সরলরেখা

প্রশ্নমালা III A

এক নজরে প্রয়োজনীয় সূত্রাবলী ঃ

- $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ হলে, $r = \sqrt{x^2+y^2}$, $\theta = \tan^{-1}\dfrac{y}{x}$
- (i) $P(x, y)$ বিন্দুর দূরত্ব x-অক্ষ হতে $= |y|$ এবং y-অক্ষ হতে $= |x|$

  (ii) $P(x_1, y_1)$ এবং $Q(x_2, y_2)$ বিন্দুদ্বয়ের মধ্যবর্তী দূরত্ব $= \sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$

  (iii) $P(r_1, \theta_1)$ এবং $Q(r_2, \theta_2)$ বিন্দুদ্বয়ের মধ্যবর্তী দূরত্ব $= \sqrt{r_1^{\,2}+r_2^{\,2}-2r_1r_2\cos(\theta_1-\theta_2)}$

3. (i) $P(x_1, y_1)$ এবং $Q(x_2, y_2)$ বিন্দুদ্বয়ের সংযোগ রেখাংশকে $R(x, y)$ বিন্দু $m_1 : m_2$ অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত করলে, $R \equiv \left(\dfrac{m_1x_2+m_2x_1}{m_1+m_2}, \dfrac{m_1y_2+m_2y_1}{m_1+m_2}\right)$, $\dfrac{m_1}{m_2} = \dfrac{x_1-x}{x-x_2} = \dfrac{y_1-y}{y-y_2}$

   বহির্বিভক্ত করলে, $R \equiv \left(\dfrac{m_1x_2-m_2x_1}{m_1-m_2}, \dfrac{m_1y_2-m_2y_1}{m_1-m_2}\right)$, $\dfrac{m_1}{m_2} = \dfrac{x_1-x_2}{x_2-x} = \dfrac{y_1-y_2}{y_2-y}$

   (ii) $P(x_1, y_1)$ এবং $Q(x_2, y_2)$ বিন্দুদ্বয়ের সংযোগ রেখার মধ্যবিন্দুর স্থানাঙ্ক $\left(\dfrac{x_1+x_2}{2}, \dfrac{y_1+y_2}{2}\right)$

   (iii) $P(x_1, y_1)$ এবং $Q(x_2, y_2)$ বিন্দুদ্বয়ের সংযোগ রেখাকে $k:1$ অনুপাতে অন্তর্বিভক্তকারী বিন্দুর স্থানাঙ্ক $\left(\dfrac{kx_2+x_1}{k+1}, \dfrac{ky_2+y_1}{k+1}\right)$

4. (x_1, y_1), (x_2, y_2) এবং (x_3, y_3) শীর্ষ বিশিষ্ট ত্রিভুজের ভরকেন্দ্রের স্থানাঙ্ক $\left(\dfrac{x_1+x_2+x_3}{3}, \dfrac{y_1+y_2+y_3}{3}\right)$

5. ABC ত্রিভুজের শীর্ষত্রয় $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ এবং $C(x_3, y_3)$ হলে, বিন্দুত্রয়ের নিশ্চায়ক,

$$\delta_{ABC} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_2 & x_3 \\ y_2 & y_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_3 & x_1 \\ y_3 & y_1 \end{vmatrix} = (x_1y_2+x_2y_3+x_3y_1)-(y_1x_2+y_2x_3+y_3x_1)$$

$= (x_1-x_2)(y_2-y_3)-(y_1-y_2)(x_2-x_3)$ এবং $\Delta ABC = \dfrac{1}{2}\,|\,\delta_{ABC}\,| = \dfrac{1}{2}\left|\begin{matrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_1 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_1 \end{matrix}\right|$ বর্গ একক

6. (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) বিন্দুগুলি সমরেখ হলে, $(x_1-x_2)(y_2-y_3)-(y_1-y_2)(x_2-x_3) = 0$.

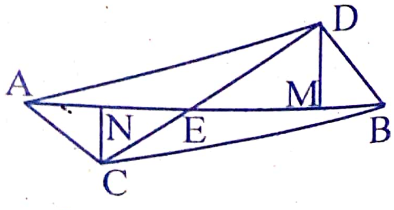
7. ABCD চতুর্ভুজের ক্ষেত্রফল $= \dfrac{1}{2}\,|(x_1y_2+x_2y_3+x_3y_4+x_4y_1)-(y_1x_2+y_2x_3+y_3x_4+y_4x_1)|$

8. C ও D বিন্দুদ্বয় AB রেখার একই পার্শ্বে হলে , $\delta_{ABC} \times \delta_{ABD} > 0$ এবং বিপরীত পার্শ্বে হলে, $\delta_{ABC} \times \delta_{ABD} < 0$

9. AB রেখাটি CD রেখাংশকে E বিন্দুতে $m_1 : m_2$ অনুপতে বিভক্ত করলে $\dfrac{CE}{DE} = \dfrac{m_1}{m_2} = \dfrac{\delta_{ABC}}{\delta_{ABD}}$.

প্রমাণ ঃ AB এর উপর CN ও DM লম্ব হলে, ΔCNE ও ΔDME সদৃশ।

$\therefore \dfrac{CN}{DM} = \dfrac{CE}{DE} = \dfrac{m_1}{m_2}$ $\therefore \dfrac{\Delta ABC}{\Delta ABD} = \dfrac{\frac{1}{2}\delta_{ABC}}{\frac{1}{2}\delta_{ABD}} = \dfrac{\frac{1}{2}AB \times CN}{\frac{1}{2}AB \times DM} = \dfrac{m_1}{m_2}$



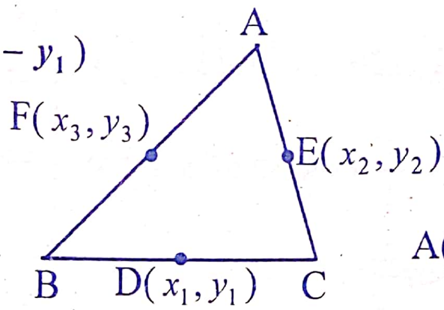
$$\Rightarrow \frac{m_1}{m_2} = \frac{\delta_{ABC}}{\delta_{ABD}}$$

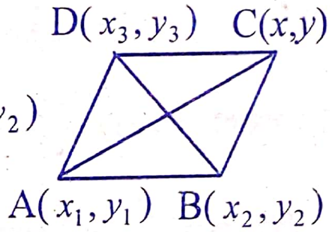
ক্রম ভিন্ন বলে অনুপাত ঋণাত্মক হবে। অতএব, অনুপাত (+) হলে বহির্বিভক্ত করবে এবং (–) হলে অন্তর্বিভক্ত করবে।

