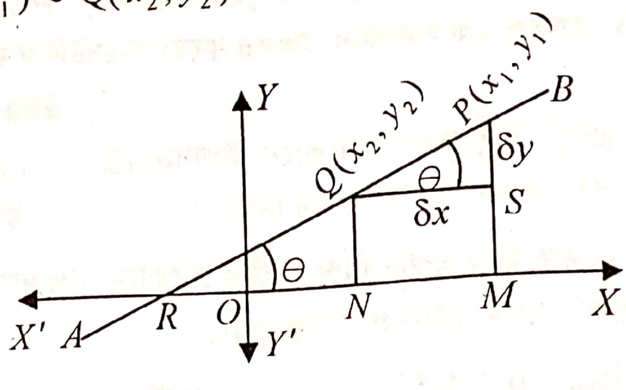
যেমন, x-অক্ষের ধনাত্মক দিকের সাথে $30°$ কোণ উৎপন্ন করে এমন রেখার ঢাল $= \tan 30° = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

৮. দুইটি বিন্দুর সংযোগ সরলরেখার ঢাল :

মনে করি, AB সরলরেখাটি দুইটি নির্দিষ্ট বিন্দু $P(x_1, y_1)$ ও $Q(x_2, y_2)$ দিয়ে যায় এবং তা x-অক্ষের ধনাত্মক দিকের সাথে θ কোণ উৎপন্ন করে। P ও Q বিন্দু হতে x-অক্ষের উপর যথাক্রমে PM ও QN লম্ব টানি। Q বিন্দু হতে PM এর উপর QS লম্ব টানি।



RM ∥ QS বলে, $\angle PRM = \angle PQS = \theta$

আবার, $QS = NM = OM - ON = x_1 - x_2$,

$PS = PM - SM = PM - QN = y_1 - y_2$

$\therefore$ m = AB এর ঢাল $= \tan\theta = \tan PQS$

$$= \frac{PS}{QS} = \frac{rise}{run} = \frac{\delta y}{\delta x} = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = \boxed{\frac{\text{কোটিদ্বয়ের অন্তর}}{\text{ভুজদ্বয়ের অন্তর}}}$$

যেমন, (2 , 3) ও (6 , 7) বিন্দুগামী সরলরেখার ঢাল $= \frac{3-7}{2-6} = \frac{-4}{-4} = 1$। রেখাটি x- অক্ষের ধনাত্মক দিকের সাথে θ কোণ উৎপন্ন করলে, $\tan\theta = 1 \therefore \theta = 45°$

অনুসিদ্ধান্ত-1. মূলবিন্দু (0 , 0) এবং (x_1, y_1) বিন্দুগামী সরলরেখার ঢাল $= \frac{0 - y_1}{0 - x_1} = \frac{y_1}{x_1}$। আনুভূমিক রেখার ঢাল শূন্য এবং উলম্ব রেখার ঢাল অর্থহীন।

অনুসিদ্ধান্ত-2. $P(x_1, y_1)$, $Q(x_2, y_2)$ ও $R(x_3, y_3)$ বিন্দু তিনটি সমরেখ হবে যদি ও কেবল যদি, PQ, QR এবং PR এর ঢাল সমান হয় অর্থাৎ $\frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = \frac{y_2 - y_3}{x_2 - x_3} = \frac{y_1 - y_3}{x_1 - x_3}$ হয়।

উদাহরণ-1: (1 , 2) এবং (3 , 4) বিন্দুগামী রেখার উপর (x , y) যেকোনো একটি বিন্দু হলে দেখাও যে, $x - y + 1 = 0$. [রা.'০৬; মা.বো.'০৬,'০৯]

সমাধান : ধরি, প্রদত্ত বিন্দু দুইটি A(1,2) ও B(3,4) এবং AB রেখার উপর $P(x, y)$ যেকোনো একটি বিন্দু।

$\therefore$ A , B , P বিন্দু তিনটি সমরেখ।

$\therefore$ AB রেখার ঢাল = PA রেখার ঢাল

$$\Rightarrow \frac{2-4}{1-3} = \frac{y-2}{x-1} \Rightarrow \frac{-2}{-2} = \frac{y-2}{x-1} \Rightarrow x-1 = y-2 \Rightarrow x - y + 1 = 0 \text{ (Showed)}$$

বিকল্প পদ্ধতি : প্রদত্ত বিন্দুত্রয়ের নিশ্চায়ক ,

$\delta_{ABP} = (1-3)(4-y) - (2-4)(3-x)$ $[\because \delta = (x_1 - x_2)(y_2 - y_3) - (y_1 - y_2)(x_2 - x_3)]$

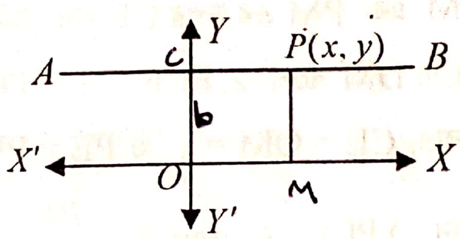
$= -8 + 2y + 6 - 2x = 2(y - x - 1)$

প্রদত্ত বিন্দু তিনটি সমরেখ বলে, $2(y - x - 1) = 0 \therefore x - y + 1 = 0$ (Showed)

৯. সরলরেখার সমীকরণ

I. x-অক্ষের সমান্তরাল অর্থাৎ y-অক্ষের উপর লম্ব রেখার সমীকরণ ($y = b$) :

মনে করি, AB রেখাটি x-অক্ষের সমান্তরাল এবং রেখাটি y-অক্ষকে C বিন্দুতে ছেদ করে যেন $OC = b$ হয়। ধরি, AB এর উপর $P(x, y)$ একটি বিন্দু। x-অক্ষের উপর PM লম্ব টানি।



$\therefore \quad PM = CO$

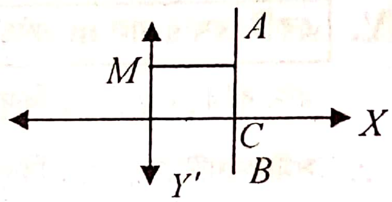
$\Rightarrow y = b$ এবং AB রেখার উপরস্থ যেকোনো বিন্দুর জন্য এ সমীকরণটি সত্য।

অতএব, x-অক্ষ থেকে 'b' একক দূরত্বে অবস্থিত x -অক্ষের সমান্তরাল রেখার সমীকরণ $y = b$ যা y-অক্ষের উপর লম্ব রেখারও সমীকরণ।

নোটঃ x-অক্ষের সমান্তরাল সরলরেখার সমীকরণ x মুক্ত থাকে। AB রেখাটি 'b' এর ধনাত্মক মানের জন্য 'b' একক উপরে এবং ঋণাত্মক মনের জন্য 'b' একক নীচে অবস্থান করে। $b = 0$ হলে AB রেখাটি x-অক্ষের উপরে সমপাতিত হয়। সুতরাং x-অক্ষের সমীকরণ $y = 0$.

II. y -অক্ষের সমান্তরাল অর্থাৎ x-অক্ষের উপর লম্ব রেখার সমীকরণ ($x = a$) :

মনে করি, AB রেখাটি y-অক্ষের সমান্তরাল এবং রেখাটি x-অক্ষকে C বিন্দুতে ছেদ করে যেন $OC = a$ হয়। ধরি, AB এর উপর $P(x, y)$ একটি বিন্দু। y-অক্ষের উপর PM লম্ব টানি।



$\therefore \quad PM = OC \Rightarrow x = a$ এবং AB রেখার উপরস্থ যেকোনো বিন্দুর জন্য এ সমীকরণটি সত্য।

অতএব, x-অক্ষ থেকে 'a' একক দূরত্বে অবস্থিত y -অক্ষের সমান্তরাল রেখার সমীকরণ $x = a$ যা x-অক্ষের উপর লম্ব রেখারও সমীকরণ।

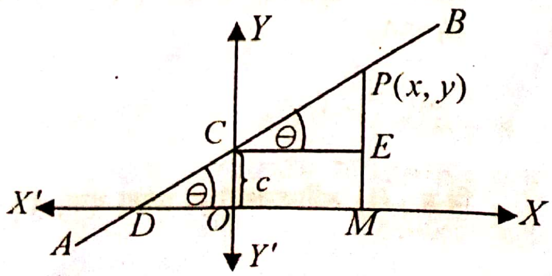
নোটঃ y-অক্ষের সমান্তরাল সরলরেখার সমীকরণ y মুক্ত থাকে। AB রেখাটি 'a' এর ধনাত্মক মানের জন্য 'a' একক ডানে এবং ঋণাত্মক মনের জন্য 'a' একক বামে অবস্থান করে। $a = 0$ হলে AB রেখাটি y-অক্ষের উপরে সমপাতিত হয়। সুতরাং y-অক্ষের সমীকরণ $x = 0$.

