4. **(a)** ABCD রম্বসের A(1,2), C(5, 6) এবং B শীর্ষ x- অক্ষের উপর অবস্থিত। B ও D শীর্ষদ্বয়ের স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর। প্রমাণ কর যে, রম্বসটি বর্গ নয়। উ: B(7, 0), D(−1, 8).

(b) একটি আয়তক্ষেত্রের একটি বাহুর প্রান্তবিন্দু (2, −1) , (6, 5) এবং কর্ণের দৈর্ঘ্য 8 একক। অপর কর্ণের প্রান্তদ্বয় নির্ণয় কর। উ: (10, 1), (6, −3) অথবা (2, 9), (−2, 5)

(c) বর্গের একটি কর্ণের প্রান্তবিন্দু (5, 0), (9, 4) হলে এর অপর কর্ণের প্রান্তদ্বয় নির্ণয় কর। উ: (5, 4) ও (9, 0).

সম্ভাব্য ধাপসহ সমস্যা :

5. (2,–4) ও (–3,6) বিন্দুদ্বয়ের সংযোগ রেখাংশকে x-অক্ষ এবং y- অক্ষ যে যে অনুপাতে বিভক্ত করে তা নির্ণয় কর।
উ: 2 : 3, 2 : 3 **[ঢা.'০৯; রা. '০৪, '০৮; য. '০২]** (৪)

6. A ও B বিন্দুর স্থানাঙ্ক যথাক্রমে (– 5 , 4) ও (3 , – 2). AB কে C পর্যন্ত বর্ধিত করা হল যেন 3AB = 2BC হয়। C বিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর। উ: (15,–11) (২)

সৃজনশীল প্রশ্ন:

7. ΔABC এর দুইটি শীর্ষ A(–3, –2) ও B(6, 4) ।

ক. $(-1, \sqrt{3})$ কে পোলার স্থানাঙ্কে প্রকাশ কর।

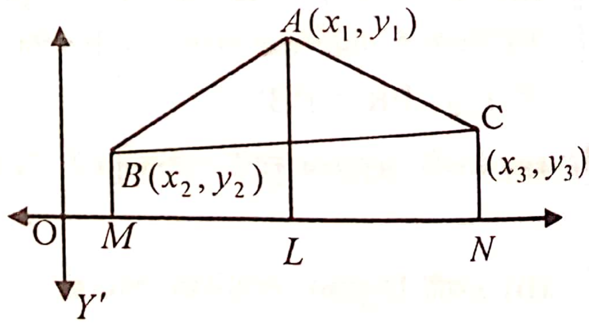
খ. AB বাহুর সমত্রিখন্ডক বিন্দুর সাথে C শীর্ষ যে ত্রিভুজ গঠন করে তার ভরকেন্দ্র (3, −1) হলে C এর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর। **[সি.'০৮; ঢা.'০৬; চ.'০৮; য.'০৯,'১৩]**

গ. AB এর মধ্যবিন্দু হতে $\frac{1}{2}$ একক দূরত্বে অবস্থিত একটি বিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর যার ভুজ কোটির দ্বিগুণ।

উত্তর: (a) $(2, \frac{2\pi}{3})$ (b) (6, 1), (3, 2) (c) (2, 1), $(\frac{6}{5}, \frac{3}{5})$

৫. ত্রিভুজের ক্ষেত্রফলঃ

মনে করি, ABC ত্রিভুজের শীর্ষত্রয় $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ এবং $C(x_3, y_3)$ । A, B ও C বিন্দু হতে x- অক্ষের উপর যথাক্রমে AL, BM ও CN লম্ব আঁকি। তাহলে, $OL = x_1$, $OM = x_2$, $ON = x_3$, $AL = y_1$, $BM = y_2$, $CN = y_3$