MCQ এর জন্য, 1. $A \equiv (x_2 + x_3 - x_1, y_2 + y_3 - y_1)$

$B \equiv (x_1 + x_3 - x_2, y_1 + y_3 - y_2)$

$C \equiv (x_1 + x_2 - x_3, y_1 + y_2 - y_3)$





2. ABCD সামান্তরিকের চতুর্থ শীর্ষের স্থানাঙ্ক

$(x, y) = (x_2 + x_3 - x_1, y_2 + y_3 - y_1)$

3. (x_1, y_1) এবং (x_2, y_2) বিন্দুদ্বয় একটি সমবাহু ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দু হলে তৃতীয় শীর্ষের স্থানাঙ্ক

$$\left(\frac{x_1 + x_2 + \sqrt{3}(y_1 - y_2)}{2}, \frac{y_1 + y_2 - \sqrt{3}(x_1 - x_2)}{2}\right) \text{ বা, } \left(\frac{x_1 + x_2 - \sqrt{3}(y_1 - y_2)}{2}, \frac{y_1 + y_2 + \sqrt{3}(x_1 - x_2)}{2}\right)$$

প্রশ্নমালা III A

1. x- অক্ষ হতে P বিন্দুর দূরত্ব y-অক্ষ হতে এর দূরত্বের দ্বিগুণ। x- অক্ষ হতে এর দূরত্ব 4 একক হলে, P বিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

সমাধান : মনে করি, P বিন্দুর স্থানাঙ্ক (α, β).

$\therefore$ x- অক্ষ হতে P বিন্দুর দূরত্ব $= |\beta|$ এবং

y-অক্ষ হতে P বিন্দুর দূরত্ব $= |\alpha|$

$\therefore$ প্রশ্নমতে, $|\beta| = 4 \Rightarrow \beta = \pm 4$ এবং

$|\beta| = 2|\alpha| \Rightarrow 2|\alpha| = 4$

$\Rightarrow |\alpha| = 2 \Rightarrow \alpha = \pm 2$

$\therefore$ P বিন্দুর স্থানাঙ্ক $(2, 4)$, $(2, -4)$, $(-2, 4)$ অথবা, $(-2, -4)$

2(i) কার্তেসীয় স্থানাঙ্ককে পোলার স্থানাঙ্কে প্রকাশ কর, যখন $r \geq 0$ এবং $\theta \in [0, 2\pi[$ অথবা, $\theta \in]-\pi, \pi]$

(a) $(-1, -\sqrt{3})$ (b) $(1, -\sqrt{3})$

সমাধান ঃ **(a)** ধরি, $(-1, -\sqrt{3})$ এর পোলার স্থানাঙ্ক (r, θ).

$\therefore$ $r = \sqrt{(-1)^2 + (-\sqrt{3})^2} = 2$ এবং

$\theta \in [0, 2\pi[$ হলে, $\theta = \tan^{-1}\frac{-\sqrt{3}}{-1}$

$= \pi + \tan^{-1}\sqrt{3} = \pi + \frac{\pi}{3} = \frac{4\pi}{3}$

$\theta \in]-\pi, \pi]$ হলে, $\theta = \tan^{-1}\frac{-\sqrt{3}}{-1}$

$= -\pi + \tan^{-1}\sqrt{3} = -\pi + \frac{\pi}{3} = -\frac{2\pi}{3}$

$\therefore$ $(-\sqrt{3}, 1)$ এর পোলার স্থানাঙ্ক $(2, \frac{4\pi}{3})$ অথবা, $(2, -\frac{2\pi}{3})$.

(b) ধরি, $(1, -\sqrt{3})$ এর পোলার স্থানাঙ্ক (r, θ).

$\therefore$ $r = \sqrt{(-\sqrt{3})^2 + 1^2} = 2$ এবং

$\theta \in]-\pi, \pi]$ হলে, $\theta = \tan^{-1}\frac{-\sqrt{3}}{1}$

$= -\tan^{-1}\sqrt{3} = -\frac{\pi}{3}$

$\theta \in]-\pi, \pi]$ হলে, $\theta = \tan^{-1}\frac{-\sqrt{3}}{1}$

$= 2\pi - \tan^{-1}\sqrt{3} = 2\pi - \frac{\pi}{3} = \frac{5\pi}{3}$

$\therefore$ $(1, -\sqrt{3})$ এর পোলার স্থানাঙ্ক $(2, -\frac{\pi}{3})$.

বা, $(2, \frac{5\pi}{3})$

(ii) পোলার স্থানাঙ্ককে কার্তেসীয় স্থানাঙ্কে প্রকাশ কর ঃ

(a) $(\sqrt{2}, \frac{5\pi}{4})$ (b) $(-2, 120°)$ (c) $(\sqrt{2}, -\frac{\pi}{4})$

2(ii) সমাধান ঃ (a) $(\sqrt{2}, \frac{5\pi}{4})$ এর কার্তেসীয় স্থানাঙ্ক

$= (\sqrt{2}\cos\frac{5\pi}{4}, \sqrt{2}\sin\frac{5\pi}{4})$

$= (\sqrt{2}\cos(\pi + \frac{\pi}{4}), \sqrt{2}\sin(\pi + \frac{\pi}{4}))$

$= (\sqrt{2}\cos(\pi + \frac{\pi}{4}), \sqrt{2}\sin(\pi + \frac{\pi}{4}))$

$= (-\sqrt{2}\cos\frac{\pi}{4}, -\sqrt{2}\sin\frac{\pi}{4})$

$= (-\sqrt{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}, -\sqrt{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}) = (-1, -1)$

(b) $(-2, 120°)$ এর কার্তেসীয় স্থানাঙ্ক

$= (-2\cos 120^0, -2\sin 120^0)$

$= (-2\cos(90^0 + 30^0), -2\sin(90^0 + 30^0))$

$= (2\sin 30^0, -2\cos 30^0)$

$= (2\cdot\frac{1}{2}, -2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}) = (1, -\sqrt{3})$

(c) $(\sqrt{2}, -\frac{\pi}{4})$ এর কার্তেসীয় স্থানাঙ্ক

$= (\sqrt{2}\cos(-\frac{\pi}{4}), \sqrt{2}\sin(-\frac{\pi}{4}))$

$= (\sqrt{2}\cos\frac{\pi}{4}, -\sqrt{2}\sin\frac{\pi}{4})$

$= (\sqrt{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}, -\sqrt{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}) = (1, -1)$

3. পোলার সমীকরণকে কার্তেসীয় সমীকরণে এবং কার্তেসীয় সমীকরণকে পোলার সমীকরণে প্রকাশ কর ঃ

(a) $y = x\cot\alpha$ (b) $r^2 = a^2\cos 2\theta$.

সমাধান : (a) $y = x\cot\alpha$

$\Rightarrow r\sin\theta = r\cos\theta\cot\alpha$

$\Rightarrow \tan\theta = \tan(\frac{\pi}{2} - \alpha) \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{2} - \alpha$ (Ans.)

(b) $r^2 = a^2\cos 2\theta$

$\Rightarrow r^2 = a^2(\cos^2\theta - \sin^2\theta)$

$\Rightarrow r^2 = a^2(\frac{x^2}{r^2} - \frac{y^2}{r^2})$

$[\because x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$

$\Rightarrow (r^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$

$\therefore (x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$ (Ans.)

