসীয় স্থানাঙ্ক যথাক্রমে $A(r_1\cos\theta_1, r_1\sin\theta_1)$ ও $B(r_2\cos\theta_2, r_2\sin\theta_2)$।

$$\therefore\ AB=\sqrt{(r_1\cos\theta_1-r_2\cos\theta_2)^2+(r_1\sin\theta_1-r_2\sin\theta_2)^2}$$

$$=\sqrt{r_1^2(\cos^2\theta_1+\sin^2\theta_1)+r_2^2(\cos^2\theta_2+\sin^2\theta_2)-2r_1r_2(\cos\theta_1\cos\theta_2+\sin\theta_1\sin\theta_2)}$$

$$=\sqrt{r_1^2+r_2^2-2r_1r_2\cos(\theta_1-\theta_2)}$$

উদাহরণ –4. একটি সমবাহু ত্রিভুজের দুইটি শীর্ষবিন্দুর স্থানাঙ্ক (0 , – 4) এবং (0 , 4) হলে তৃতীয় শীর্ষবিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর। [রা.'০৫; সি.'০৯,'১৩]

সমাধানঃ মনে করি, ABC ত্রিভুজের শীর্ষত্রয় $A(0,-4)$, $B(0,4)$ এবং $C(x,y)$.

$\therefore\ AB=BC=CA \Rightarrow AB^2=BC^2=CA^2$

এখন, $AB^2=BC^2 \Rightarrow (0-0)^2+(-4-4)^2=(0-x)^2+(4-y)^2$

$\Rightarrow 64=x^2+16-8y+y^2 \Rightarrow x^2+y^2-8y=48 \cdots\cdots\cdots (i)$

আবার, $AB^2=CA^2 \Rightarrow 64=(x-0)^2+(y+4)^2=x^2+y^2+4y+16$

$\Rightarrow 64=x^2+y^2+4y+16 \Rightarrow x^2+y^2+4y=48 \cdots\cdots\cdots (ii)$

$(ii)-(i) \Rightarrow 12y=0\ \therefore\ y=0$

y এর মান (i) সমীকরণে বসিয়ে পাই, $x^2=48=(4\sqrt{3})^2\ \therefore x=\pm 4\sqrt{3}$

$\therefore$ তৃতীয় শীর্ষের স্থানাঙ্ক $(4\sqrt{3},0)$ বা, $(-4\sqrt{3},0)$.

প্রশ্নমালা III A

1. x- অক্ষ হতে P বিন্দুর দূরত্ব y-অক্ষ হতে এর দূরত্বের দ্বিগুণ। x- অক্ষ হতে এর দূরত্ব 4 একক হলে, P বিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর। উত্তরঃ (2 , 4) বা, (2 , – 4) বা, (– 2 , 4) বা, (– 2 , –4)

2. **(i) নিম্নের কার্তেসীয় স্থানাঙ্ককে পোলার স্থানাঙ্কে প্রকাশ কর, যখন $r\geq 0$ এবং $\theta\in[0,2\pi[$ অথবা, $\theta\in]-\pi,\pi]$:**

(a) $(-1,-\sqrt{3})$ **(b)** $(1,-\sqrt{3})$

উঃ (a) $(2,\frac{4\pi}{3})$ or, $(2,-\frac{2\pi}{3})$ (b) $(2,\frac{5\pi}{3})$ or, $(2,-\frac{\pi}{3})$.

(ii) নিম্নের পোলার স্থানাঙ্ককে কার্তেসীয় স্থানাঙ্কে প্রকাশ কর :

(a) $(\sqrt{2},\frac{5\pi}{4})$ **(b)** $(-2,120^\circ)$ **(c)** $(\sqrt{2},-\frac{\pi}{4})$

উঃ (a) $(-1,-1)$ (b) $(1,-\sqrt{3})$ (c) $(1,-1)$

3. **পোলার সমীকরণকে কার্তেসীয় সমীকরণে এবং কার্তেসীয় সমীকরণকে পোলার সমীকরণে প্রকাশ করঃ**

(a) $y = x\cot\alpha$ (b) $r^2 = a^2\cos 2\theta$. উঃ (a) $\theta = \frac{\pi}{2} - \alpha$ (b) $(x^2+y^2)^2 = a^2(x^2-y^2)$

4. (a) দেখাও যে, $(2\sqrt{3}, 90°)$, $(2, 120°)$ এবং $(2, 60°)$ বিন্দুগুলি একটি সমবাহু ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দু।

(b) $P(4, 0)$ এবং $Q(0, 4)$ বিন্দুদ্বয় একটি সমবাহু ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দু হলে তৃতীয় শীর্ষের স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