ABC ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল ΔABC হলে,

ΔABC = ট্রাপিজিয়াম ABML এর ক্ষেত্রফল

+ ট্রাপিজিয়াম ALNC এর ক্ষেত্রফল – ট্রাপিজিয়াম BMNC এর ক্ষেত্রফল

$$= \frac{1}{2}(AL + BM) \times ML + \frac{1}{2}(AL + CN) \times LN - \frac{1}{2}(BM + CN) \times MN$$

$$= \frac{1}{2}(AL + BM)(OL - OM) + \frac{1}{2}(AL + CN)(ON - OL) - \frac{1}{2}(BM + CN)(ON - OM)$$

$$= \frac{1}{2}(y_1 + y_2)(x_1 - x_2) + \frac{1}{2}(y_1 + y_3)(x_3 - x_1) - \frac{1}{2}(y_2 + y_3)(x_3 - x_2)$$

$$= \frac{1}{2}[\, x_1(y_1 + y_2 - y_1 - y_3) + x_2(-y_1 - y_2 + y_2 + y_3) + x_3(y_1 + y_3 - y_2 - y_3)]$$

$$= \frac{1}{2}[x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)]$$

$$= \frac{1}{2}(x_1y_2 + x_2y_3 + x_3y_1 - y_1x_2 - y_2x_3 - y_3x_1)$$

$$= \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_1 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_1 \end{vmatrix}$$; যেখানে $\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_1 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_1 \end{vmatrix} = x_1y_2 + x_2y_3 + x_3y_1 - y_1x_2 - y_2x_3 - y_3x_1$

নির্ণায়কের সাহায্যে লিখা যায়, $\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\left\{\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_3 & y_3 \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix}\right\}$

$$= \frac{1}{2}\left\{\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_2 & x_3 \\ y_2 & y_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_3 & x_1 \\ y_3 & y_1 \end{vmatrix}\right\}$$

আবার, $\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 - x_2 & y_1 - y_2 & 0 \\ x_2 - x_3 & y_2 - y_3 & 0 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\{(x_1 - x_2)(y_2 - y_3) - (y_1 - y_2)(x_2 - x_3)\}$

বি.দ্র. (i) নির্ণায়কের সাহায্যে ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল নির্ণয়ের সময় শীর্ষবিন্দুগুলি ঘড়ির কাঁটা ঘূর্ণনের বিপরীতক্রমে নিলে ক্ষেত্রফলের চিহ্ন ধনাত্মক হয় এবং শীর্ষবিন্দুগুলি ঘড়ির কাঁটা ঘূর্ণনের দিকে নিলে ক্ষেত্রফলের চিহ্ন ঋণাত্মক হয়, কিন্তু তাদের সংখ্যাসূচক মান সমান হয়। যদি শীর্ষবিন্দুগুলির ঘূর্ণন বুঝতে না পারা যায় তাহলে, পরমমান চিহ্ন ব্যবহার করতে হয়।

$$\delta_{ABC} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_3 & y_3 \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix} = x_1y_2 + x_2y_3 + x_3y_1 - y_1x_2 - y_2x_3 - y_3x_1$$

$= (x_1 - x_2)(y_2 - y_3) - (y_1 - y_2)(x_2 - x_3)$ এবং $\Delta ABC = \frac{1}{2}|\delta_{ABC}|$ বর্গ একক বিবেচনা করে যেকোনো ধরনের বিভ্রান্তি এড়ানো সম্ভব।

$\therefore\ \Delta ABC = \frac{1}{2}|\delta_{ABC}| = \frac{1}{2}\left\{\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_2 & x_3 \\ y_2 & y_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_3 & x_1 \\ y_3 & y_1 \end{vmatrix}\right\}$ এর পরমমান

$$= \frac{1}{2}|x_1y_2 + x_2y_3 + x_3y_1 - y_1x_2 - y_2x_3 - y_3x_1| = \frac{1}{2}|(x_1 - x_2)(y_2 - y_3) - (y_1 - y_2)(x_2 - x_3)|$$

(x_1, y_1), (x_2, y_2), $(x_3, y_3)\cdots\ \cdots$, (x_n, y_n) শীর্ষ দ্বারা গঠিত বহুভূজের ক্ষেত্রফল,