যেমন, (i) $2x - 3 = 0 \Rightarrow x = \dfrac{3}{2}$ এবং $3x + 2 = 0 \Rightarrow x = -\dfrac{2}{3}$ রেখা দুইটি y-অক্ষের সমান্তরাল এবং তারা y-অক্ষ থেকে যথাক্রমে $\dfrac{3}{2}$ একক ডানে এবং $\dfrac{2}{3}$ একক বামে অবস্থিত।

(ii) $3y - 5 = 0 \Rightarrow y = \dfrac{5}{3}$ এবং $5y + 3 = 0 \Rightarrow y = -\dfrac{3}{5}$ রেখা দুইটি x-অক্ষের সমান্তরাল এবং তারা x-অক্ষ থেকে যথাক্রমে $\dfrac{5}{3}$ একক উপরে এবং $\dfrac{3}{5}$ একক নীচে অবস্থিত।

III. ঢাল-ছেদ আকৃতি বা m-আকৃতি রেখা : y-অক্ষকে কোনো নির্দিষ্ট বিন্দুতে ছেদ করে এবং x-অক্ষের ধনাত্মক দিকের সাথে একটি নির্দিষ্ট কোণ উৎপন্ন করে এরূপ সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয়।

মনে করি, AB রেখাটি x-অক্ষকে D বিন্দুতে এবং y-অক্ষকে C বিন্দুতে ছেদ করে যেন $OC = c$ এবং রেখাটি x অক্ষের ধনাত্মক দিকের সাথে θ কোণ উৎপন্ন করে। AB এর উপর $P(x, y)$ যেকোনো একটি বিন্দু। x-অক্ষের উপর



PM এবং PM এর উপর CE লম্ব টানি।

CE ॥ DM বলে, $\angle PCE = \angle CDM = \theta$.

আবার, $CE = OM = x$ ও $PE = PM - EM = PM - CO = y - c$.

এখন, ΔPCE-এ, $\tan\theta = \dfrac{PE}{CE} = \dfrac{y-c}{x}$

$\Rightarrow y = x\tan\theta + c \;\therefore\; y = mx + c$, যখন $m = \tan\theta$

অতএব, একটি সরলরেখার ঢাল m এবং y-অক্ষের ছেদক অংশ c হলে তার সমীকরণ হবে $y = mx + c$

নোটঃ $c = 0$ হলে, $y = mx$, যা মূলবিন্দু দিয়ে অতিক্রমকারী রেখার সাধারণ সমীকরণ নির্দেশ করে।

যেমন, y-অক্ষের ছেদ অংশ 3 এবং x-অক্ষের ধনাত্মক দিকের সাথে $45°$ কোণ উৎপন্ন কারী সরলরেখার সমীকরণ, $y = x\tan 45° + 3 \Rightarrow y = x \,.\, 1 + 3 \Rightarrow y = x + 3$.

IV. একটি রেখার ঢাল m এবং রেখাটি (x_1, y_1) বিন্দুগামী হলে, রেখাটির সমীকরণ হবে $y - y_1 = m(x - x_1)$

মনে করি, (x_1, y_1) বিন্দুগামী যেকোনো একটি রেখার সমীকরণ $y = mx + c \cdots\cdots (1)$.

$\therefore$ সমীকরণটি (x_1, y_1) বিন্দু দ্বারা সিদ্ধ হবে, অর্থাৎ $y_1 = m x_1 + c \cdots\cdots (2)$

$(1) - (2) \Rightarrow y - y_1 = m(x - x_1)$, যা নির্ণেয় রেখার সমীকরণ।

যেমন, $\dfrac{3}{4}$ ঢাল বিশিষ্ট এবং $(2, -3)$ বিন্দুগামী রেখার সমীকরণ, $y + 3 = \dfrac{3}{4}(x - 2)$

$$\Rightarrow 4y + 12 = 3x - 6 \Rightarrow 3x - 4y = 18.$$

উদাহরণ–2: একটি সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর যা x-অক্ষের ঋণাত্মক দিকের সাথে $135°$ কোণ উৎপন্ন করে এবং $(2,1)$ বিন্দু দিয়ে যায়।

সমাধান : নির্ণেয় সরলরেখার ঢাল, $m = -\tan 135° = -\tan(180° - 45°) = \tan 45° = 1$

$\therefore$ m ঢাল বিশিষ্ট এবং $(2, 1)$ বিন্দুগামী রেখার সমীকরণ, $y - 1 = m(x - 2) \Rightarrow y - 1 = 1(x - 2)$

$$\Rightarrow y - 1 = x - 2 \;\therefore\; x - y = 1 \quad (\text{Ans.})$$

V. (x_1, y_1) এবং (x_2, y_2) বিন্দুগামী রেখার সমীকরণ $\dfrac{x - x_1}{x_1 - x_2} = \dfrac{y - y_1}{y_1 - y_2}$

(x_1, y_1) এবং (x_2, y_2) বিন্দুগামী রেখার ঢাল $= \dfrac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$.

$\dfrac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$ ঢাল বিশিষ্ট এবং (x_1, y_1) বিন্দুগামী রেখার সমীকরণ, $y - y_1 = \dfrac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}(x - x_1)$

$$\Rightarrow \frac{x - x_1}{x_1 - x_2} = \frac{y - y_1}{y_1 - y_2}.$$

বি.দ্র.: (i) সমীকরণটিকে লেখা যায়, $(x - x_1)(y_1 - y_2) - (y - y_1)(x_1 - x_2) = 0$.

(ii) মূলবিন্দু $(0, 0)$ এবং (x_1, y_1) বিন্দুগামী রেখার সমীকরণ $\frac{x-0}{0-x_1} = \frac{y-0}{0-y_1} \Rightarrow \frac{x}{x_1} = \frac{y}{y_1}$

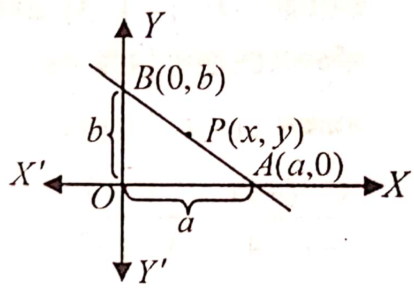
$$\boxed{\therefore\ y = \frac{y_1}{x_1}x \Rightarrow xy_1 - yx_1 = 0}$$

যেমন, $(-1, 2)$ এবং $(3, -4)$ বিন্দুগামী রেখার সমীকরণ $\frac{x-(-1)}{-1-3} = \frac{y-2}{2-(-4)} \Rightarrow \frac{x+1}{-4} = \frac{y-2}{6}$

$$\Rightarrow \frac{x+1}{-2} = \frac{y-2}{3} \Rightarrow 3x + 3 = -2y + 4 \Rightarrow 3x + 2y = 1$$

VI ছেদক আকার : x-অক্ষ এবং y-অক্ষ হতে যথাক্রমে a এবং b অংশ ছেদকারী রেখার সমীকরণ $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$.