4(a) দেখাও যে, $(2\sqrt{3}, 90°)$, $(2, 120°)$ এবং $(2, 60°)$ বিন্দুগুলি একটি সমবাহু ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দু।

প্রমাণ ঃ ধরি, প্রদত্ত বিন্দুত্রয় $A(2\sqrt{3}, 90°)$, $B(2, 120°)$ ও $C(2, 60°)$

$\therefore AB = \sqrt{(2\sqrt{3})^2 + 2^2 - 2.2\sqrt{3}.2\cos(90^0 - 120^0)}$

$= \sqrt{12 + 4 - 8\sqrt{3}\cos 30^0} = \sqrt{16 - 8\sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}}$

$= \sqrt{16 - 12} = 2$

$BC = \sqrt{4 + 4 - 8\cos 60^0} = \sqrt{8 - 8.\frac{1}{2}} = 2$

$CA = \sqrt{4 + 12 - 8\sqrt{3}\cos 30^0}$

$= \sqrt{16 - 8\sqrt{3}.\frac{\sqrt{3}}{2}} = \sqrt{16 - 12} = 2$

AB,BC,CA এর যেকোন দুইটির সমষ্টি তৃতীয়টি অপেক্ষা বৃহত্তর এবং AB = CA = CA = 2.

$\therefore$ প্রদত্ত বিন্দুত্রয় একটি সমবাহু ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দু।

4(b) P(4 , 0) এবং Q(0 , 4) বিন্দুদ্বয় একটি সমবাহু ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দু হলে তৃতীয় শীর্ষের স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ মনে করি, সমবাহু ত্রিভুজের তৃতীয় শীর্ষের স্থানাঙ্ক $R(x, y)$. $\therefore PQ^2 = QR^2 = RP^2$

এখন, $QR^2 = RP^2$ হতে পাই,

$\Rightarrow (0 - x)^2 + (4 - y)^2 = (x - 4)^2 + (y - 0)^2$

$\Rightarrow x^2 + 16 - 8y + y^2 = x^2 - 8x + 16 + y^2$

$\Rightarrow -8y = -8x \Rightarrow y = x$ …… (1)

$PQ^2 = QR^2$ হতে পাই,

$\Rightarrow 4^2 + 4^2 = x^2 + 16 - 8y + y^2$

$\Rightarrow 32 = x^2 + 16 - 8x + x^2 \quad [\because y = x]$

$\Rightarrow 2x^2 - 8x - 16 = 0$

$\Rightarrow x^2 - 4x - 8 = 0$

$\therefore x = \dfrac{-(-4) \pm \sqrt{16 - (-32)}}{2.1} = \dfrac{4 \pm \sqrt{48}}{2}$

$= \dfrac{4 \pm 4\sqrt{3}}{2} = 2 \pm 2\sqrt{3}$

$\therefore y = 2 + 2\sqrt{3}$, যখন $x = 2 + 2\sqrt{3}$ এবং

$y = 2 - 2\sqrt{3}$, যখন $x = 2 - 2\sqrt{3}$

$\therefore$ তৃতীয় শীর্ষের স্থানাঙ্ক $(2 + 2\sqrt{3}, 2 + 2\sqrt{3})$ বা, $(2 - 2\sqrt{3}, 2 - 2\sqrt{3})$

[বি.দ্র.: MCQ এর ক্ষেত্রে ,তৃতীয় শীর্ষের স্থানাঙ্ক =

$\left(\dfrac{4+0+\sqrt{3}(0-4)}{2}, \dfrac{0+4-\sqrt{3}(4-0)}{2}\right)$ বা,

$\left(\dfrac{4+0-\sqrt{3}(0-4)}{2}, \dfrac{0+4+\sqrt{3}(4-0)}{2}\right)$ অর্থাৎ

$(2-2\sqrt{3}, 2-2\sqrt{3})$ বা, $(2+2\sqrt{3}, 2+2\sqrt{3})$]

4(c) A ও B দুইটি স্থির বিন্দুর স্থানাঙ্ক যথাক্রমে (3, 4) ও (3 , 6) । AB বাহুর উপর অঙ্কিত সমবাহু ত্রিভুজ ABC এর C বিন্দুটি AB রেখার সাপেক্ষে মূলবিন্দুর বিপরীত পাশে অবস্থিত হলে, C বিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ মনে করি, সমবাহু ত্রিভুজের তৃতীয় শীর্ষের স্থানাঙ্ক $C(x , y)$. $\therefore AB^2 = BC^2 = CA^2$

এখন, $BC^2 = CA^2$ হতে পাই,

$\Rightarrow (3-x)^2 + (6-y)^2 = (x-3)^2 + (y-4)^2$

$\Rightarrow (6-y)^2 - (y-4)^2 = 0$

$\Rightarrow (6 - y + y - 4)(6 - y - y + 4) = 0$

$\Rightarrow 2(-2y + 10) = 0 \Rightarrow y = 5 \cdots \cdots (1)$

$AB^2 = BC^2$ হতে পাই,

$\Rightarrow |4-6|^2 = (3-x)^2 + (6-y)^2$

$\Rightarrow 4 = 9 - 6x + x^2 + (6-5)^2 \quad [\because y = 5]$

$\Rightarrow x^2 - 6x + 6 = 0$

$\therefore x = \dfrac{-(-6) \pm \sqrt{36 - 24}}{2.1} = \dfrac{6 \pm \sqrt{12}}{2}$

$= \dfrac{6 \pm 2\sqrt{3}}{2} = 3 \pm \sqrt{3}$

A ও B বিন্দুর ভুজ 3 এবং C বিন্দুটি AB রেখার সাপেক্ষে মূলবিন্দুর বিপরীত পাশে অবস্থিত বলে, C এর ভুজ 3 অপেক্ষা বেশী হবে।

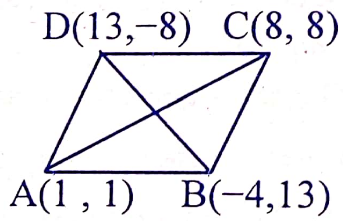
$\therefore$ C বিন্দুর স্থানাঙ্ক $(3 + \sqrt{3}, 5)$

[বি. দ্র. MCQ এর ক্ষেত্রে , তৃতীয় শীর্ষের স্থানাঙ্ক

$= \left(\dfrac{3+3-\sqrt{3}(4-6)}{2}, \dfrac{4+6+\sqrt{3}(3-3)}{2}\right)$

$= (3 + \sqrt{3}, 5)$]

5(a) দেখাও যে, (1,1), (−4, 13), (8, 8) এবং (13, − 4) বিন্দুগুলি একটি রম্বসের কৌনিক বিন্দু। [দি.'১১]



প্রমাণ ঃ ধরি, প্রদত্ত বিন্দু চারটি A(1 , 1), B(−4, 13), C (8 , 8) ও D(13, − 4).