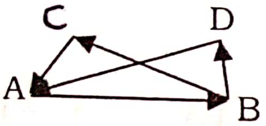
$= \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & \cdots\cdots x_n & x_1 \\ y_1 & y_2 & y_3 & \cdots\cdots y_n & y_1 \end{vmatrix}$ এর পরমমান $= \frac{1}{2}\left\{\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_2 & x_3 \\ y_2 & y_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_3 & x_4 \\ y_3 & y_4 \end{vmatrix} + \cdots\cdots + \begin{vmatrix} x_n & x_1 \\ y_n & y_1 \end{vmatrix}\right\}$ এর পরমমান

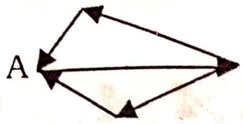
$$= \frac{1}{2}|x_1y_2 + x_2y_3 + \cdots\cdots + x_ny_1 - y_1x_2 - y_2x_3 - \cdots\cdots - y_nx_1|$$

সূত্রটি Shoelace formula নামে পরিচিত। যার মূলভিত্তি হলো Gauss's area formula বা Surveyor's formula.

(ii) $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$ বিন্দুত্রয় সমরেখ হবে যদি ও কেবল যদি এ বিন্দু তিনটি দ্বারা গঠিত ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল শূন্য হয়। অর্থাৎ, $\delta_{ABC} = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_2 & x_3 \\ y_2 & y_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_3 & x_1 \\ y_3 & y_1 \end{vmatrix} = 0$

(iii)





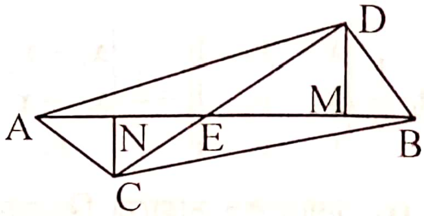
(a) C এবং D বিন্দু দুইটি AB রেখার একই পার্শ্বে হলে, $\delta_{ABC} \times \delta_{ABD} > 0$

(b) C এবং D বিন্দু দুইটি AB রেখার বিপরীত পার্শ্বে হলে, $\delta_{ABC} \times \delta_{ABD} < 0$

(iv) AB রেখাটি CD রেখাংশকে E বিন্দুতে $m_1 : m_2$ অনুপাতে বিভক্ত করলে $\dfrac{CE}{DE} = \dfrac{m_1}{m_2} = \dfrac{\delta_{ABC}}{\delta_{ABD}}$.

প্রমাণঃ AB এর উপর CN ও DM লম্ব হলে, ΔCNE ও ΔDME সদৃশ।

$\therefore \dfrac{CN}{DM} = \dfrac{CE}{DE} = \dfrac{m_1}{m_2}$ $\therefore \dfrac{\Delta ABC}{\Delta ABD} = \dfrac{\frac{1}{2}\delta_{ABC}}{\frac{1}{2}\delta_{ABD}} = \dfrac{\frac{1}{2}AB \times CN}{\frac{1}{2}AB \times DM} = \dfrac{m_1}{m_2}$



$\Rightarrow \dfrac{m_1}{m_2} = \dfrac{\delta_{ABC}}{\delta_{ABD}}$. অনুপাত যথাক্রমে (−) ও (+) এর জন্য AB রেখাটি CD রেখাংশকে E বিন্দুতে যথাক্রমে অন্তর্বিভক্ত ও বহির্বিভক্ত করবে।

উদাহরণমালা

উদাহরণ–1: 'a' এর মান কত হলে, $(a, 2-2a)$, $(1-a, 2a)$ এবং $(-4-a, 6-2a)$ বিন্দুত্রয় সমরেখ হবে। [চ.'০৯,'১৪; য.'০৮; সি.'১০; ঢা.'১১,'১৩; কু.'১২,'১৪; মা.'১৩,'১৫; ব.'১৫]