ধরি, সরলরেখাটি দ্বারা x-অক্ষ এবং y- অক্ষের ছেদ অংশ যথাক্রমে $OA = a$ এবং $OB = b$ । সুতরাং, A এবং B বিন্দুর স্থানাঙ্ক যথাক্রমে $(a, 0)$ এবং $(0, b)$ । ধরি, AB এর উপর $P(x, y)$ যেকোনো একটি বিন্দু।



$\therefore$ AP এর ঢাল = BP এর ঢাল [$\because$ A, P, B বিন্দু তিনটি সমরেখ।]

$$\therefore \frac{0-y}{a-x} = \frac{b-y}{0-x} \Rightarrow xy = ab - ay - bx + xy \Rightarrow bx + ay = ab$$

$$\Rightarrow \frac{bx}{ab} + \frac{ay}{ab} = 1 \Rightarrow \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \quad \cdots\cdots (1)$$

বি.দ্র. : (a) (1) সমীকরণটিকে $lx + my = 1$ আকারে লেখা যায়, য়েখানে $l = \frac{1}{a}$ এবং $m = \frac{1}{b}$

(b) $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ রেখাটি x - অক্ষকে $A(a, 0)$ বিন্দুতে এবং y-অক্ষকে $B(0, b)$ বিন্দুতে ছেদ করে।

$\therefore AB = \sqrt{OA^2 + OB^2} = \sqrt{a^2 + b^2}$ এবং $\Delta OAB = \frac{1}{2}|OA \times OB|$ বর্গ একক $= \frac{1}{2}|a\,b|$ বর্গ একক।

(c) অক্ষদ্বয় দ্বারা $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ রেখাটির ছেদ অংশের মধ্যবিন্দুর স্থানাঙ্ক $(\frac{a}{2}, \frac{b}{2})$.

যেমন, x -অক্ষ এবং y -অক্ষ হতে যথাক্রমে 4 এবং 5 অংশ ছেদকারী রেখার সমীকরণ অর্থাৎ $(4, 0)$ এবং $(0, 5)$ বিন্দুগামী রেখার সমীকরণ $\frac{x}{4} + \frac{y}{5} = 1$.

উদাহরণ -3: $3x + by + 1 = 0$ এবং $ax + 6y + 1 = 0$ সরলরেখাদ্বয় $(5, 4)$ বিন্দুতে ছেদ করে। a ও b এর মান নির্ণয় কর। যদি প্রথম রেখাটি x-অক্ষকে A বিন্দুতে এবং দ্বিতীয় রেখাটি y-অক্ষকে B বিন্দুতে ছেদ করে, তবে AB এর সমীকরণ নির্ণয় কর। [য.'০২;রা.'১৪]

সমাধান: $3x + by + 1 = 0 \cdots\cdots(1)$ এবং $ax + 6y + 1 = 0 \cdots(2)$ রেখাদ্বয় $(5, 4)$ বিন্দুতে ছেদ করে।

$\therefore\ 3\times 5 + b\times 4 + 1 = 0 \Rightarrow 15 + 4b + 1 = 0 \Rightarrow 4b = -16\ \therefore\ b = -4$ এবং

$a\times 5 + 6\times 4 + 1 = 0 \Rightarrow 5a + 24 + 1 = 0 \Rightarrow 5a = -25\ \therefore\ a = -5$

$\therefore$ (1) হতে পাই, $3x - 4y + 1 = 0$

$\Rightarrow 3x - 4y = -1 \Rightarrow \dfrac{x}{-1/3} + \dfrac{y}{1/4} = 1$; যা x-অক্ষকে $A(-\frac{1}{3}, 0)$ বিন্দুতে ছেদ করে।

(2) হতে পাই, $-5x + 6y + 1 = 0$

$\Rightarrow -5x + 6y = -1 \Rightarrow \dfrac{1}{1/5} + \dfrac{1}{-1/6} = 1$ যা y-অক্ষকে $B(0, -\frac{1}{6})$ বিন্দুতে ছেদ করে।

$\therefore$ AB রেখার সমীকরণ, $\dfrac{x + \frac{1}{3}}{-\frac{1}{3} - 0} = \dfrac{y - 0}{0 + \frac{1}{6}} \Rightarrow -3x - 1 = 6y\ \therefore 3x + 6y + 1 = 0$ (Ans.)

উদাহরণ –4: $(-1, 3)$ এবং $(4, -2)$ বিন্দুগামী সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর এবং অক্ষ দুইটির মধ্যবর্তী খন্ডিতাংশের দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর। [সি.'১০; রা.'০৭; ব.'০৯]

সমাধান : $(-1, 3)$ এবং $(4, -2)$ বিন্দুগামী সরলরেখার সমীকরণ,

$$\frac{x-(-1)}{-1-4} = \frac{y-3}{3-(-2)} \Rightarrow \frac{x+1}{-5} = \frac{y-3}{5} \Rightarrow \frac{x+1}{-1} = \frac{y-3}{1}$$

$\Rightarrow x + 1 = -(y - 3)\ \therefore\ x + y - 2 = 0 \cdots\cdots$ (i) (Ans.)

(i) হতে পাই, $x + y = 2 \Rightarrow \dfrac{x}{2} + \dfrac{y}{2} = 1$

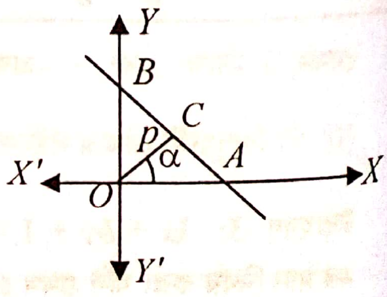
$\therefore$ অক্ষ দুইটির মধ্যবর্তী খন্ডিতাংশের দৈর্ঘ্য $= \sqrt{2^2 + 2^2}$ একক $= 2\sqrt{2}$ একক।

VII. লম্ব আকার সমীকরণ : মূলবিন্দু হতে কোনো সরলরেখার উপর অঙ্কিত লম্বের দৈর্ঘ্য p এবং লম্বটি x-অক্ষের ধনাত্মক দিকের সাথে α কোণ উৎপন্ন করলে, রেখাটির সমীকরণ হবে $x\cos\alpha + y\sin\alpha = p$.

মনে করি, রেখাটি x ও y-অক্ষকে যথাক্রমে A ও B বিন্দুতে ছেদ করে। মূলবিন্দু O হতে রেখাটির উপর অঙ্কিত লম্বের দৈর্ঘ্য $OC = p$ এবং $\angle AOC = \alpha$

এখন OAC সমকোণী ত্রিভুজে, $\cos\alpha = \dfrac{OC}{OA} = \dfrac{p}{OA} \Rightarrow OA = \dfrac{p}{\cos\alpha}$ এবং

OBC সমকোণী ত্রিভুজে, $\cos BOC = \dfrac{OC}{OB}$



$\Rightarrow \cos(90° - \alpha) = \dfrac{p}{OB} \Rightarrow OB = \dfrac{p}{\sin\alpha}$

$\therefore$ AB রেখার সমীকরণ, $\dfrac{x}{OA} + \dfrac{y}{OB} = 1 \Rightarrow \dfrac{x}{\frac{p}{\cos\alpha}} + \dfrac{y}{\frac{p}{\sin\alpha}} = 1$

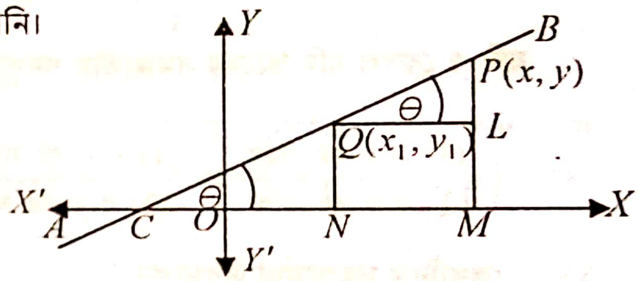
$$\Rightarrow \frac{x\cos\alpha}{p}+\frac{y\sin\alpha}{p}=1 \Rightarrow x\cos\alpha + y\sin\alpha = p;$$ এখানে p সর্বদাই ধনাত্মক বিবেচনা করা হয়।