$\therefore AB = \sqrt{(1+4)^2 + (1-13)^2}$

$= \sqrt{25 + 144} = \sqrt{169} = 13$

$BC = \sqrt{(-4-8)^2 + (13-8)^2}$

$= \sqrt{144 + 25} = \sqrt{169} = 13$

$CD = \sqrt{(8-13)^2 + (8+4)^2}$

$= \sqrt{25 + 144} = \sqrt{169} = 13$

$DA = \sqrt{(13-1)^2 + (-4-1)^2}$

$= \sqrt{144 + 25} = \sqrt{169} = 13$

$AC = \sqrt{(1-8)^2 + (1-8)^2} = \sqrt{2 \times 49} = 7\sqrt{2}$

$BD = \sqrt{(-4-13)^2 + (13+4)^2} = 17\sqrt{2}$

ABCD চতুর্ভুজের চারটি বাহু পারস্পর সমান অর্থাৎ $AB = BC = CD = DA = 13$.

$\therefore$ প্রদত্ত বিন্দুগুলি একটি রম্বসের কৌনিক বিন্দু।

5(b) দেখাও যে, A (a,b), B (a + α , b + β), C (a+α + p,b + β + q) এবং D(a + p,b + q) বিন্দুগুলি একটি সামান্তরিক উৎপন্ন করে। কি শর্তে ABCD (i) একটি আয়তক্ষেত্র (ii) একটি রম্বস তা নির্ণয় কর।

প্রমাণ ঃ $AB = \sqrt{(a-a-\alpha)^2+(b-b-\beta)^2}$

$= \sqrt{\alpha^2+\beta^2}$

$BC = \sqrt{(-p)^2+(-q)^2} = \sqrt{p^2+q^2}$

$CD = \sqrt{\alpha^2+\beta^2}$

$DA = \sqrt{p^2+q^2}$

$AC = \sqrt{(\alpha+p)^2+(\beta+q)^2}$

$BD = \sqrt{(\alpha-p)^2+(\beta-q)^2}$

ABCD চতুর্ভুজের বিপরীত বাহুদ্বয় পারস্পর সমান অর্থাৎ $AB = CD$ এবং $BC = DA$.

∴ বিন্দু চারটি একটি সামান্তরিক উৎপন্ন করে।

(i) ABCD একটি আয়তক্ষেত্র হলে, কর্ণ দুইটি পরস্পর সমান হবে। ∴ $AC = BD \Rightarrow AC^2 = BD^2$

$\Rightarrow (\alpha+p)^2+(\beta+q)^2 = (\alpha-p)^2+(\beta-q)^2$

$\Rightarrow (\alpha+p)^2-(\alpha-p)^2 = (\beta-q)^2-(\beta+q)^2$

$\Rightarrow 4\alpha p = -4\beta q \;\; \therefore \alpha p + \beta q = 0$; ইহাই নির্ণেয় শর্ত ।

(ii) ABCD একটি রম্বস হলে, বাহু চারটি সমান হবে।

∴ $AB = BC \Rightarrow AB^2 = BC^2$

$\Rightarrow \alpha^2+\beta^2 = p^2+q^2$; ইহাই নির্ণেয় শর্ত ।

6(a) কোনো বিন্দুর কোটি 6 এবং (5,6) হতে বিন্দুটির দূরত্ব 4 একক হলে, বিন্দুটির ভুজ নির্ণয় কর।

[ব.'০৩;কু.'১১]

সমাধান ঃ ধরি, বিন্দুটির স্থানাঙ্ক $(\alpha, 6)$.

∴ (5 , 6) বিন্দু হতে $(\alpha, 6)$ বিন্দুর দূরত্ব $= |5-\alpha|$

প্রশ্নমতে, $|5-\alpha| = 4 \Rightarrow 5-\alpha = \pm 4$

$\Rightarrow \alpha = 5 \pm 4 = 9 , 1$

∴ বিন্দুটির ভুজ 1 বা, 9 (Ans.)

6(b) দেখাও যে, a এর যেকোন মানের জন্য $B(\sqrt{3}+1, 3\sqrt{3})$ এবং $C(3\sqrt{3}+1, \sqrt{3})$ বিন্দু থেকে $A(a+1, a)$ বিন্দুর দূরত্ব সমান। ABC সমকোণী ত্রিভুজ হলে a এর মান নির্ণয় কর।

প্রমাণ ঃ $AB = \sqrt{(a-\sqrt{3})^2+(a-3\sqrt{3})^2}$

$= \sqrt{a^2-2\sqrt{3}a+3+a^2-2.a.3\sqrt{3}+27}$

$= \sqrt{2a^2-8\sqrt{3}a+30}$

এবং $AC = \sqrt{(a-3\sqrt{3})^2+(a-\sqrt{3})^2}$

$= \sqrt{2a^2-8\sqrt{3}a+30}$

∴ a এর যেকোন মানের জন্য $AB = AC$.

২য় অংশ ঃ

$BC = \sqrt{(\sqrt{3}+1-3\sqrt{3}-1)^2+(3\sqrt{3}-\sqrt{3})^2}$

$= \sqrt{(-2\sqrt{3})^2+(2\sqrt{3})^2} = \sqrt{24}$

এখন ABC সমবাহু ত্রিভুজ হলে,

$\sqrt{2a^2-8\sqrt{3}a+30} = \sqrt{24}$

$\Rightarrow 2a^2-8\sqrt{3}a+30 = 24$

$\Rightarrow 2a^2-8\sqrt{3}a+6 = 0 \Rightarrow a^2-4\sqrt{3}a+3 = 0$

$\Rightarrow (a-2\sqrt{3})^2 = -3+12 = 3^2$

$\Rightarrow a-2\sqrt{3} = \pm 3 \;\; \therefore a = 2\sqrt{3} \pm 3$ (Ans.)

6(c) y-অক্ষ এবং (7 , 2) বিন্দু থেকে (a , 5) বিন্দুটির দূরত্ব সমান হলে, a এর মান নির্ণয় কর।

[রা.'১০; য.'০৬,'১০; কু.'০৭; চ.'১০; ঢা.'১৩]

সমাধান ঃ y-অক্ষ থেকে (a , 5) বিন্দুর দূরত্ব $= |a|$ এবং (7 , 2) বিন্দু থেকে (a , 5) বিন্দুর দূরত্ব $= \sqrt{(a-7)^2+(5-2)^2}$

প্রশ্নমতে, $|a| = \sqrt{(a-7)^2+(5-2)^2}$

$\Rightarrow a^2 = a^2-14a+49+9$

$\Rightarrow 14a = 58 \Rightarrow a = \frac{58}{14} = \frac{29}{7}$ (Ans.)

