(b) মূলবিন্দু O এবং ΔACD এর ভারকেন্দ্র G হলে $OG^2 : \Delta ABD$ নির্ণয় কর।

(c) প্রমাণ কর যে, CD কে AB রেখাটি 2 : 3 অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত করে। [ব.'০৭; কু.'১১; দি.'১৩;রা.'১৫]

17. A , B , C এবং D বিন্দু চারটির স্থানাঙ্ক যথাক্রমে (3, 1) , (1,0) , (5, 1) এবং (– 10, –4) .

(a) PQRS আয়তের তিনটি শীর্ষবিন্দু P(3, 2) , Q(2, – 1), R(8, – 3) হলে, চতুর্থ শীর্ষ S এর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর। উত্তর: (9 , 0)

(b) CD সরলরেখা AB রেখাংশকে বহিঃস্থভাবে যে অনুপাতে বিভক্ত করে তা নির্ণয় কর। উত্তর: 2 : 1 [চ.'০২]

(c) AD রেখাংশকে x-অক্ষ L বিন্দুতে এবং ΔACD এর ভরকেন্দ্র M হলে BLM ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

৬. সঞ্চারপথ (Locus)

সমতলস্থ যেসব বিন্দু এক বা একাধিক প্রদত্ত শর্ত পূরণ করে, তাদের সেটকে সঞ্চারপথ বলে। প্রদত্ত শর্ত বা শর্তসমূহের সত্যতা অনুসারে সঞ্চার পথটি সরলরেখা বা বক্ররেখা হতে পারে। যেমন, সমতলস্থ একটি বিন্দু হতে সমদূরবর্তী বিন্দুসমূহের সেট যে সঞ্চার পথ সৃষ্টি করে তাকে বৃত্ত বলে ।

সঞ্চার পথের সমীকরণঃ প্রদত্ত শর্ত বা শর্তসমূহ হতে সঞ্চারপথ নির্দেশক সেটের যেকোনো বিন্দুর ভুজ এবং কোটির মধ্যে যে বীজগণিতীয় সম্পর্ক পাওয়া যায় তাকে সঞ্চার পথের সমীকরণ বলে। সঞ্চারপথের যেকোনো বিন্দুর স্থানাঙ্ক তার সমীকরণকে সিদ্ধ করে ; বিপরীতক্রমে, কোনো বিন্দুর স্থানাঙ্ক যদি কোনো সঞ্চার পথের সমীকরণকে সিদ্ধ করে তবে উক্ত বিন্দুটি অবশ্যই সেই সঞ্চারপথের উপর অবস্থিত হবে।

উদাহরণস্বরূপ, একটি বৃত্তের সঞ্চার পথের যেকোনো বিন্দু (4, 3) তার সমীকরণ $x^2 + y^2 = 25$ কে সিদ্ধ করবে; বিপরীতক্রমে, কোনো বিন্দু (0 , 5) বৃত্তের সঞ্চার পথের সমীকরণ $x^2 + y^2 = 25$ কে সিদ্ধ করে তবে উক্ত বিন্দু অবশ্যই বৃত্তের সঞ্চার পথের উপর অবস্থিত হবে।

উদাহরণ -1: $(a , 0)$ এবং $(0 , a)$ বিন্দু দুইটি হতে একটি সেটের যেকোনো বিন্দুর দূরত্বের বর্গের অন্তর $2a$ এর সমান হলে সঞ্চার পথটির সমীকরণ নির্ণয় কর। [ব.'০৮; ঢা.'০৭; য.'০৭,'১২; মা.বো.'০৮]

সমাধান : মনে করি, $P(x , y)$ বিন্দুটি সঞ্চার পথের উপর যেকোনো একটি বিন্দু ।

$\therefore\ PA = \sqrt{(x-a)^2 + (y-0)^2} \Rightarrow PA^2 = x^2 - 2ax + a^2 + y^2$

$PB = \sqrt{(x-0)^2 + (y-a)^2} \Rightarrow PB^2 = x^2 + y^2 - 2ay + a^2$

প্রশ্নমতে, $PA^2 - PB^2 = |2a| = \pm 2a$

$\Rightarrow x^2 - 2ax + a^2 + y^2 - (x^2 + y^2 - 2ay + a^2) = \pm 2a$

$\Rightarrow x^2 - 2ax + a^2 + y^2 - x^2 - y^2 + 2ay - a^2 = \pm 2a \Rightarrow 2a(y - x) = \pm 2a$