যেমন, মূলবিন্দু হতে একটি রেখার উপর অঙ্কিত লম্বের দৈর্ঘ্য $2\sqrt{2}$ এবং লম্বটি x-অক্ষের ধনাত্মক দিকের সাথে $45°$ কোণ উৎপন্ন করলে তার সমীকরণ, $x\cos 45° + y\sin 45° = 2\sqrt{2}$

$$\Rightarrow x.\frac{1}{\sqrt{2}} + y.\frac{1}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2} \quad \therefore\ x+y=4$$

VIII দূরত্ব আকার সমীকরণ : একটি নির্দিষ্ট বিন্দু (x_1, y_1) দিয়ে যায় এবং x-অক্ষের ধনাত্মক দিকের সাথে θ কোণ উৎপন্ন করে এমন সরলরেখার সমীকরণ $\frac{x-x_1}{\cos\theta}=\frac{y-y_1}{\sin\theta}=r$, যেখানে (x, y) বিন্দু হতে (x_1, y_1) বিন্দুর দূরত্ব r

মনে করি, AB সরলরেখাটি $Q(x_1, y_1)$ বিন্দু দিয়ে যায় এবং x-অক্ষের ধনাত্মক দিকের সাথে $\angle BCX = \theta$ কোণ উৎপন্ন করে। ধরি, AB এর উপর $P(x, y)$ যেকোনো একটি বিন্দু এবং $QP = r$. P ও Q বিন্দু হতে x-অক্ষের উপর যথাক্রমে PM ও QN এবং Q বিন্দু হতে PM এর উপর QL লম্ব টানি।



$\therefore\ \angle PQL = \theta$

এখন, $QL = NM = OM - ON = x - x_1$,

$PL = PM - LM = PM - QN = y - y_1$

আবার, $\sin\theta = \frac{PL}{PQ} \Rightarrow \frac{PL}{\sin\theta} = PQ \Rightarrow \frac{y-y_1}{\sin\theta} = r$

এবং $\cos\theta = \frac{QL}{PQ} \Rightarrow \frac{QL}{\cos\theta} = PQ \Rightarrow \frac{x-x_1}{\cos\theta} = r$

$$\therefore \frac{x-x_1}{\cos\theta} = \frac{y-y_1}{\sin\theta} = r.$$

বি.দ্র. : আমরা পাই, $x = x_1 + r\cos\theta$, $y = y_1 + r\sin\theta$ । সুতরাং, রেখাটির উপর যেকোনো বিন্দুর স্থানাঙ্ক $(x_1 + r\cos\theta,\ y_1 + r\sin\theta)$

যেমন, $(-2, 3)$ বিন্দু দিয়ে যায় এবং x-অক্ষের ধনাত্মক দিকের সহিত $120°$ কোণ উৎপন্ন করে এমন রেখার সমীকরণ, $\frac{x+2}{\cos 120^0} = \frac{y-3}{\sin 120^0} \Rightarrow \frac{x+2}{-1/2} = \frac{y-3}{\sqrt{3}/2} \Rightarrow \sqrt{3}(x+2) = -(y-3) \Rightarrow \sqrt{3}x + y = 3 - 2\sqrt{3}$

১০. সরলরেখার সাধারণ সমীকরণ

a, b, c ধ্রুবকগুলির a ও b উভয়ই শূন্য না হলে, x ও y সমন্বিত এক ঘাত সমীকরণ $ax + by + c = 0$ সর্বদাই একটি সরলরেখা সূচিত করে এবং ইহাকে সরলরেখার সাধারণ সমীকরণ বলা হয়।

মনে করি, $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$ বিন্দু তিনটি $ax + by + c = 0$ ... ... (1) রেখার সঞ্চারপথের উপর অবস্থিত।

$\therefore\ ax_1 + by_1 + c = 0$ ... (2) , $ax_2 + by_2 + c = 0$ ...... (3) , $ax_3 + by_3 + c = 0$ ... (4)

বজ্রগুণন সূত্রের সাহায্যে (3) ও (4) সমীকরণ হতে পাই, $\dfrac{a}{y_2 - y_3} = \dfrac{b}{x_3 - x_2} = \dfrac{c}{x_2 y_3 - x_3 y_2} = \text{k}$ (ধরি)

$\therefore \; a = \text{k}(y_2 - y_3),\; b = \text{k}(x_3 - x_2),\; c = \text{k}(x_2 y_3 - x_3 y_2)$

a, b, c এর মান সমীকরণ (2) এ বসিয়ে পাই,

$\text{k}\, x_1(y_2 - y_3) + \text{k}\, y_1(x_3 - x_2) + \text{k}(x_2 y_3 - x_3 y_2) = 0$

$\Rightarrow x_1(y_2 - y_3) + x_3 y_1 - x_2 y_1 + x_2 y_3 - x_3 y_2 = 0$

$\Rightarrow x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2) = 0$; ইহা $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$ বিন্দু তিনটি সমরেখ হওয়ার শর্ত নির্দেশ করে। কিন্তু বিন্দু তিনটি সমীকরণ (1) এর সঞ্চারপথে অবস্থিত।

অতএব, $ax + by + c = 0$ সমীকরণটি সর্বদাই একটি সরলরেখা নির্দেশ করে এবং ইহা একটি সরলরেখার সাধারণ সমীকরণ।

অনুসিদ্ধান্ত : দুইটি সরলরেখা $a_1x + b_1y + c_1 = 0 \cdots (1)$ এবং $a_2x + b_2y + c_2 = 0 \cdots (2)$ অভিন্ন হবে যদি ও কেবল যদি তাদের সমজাতীয় পদগুলির অনুপাত সমান হয়। অর্থাৎ যদি $\dfrac{a_1}{a_2} = \dfrac{b_1}{b_2} = \dfrac{c_1}{c_2}$ হয়।

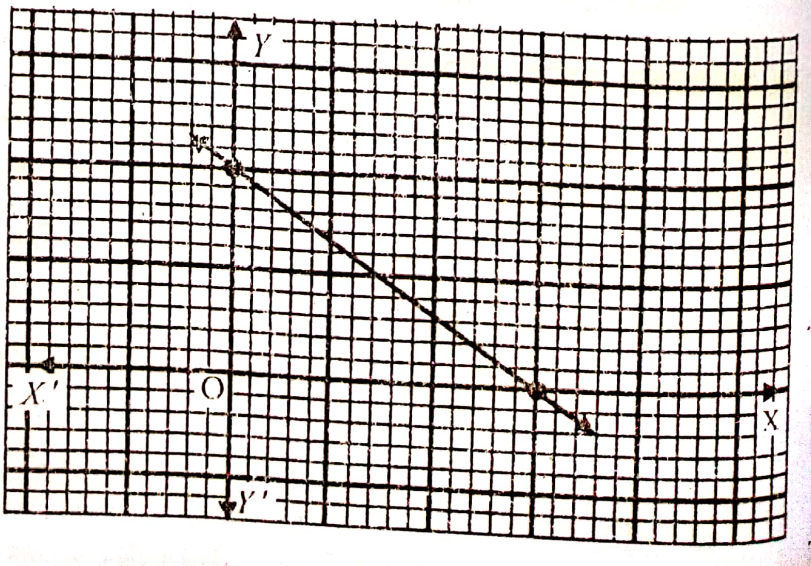
$\left[\dfrac{(1) \text{ এ } x \text{ এর সহগ}}{(2) \text{ এ } x \text{ এর সহগ}} = \dfrac{(1) \text{ এ } y \text{ এর সহগ}}{(2) \text{ এ } y \text{ এর সহগ}} = \dfrac{(1) \text{ এ চলকবিহীন পদ}}{(2) \text{ এ চলকবিহীন পদ}} \right]$