উত্তর : $(2+2\sqrt{3}, 2+2\sqrt{3})$, $(2-2\sqrt{3}, 2-2\sqrt{3})$

(c) A ও B দুইটি স্থির বিন্দুর স্থানাঙ্ক যথাক্রমে $(3, 4)$ ও $(3, 6)$ । AB বাহুর উপর অঙ্কিত সমবাহু ত্রিভুজ ABC এর C বিন্দুটি AB রেখার সাপেক্ষে মূলবিন্দুর বিপরীত পাশে অবস্থিত হলে, C বিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

উত্তরঃ $(3+\sqrt{3}, 5)$

5. (a) দেখাও যে, $(1, 1)$, $(-4, 13)$, $(8, 8)$ এবং $(13, -4)$ বিন্দুগুলি একটি রম্বসের কৌণিক বিন্দু। [দি.'১১]

(b) দেখাও যে, $A(a, b)$, $B(a+\alpha, b+\beta)$, $C(a+\alpha+p, b+\beta+q)$ এবং $D(a+p, b+q)$ বিন্দুগুলি একটি সামান্তরিক উৎপন্ন করে। কী শর্তে ABCD (i) একটি আয়তক্ষেত্র (ii) একটি রম্বস তা নির্ণয় কর।

উত্তর : (i) $\alpha p + \beta q = 0$ (ii) $\alpha^2 + \beta^2 = p^2 + q^2$.

6. (a) কোনো বিন্দুর কোটি 6 এবং (5,6) হতে বিন্দুটির দূরত্ব 4 একক হলে, বিন্দুটির ভুজ নির্ণয় কর। [কু.'১১]

(b) দেখাও যে, a এর যেকোনো মানের জন্য $B(\sqrt{3}+1, 3\sqrt{3})$ এবং $C(3\sqrt{3}+1, \sqrt{3})$ বিন্দু থেকে $A(a+1, a)$ বিন্দুর দূরত্ব সমান। ABC সমবাহু ত্রিভুজ হলে a এর মান নির্ণয় কর।

(c) y-অক্ষ এবং $(7, 2)$ বিন্দু থেকে $(a, 5)$ বিন্দুটির দূরত্ব সমান হলে, a এর মান নির্ণয় কর।

[সি. '০৩; রা. '০৪,'১০; য. '০৬,'১০; কু. '০৭; চ.'১০; ঢা.'১৩]

(d) x–অক্ষ এবং $(-5, -7)$ বিন্দু থেকে $(4, k)$ বিন্দুটির দূরত্ব সমান হলে, k এর মান নির্ণয় কর। [মা.বো.'১৩]

উ: (a) 9 বা,1 (b) $2\sqrt{3} \pm 3$, (c) $29/7$ (d) $-65/7$

7. (a) $(5, 7)$, $(-1, -1)$ ও $(-2, 6)$ বিন্দুত্রয় একটি বৃত্তের পরিধির উপর অবস্থিত । এর কেন্দ্রের স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর। উ: $(2, 3)$

Similar

(b) একটি বৃত্তের ব্যাসার্ধ 5, কেন্দ্রের স্থানাঙ্ক $(5, 3)$; এর যে জ্যা $(3, 2)$ বিন্দুতে সমদ্বিখন্ডিত হয় তার দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর। উ: $4\sqrt{5}$ একক। [কু. '১০; চ.'১৩]

(c) $(11, 2)$ কেন্দ্র ও 10 ব্যাসার্ধ বিশিষ্ট বৃত্তের যে জ্যা $(2, -1)$ বিন্দুতে সমদ্বিখন্ডিত হয় তার দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

উ: $2\sqrt{10}$ একক। [ব.'১১]

সম্ভাব্য ধাপসহ সমস্যা :

8. P বিন্দুর কোটি -6 । x- অক্ষ হতে P বিন্দুর দূরত্ব y-অক্ষ হতে এর দূরত্বের অর্ধেক হলে, P বিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর। উ: $(12, -6)$ বা, $(-12, -6)$ (৪)

9. $(1, 1)$ ও $(-\sqrt{3}, 1)$ কে পোলার স্থানাঙ্কে প্রকাশ কর, যখন $r \geq 0$ এবং $\theta \in [0, 2\pi[$ অথবা, $\theta \in]-\pi, \pi]$. উ: $(\sqrt{2}, \frac{\pi}{4})$, $(2, \frac{5\pi}{6})$ (৩), (৪)

10. $(4, \frac{\pi}{3})$ ও $(\sqrt{2}, -\frac{3\pi}{4})$ কে কার্তেসীয় স্থানাঙ্কে প্রকাশ কর। উ: $(2, 2\sqrt{3})$, $(-1, -1)$ (২), (৩)