$\therefore\ y = x \pm 1$, ইহাই নির্ণেয় সঞ্চার পথের সমীকরণ।

প্রশ্নমালা – III D

1. **(a)** A(2 , 3) এবং B(–1 , 4) দুইটি স্থির বিন্দু । A এবং B বিন্দু হতে একটি সেটের যেকোনো বিন্দুর দূরত্বের অনুপাত 2 : 3 হলে সঞ্চার পথটির সমীকরণ নির্ণয় কর। উত্তর : $5x^2 + 5y^2 - 44x - 22y + 49 = 0$

[চ.'১১; রা.'০৭; দি.'১১,'১৫; ব.'১২; ঢা.',কু.,য.'১৪; মা.'১৫]

(b) একটি ত্রিভুজের শীর্ষত্রয় $A(x, y)$, $B(-6, -3)$ এবং $C(6, 3)$। A বিন্দুটি একটি সেটের সদস্য যে সেটটির যেকোনো বিন্দু হতে BC এর উপর অঙ্কিত মধ্যমার দৈর্ঘ্য 5 একক। দেখাও যে, A বিন্দুর সঞ্চারপথের সমীকরণ $x^2 + y^2 = 25$ **[সি.'০১; চ.'০২]**

(c) $A(0, 4)$ ও $B(0, 6)$ দুইটি স্থির বিন্দু। কার্তেসীয় সমতলে একটি বিন্দু-সেটের যেকোনো উপাদানের সাথে AB রেখাংশ এক সমকোণ উৎপন্ন করে। ঐ সেটটি দ্বারা সৃষ্ট সঞ্চারপথের সমীকরণ নির্ণয় কর।

উত্তর: $x^2 + y^2 - 10y + 24 = 0$ **[চ.'০৩ ; ঢা.'১০;রা.'১৪]**

(d) একটি বিন্দু-সেটের যেকোনো উপাদান $(2, -1)$ বিন্দু থেকে সর্বদা 4 একক দূরত্বে অবস্থান করে। ঐ সেটটি দ্বারা সৃষ্ট সঞ্চারপথের সমীকরণ নির্ণয় কর। উত্তর: $(x-2)^2 + (y+1)^2 = 16.$ **[রা.'০৫; কু.'১২]**

2. **(a)** y-অক্ষ হতে একটি বিন্দু-সেটের যেকোনো উপাদানের দূরত্ব মূলবিন্দু হতে তার দূরত্বের অর্ধেক। ঐ সেটটি দ্বারা সৃষ্ট সঞ্চারপথের সমীকরণ নির্ণয় কর।

উত্তর: $y^2 = 3x^2$ **[বুয়েট'০৪-০৫]**

(b) $B(2, 6)$ ও $C(x, y)$ বিন্দু দুইটি $O(0, 0)$ ও $A(3, 5)$ বিন্দুদ্বয়ের সংযোগ সরলরেখার একই পার্শ্বে অবস্থিত। $C(x, y)$ বিন্দুটি এমন একটি বিন্দু-সেটের সদস্য যার প্রতিটি বিন্দুর জন্য $\Delta OAC = 2.\Delta OAB$. ঐ সেটটি দ্বারা সৃষ্ট সঞ্চারপথের সমীকরণ নির্ণয় কর।

উত্তর: $5x - 3y + 16 = 0$

3. k এর যেকোনো মানের জন্য P বিন্দুর স্থানাঙ্ক $(2ak, ak^2)$; P বিন্দুর সঞ্চারপথের সমীকরণ নির্ণয় কর।

উত্তর: $x^2 = 4ay$

4. (a, b) বিন্দুগামী একটি পরিবর্তনশীল সরলরেখা অক্ষদ্বয়ের সাথে যে ত্রিভুজ গঠন করে তার ভরকেন্দ্রের সঞ্চারপথের সমীকরণ নির্ণয় কর।

উ: $bx + ay - 3xy$

সম্ভাব্য ধাপসহ সমস্যা :