১১. লেখচিত্রে সরলরেখা উপস্থাপন

$ax + by + c = 0$ সরলরেখা লেখচিত্রে উপস্থাপন : (i) প্রদত্ত রেখাকে $y = \dfrac{1}{b}(-ax - c)$ বা $x = \dfrac{1}{a}(-by - c)$ আকারে প্রকাশ করে রেখাস্থ কয়েকটি (কমপক্ষে তিনটি) বিন্দু নির্ণয় করি অথবা (ii) প্রদত্ত রেখাকে ছেদক আকারে অর্থাৎ $\dfrac{x}{-c/a} + \dfrac{y}{-c/b} = 1$ আকারে প্রকাশ করি যা x অক্ষকে $(-\dfrac{c}{a}, 0)$ ও y অক্ষকে $(0, -\dfrac{c}{b})$ বিন্দুতে ছেদ করে। অতপর একটি নির্ধারিত স্কেলে প্রাপ্ত বিন্দুগুলিকে গ্রাফ পেপারে স্থাপন করি এবং সরু পেন্সিল দিয়ে সংযোগ করি। এরূপে লেখচিত্রে সরলরেখা উপস্থাপন করা যায়।

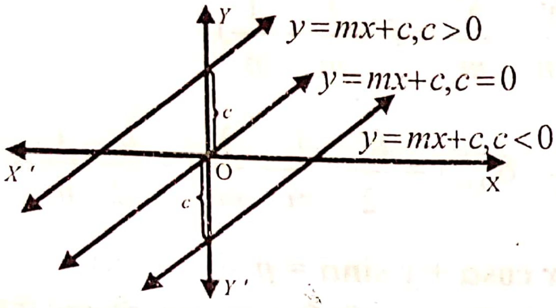
স্কেল নির্ধারণ : x স্থানাঙ্ক ও y স্থানাঙ্কের জন্য একই অথবা ভিন্ন স্কেল নির্ধারণ করা যায়। রেখাস্থ প্রাপ্ত বিন্দুগুলি পূর্ণ সংখ্যা হলে যেকোনো স্কেল নির্ধারণ করে বিন্দুগুলিকে গ্রাফ পেপারে স্থাপন করা যায়। ভগ্নাংশের ক্ষেত্রে প্রতি একক = ভগ্নাংশ স্থানাঙ্কের ল.সা.গু. এর সমপরিমাণ সংখ্যক ক্ষুদ্রতম বর্গের বাহুর দৈর্ঘ্য।

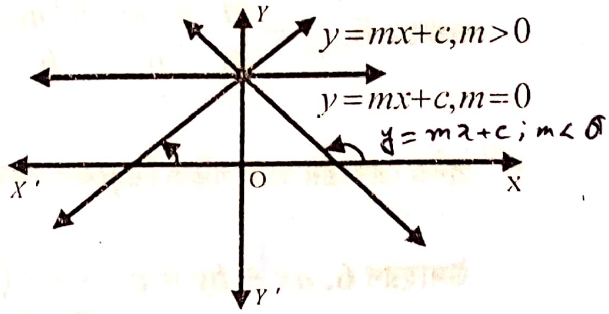
$2x + 3y = 5$ সরলরেখা লেখচিত্রে উপস্থাপন : প্রদত্ত সরলরেখার সমীকরণ হতে পাই, $\dfrac{x}{5/2} + \dfrac{y}{5/3} = 1$; যা x অক্ষকে $(\dfrac{5}{2}, 0)$ ও y অক্ষকে $(0, \dfrac{5}{3})$ বিন্দুতে ছেদ করে। একটি ছক কাগজে স্থানাঙ্কের অক্ষ রেখা X'OX ও YOY' আঁকি। x - অক্ষ ও y - অক্ষ বরাবর ক্ষুদ্রতম বর্গের 6 বাহুর দৈর্ঘ্য = 1 একক ধরে



প্রাপ্ত বিন্দুগুলিকে ছক কাগজে স্থাপন করি এবং সরু পেন্সিল দিয়ে সংযোগ করে $2x + 3y = 7$ সরলরেখা লেখচিত্রে উপস্থাপন করি।

বি.দ্র. $y = mx + c$ সাধারণ সমীকরণে , (i) $c = 0$ হলে সরলরেখাটি মূলবিন্দুগামী হবে; (ii) $c>0$ হলে y অক্ষকে ধনাত্মক দিকে c একক দূরে ছেদ করবে; (iii) $c < 0$ হলে y অক্ষকে ঋণাত্মক দিকে c একক দূরে ছেদ করবে; (iv) $m = 0$ হলে রেখাটি x অক্ষ অথবা x অক্ষের সমান্তরাল হবে; $m > 0$ হলে রেখাটি x অক্ষের ধনাত্মক দিকের সাথে সূক্ষ্মকোণ উৎপন্ন করবে; $m<0$ হলে রেখাটি x অক্ষের ধনাত্মক দিকের সাথে স্থূলকোণ উৎপন্ন করবে।





১২. দুইটি অসমান্তরাল সরলরেখার ছেদবিন্দু নির্ণয়

দুইটি সরলরেখার একটি অনন্য (একটি ও কেবলমাত্র একটি) সাধারণবিন্দু থাকলে তারা পরস্পরকে ছেদ করে। রেখা দুইটির অসংখ্য সাধারণবিন্দু থাকলে তারা অভিন্ন হয় এবং কোনো সাধারণ বিন্দু না থাকলে তারা পরস্পর সমান্তরাল হয়।

মনে করি, $a_1x + b_1y + c_1=0$ এবং $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ রেখা দুটির ছেদবিন্দু (α , β) । সুতরাং, (α , β) বিন্দুটি উভয় সমীকরণকে সিদ্ধ করবে।

$\therefore$ $a_1\alpha + b_1\beta + c_1 = 0 \cdots\cdots(1)$ এবং $a_2\alpha + b_2\beta + c_2 = 0 \cdots\cdots(2)$

(1) ও (2) কে বজ্রগুণন প্রক্রিয়ায় সমাধান করে আমরা পাই, $\dfrac{\alpha}{b_1c_2 - b_2c_1} = \dfrac{\beta}{c_1a_2 - c_2a_1} = \dfrac{1}{a_1b_2 - a_2b_1}$

$\therefore$ $\alpha = \dfrac{b_1c_2 - b_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1}, \beta = \dfrac{c_1a_2 - c_2b_1}{a_1b_2 - a_2b_1}$ (এখানে, $a_1b_2 \neq a_2b_1$)

$\therefore$ **রেখাদ্বয়ের ছেদবিন্দুর স্থানাঙ্ক** $(\alpha , \beta) = \left(\dfrac{b_1c_2 - b_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1}, \dfrac{c_1a_2 - c_2a_1}{a_1b_2 - a_2b_1}\right)$

লক্ষণীয়, $a_1b_2 = a_2b_1$ হলে রেখাদ্বয় সমান্তরাল হবে এবং তাদের ছেদবিন্দু **(point of intersection)** থাকবেনা।

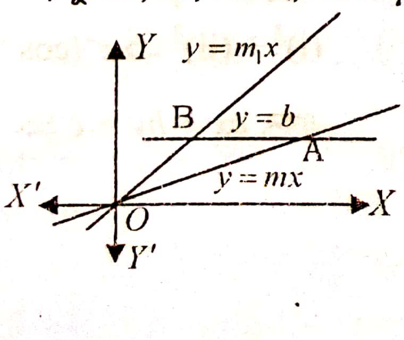
উদাহরণমালা

উদাহরণ–5: দেখাও যে, $y = mx$, $y = m_1x$ এবং $y = b$ রেখাত্রয় দ্বারা গঠিত ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল $\dfrac{b^2}{2}\left(\dfrac{1}{m} \sim \dfrac{1}{m_1}\right)$ বর্গ একক। [ঢা.'০৯; মা.'০৭; কু.'১০,'১৫; দি.'১২; মা.'১৩]