6(d) x -অক্ষ এবং (−5 , −7) বিন্দু থেকে (4 , k) বিন্দুটির দূরত্ব সমান হলে, k এর মান নির্ণয় কর।

[কু.'০৯; মা.বো.'১৩]

সমাধান ঃ x–অক্ষ থেকে $(4, k)$ বিন্দুটির দূরত্ব $= |k|$

এবং $(-5, -7)$ বিন্দু থেকে $(4, k)$ বিন্দুটির দূরত্ব

$$= \sqrt{(-5-4)^2 + (-7-k)^2}$$

$$= \sqrt{81 + 49 + 14k + k^2} = \sqrt{130 + 14k + k^2}$$

প্রশ্নমতে, $|k| = \sqrt{130 + 14k + k^2}$

$\Rightarrow k^2 = 130 + 14k + k^2 \therefore k = -\dfrac{130}{14} = -\dfrac{65}{7}$

7.(a) (5,7), (–1, –1) ও (–2, 6) বিন্দুত্রয় একটি বৃত্তের পরিধির উপর অবস্থিত। এর কেন্দ্রের স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

সমাধানঃ ধরি, বৃত্তের কেন্দ্র $O(x, y)$ এবং এর পরিধিস্থ বিন্দু তিনটি $A(5,7)$, $B(-1,-1)$ ও $C(-2, 6)$।

$\therefore$ $OA = OB = OC$, [$\because$ একই বৃত্তের ব্যাসার্ধ।]

$OA = OB$ অর্থাৎ $OA^2 = OB^2$ হতে পাই,

$(x-5)^2 + (y-7)^2 = (x+1)^2 + (y+1)^2$

$\Rightarrow x^2 - 10x + 25 + y^2 - 14y + 49 = x^2 + 2x + 1 + y^2 + 2y + 1$

$\Rightarrow 12x + 16y = 72 \Rightarrow 3x + 4y - 18 = 0 \cdots$(i)

$OB = OC$ অর্থাৎ $OB^2 = OC^2$ হতে পাই,

$(x+1)^2 + (y+1)^2 = (x+2)^2 + (y-6)^2$

$\Rightarrow x^2 + 2x + 1 + y^2 + 2y + 1 = x^2 + 4x + 4 + y^2 - 12y + 36$

$\Rightarrow 2x - 14y + 38 = 0 \Rightarrow x - 7y + 19 = 0 \cdots$(ii)

(i) $- 3\times$(ii) $\Rightarrow 4y + 21y - 18 - 57 = 0$

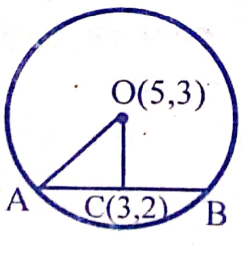
$\Rightarrow 25y = 75 \Rightarrow y = 3$

(ii) হতে পাই, $x = 21 - 19 = 2$

$\therefore$ বৃত্তের কেন্দ্রের স্থানাঙ্ক (2,3)।

7(b) একটি বৃত্তের ব্যাসার্ধ 5, কেন্দ্রের স্থানাঙ্ক (5,3); এর যে জ্যা (3, 2) বিন্দুতে সমদ্বিখন্ডিত হয় তার দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর। **[কু. '১০; চ.'১৩]**

সমাধানঃ ধরি, $O(5, 3)$ কেন্দ্রবিশিষ্ট বৃত্তের AB জ্যা এর মধ্যবিন্দু $C(3, 2)$। তাহলে,



$OC \perp AB$, ব্যাসার্ধ $OA = 5$ এবং

$OC^2 = (5-3)^2 + (3-2)^2 = 5$

OAC সমকোণী ত্রিভুজ হতে

পাই, $OA^2 = AC^2 + OC^2$

$\Rightarrow 5^2 = AC^2 + 5$

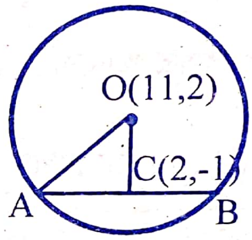
$\Rightarrow AC^2 = 25 - 5 = 20 \Rightarrow AC = 2\sqrt{5}$

$\therefore AB = 2 \times AC = 2 \times 2\sqrt{5} = 4\sqrt{5}$

$\therefore$ জ্যা এর দৈর্ঘ্য $4\sqrt{5}$ একক।

7. (c) B কেন্দ্র ও 10 ব্যাসার্ধ বিশিষ্ট বৃত্তের যে জ্যা C বিন্দুতে সমদ্বিখন্ডিত হয় তার দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর। **[ব.'১১]**

সমাধানঃ



ধরি, $O(11, 2)$ কেন্দ্রবিশিষ্ট বৃত্তের AB জ্যা এর মধ্যবিন্দু $C(2, -1)$।

তাহলে, $OC \perp AB$, ব্যাসার্ধ $OA = 10$ এবং

$OC^2 = (11-2)^2 + (2+1)^2$

$= 81 + 9 = 90$

OAC সমকোণী ত্রিভুজ হতে পাই,

$OA^2 = AC^2 + OC^2$

$\Rightarrow 10^2 = AC^2 + 90$

$\Rightarrow AC^2 = 100 - 90 = 10 \Rightarrow AC = \sqrt{10}$

$\therefore AB = 2 \times AC = 2 \times \sqrt{10} = 2\sqrt{10}$

$\therefore$ জ্যা এর দৈর্ঘ্য $2\sqrt{10}$ একক।

সম্ভাব্য ধাপসহ সমস্যা

8. P বিন্দুর কোটি – 6। x- অক্ষ হতে P বিন্দুর দূরত্ব y-অক্ষ হতে এর দূরত্বের অর্ধেক হলে, P বিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

সমাধান : ধরি, P বিন্দুর স্থানাঙ্ক $(x, -6)$. (১)

$\therefore$ x- অক্ষ হতে P বিন্দুর দূরত্ব $= |-6| = 6$ এবং

y-অক্ষ হতে P বিন্দুর দূরত্ব $= |x|$ (১)

$\therefore$ প্রশ্নমতে, $6 = \dfrac{1}{2}|x|$ (১)

$\Rightarrow |x| = 12 \Rightarrow x = \pm 12$

$\therefore$ P বিন্দুর স্থানাঙ্ক $(12, -6)$ বা, $(-12, -6)$ (১)

9. $(1, 1)$ ও $(-\sqrt{3}, 1)$ কে পোলার স্থানাঙ্কে প্রকাশ কর, যখন $r \geq 0$ এবং $\theta \in [0, 2\pi[$ অথবা, $\theta \in]-\pi, \pi]$.

সমাধান: মনে করি, $(1, 1)$ এর পোলার স্থানাঙ্ক (r, θ).

$\therefore r = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$ এবং (১)

$\theta = \tan^{-1}\frac{1}{1} = \tan^{-1} 1 = \frac{\pi}{4}$. (১)

$\therefore (1, 1)$ এর পোলার স্থানাঙ্ক $(\sqrt{2}, \frac{\pi}{4})$ (১)

ধরি, $(-\sqrt{3}, 1)$ এর পোলার স্থানাঙ্ক (r, θ).