5. $(2, 0)$ বিন্দু হতে একটি বিন্দু-সেটের যেকোন উপাদানের দূরত্ব $x = 0$ রেখা হতে তার দূরত্বের তিনগুণ। ঐ সেটটি দ্বারা সৃষ্ট সঞ্চারপথের সমীকরণ নির্ণয় কর।

উ: $y^2 - 8x^2 - 4x + 4 = 0$ **[রা '০৯]**

6. t পরিবর্তনশীল হলে দেখাও যে, $P(t+2, 3t)$ বিন্দুর সঞ্চারপথের সমীকরণ $3x - y = 6.$ (২)

সৃজনশীল প্রশ্ন:

7. ABP ত্রিভুজের শীর্ষত্রয় $A(a, b)$, $B(0, b)$, $P(x, y)$ এবং $O(0,0)$ মূলবিন্দু।

(a) θ পরিবর্তনশীল হলে, $P(1 + 2\cos\theta, -2 + 2\sin\theta)$ বিন্দুর সঞ্চারপথের সমীকরণ নির্ণয় কর।

উ: $x^2 + y^2 - 2x + 4y + 1 = 0$

(b) ABO ত্রিভুজের ভরকেন্দ্র G, AB এর মধ্যবিন্দু D এবং $\angle GPD = 90^0$ হলে P বিন্দুর সঞ্চারপথের সমীকরণ নির্ণয় কর। **[য.'১০; রা.'১৩]**

উ: $6(x^2 + y^2) - 5ax - 10by + a^2 + 4b^2 = 0$

(c) B ও P বিন্দু OA এর বিপরীত পার্শ্বে অবস্থিত। $\Delta OAP = 3.\Delta OAB$ হলে P বিন্দুর সঞ্চারপথের সমীকরণ নির্ণয় কর।

উ: $ay - bx + 3ab = 0$

৭. সরলরেখার ঢাল (Slope) বা ক্রমাবনতি (Gradient)

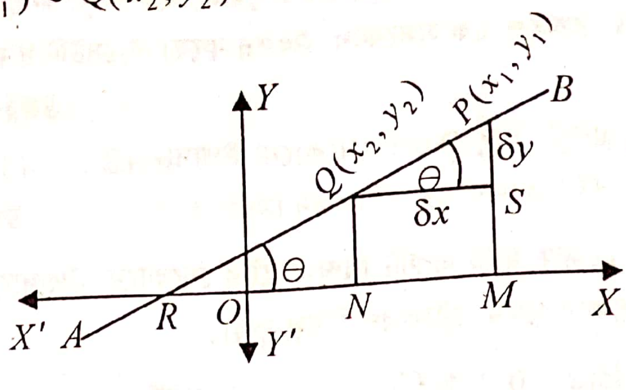
সরলরেখা : একটি বিন্দু-সেট দ্বারা সৃষ্ট সঞ্চারপথ দিক পরিবর্তন না করলে সে সঞ্চারপথকে সরলরেখা বলা হয়। সঞ্চারপথের সমীকরণকে সরলরেখার সমীকরণ বলা হয়।

সরলরেখার ঢাল : কোনো সরলরেখা (যা x-অক্ষের উপর লম্ব নয়) x অক্ষের ধনাত্মক দিকের সাথে যে কোণ উৎপন্ন করে সেই কোণের ত্রিকোণমিতিক ট্যানজেন্টকে রেখাটির ঢাল বলে। ঢালকে সাধারণত m দ্বারা সূচিত করা হয়। AB সরলরেখা x-অক্ষের ধনাত্মক দিকের সাথে θ $(0° \le \theta < 180°;\ \theta \ne 90°)$ কোণ উৎপন্ন করলে, তার ঢাল $m = \tan\theta$.

যেমন, x-অক্ষের ধনাত্মক দিকের সাথে $30°$ কোণ উৎপন্ন করে এমন রেখার ঢাল $= \tan 30° = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

৮. দুইটি বিন্দুর সংযোগ সরলরেখার ঢাল :

মনে করি, AB সরলরেখাটি দুইটি নির্দিষ্ট বিন্দু $P(x_1, y_1)$ ও $Q(x_2, y_2)$ দিয়ে যায় এবং তা x-অক্ষের ধনাত্মক দিকের সাথে θ কোণ উৎপন্ন করে। P ও Q বিন্দু হতে x-অক্ষের উপর যথাক্রমে PM ও QN লম্ব টানি। Q বিন্দু হতে PM এর উপর QS লম্ব টানি।