সমাধান : মনে করি, OAB ত্রিভুজের বাহু তিনটি,

$OA \equiv y - mx = 0 \cdots\cdots(1)$, $OB \equiv y - m_1x = 0 \cdots\cdots(2)$

এবং $AB \equiv y - b = 0 \cdots\cdots(3)$



(1) ও (2) এর ছেদবিন্দু O(0 , 0)

(1) ও (2) এ (3) হতে $y = b$ বসিয়ে পাই, $x = \frac{y}{m} = \frac{b}{m}$ এবং $x = \frac{y}{m_1} = \frac{b}{m_1}$

$\therefore$ (1) ও (3) এর ছেদবিন্দু $A(\frac{b}{m}, b)$ এবং (2) ও (3) এর ছেদবিন্দু $B(\frac{b}{m_1}, b)$

এখানে $\delta_{OAB} = \begin{vmatrix} 0 & b/m & b/m_1 & 0 \\ 0 & b & b & 0 \end{vmatrix} = \frac{b^2}{m} - \frac{b^2}{m_1} = b^2(\frac{1}{m} - \frac{1}{m_1})$

$\therefore$ প্রদত্ত রেখাত্রয় দ্বারা গঠিত ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2} | \delta_{OAB} | = \frac{b^2}{2} | \frac{1}{m} - \frac{1}{m_1} | = \frac{b^2}{2}(\frac{1}{m} \sim \frac{1}{m_1})$ বর্গ একক।

উদাহরণ 6. $ax + by = c \cdots \cdots$ (i) এবং $x \cos\alpha + y \sin\alpha = p \cdots \cdots$ (ii)

(a) যে সরলরেখার অক্ষদ্বয়ের মধ্যবর্তী খন্ডিত অংশ (2,3) বিন্দুতে সমদ্বিখন্ডিত হয় তার সমীকরণ নির্ণয় কর।[কু.'১৫]

(b) (i) ও (ii) একই সরলরেখা নির্দেশ করলে a, b ও p এর মাধ্যমে অক্ষদ্বয় দ্বারা রেখাটির খন্ডিতাংশ নির্ণয় কর।
[সি.'১০; ঢা.'০৪; রা.'০৭; ব.'০৯; দি.'১৩]

(c) a = 3, b = 4, c = 25 *হলে* (i) রেখার উপর (– 5, 10) বিন্দু হতে 10 একক দূরে অবস্থিত দুইটি বিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

(a) সমাধান: ধরি, রেখাটির সমীকরণ $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \cdots \cdots$ (1)

(1) রেখাটির অক্ষদ্বয়ের মধ্যবর্তী খন্ডিত অংশের মধ্যবিন্দুর স্থানাঙ্ক $(\frac{a}{2}, \frac{b}{2})$.

প্রশ্নমতে, $\frac{a}{2} = 2 \Rightarrow a = 4$ এবং $\frac{b}{2} = 3 \Rightarrow b = 6$

$\therefore$ রেখাটির সমীকরণ, $\frac{x}{4} + \frac{y}{6} = 1 \Rightarrow 3x + 2y = 12$

[MCQ এর জন্য, রেখাটির সমীকরণ $\frac{x}{2 \times 2} + \frac{y}{2 \times 3} = 1$]

(b) সমাধানঃ $ax + by = c$ এবং $x \cos\alpha + y \sin\alpha = p$ একই সরলরেখা নির্দেশ করবে যদি $\frac{a}{\cos\alpha} = \frac{b}{\sin\alpha} = \frac{c}{p}$ হয়।

$\therefore \frac{a}{\cos\alpha} = \frac{c}{p} \Rightarrow c \cos\alpha = pa \cdots\cdots\cdots$ (i) এবং $\frac{b}{\sin\alpha} = \frac{c}{p} \Rightarrow c \sin\alpha = bp \cdots\cdots$ (ii)

$(i)^2 + (ii)^2 \Rightarrow c^2(\cos^2\alpha + \sin^2\alpha) = p^2(a^2 + b^2) \Rightarrow c^2 = p^2(a^2 + b^2) \cdots\cdots$ (iii)

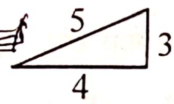
এখন, $ax + by = c \Rightarrow \frac{x}{c/a} + \frac{y}{c/b} = 1$

$\therefore$ অক্ষদ্বয় দ্বারা রেখাটির খন্ডিতাংশ $= \sqrt{\left(\frac{c}{a}\right)^2 + \left(\frac{c}{b}\right)^2} = \sqrt{c^2(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2})}$

$= \sqrt{p^2(a^2+b^2)(\frac{a^2+b^2}{a^2b^2})}$, [(iii) দ্বারা]

$= \frac{p(a^2+b^2)}{ab}$ বর্গ একক।

(c) সমাধান : মনে করি, রেখাটি x-অক্ষের সাথে α কোণ উৎপন্ন করে।



$\therefore$ $\tan\alpha = -\frac{a}{b} = -\frac{3}{4} \Rightarrow \sin\alpha = \frac{3}{5}$ এবং $\cos\alpha = -\frac{4}{5}$

অথবা, $\sin\alpha = -\frac{3}{5}$ এবং $\cos\alpha = \frac{4}{5}$

$\therefore$ রেখাটির সমীকরণ, $\frac{x+5}{\cos\alpha} = \frac{y-10}{\sin\alpha} = 10$

$\therefore$ $x + 5 = 10\cos\alpha \Rightarrow x = 10\cos\alpha - 5$ এবং $y - 10 = 10\sin\alpha \Rightarrow y = 10\sin\alpha + 10$

$\sin\alpha = \frac{3}{5}$ এবং $\cos\alpha = -\frac{4}{5}$ এর জন্য, $x = 10 \times -\frac{4}{5} - 5 = -8 - 5 = -13$ এবং

$$y = 10 \times \frac{3}{5} + 10 = 6 + 10 = 16$$

$\sin\alpha = -\frac{3}{5}$ এবং $\cos\alpha = \frac{4}{5}$ এর জন্য, $x = 8 - 5 = 3$ এবং $y = -6 + 10 = 4$

$\therefore$ দুইটি বিন্দুর স্থানাঙ্ক $(-13, 16)$ এবং $(3, 4)$

প্রশ্নমালা III E

1. (a) x অক্ষের ধনাত্মক দিকের সাথে 30^0 কোণ উৎপন্ন করে এরূপ সরলরেখার ঢাল নির্ণয় কর। উত্তর : $\frac{1}{\sqrt{3}}$

(b) $(3, -4)$ ও $(4, -5)$ বিন্দুগামী সরলরেখার ঢাল নির্ণয় কর। উত্তর : -1

(c) একটি সরলরেখার সমীকরকরণ নির্ণয় কর যা x-অক্ষের সমান্তরাল এবং তার নিচে 4 একক দূরে অবস্থিত।

(d) একটি সরলরেখার সমীকরকরণ নির্ণয় কর যা y-অক্ষের সমান্তরাল এবং তার ডানে 5 একক দূরে অবস্থিত।

উত্তর : **(c)** $y = -4$ **(d)** $x = 5$

(e) x –অক্ষের সমান্তরাল ও $(3, -4)$ বিন্দুগামী সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর। উত্তর : $y = -4$

(f) (a, b) এবং $(-a, -b)$ বিন্দুগামী রেখার সমীকরণ নির্ণয় কর। উত্তর : $bx - ay = 0$

(g) (a, b) এবং $(a + b, a - b)$ বিন্দুগামী রেখার সমীকরণ নির্ণয় কর।

উত্তর : $(2b - a)x + by + a^2 - 2ab - b^2 = 0$

2. একটি সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর যা x-অক্ষের ধনাত্মক দিকের সাথে $\sin^{-1}(5/13)$ কোণ উৎপন্ন করে এবং y-অক্ষের ধনাত্মক দিকের ছেদাংশ 5 একক। উত্তর : $12y = 5x + 60$.