$\therefore r = \sqrt{(-\sqrt{3})^2 + 1^2} = 2$ এবং (১)

$\theta = \tan^{-1}\frac{1}{-\sqrt{3}}$ (১)

$= \pi - \tan^{-1}\frac{1}{\sqrt{3}} = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$ (১)

$\therefore (-\sqrt{3}, 1)$ এর পোলার স্থানাঙ্ক $(2, \frac{5\pi}{6})$ (১)

10. $(4, \frac{\pi}{3})$ ও $(\sqrt{2}, -\frac{3\pi}{4})$ কে কার্তেসীয় স্থানাঙ্কে প্রকাশ কর।

$(4, \frac{\pi}{3})$ এর কার্তেসীয় স্থানাঙ্ক $= (4\cos\frac{\pi}{3}, 4\sin\frac{\pi}{3})$ (১)

[$\because (r, \theta)$ এর কার্তেসীয় স্থানাঙ্ক $(r\cos\theta, r\sin\theta)$]

$= (4 \times \frac{1}{2}, 4 \times \frac{\sqrt{3}}{2}) = (2, 2\sqrt{3})$ (১)

এবং $(\sqrt{2}, -\frac{3\pi}{4})$ এর কার্তেসীয় স্থানাঙ্ক

$= (\sqrt{2}\cos(-\frac{3\pi}{4}), \sqrt{2}\sin(-\frac{3\pi}{4}))$ (১)

$= (\sqrt{2}\cos\frac{3\pi}{4}, -\sqrt{2}\sin\frac{3\pi}{4})$

$= (\sqrt{2}\cos(\pi - \frac{\pi}{4}), -\sqrt{2}\sin(\pi - \frac{\pi}{4}))$

$= (-\sqrt{2}\cos\frac{\pi}{4}, -\sqrt{2}\sin\frac{\pi}{4})$ (১)

$= (-\sqrt{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}, -\sqrt{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}) = (-1, -1)$ (১)

11. $x^2 - y^2 = a^2$ কে পোলার সমীকরণে এবং $r^2 \sin 2\theta = 2a^2$ কে কার্তেসীয় সমীকরণে প্রকাশ কর।

সমাধান : $x^2 - y^2 = a^2$

$\Rightarrow (r\cos\theta)^2 - (r\sin\theta)^2 = a^2$ (১)

[$\because x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$]

$\Rightarrow r^2(\cos^2\theta - \sin^2\theta) = a^2$

$\Rightarrow r^2 \cos 2\theta = a^2$ (Ans.) (১)

এবং $r^2 \sin 2\theta = 2a^2$

$\Rightarrow r^2 . 2\sin\theta\cos\theta = 2a^2$ (১)

$\Rightarrow 2(r\cos\theta)(r\sin\theta) = 2a^2$

$\Rightarrow 2xy = 2a^2 \therefore xy = a^2$ (Ans.) (১)

12. দেখাও যে, $(3, 8)$, $(8, 3)$ এবং $(-2, 3)$ বিন্দুগুলি একটি সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দু।

প্রমাণ ঃ মনে করি, প্রদত্ত বিন্দুত্রয় $A(3, 8)$, $B(8, 3)$ ও $C(-2, 3)$.

$\therefore AB = \sqrt{(3-8)^2 + (8-3)^2} = 5\sqrt{2}$ (১)

$BC = \sqrt{(8+2)^2 + (3-3)^2} = 10$

$CA = \sqrt{(-2-3)^2 + (3-8)^2} = 5\sqrt{2}$

AB, BC, CA এর যেকোনো দুইটির সমষ্টি তৃতীয়টি অপেক্ষা বৃহত্তর এবং $AB = CA = 5\sqrt{2}$

$\therefore$ প্রদত্ত বিন্দুত্রয় একটি সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দু। (১)

13. দেখাও যে, $(4, 4)$, $(5, 2)$ এবং $(1, 0)$ বিন্দুগুলি একটি সমকোণী ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দু এবং ত্রিভুজটির ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

প্রমাণঃ ধরি, প্রদত্ত বিন্দুত্রয় $A(4, 4)$, $B(5, 2)$ ও $C(1, 0)$.

$\therefore AB = \sqrt{(4-5)^2 + (4-2)^2} = \sqrt{1+4} = \sqrt{5}$

$BC = \sqrt{(5-1)^2 + (2-0)^2} = \sqrt{16+4} = 2\sqrt{5}$

$CA = \sqrt{(1-4)^2+(0-4)^2} = \sqrt{9+16} = 5$ (১)

AB,BC,CA এর যেকোনো দুইটির সমষ্টি তৃতীয়টি অপেক্ষা বৃহত্তর বলে বিন্দুত্রয় একটি ত্রিভুজ গঠন করে। (১)

আবার, $AB^2+BC^2 = 5+20 = 25 = CA^2$.

অতএব, প্রদত্ত বিন্দুত্রয় একটি সমকোণী ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দু যার $\angle B = 90^0$.

(১)

২য় অংশ ঃ

ত্রিভুটির ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2}(AB \times BC)$ $[\because \angle B = 90^0]$

$= \frac{1}{2}(\sqrt{5} \times 2\sqrt{5}) = 5$ বর্গ একক। (১)

14. দেখাও যে, A (– 3 , 2) , B (– 7 , – 5) , C(5, 4) এবং D(9, 11) বিন্দুগুলি একটি সামান্তরিকের শীর্ষবিন্দু।

প্রমাণ ঃ ABCD চতুর্ভুজে,

$AB = \sqrt{(-3+7)^2+(2+5)^2} = \sqrt{16+49} = \sqrt{65}$

$BC = \sqrt{(-7-5)^2+(-5-4)^2} = \sqrt{144+81}$

$= \sqrt{225} = 15$

$CD = \sqrt{(5-9)^2+(4-11)^2} = \sqrt{16+49} = \sqrt{65}$

$DA = \sqrt{(9+3)^2+(11-2)^2} = \sqrt{144+81} = 15$

(১)

এখানে AB = CD এবং BC = DA অর্থাৎ ABCD চতুর্ভুজের বিপরীত বাহুদ্বয় পারস্পর সমান।

∴ বিন্দু চারটি একটি সামান্তরিকের শীর্ষবিন্দু। (১)

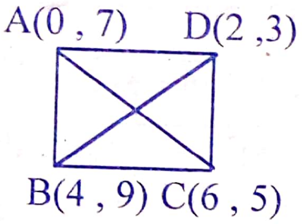
[বি.দ্র.: বর্গক্ষেত্র, আয়তক্ষেত্র ও রম্বস প্রত্যেকে সামানত রিক । সুতরাং , সামান্তরিকের কর্ণদ্বয় সমান ও অসমান উভয়েই হতে পারে।]

15. দেখাও যে, (0 , 7), (4 , 9), (6, 5) এবং (2, 3) বিন্দুগুলি একটি বর্গের শীর্ষবিন্দু।

প্রমাণ ঃ ধরি, প্রদত্ত বিন্দু চারটি A(0 , 7) , B(4, 9), C (6 , 5) ও D(2, 3).