RM ∥ QS বলে, $\angle PRM = \angle PQS = \theta$

আবার, $QS = NM = OM - ON = x_1 - x_2$,

$PS = PM - SM = PM - QN = y_1 - y_2$

$\therefore$ m = AB এর ঢাল $= \tan\theta = \tan PQS$

$$= \frac{PS}{QS} = \frac{rise}{run} = \frac{\delta y}{\delta x} = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = \boxed{\frac{\text{কোটিদ্বয়ের অন্তর}}{\text{ভুজদ্বয়ের অন্তর}}}$$

যেমন, (2 , 3) ও (6 , 7) বিন্দুগামী সরলরেখার ঢাল $= \frac{3-7}{2-6} = \frac{-4}{-4} = 1$। রেখাটি x- অক্ষের ধনাত্মক দিকের সাথে θ কোণ উৎপন্ন করলে, $\tan\theta = 1 \therefore \theta = 45°$

অনুসিদ্ধান্ত-1. মূলবিন্দু (0 , 0) এবং (x_1, y_1) বিন্দুগামী সরলরেখার ঢাল $= \frac{0 - y_1}{0 - x_1} = \frac{y_1}{x_1}$। আনুভূমিক রেখার ঢাল শূন্য এবং উলম্ব রেখার ঢাল অর্থহীন।

অনুসিদ্ধান্ত-2. $P(x_1, y_1)$, $Q(x_2, y_2)$ ও $R(x_3, y_3)$ বিন্দু তিনটি সমরেখ হবে যদি ও কেবল যদি, PQ, QR এবং PR এর ঢাল সমান হয় অর্থাৎ $\frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = \frac{y_2 - y_3}{x_2 - x_3} = \frac{y_1 - y_3}{x_1 - x_3}$ হয়।

উদাহরণ-1: (1 , 2) এবং (3 , 4) বিন্দুগামী রেখার উপর (x , y) যেকোনো একটি বিন্দু হলে দেখাও যে, $x - y + 1 = 0$. [রা.'০৬; মা.বো.'০৬,'০৯]

সমাধান : ধরি, প্রদত্ত বিন্দু দুইটি A(1,2) ও B(3,4) এবং AB রেখার উপর $P(x, y)$ যেকোনো একটি বিন্দু।

$\therefore$ A , B , P বিন্দু তিনটি সমরেখ।

$\therefore$ AB রেখার ঢাল = PA রেখার ঢাল

$$\Rightarrow \frac{2-4}{1-3} = \frac{y-2}{x-1} \Rightarrow \frac{-2}{-2} = \frac{y-2}{x-1} \Rightarrow x - 1 = y - 2 \Rightarrow x - y + 1 = 0 \text{ (Showed)}$$

বিকল্প পদ্ধতি : প্রদত্ত বিন্দুত্রয়ের নিশ্চায়ক ,

$\delta_{ABP} = (1-3)(4-y) - (2-4)(3-x)$ $[\because \delta = (x_1 - x_2)(y_2 - y_3) - (y_1 - y_2)(x_2 - x_3)]$

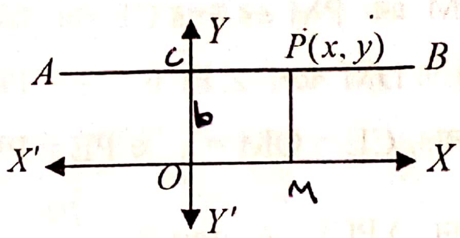
$= -8 + 2y + 6 - 2x = 2(y - x - 1)$

প্রদত্ত বিন্দু তিনটি সমরেখ বলে, $2(y - x - 1) = 0 \therefore x - y + 1 = 0$ (Showed)

৯. সরলরেখার সমীকরণ

I. x-অক্ষের সমান্তরাল অর্থাৎ y-অক্ষের উপর লম্ব রেখার সমীকরণ ($y = b$) :

মনে করি, AB রেখাটি x-অক্ষের সমান্তরাল এবং রেখাটি y-অক্ষকে C বিন্দুতে ছেদ করে যেন $OC = b$ হয়। ধরি, AB এর উপর $P(x, y)$ একটি বিন্দু। x-অক্ষের উপর PM লম্ব টানি।