3. (a) $A(1, 1)$, $B(3, 4)$ এবং $C(5, -2)$ বিন্দু তিনটি ABC ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দু। AB ও AC এর মধ্যবিন্দুর সংযোগ রেখার সমীকরণ নির্ণয় কর। উ: $6x + 2y - 17 = 0$ [কু.'১৪; ঢা.'১১; মা.বো.'০৭; য.'০৯]

(b) $(2, 4)$, $(-4, -6)$ এবং $(6, -8)$ বিন্দু তিনটি একটি ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দু। ত্রিভুজটির মধ্যমাগুলির সমীকরণ নির্ণয় কর। উত্তর : $11x - y - 18 = 0$, $x + y + 2 = 0$, $x - 2y - 8 = 0$ [চ.'০৭]

(c) $A(h, k)$ বিন্দুটি $6x - y = 1$ রেখার উপর এবং $B(k, h)$ বিন্দুটি $2x - 5y = 5$ রেখার উপর অবস্থিত। AB সরলরেখাটির সমীকরণ নির্ণয় কর। উ: $x + y - 6 = 0$ [ঢা.,চ.'১২,'১৪; ব.'১০; রা.,য.'১১; সি.,য.'১৪]

(d) যদি (a, b), (a', b'), $(a - a', b - b')$ বিন্দুত্রয় সমরেখ হয়, তবে দেখাও যে, তাদের সংযোগ রেখাটি মূলবিন্দু দিয়ে যায় এবং $ab' = a'b$. [কু.'০৯]

4. (a) $x - 4 = 0$, $y - 5 = 0$, $x + 3 = 0$ এবং $y + 2 = 0$ রেখাগুলি দ্বারা উৎপন্ন চর্তুভুজের কর্ণদ্বয়ের সমীকরণ নির্ণয় কর। উত্তর : $x - y + 1 = 0$, $x + y - 2 = 0$ [ঢা.'১২; চ.'০৫; কু.'০৯; ব.'১৪]

(b) $x = 4$, $x = 8$, $y = 6$ এবং $y = 10$ রেখাগুলি দ্বারা উৎপন্ন আয়তক্ষেত্রের কর্ণদ্বয়ের সমীকরণ নির্ণয় কর। উত্তরঃ $x - y + 2 = 0$, $x + y - 14 = 0$ [চ.'০২]

5. (a) $3x + \sqrt{3}y + 2 = 0$ এবং $x\cos\alpha + y\sin\alpha = p$ একই সরলরেখা নির্দেশ করলে p এর মান নির্ণয় কর। [চুয়েট'০৪-০৫]

(b) $3x - 4y = 12$ এবং $x\cos\alpha + y\sin\alpha = p$ একই সরলরেখা নির্দেশ করলে p এবং α এর মান নির্ণয় কর। উত্তর : (a) $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ (b) $\dfrac{12}{5}$, $2\pi - \tan^{-1}(\dfrac{4}{3})$

6. (a) একটি সরলরেখা অক্ষদ্বয় হতে সমান সমান অংশ কর্তন করে এবং (α, β) বিন্দু দিয়ে অতিক্রম করে তার সমীকরণ নির্ণয় কর। উত্তর : $x + y = \alpha + \beta$ বা, $x - y = \alpha - \beta$ [কু.'০৪; দি.'১১]

(b) একটি সরলরেখা $(2, 6)$ বিন্দু দিয়ে যায় এবং যার দ্বারা অক্ষদ্বয়ের খন্ডিত অংশের সমষ্টি 15 তার সমীকরণ নির্ণয় কর। উত্তর : $2x + y = 10$ বা, $3x + 2y = 18$ [মা.বো.'০৪,'০৮]

(c) একটি সরলরেখা $(1, 4)$ বিন্দু দিয়ে যায় এবং অক্ষদ্বয়ের সাথে প্রথম চতুর্ভাগে 8 বর্গ একক ক্ষেত্রফলবিশিষ্ট একটি ত্রিভুজ গঠন করে তার সমীকরণ নির্ণয় কর। উত্তর : $4x + y = 8$ [ব.'০৬; চ.'১০; কু.'১২]

(d) একটি সরলরেখা $(3, 7)$ বিন্দু দিয়ে যায় এবং অক্ষদ্বয় হতে বিপরীত চিহ্নবিশিষ্ট সমমানের অংশ ছেদ করে তার সমীকরণ নির্ণয় কর। উত্তর : $x - y + 4 = 0$ [চ.'০১]

7. (a) $x + 2y + 7 = 0$ রেখাটির অক্ষদ্বয়ের মধ্যবর্তী খন্ডিতাংশের মধ্যবিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর। উপরি উক্ত খন্ডিতাংশ কোনো বর্গের বাহু হলে, তার ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। উত্তরঃ $(-\dfrac{7}{2}, -\dfrac{7}{4})$, $61\dfrac{1}{4}$ বর্গ একক

[ঢা.'০৭; চ.'০৮; রা.'১০;ব. '০৫,'১২; য.'১৩; দি.'১০; সি.'১৪; মা.'১২]

(b) যে সরলরেখার অক্ষদ্বয়ের মধ্যবর্তী খন্ডিত অংশ $(6, 2)$ বিন্দুতে $2 : 3$ অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত হয় তার সমীকরণ নির্ণয় কর। উত্তরঃ $x + 2y = 10$ [ব.'০৪,'০৭; রা. '০৮,'১৫;দি.'১১]

(c) একটি সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর যা অক্ষদ্বয়ের সাথে 16 বর্গ একক ক্ষেত্রফলবিশিষ্ট ত্রিভুজ গঠন করে এবং মূলবিন্দু থেকে যার উপর অঙ্কিত লম্ব x-অক্ষের ধনাত্মক দিকের সাথে $45°$ কোণ উৎপন্ন করে।

উত্তরঃ $x + y - 4\sqrt{2} = 0$ [সি.'০৫; য.'১০]

8. (a) P ও Q বিন্দুদ্বয় x-অক্ষের উপর এবং R ও S বিন্দুদ্বয় y-অক্ষের উপর অবস্থিত। PR ও QS এর সমীকরণ যথাক্রমে $4x + 3y + 6 = 0$ ও $x + 2y - 1 = 0$ হলে, দেখাও যে, $PQ = RS$. [ঢা. '০৪; য.'১৫]

(b) এমন একটি সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর যা $(-2, -5)$ বিন্দু দিয়ে যায় এবং x ও y-অক্ষকে যথাক্রমে A ও B বিন্দুতে ছেদ করে যেন $OA + 2.OB = 0$ হয়, যখন O মূলবিন্দু। উত্তর : $x - 2y - 8 = 0$

[ঢা.'০৬,'১৩; য.'০৬,'১২; চ.'০৬; সি.'০৭; ব.'০৮,'১০,'১৫; দি.'১৪,'১৫]

(c) এমন একটি সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর যা $(3, 2)$ বিন্দু দিয়ে যায় এবং x ও y-অক্ষকে যথাক্রমে A ও B বিন্দুতে ছেদ করে যেন $OA - OB = 2$ হয়, যখন O মূলবিন্দু। উত্তর : $2x + 3y = 12$ এবং $x - y = 1$

[য.'১০,'১২; ব.'০৫; রা. '০৯, '১২; চ., দি.'০৯; ঢা.'১০; মা.'১৪]

(d) $x\cos\alpha + y\sin\alpha = p$ সরলরেখাটি x ও y-অক্ষকে যথাক্রমে A ও B বিন্দুতে ছেদ করে। α কে পরিবর্তনশীল ধরে দেখাও যে, AB এর মধ্যবিন্দুর সঞ্চারপথের সমীকরণ $p^2(x^2 + y^2) = 4x^2y^2$. [রা.'১০]