$\therefore AB = \sqrt{(0-4)^2+(7-9)^2}$ (১)

$= \sqrt{16+4} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$



$BC = \sqrt{(4-6)^2+(9-5)^2} = \sqrt{4+16} = 2\sqrt{5}$

$CD = \sqrt{(6-2)^2+(5-3)^2} = \sqrt{16+4} = 2\sqrt{5}$

$DA = \sqrt{(2-0)^2+(3-7)^2} = \sqrt{4+16} = 2\sqrt{5}$

$AC = \sqrt{(0-6)^2+(7-5)^2} = \sqrt{36+4} = 2\sqrt{10}$

$BD = \sqrt{(4-2)^2+(9-3)^2} = \sqrt{4+36} = 2\sqrt{10}$

ABCD চতুর্ভুজের চারটি বাহু পারস্পর সমান অর্থাৎ $AB = BC = CD = DA = 2\sqrt{5}$ এবং কর্ণদ্বয় পরস্পর সমান অর্থাৎ $AC = BD = 2\sqrt{10}$.

∴ প্রদত্ত বিন্দুগুলি একটি বর্গের কৌনিক বিন্দু। (১)

16. *x*-অক্ষের উপর অবস্থিত P বিন্দু থেকে (0 , 2) এবং (6, 4) এর দুরত্ব সমান। P এর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ ধরি, P বিন্দুর স্থানাঙ্ক $(\alpha, 0)$.

∴ P বিন্দু থেকে (0 , 2) এর দূরত্ব $= \sqrt{\alpha^2+4}$ এবং P বিন্দু থেকে (6, 4) এর দূরত্ব

$= \sqrt{(\alpha-6)^2+16}$ (১)

প্রশ্নমতে, $\sqrt{\alpha^2+4} = \sqrt{(\alpha-6)^2+16}$

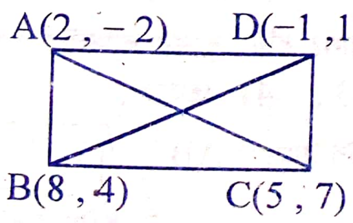
$\Rightarrow \alpha^2+4 = \alpha^2 - 12\alpha + 36 + 16$

$\Rightarrow 12\alpha = 48 \Rightarrow \alpha = 4$

∴ P বিন্দুর স্থানাঙ্ক (4, 0). (Ans.) (১)

17. দেখাও যে, (2 , – 2) , (8 , 4) , (5 , 7) এবং (– 1 , 1) বিন্দুগুলি একটি আয়তের কৌনিক বিন্দু।

প্রমাণ ঃ ধরি, প্রদত্ত বিন্দু চারটি A(2 , – 2) , B(8, 4), C (5 , 7) , D(– 1, 1).



$\therefore\ AB = \sqrt{(2-8)^2 + (4+2)^2}$ (১)

$= \sqrt{36+36} = 6\sqrt{2}$

$BC = \sqrt{(8-5)^2 + (4-7)^2} = \sqrt{9+9} = 3\sqrt{2}$

$CD = \sqrt{(5+1)^2 + (7-1)^2} = \sqrt{36+36} = 6\sqrt{2}$

$DA = \sqrt{(-1-2)^2 + (1+2)^2} = \sqrt{9+9} = 3\sqrt{2}$

$AC = \sqrt{(2-5)^2 + (-2-7)^2} = \sqrt{9+81} = 3\sqrt{10}$

$BD = \sqrt{(8+1)^2 + (4-1)^2} = \sqrt{81+9} = 3\sqrt{10}$

ABCD চতুর্ভুজের বিপরীত বাহুদ্বয় পারস্পর সমান অর্থাৎ $AB = CD = 6\sqrt{2}$, $BC = DA = 3\sqrt{2}$ এবং কর্ণদ্বয় পরস্পর সমান অর্থাৎ $AC = BD = 3\sqrt{10}$.

$\therefore$ প্রদত্ত বিন্দুগুলি একটি আয়তের কৌনিক বিন্দু। (১)

18. $(a + b\ ,\ b - a)$ এবং $(a - b\ ,\ a + b)$ বিন্দু থেকে $(x\ ,\ y)$ বিন্দুর দূরত্ব সমান হলে, দেখাও যে, $bx - ay = 0$.

প্রমাণ ঃ ধরি, প্রদত্ত বিন্দু তিনটি $A(x\ ,\ y)$, $B(a+b\ ,\ b-a)$, $C(a-b\ ,\ a+b)$

প্রশ্নমতে, $AB = AC \Rightarrow AB^2 = AC^2$

$\Rightarrow (x-a-b)^2 + (y-b+a)^2 =$

$(x-a+b)^2 + (y-a-b)^2$ (১)

$\Rightarrow (x-a-b)^2 - (x-a+b)^2$

$= (y-a-b)^2 - (y-b+a)^2$

$\Rightarrow (x-a-b-x+a-b)(x-a-b+x-a+b)$

$= (y-a-b-y+b-a)(y-a-b+y-b+a)$

$\Rightarrow -2b.2(x-a) = -2a.2(y-b)$

$\Rightarrow bx - ab = ay - ab$

$\therefore\ bx - ay = 0$ (Showed) (১)

19. কোন বৃত্তের একটি ব্যাসের প্রান্তবিন্দুদ্বয়ের স্থানাঙ্ক (5, 2) ও (–3 , – 4) হলে, এর ব্যাসার্ধ নির্ণয় কর।

সমাধানঃ ধরি, বৃত্তের ব্যাসটির প্রান্ত বিন্দুদ্বয় A(5,2) ও B(–3 , – 4) . তাহলে,

বৃত্তটির ব্যাস $= AB = \sqrt{(5+3)^2 + (2+4)^2}$ (১)

$= \sqrt{64+36} = 10$ একক।

$\therefore$ বৃত্তটির ব্যাসার্ধ $= \frac{10}{2} = 5$ একক। (১)

20. দেখাও যে, $(a\ ,\ a)$, $(-a\ ,\ -a)$ এবং $(-a\sqrt{3}\ ,\ a\sqrt{3})$ বিন্দুগুলি একটি সমবাহু ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দু।

প্রমাণ ঃ মনে করি, প্রদত্ত বিন্দুত্রয় $A(a\ ,\ a)$, $B(-a\ ,-a)$ এবং $C(-a\sqrt{3}\ ,\ a\sqrt{3})$

$\therefore\ AB = \sqrt{(a+a)^2 + (a+a)^2} = \sqrt{8a^2}$ (১)

$BC = \sqrt{(-a+a\sqrt{3})^2 + (-a-a\sqrt{3})^2}$

$= \sqrt{2\{(-a)^2 + (a\sqrt{3})^2\}}$

$= \sqrt{2(a^2+3a^2)} = \sqrt{8a^2}$

$CA = \sqrt{(-a\sqrt{3}-a)^2 + (\sqrt{3}a-a)^2}$

$= \sqrt{2\{(-a)^2 + (a\sqrt{3})^2\}}$

$= \sqrt{2(a^2+3a^2)} = \sqrt{8a^2}$

AB, BC, CA এর যেকোন দুইটির সমষ্টি তৃতীয়টি অপেক্ষা বৃহত্তর এবং $AB = CA = CA = \sqrt{8a^2}$