সমাধানঃ $(a, 2-2a)$, $(1-a, 2a)$ এবং $(-4-a, 6-2a)$ বিন্দু তিনটি সমরেখ।

$$\therefore \begin{vmatrix} a & 1-a \\ 2-2a & 2a \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1-a & -4-a \\ 2a & 6-2a \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -4-a & a \\ 6-2a & 2-2a \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow 2a^2 + 6 - 8a + 2a^2 - 8 + 10a + 2a^2 - (2 - 4a + 2a^2 - 4a - 2a^2 + 6a - 2a^2) = 0$$

$$\Rightarrow 6a^2 + 2a - 2 - 2 + 2a^2 + 2a = 0 \Rightarrow 8a^2 + 4a - 4 = 0 \Rightarrow 2a^2 + a - 1 = 0$$

$$\Rightarrow 2a^2 + 2a - a - 1 = 0 \Rightarrow 2a(a+1) - 1(a+1) = 0$$

$$\Rightarrow (a+1)(2a-1) = 0 \quad \therefore a = -1, \frac{1}{2} \text{ (Ans.)}$$

উদাহরণ–2: একটি ত্রিভুজের শীর্ষত্রয় $A(x, y)$, $B(1, 2)$ এবং $C(2, 1)$ এবং এর ক্ষেত্রফল 6 বর্গ একক হলে, দেখাও যে, $x + y = 15$ অথবা, $x + y + 9 = 0$.

[য.'১১;ঢা.'০৪; রা.'০৬,'১১,'১৩; ব.'০৪,'০৯; কু.'১৩; সি.'১৪]

প্রমাণ: $\Delta ABC = \frac{1}{2}|(x-1)(2-1)-(y-2)(1-2)| = \frac{1}{2}|x-1+y-2| = \frac{1}{2}|x+y-3|$ বর্গ একক

প্রশ্নমতে, $\Delta ABC = \frac{1}{2}|x+y-3| = 6 \Rightarrow x+y-3 = \pm 12$

$\therefore$ $x+y=15$ অথবা, $x+y+9=0$ (Showed)

উদাহরণ–3: দেখাও যে, C(− 5 , −13) এবং D(11 , 12) বিন্দু দুইটি A(2 , −3) এবং B(1, 2) বিন্দুদ্বয়ের সংযোগ রেখার বিপরীত পার্শ্বে অবস্থিত। AB রেখার কোন পার্শ্বে মূলবিন্দু অবস্থিত ?

সমাধান: $\delta_{ABC} = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -5 & 13 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -5 & 0 \\ 6 & -11 & 0 \\ -5 & 13 & 1 \end{vmatrix} = -11+30 = 19$

$\delta_{ABD} = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 11 & 12 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -5 & 0 \\ -10 & -10 & 0 \\ 11 & 12 & 1 \end{vmatrix} = -10-50 = -60$

$\delta_{ABC} \times \delta_{ABD} = 19 \times -60 < 0$ বলে, C এবং D বিন্দু দুইটি AB রেখার বিপরীত পার্শ্বে অবস্থিত।

O মূলবিন্দু হলে, $\delta_{ABO} = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1(4+3) = 7$

যেহেতু δ_{ABC} এবং δ_{ABO} একই চিহ্নযুক্ত, সুতরাং মূলবিন্দু ও C বিন্দু রেখার AB একই পার্শ্বে অবস্থিত।

উদাহরণ–4: A , B , C এবং D বিন্দু চারটির স্থানাঙ্ক যথাক্রমে (–1, – 1) , (5, 7) , (– 2 , 3) এবং (4 , 1)। প্রমাণ কর যে, AB রেখাংশকে CD রেখাটি 11 : 19 অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত করে। CD রেখাংশকে AB রেখাটি যে অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত করে তা নির্ণয় কর।

$$\frac{\delta_{CDA}}{\delta_{CDB}} = \frac{(-2-4)(1+1)-(3-1)(4+1)}{(-2-4)(1-7)-(3-1)(4-5)} = \frac{-12-10}{36+2} = \frac{-22}{38} = -\frac{11}{19} < 0$$

$\therefore$ AB রেখাংশকে CD রেখাটি 11 : 19 অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত করে।

$$\frac{\delta_{ABC}}{\delta_{ABD}} = \frac{\begin{vmatrix} -1 & 5 \\ -1 & 7 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 5 & -2 \\ 7 & 3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -2 & -1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -1 & 5 \\ -1 & 7 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 5 & 4 \\ 7 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}} = \frac{-7+5+15+14+2+3}{-7+5+5-28-4+1} = \frac{32}{-28} = -\frac{8}{7} < 0$$