$\therefore \quad PM = CO$

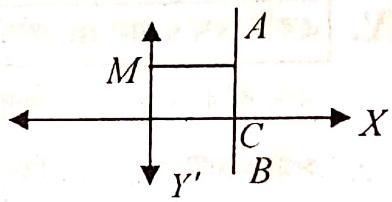
$\Rightarrow y = b$ এবং AB রেখার উপরস্থ যেকোনো বিন্দুর জন্য এ সমীকরণটি সত্য।

অতএব, x-অক্ষ থেকে 'b' একক দূরত্বে অবস্থিত x -অক্ষের সমান্তরাল রেখার সমীকরণ $y = b$ যা y-অক্ষের উপর লম্ব রেখারও সমীকরণ।

নোটঃ x-অক্ষের সমান্তরাল সরলরেখার সমীকরণ x মুক্ত থাকে। AB রেখাটি 'b' এর ধনাত্মক মানের জন্য 'b' একক উপরে এবং ঋণাত্মক মনের জন্য 'b' একক নীচে অবস্থান করে। $b = 0$ হলে AB রেখাটি x-অক্ষের উপরে সমপাতিত হয়। সুতরাং x-অক্ষের সমীকরণ $y = 0$.

II. y -অক্ষের সমান্তরাল অর্থাৎ x-অক্ষের উপর লম্ব রেখার সমীকরণ ($x = a$) :

মনে করি, AB রেখাটি y-অক্ষের সমান্তরাল এবং রেখাটি x-অক্ষকে C বিন্দুতে ছেদ করে যেন $OC = a$ হয়। ধরি, AB এর উপর $P(x, y)$ একটি বিন্দু। y-অক্ষের উপর PM লম্ব টানি।



$\therefore \quad PM = OC \Rightarrow x = a$ এবং AB রেখার উপরস্থ যেকোনো বিন্দুর জন্য এ সমীকরণটি সত্য।

অতএব, x-অক্ষ থেকে 'a' একক দূরত্বে অবস্থিত y -অক্ষের সমান্তরাল রেখার সমীকরণ $x = a$ যা x-অক্ষের উপর লম্ব রেখারও সমীকরণ।

নোটঃ y-অক্ষের সমান্তরাল সরলরেখার সমীকরণ y মুক্ত থাকে। AB রেখাটি 'a' এর ধনাত্মক মানের জন্য 'a' একক ডানে এবং ঋণাত্মক মনের জন্য 'a' একক বামে অবস্থান করে। $a = 0$ হলে AB রেখাটি y-অক্ষের উপরে সমপাতিত হয়। সুতরাং y-অক্ষের সমীকরণ $x = 0$.

যেমন, (i) $2x - 3 = 0 \Rightarrow x = \frac{3}{2}$ এবং $3x + 2 = 0 \Rightarrow x = -\frac{2}{3}$ রেখা দুইটি y-অক্ষের সমান্তরাল এবং তারা y-অক্ষ থেকে যথাক্রমে $\frac{3}{2}$ একক ডানে এবং $\frac{2}{3}$ একক বামে অবস্থিত।

(ii) $3y - 5 = 0 \Rightarrow y = \frac{5}{3}$ এবং $5y + 3 = 0 \Rightarrow y = -\frac{3}{5}$ রেখা দুইটি x-অক্ষের সমান্তরাল এবং তারা x-অক্ষ থেকে যথাক্রমে $\frac{5}{3}$ একক উপরে এবং $\frac{3}{5}$ একক নীচে অবস্থিত।

III. ঢাল-ছেদ আকৃতি বা m-আকৃতি রেখা : y-অক্ষকে কোনো নির্দিষ্ট বিন্দুতে ছেদ করে এবং x-অক্ষের ধনাত্মক দিকের সাথে একটি নির্দিষ্ট কোণ উৎপন্ন করে এরূপ সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয়।

মনে করি, AB রেখাটি x-অক্ষকে D বিন্দুতে এবং y-অক্ষকে C বিন্দুতে ছেদ করে যেন $OC = c$ এবং রেখাটি x অক্ষের ধনাত্মক দিকের সাথে θ কোণ উৎপন্ন করে। AB এর উপর $P(x, y)$ যেকোনো একটি বিন্দু। x-অক্ষের উপর