$\therefore$ প্রদত্ত বিন্দুত্রয় একটি সমবাহু ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দু। (১)

সৃজনশীল প্রশ্ন:

21. $A(4\ ,\ 3)$, $B(-1, -\sqrt{3})$ ও $C(4, \frac{\pi}{4})$ তিনটি বিন্দু।

ক. $(-4\ ,\ \frac{\pi}{4})$ পোলার স্থানাঙ্ককে কার্তেসীয় স্থানাঙ্কে প্রকাশ কর।

খ. A বিন্দু হতে $\sqrt{10}$ একক দূরত্বে অবস্থিত একটি বিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর যার কোটি ভুজের দ্বিগুণ। [রা.'০৭; মা.বো.'০৮,'১২, '১৪; ঢা.'১১; দি.'১৩]

গ. B এর কার্তেসীয় স্থানাঙ্ককে পোলার স্থানাঙ্কে প্রকাশ করে BC নির্ণয় কর।

ক. **সমাধানঃ** মনে করি, $(-4\ ,\ \frac{\pi}{4})$ বিন্দুর কার্তেসীয় স্থানাঙ্ক $(x\ ,\ y)$.

$\therefore\ x = -4\cos\frac{\pi}{4} = -4 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = -2\sqrt{2}$ এবং y

$= -4\sin\frac{\pi}{4} = -4 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = -2\sqrt{2}$.

$\therefore$ প্রদত্ত বিন্দুর কার্তেসীয় স্থানাঙ্ক $(-2\sqrt{2}, -2\sqrt{2})$

খ. **সমাধানঃ** ধরি, বিন্দুটির স্থানাঙ্ক $(\alpha, 2\alpha)$.

$\therefore$ $(4, 3)$ বিন্দু হতে $(\alpha, 2\alpha)$ বিন্দুর দূরত্ব

$= \sqrt{(\alpha-4)^2 + (2\alpha-3)^2}$

প্রশ্নমতে, $\sqrt{(\alpha-4)^2 + (2\alpha-3)^2} = \sqrt{10}$

$\Rightarrow \alpha^2 - 8\alpha + 16 + 4\alpha^2 - 12\alpha + 9 = 10$

$\Rightarrow 5\alpha^2 - 20\alpha + 15 = 0$

$\Rightarrow \alpha^2 - 4\alpha + 3 = 0 \Rightarrow (\alpha-3)(\alpha-1) = 0$

$\Rightarrow \alpha = 1$ অথবা, $\alpha = 3$

$\therefore$ বিন্দুটির স্থানাঙ্ক $(1, 2)$ বা, $(3, 6)$ (Ans.)

গ. মনে করি, $B(-1, -\sqrt{3})$ বিন্দুর পোলার স্থানাঙ্ক (r, θ); যেখানে

$r = \sqrt{(-1)^2 + (-\sqrt{3})^2} = \sqrt{1+3} = 2$ এবং

$\theta = \tan^{-1}\frac{-\sqrt{3}}{-1} = \pi + \tan^{-1}(\sqrt{3})$

$= \pi + \frac{\pi}{3} = \frac{4\pi}{3}$

$\therefore$ B বিন্দুর পোলার স্থানাঙ্ক $(2, \frac{4\pi}{3})$

এখন, $C(4, \frac{\pi}{4})$ ও $D(2, \frac{4\pi}{3})$ বিন্দুদ্বয়ের দূরত্বই নির্ণেয় দূরত্ব।

$\therefore\ CD = \sqrt{4^2 + 2^2 - 2.4.2\cos(\frac{4\pi}{3} - \frac{\pi}{4})}$

$= \sqrt{16 + 2 - 16\cos(\frac{15\pi}{12})}$

$= \sqrt{20 - 16\cos(\frac{5\pi}{4})}$

$= \sqrt{20 - 16\cos(\pi + \frac{\pi}{4})}$

$= \sqrt{20 + 16\cos\frac{\pi}{4}} = \sqrt{20 + 16 \times \frac{1}{\sqrt{2}}}$

$= \sqrt{20 + 8\sqrt{2}}$

প্রশ্নমালা III B

1.(a) দেখাও যে, (2 – 2) এবং (– 1 , 4) বিন্দুদ্বয়ের সংযোগ রেখাংশ অক্ষদ্বয় দ্বারা সমান তিন ভাগে বিভক্ত হয়।
[সি.'০৫,'১৩; ব.'০৭ ; মা'০৫]

প্রমাণ ঃ ধরি, প্রদত্ত বিন্দুদ্বয় $A(2, -2)$ ও $B(-1, 4)$ এবং x-অক্ষ AB রেখাংশকে $P(\alpha, 0)$ বিন্দুতে $m : 1$ অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত করে।

$\therefore\ 0 = \frac{4m + 1 \times -2}{m+1} \Rightarrow 4m = 2 \Rightarrow m = \frac{1}{2}$

অর্থাৎ x-অক্ষ AB রেখাংশকে $1 : 2$ অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত করে।

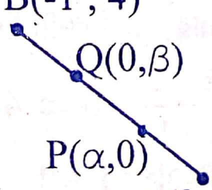
আবার, ধরি y-অক্ষ AB রেখাংশকে $Q(0, \beta)$ বিন্দুতে $n : 1$ অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত করে।

$\therefore\ 0 = \frac{n \times -1 + 1 \times 2}{n+1} \Rightarrow n = 2 \Rightarrow n : 1 = 2 : 1$

অর্থাৎ y-অক্ষ AB রেখাংশকে $2 : 1$ অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত করে।

$\therefore$ AB রেখাংশ অক্ষদ্বয় দ্বারা সমান তিনভাগে বিভক্ত হয়।

বিকল্প পদ্ধতি : ধরি, প্রদত্ত বিন্দুদ্বয় $A(2, -2)$ ও $B(-1, 4)$ এবং x-অক্ষ ও y-অক্ষ AB রেখাংশকে যথাক্রমে $P(\alpha, 0)$ ও $Q(0, \beta)$ বিন্দুতে অন্তর্বিভক্ত করে।



$\therefore\ \frac{AP}{PB} = \frac{2-\alpha}{\alpha+1} = \frac{-2-0}{0-4} = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow 2AP = PB = PQ + QB$

$\Rightarrow PQ = 2AP - QB \cdots\cdots (1)$

আবার, $\frac{AQ}{QB} = \frac{2-0}{0+1} = \frac{-2-\beta}{\beta-4} \Rightarrow \frac{AQ}{QP} = \frac{2}{1}$

$\Rightarrow AQ = 2QB \Rightarrow AP + PQ = 2\,QB$

$\Rightarrow AP + 2AP - QB = 2\,QB$ [(1) দ্বারা]

$\Rightarrow 3\,AP = 3\,QB\ \ \therefore\ AP = QB$

$(1) \Rightarrow PQ = 2AP - AP = AP$