$\therefore$ CD রেখাংশকে AB রেখাটি 8 : 7 অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত করে।

প্রশ্নমালা III C

1. (a) ABC ত্রিভুজের শীর্ষত্রয় A(– 3, – 2) , B(– 3 , 9) এবং C(5 , – 8) ; ত্রিভুজটির ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর এবং এর সাহায্যে B হতে CA এর উপর লম্বের দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর। [কু.'০৪; য.'০৪,'১৩; চ.'০৮]

(b) দেখাও যে, (3, 5), (3 , 8) এবং মূলবিন্দু একটি ত্রিভুজের শীর্ষত্রয় । ত্রিভুজটির ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। [কু.'০২]

(c) ABC ত্রিভুজের বাহুগুলির মধ্যবিন্দু (1,2), (4, 4) এবং (2,8); ত্রিভুজটির ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। [বুয়েট'০১-০২]

(d) ABC ত্রিভুজের মধ্যমাগুলির মধ্যবিন্দু (1, 2), (4, 4) এবং (2, 8); ত্রিভুজটির ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

উত্তর: **(a)** 44 বর্গ একক, $8\frac{4}{5}$ একক। **(b)** $4\frac{1}{2}$ বর্গ একক। **(c)** 32 বর্গ একক। **(d)** 128 বর্গ একক।

2. **(a)** কোনো ত্রিভুজের শীর্ষত্রয়ের স্থানাঙ্ক $(t+1, 1)$, $(2t+1, 3)$, $(2t+2, 2t)$ । ত্রিভুজটির ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। দেখাও যে, $t = 2$ অথবা $t = -1/2$ হলে, বিন্দুগুলি সমরেখ হবে। উঃ $\frac{1}{2}|2t^2 - 3t - 2|$ বর্গ একক।

[সি. '০৭; কু.'১০ ; ঢা. '০৬; রা. '০৮,'১০; ব.'১০; চ.'১৫]

(b) (a, b), (b, a) এবং $(\frac{1}{a}, \frac{1}{b})$ ভিন্ন বিন্দুত্রয় সমরেখ হলে, দেখাও যে, $a + b = 0$. [চ.'০২]

(c) কোনো ত্রিভুজের শীর্ষত্রয়ের স্থানাঙ্ক $(2, -1)$, $(a+1, a-3)$, $(a+2, a)$ হলে এর ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর এবং a এর মান কত হলে বিন্দুগুলি সমরেখ হবে ? উ: $\frac{1}{2}|2a - 1|$ বর্গ একক, $a = \frac{1}{2}$. [রা.'১২; য.'১২;দি.'১৪]

3. **(a)** যদি $A(3, 4)$, $B(2t, 5)$ এবং $C(6, t)$ বিন্দুত্রয় দ্বারা উৎপন্ন ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল $19\frac{1}{2}$ বর্গ একক হয়, তবে t এর মান নির্ণয় কর। উত্তরঃ -2, $15/2$ [য.'০৩,'১৪; ঢা.'০৪; সি.'০৪; ব.'১৩; মা.'১৪]

(b) দেখাও যে, $(p, p-2)$, $(p+3, p)$ এবং $(p+2, p+2)$ বিন্দুত্রয় দ্বারা উৎপন্ন ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল p বর্জিত হবে। [কু.'০৮; মা.বো.'০৪]

(c) OPQ ত্রিভুজের শীর্ষত্রয় $(0, 0)$, $(A\cos\beta, -A\sin\beta)$ এবং $(A\sin\alpha, A\cos\alpha)$; দেখাও যে, $\alpha = \beta$ হলে, ত্রিভুজটি ক্ষেত্রফল বৃহত্তম হবে। বৃহত্তম মানটি নির্ণয় কর। উত্তরঃ $\frac{1}{2}A^2$ [য.'০৩; ব.'০৪; চ.'১২]

(d) দিইটি অক্ষরেখা পরস্পর লম্বভাবে O বিন্দুতে ছেদ করে। A এবং B এর ধনাত্মক স্থানাঙ্ক যথাক্রমে (x_1, y_1) এবং (x_2, y_2)। মূল নিয়মে প্রমাণ কর যে, OAB ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল $\frac{1}{2}|x_1y_2 - x_2y_1|$ বর্গ একক। [ঢা.'০৯; দি.'১২]