11. $x^2 - y^2 = a^2$ কে পোলার সমীকরণে এবং $r^2 \sin 2\theta = 2a^2$ কে কার্তেসীয় সমীকরণে প্রকাশ কর। (৪)

উ: $r^2 \cos 2\theta = a^2$, $xy = a^2$

12. দেখাও যে, (3, 8) , (8 , 3) এবং (– 2 , 3) বিন্দুগুলি একটি সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দু। (২)

13. দেখাও যে, (4 , 4) , (5 , 2) এবং (1 , 0) বিন্দুগুলি একটি সমকোণী ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দু এবং ত্রিভুজটির ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। (৪)

14. দেখাও যে, A (– 3 , 2) , B (– 7 , – 5) , C(5, 4) এবং D(9, 11) বিন্দুগুলি একটি সামান্তরিকের শীর্ষবিন্দু। (২)

15. দেখাও যে, (0 , 7), (4 , 9), (6, 5) এবং (2, 3) বিন্দুগুলি একটি বর্গের শীর্ষবিন্দু। (২)

16. x-অক্ষের উপর অবস্থিত P বিন্দু থেকে (0 , 2) এবং (6, 4) এর দূরত্ব সমান। P এর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর। (২)

উ: (4, 0)

17. দেখাও যে, (2, – 2) , (8, 4), (5, 7) এবং (–1, 1) বিন্দুগুলি একটি আয়তের কৌনিক বিন্দু। (২)

18. $(a + b\ ,\ b - a)$ এবং $(a - b\ ,\ a + b)$ বিন্দু থেকে $(x\ ,\ y)$ বিন্দুর দূরত্ব সমান হলে, দেখাও যে, $bx - ay = 0$. (২)

19. কোনো বৃত্তের একটি ব্যাসের প্রান্তবিন্দুদ্বয়ের স্থানাঙ্ক (5, 2) ও (–3 , – 4) হলে, এর ব্যাসার্ধ নির্ণয় কর। (২)

উ: 5 একক

20. দেখাও যে, $(a\ ,a)$, $(-a\ ,-a)$ এবং $(-a\sqrt{3}\ ,a\sqrt{3})$ বিন্দুগুলি একটি সমবাহু ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দু। (২)

সৃজনশীল প্রশ্ন:

21. A(4 , 3), B$(-1, -\sqrt{3})$ ও C$(4, \frac{\pi}{4})$ তিনটি বিন্দু।

ক. $(-4\ , \frac{\pi}{4})$ পোলার স্থানাঙ্ককে কার্তেসীয় স্থানাঙ্কে প্রকাশ কর।

খ. A বিন্দু হতে $\sqrt{10}$ একক দূরত্বে অবস্থিত একটি বিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর যার কোটি ভুজের দ্বিগুণ।

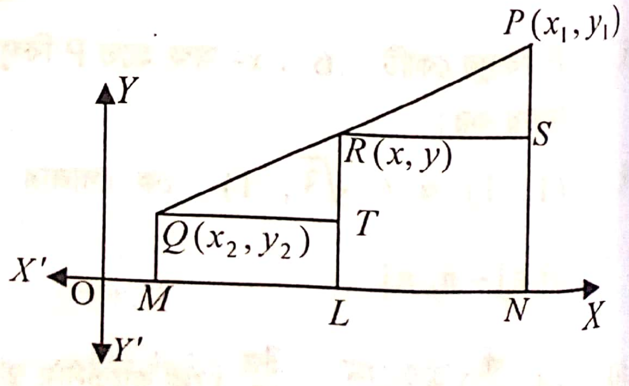
[রা.'০২;'০৭; মা.বো. '০৫,'০৮,'১২, '১৪; ঢা.'১১; দি.'১৩]

গ. B এর কার্তেসীয় স্থানাঙ্ককে পোলার স্থানাঙ্কে প্রকাশ করে BC নির্ণয় কর।

উ: (a) $(-2\sqrt{2}\ , -2\sqrt{2})$ (b) (1, 2) বা, (3 , 6) (c) $\sqrt{20+8\sqrt{2}}$ একক

৪. **বিভক্তিকরণ সূত্র (Section formulae):**

(i) কার্তেসীয় জ্যামিতিক পদ্ধতি



অন্তর্বিভক্তকরণ সূত্রঃ মনে করি, $P(x_1, y_1)$ এবং $Q(x_2, y_2)$ বিন্দুদ্বয়ের সংযোগ রেখাংশ $R(x,y)$ বিন্দুতে $m_1 : m_2$ অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত হয়। $R(x,\ y)$ বিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় করতে হবে। এখানে PR:RQ $= m_1 :\ m_2$