9. $x + 3y - 12 = 0$ রেখার অক্ষদ্বয়ের মধ্যবর্তী খন্ডিতাংশের ত্রিখন্ডক বিন্দুদ্বয়ের সাথে মূলবিন্দুর সংযোগ রেখার সমীকরণ নির্ণয় কর। উত্তর : $x = 6y$, $2x = 3y$ [ঢা.'০৫; সি.'০৯; রা.'১০; কু.'০৭; য.'১৪]

10. (a) $2y + x - 5 = 0$, $y + 2x - 7 = 0$ এবং $x - y + 1 = 0$ রেখাত্রয় দ্বারা গঠিত ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

উত্তর : $3/2$ বর্গ একক। [য.'০৩]

(b) দেখাও যে, $x = a$, $y = b$ এবং $y = mx$ রেখাত্রয় দ্বারা গঠিত ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল $\frac{1}{2|m|}(b - ma)^2$ বর্গ একক।

[য. '০৫; রা.'০৮; কু.'১২; ব.'১৩]

11. (a) দেখাও যে, $(-3, 6)$ বিন্দু হতে $x - 2y - 5 = 0$ রেখার উপর অঙ্কিত যেকোনো রেখাংশকে $x - 2y + 5 = 0$ রেখাটি সমদ্বিখন্ডিত করে।

[ঢা.'০৯; চ.'১১; দি.'১২]

(b) মূলবিন্দু হতে কোনো সরলরেখার উপর অঙ্কিত লম্বের দৈর্ঘ্য 5 একক এবং লম্বটি x-অক্ষের ধনাত্মক দিকের সাথে $120°$ কোণ উৎপন্ন করে ; রেখাটির সমীকরণ নির্ণয় কর। উত্তরঃ $x - \sqrt{3}y + 10 = 0$ [মা.বো.'০৮]

12. (a) $(2, -1)$ বিন্দুগামী একটি সরলরেখার ঢাল $-\frac{3}{4}$. এ রেখার উপর $(2, -1)$ বিন্দু হতে 15 একক দূরে অবস্থিত দুইটি বিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

উত্তর : $(14, -10)$, $(-10, 8)$

(b) $A(3, -\frac{7}{2})$ বিন্দুগামী একটি সরলরেখার ঢাল $\frac{5}{12}$। রেখাটির উপরস্থ P বিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর যেন $AP = \frac{13}{2}$ হয়।

উত্তরঃ $(9, -1)$, $(-3, -6)$.

সম্ভাব্য ধাপসহ সমস্যা :

13. সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর যা y-অক্ষের সাথে $30°$ কোণ উৎপন্ন করে এবং y-অক্ষের ধনাত্মক দিক হতে 5 একক অংশ ছেদ করে ।

উ: $y = \pm\sqrt{3}x + 5$ (২)

14. একটি সরলরেখা $(6, -1)$ বিন্দু দিয়ে যায় এবং যার দ্বারা অক্ষদ্বয়ের খণ্ডিত অংশের গুণফল 1 তার সমীকরণ নির্ণয় কর। উ: $x + 4y = 2$ or $x + 9y + 3 = 0$ (৪)

15. একটি সরলরেখা দ্বারা অক্ষদ্বয়ের খণ্ডিত অংশের সমষ্টি ও অন্তরফল যথাক্রমে 9 ও 5 তার সমীকরণ নির্ণয় কর। উ: $x + 2y = 6$ or $7x + 2y = 14$ (২)

16. $2x + y = 3$ ও $3x - 5y = -4$ রেখাদ্বয় x-অক্ষের সাথে যে ত্রিভুজ গঠন করে তার ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। (৪) উ: $\frac{289}{156}$ বর্গ একক

17. একটি ত্রিভুজের বাহুত্রয়ের সমীকরণ $x + 2y = 4$, $2x - y = 3$ ও $x - y + 2 = 0$. প্রমাণ কর যে, ত্রিভুজটি সমকোণী এবং এর ক্ষেত্রফল $7\frac{1}{2}$ বর্গ একক। (৪)

18. দেখাও যে, $2x + 7y = 14$ ও $2x - 7y = 14$ রেখাদ্বয় y-অক্ষের সাথে সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ গঠন করে। (৪)

19. $x + ay = a$ রেখাটি x ও y-অক্ষকে যথাক্রমে A ও B বিন্দুতে ছেদ করে যেন $OA = 3.OB$ হয়, যখন 0 মূলবিন্দু। P এর স্থানাঙ্ক $(0, -9)$ হলে, AP এর সমীকরণ নির্ণয় কর। উ: $3x - y = 9$ 8)

20. t এর যেকোন বাস্তব মানের জন্য P বিন্দুর স্থানাঙ্ক $(t + 5, 2t - 4)$ হলে, এর সঞ্চারপথের সমীকরণ নির্ণয় কর। সঞ্চারপথটি অক্ষদ্বয় হতে যে অংশ ছেদ করে তা নির্ণয় কর। উ: $2x - y = 14, 7, -14$ (৪)

21. $(-1,1)$ বিন্দুগামী একটি সরলরেখার ঢাল $\frac{5}{12}$. এ রেখার উপর $(-1, 1)$ বিন্দু হতে 26 একক দূরে অবস্থিত দুইটি বিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর। উ: $(23,11)$ ও $(-25,-9)$ (৪)

সৃজনশীল প্রশ্ন:

22. একটি সরলরেখা x ও y অক্ষকে যথাক্রমে $A(a, 0)$ ও $B(0, b)$ বিন্দুতে ছেদ করে।

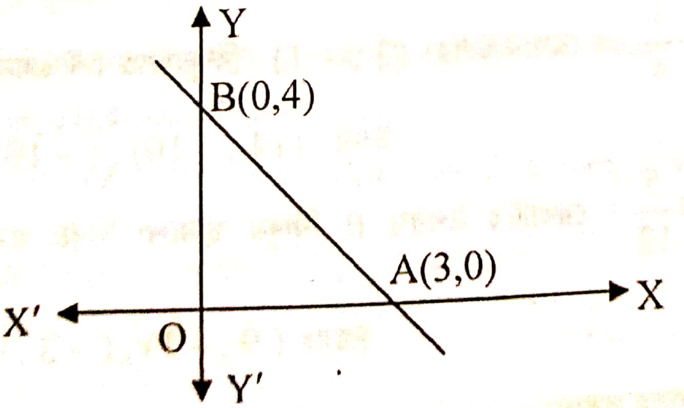
(a) মূলবিন্দুগামী একটি রেখার সমীকরণ নির্ণয় কর যা x-অক্ষের ধনাত্মক দিকের সাথে $135°$ কোণ উৎপন্ন করে।

(b) AB সরলরেখাটির অক্ষদ্বয়ের মধ্যবর্তী খণ্ডিত অংশ $(-4, 3)$ বিন্দুতে $5 : 3$ অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত হলে তার সমীকরণ নির্ণয় কর। উত্তরঃ $9x - 20y + 96 = 0$ [কু.'০৬; সি.'১১; ব.'১৩]

(c) AB সরলরেখাটির সমীকরণ নির্ণয় কর যা অক্ষদ্বয়ের সাথে 8 বর্গ একক ক্ষেত্রফলবিশিষ্ট ত্রিভুজ গঠন করে এবং মূলবিন্দু থেকে যার উপর অঙ্কিত লম্ব x-অক্ষের ধনাত্মক দিকের সাথে $45°$ কোণ উৎপন্ন করে।

উত্তরঃ $x + y + 4 = 0$ বা, $x + y - 4 = 0$ [চ.'০৬,'১৩; দি.'১৩; রা.'কু.'১৪]

23.



(a) ΔAOB এর ভারকেন্দ্র G হলে AG নির্ণয় কর। উ: $\frac{2\sqrt{13}}{3}$ একক।

(b) P ও Q বিন্দুদ্বয় AB রেখাকে সমান তিন ভাগে বিভক্ত করলে ΔOPQ এর ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

(c) AB রেখাস্থ A বিন্দু হতে 10 একক দূরে অবস্থিত দুইটি বিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

উ: $(-3, 12)$ ও $(9, -12)$