4. একটি ত্রিভুজের শীর্ষত্রয় $A(x, y)$, $B(2, 4)$ এবং $C(-3, 3)$ এবং এর ক্ষেত্রফল 9 বর্গ একক হলে, দেখাও যে, $x - 5y = 0$ অথবা, $x - 5y + 36 = 0$. [রা.'১৩]

5. **(a)** ΔABC এর A , B , C এর স্থানাঙ্ক যথাক্রমে $(3, 5)$, $(-3, 3)$, $(-1, -1)$ এবং BC , CA , AB এর মধ্যবিন্দু D , E , F হলে, ত্রিভুজ ABC এবং DEF এর ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। দেখাও যে, $\Delta ABC = 4.\Delta DEF$. উত্তরঃ 14 বর্গ একক, $7/2$ বর্গ একক। [ব.'০৫]

(b) ABC ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দু A, B, C এর স্থানাঙ্ক যথাক্রমে $(4, -3)$, $(13, 0)$, $(-2, 9)$ এবং D , E, F বিন্দু তিনটি ত্রিভুজের বাহুগুলির উপর এমনভাবে অবস্থিত যেন, $\frac{BD}{DC} = \frac{CE}{EA} = \frac{AF}{FB} = 2$. ABC এবং DEF ত্রিভুজ দুইটির ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর এবং দেখাও যে, এদের আনুপাত 3: 1. উত্তর: 63, 21 [রা.'০২]

(c) ABC ত্রিভুজে A, B, C শীর্ষ তিনটির স্থানাঙ্ক যথাক্রমে $(-1, 2)$, $(2, 3)$ ও $(3, -4)$; P বিন্দুর স্থানাঙ্ক (x, y) হলে, দেখাও যে, $\frac{\Delta PAB}{\Delta ABC} = \frac{|x - 3y + 7|}{22}$. [কু.'০৭]

সম্ভাব্য ধাপসহ সমস্যা :

6. ABC ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দু $A(5, 6)$, $B(-9, 1)$ এবং $C(-3, -1)$; ত্রিভুজটির ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর এবং এর

সাহায্যে A হতে BC এর উপর লম্বের দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর। [ঢা.'০৮; চ.'১০; য.'০৭; দি.০৯,'১০] (২) + (২)

উ: 29 বর্গ একক, $\frac{29\sqrt{10}}{10}$ একক

7. একটি ত্রিভুজের শীর্ষত্রয় $A(x, y)$, $B(2, 4)$ এবং $C(-3, 3)$ এবং এর ক্ষেত্রফল 9 বর্গ একক হলে, দেখাও যে, $x-5y=0$ অথবা, $x-5y+36=0$. [রা.'১৩] (২)

8. ABCD আয়তের তিনটি শীর্ষবিন্দু $A(3, 2)$, $B(2, -1)$, $C(8, -3)$ হলে, চতুর্থ শীর্ষ D এর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর। আয়তটির ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। উ: (9, 0), 20 বর্গ একক [ব.'০২; ঢা.'০৩; চ.'০৬] (২) + (২)

9. ABCD চতুর্ভুজের A, B, C, D শীর্ষ চারটির স্থানাঙ্ক যথাক্রমে $(1, 2)$, $(-5, 6)$, $(7, -4)$ এবং $(k, -2)$; এর ক্ষেত্রফল শূন্য হলে k এর মান নির্ণয় কর। উ: $k=3$ [য.'০২; সি.'০৮] (২)

10. যদি $A(-4, 6)$, $B(-1, -2)$ এবং $C(a, -2)$ বিন্দুত্রয় দ্বারা উৎপন্ন ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল 16 বর্গ একক হয়, তবে 'a' এর মান এবং A হতে BC এর লম্ব দূরত্ব নির্ণয় কর। উ: 3 বা, – 5, 8 একক [প্র.ভ.প.'৯৫] (৪)

11. (a) দেখাও যে, $(3, 90°)$ ও $(3, 30°)$ বিন্দু দুইটি মূলবিন্দুর সাথে একটি সমবাহু ত্রিভুজ উৎপন্ন করে। ত্রিভুজটির ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।
31 বর্গ একক (৪)

(b) দেখাও যে, $C(-2, -1)$ এবং $D(5, -4)$ বিন্দু দুইটি $A(-3, 1)$ এবং $B(1, -1)$ বিন্দুদ্বয়ের সংযোগ রেখার একই পার্শ্বে অবস্থিত। AB রেখার কোন পার্শ্বে মূলবিন্দু অবস্থিত ? (৩)

12. $(-2, 3)$, $(-3, -4)$, $(5, -1)$ ও $(2, 2)$ বিন্দু চারটি ক্রমান্বয়ে নিয়ে যে চতুর্ভুজ গঠিত হয় তার ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।
উ: 31 বর্গ একক। (২)

13. (a) t এর মান কত হলে $(2t+1, t+2)$, $(2-t, 2-5t)$ এবং $(5t, 7t)$ বিন্দুত্রয় ধনাত্মক ক্রমে অবস্থান করে একটি ত্রিভুজ গঠন করবে ? উ: $t>\frac{1}{3}$ (২)

(b) দেখাও যে, $(t, 3t-2)$, $(1-2t, 2-3t)$ এবং $(-t, -t)$ বিন্দুত্রয় ঋণাত্মক ক্রমে থাকবে, যদি $t>1$ হয়। (২)

14. একটি ত্রিভুজের শীর্ষ বিন্দুগুলি $A(x, y)$, $B(1, 3)$ ও $C(3,1)$ হলে এবং $x+y=1$ হলে ত্রিভুজটির ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। উ: 3 বর্গ একক। **[KUET 07-08]** (২)

সৃজনশীল প্রশ্ন:

15. ABCD রম্বসের তিনটি শীর্ষবিন্দু $A(2, 5)$, $B(5, 9)$ এবং $D(6, 8)$.

(a) t এর মান কত হলে $(2t+1, t+2)$, $(2-t, 2-5t)$ এবং $(5t, 7t)$ বিন্দুত্রয় ধনাত্মক ক্রমে অবস্থান করে একটি ত্রিভুজ গঠন করবে ?

(b) OB সরলরেখা AD রেখাংশকে যে অনুপাতে বিভক্ত করে তা নির্ণয় কর; যেখানে O মূলবিন্দু।

(c) রম্বসটির কর্ণের দৈর্ঘ্যের সাহায্যে এর ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। উত্তর: 7 বর্গ একক।

16. A, B, C এবং D বিন্দু চারটির স্থানাঙ্ক যথাক্রমে $(0, -1)$, $(15, 2)$, $(-1, 2)$ এবং $(4, -5)$।

(a) দেখাও যে, $(t, 3t-2)$, $(1-2t, 2-3t)$ এবং $(-t, -t)$ বিন্দুত্রয় ঋণাত্মক ক্রমে থাকবে, যদি $t>1$ হয়।

(b) মূলবিন্দু O এবং ΔACD এর ভারকেন্দ্র G হলে $OG^2 : \Delta ABD$ নির্ণয় কর।

(c) প্রমাণ কর যে, CD কে AB রেখাটি 2 : 3 অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত করে। [ব.'০৭; কু.'১১; দি.'১৩;রা.'১৫]

17. A , B , C এবং D বিন্দু চারটির স্থানাঙ্ক যথাক্রমে (3, 1) , (1,0) , (5, 1) এবং (– 10, –4) .

(a) PQRS আয়তের তিনটি শীর্ষবিন্দু P(3, 2) , Q(2, – 1), R(8, – 3) হলে, চতুর্থ শীর্ষ S এর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর। উত্তর: (9 , 0)

(b) CD সরলরেখা AB রেখাংশকে বহিঃস্থভাবে যে অনুপাতে বিভক্ত করে তা নির্ণয় কর। উত্তর: 2 : 1 [চ.'০২]

(c) AD রেখাংশকে x-অক্ষ L বিন্দুতে এবং ΔACD এর ভরকেন্দ্র M হলে BLM ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

৬. সঞ্চারপথ (Locus)

সমতলস্থ যেসব বিন্দু এক বা একাধিক প্রদত্ত শর্ত পূরণ করে, তাদের সেটকে সঞ্চারপথ বলে। প্রদত্ত শর্ত বা শর্তসমূহের সত্যতা অনুসারে সঞ্চার পথটি সরলরেখা বা বক্ররেখা হতে পারে। যেমন, সমতলস্থ একটি বিন্দু হতে সমদূরবর্তী বিন্দুসমূহের সেট যে সঞ্চার পথ সৃষ্টি করে তাকে বৃত্ত বলে ।

সঞ্চার পথের সমীকরণঃ প্রদত্ত শর্ত বা শর্তসমূহ হতে সঞ্চারপথ নির্দেশক সেটের যেকোনো বিন্দুর ভুজ এবং কোটির মধ্যে যে বীজগণিতীয় সম্পর্ক পাওয়া যায় তাকে সঞ্চার পথের সমীকরণ বলে। সঞ্চারপথের যেকোনো বিন্দুর স্থানাঙ্ক তার সমীকরণকে সিদ্ধ করে ; বিপরীতক্রমে, কোনো বিন্দুর স্থানাঙ্ক যদি কোনো সঞ্চার পথের সমীকরণকে সিদ্ধ করে তবে উক্ত বিন্দুটি অবশ্যই সেই সঞ্চারপথের উপর অবস্থিত হবে।

উদাহরণস্বরূপ, একটি বৃত্তের সঞ্চার পথের যেকোনো বিন্দু (4, 3) তার সমীকরণ $x^2 + y^2 = 25$ কে সিদ্ধ করবে; বিপরীতক্রমে, কোনো বিন্দু (0 , 5) বৃত্তের সঞ্চার পথের সমীকরণ $x^2 + y^2 = 25$ কে সিদ্ধ করে তবে উক্ত বিন্দু অবশ্যই বৃত্তের সঞ্চার পথের উপর অবস্থিত হবে।

উদাহরণ -1: $(a , 0)$ এবং $(0 , a)$ বিন্দু দুইটি হতে একটি সেটের যেকোনো বিন্দুর দূরত্বের বর্গের অন্তর $2a$ এর সমান হলে সঞ্চার পথটির সমীকরণ নির্ণয় কর। [ব.'০৮; ঢা.'০৭; য.'০৭,'১২; মা.বো.'০৮]

সমাধান : মনে করি, $P(x , y)$ বিন্দুটি সঞ্চার পথের উপর যেকোনো একটি বিন্দু ।

$$\therefore \ PA = \sqrt{(x-a)^2+(y-0)^2} \Rightarrow PA^2 = x^2 - 2ax + a^2 + y^2$$

$$PB = \sqrt{(x-0)^2+(y-a)^2} \Rightarrow PB^2 = x^2 + y^2 - 2ay + a^2$$

প্রশ্নমতে, $PA^2 - PB^2 = |2a| = \pm 2a$

$$\Rightarrow x^2 - 2ax + a^2 + y^2 - (x^2 + y^2 - 2ay + a^2) = \pm 2a$$

$$\Rightarrow x^2 - 2ax + a^2 + y^2 - x^2 - y^2 + 2ay - a^2 = \pm 2a \Rightarrow 2a(y-x) = \pm 2a$$

$\therefore \ y = x \pm 1$, ইহাই নির্ণেয় সঞ্চার পথের সমীকরণ।

প্রশ্নমালা – III D

1. (a) A(2 , 3) এবং B(–1 , 4) দুইটি স্থির বিন্দু । A এবং B বিন্দু হতে একটি সেটের যেকোনো বিন্দুর দূরত্বের অনুপাত 2 : 3 হলে সঞ্চার পথটির সমীকরণ নির্ণয় কর। উত্তর : $5x^2 + 5y^2 - 44x - 22y + 49 = 0$

[চ.'১১; রা.'০৭; দি.'১১,'১৫; ব.'১২; ঢা.',কু.,য.'১৪; মা.'১৫]