12. a এর কোন মানের জন্য $(a^2, 2)$, $(a, 1)$ এবং $(0,0)$ বিন্দুত্রয় সমরেখ হবে? **[BUET 05-06]**

Sol^n. $(a^2 - a)(1-0) - (2-1)(a-0) = 0$
$\Rightarrow a^2 - 2a = 0 \Rightarrow a = 0, 2$

প্রশ্নমালা III E

এক নজরে প্রয়োজনীয় সূত্রাবলী ঃ

(a) ঢাল (m) ঃ **1.** একটি সরলরেখা x-অক্ষের ধনাত্মক দিকের সাথে θ কোণ উৎপন্ন করলে তার ঢাল, m = $\tan\theta$

2. একটি সরলরেখা (x_1, y_1) ও (x_2, y_2) বিন্দুগামী হলে তার ঢাল, $m = \dfrac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$.

3. একটি সরলরেখা মূলবিন্দু এবং (x_1, y_1) বিন্দুগামী হলে তার ঢাল, $m = \dfrac{y_1}{x_1}$.

(b) একটি রেখার সমীকরণ ঃ

1. y-অক্ষের , $x = 0$. 2. x-অক্ষের , $y = 0$

3. y-অক্ষের সমান্তরাল অর্থাৎ x- অক্ষের উপর লম্ব রেখার সমীকরণ, $x = a$.

4. x -অক্ষের সমান্তরাল অর্থাৎ y-অক্ষের উপর লম্ব রেখার সমীকরণ, $y = b$.

5. m ঢাল বিশিষ্ট এবং মূলবিন্দুগামী রেখার সমীকরণ, $y = mx$.

6. একটি সরলরেখার ঢাল m এবং y-অক্ষের ছেদক অংশ c হলে তার সমীকরণ হবে $y = mx + c$

7. একটি রেখার ঢাল m এবং রেখাটি (x_1, y_1) বিন্দুগামী হলে, রেখাটির সমীকরণ,

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

8. (x_1, y_1) এবং (x_2, y_2) বিন্দুগামী রেখার সমীকরণ $\dfrac{x - x_1}{x_1 - x_2} = \dfrac{y - y_1}{y_1 - y_2}$

$\Rightarrow (x - x_1)(y_1 - y_2) - (y - y_1)(x_1 - x_2) = 0$.

$\Rightarrow (y_1 - y_2)x - (x_1 - x_2)y = (y_1 - y_2)x_1 - (x_1 - x_2)y_1$

9. x -অক্ষ এবং y -অক্ষ হতে যথাক্রমে a এবং b অংশ ছেদকারী রেখার সমীকরণ $\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} = 1$.

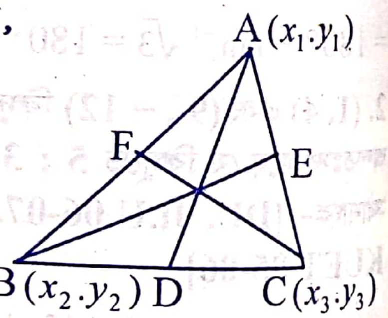
10. মূলবিন্দু এবং (x_1, y_1) বিন্দুগামী রেখার সমীকরণ $y = \dfrac{y_1}{x_1}x \Rightarrow xy_1 - yx_1 = 0$

11. মূলবিন্দু হতে কোন সরলরেখার উপর অঙ্কিত লম্বের দৈর্ঘ্য p এবং লম্বটি x-অক্ষের ধনাত্মক দিকের সাথে α কোণ উৎপন্ন করলে, রেখাটির সমীকরণ হবে $x\cos\alpha + y\sin\alpha = p$.

x –অক্ষের ধনাত্মক দিকের সাথে θ কোণ উৎপন্ন করে এমন সরলরেখার সমীকরণ $\dfrac{x - x_1}{\cos\theta} = \dfrac{y - y_1}{\sin\theta} = r$, যেখানে (x, y) বিন্দু হতে (x_1, y_1) বিন্দুর দূরত্ব r.

MCQ এর জন্য বিশেষ সূত্র ঃ

1. AD মধ্যমার সমীকরণ,
$(2y_1 - y_2 - y_3)x - (2x_1 - x_2 - x_3)y = (2y_1 - y_2 - y_3)x_1 - (2x_1 - x_2 - x_3)y_1$



2. $ax + by + c = 0$ দ্বারা x-অক্ষের ছেদাংশ $= -c/a$, y -অক্ষের ছেদাংশ $= -c/b$; অক্ষদ্বয়ের মধ্যবর্তী খণ্ডিত অংশ $= \sqrt{(c/a)^2 + (c/b)^2}$; অক্ষদ্বয় দ্বারা গঠিত ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল $= \dfrac{c^2}{2|ab|}$.

3. একটি রেখার অক্ষদ্বয়ের মধ্যবর্তী অংশ (α, β) বিন্দুতে সমদ্বিখণ্ডিত হলে তার সমীকরণ, $\dfrac{x}{2\alpha} + \dfrac{y}{2\beta} = 1$

4. মূলবিন্দু হতে কোন রেখার উপর অঙ্কিত লম্ব x-অক্ষের ধনাত্মক দিকের সাথে θ কোণ উৎপন্ন করলে তার সমীকরণ $\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} = 1$, যেখানে $\tan\theta = \dfrac{a}{b}$

5. $a_1x + b_1y + c_1 = 0 \cdots (1)$,

$a_2x+b_2y+c_2=0 \cdots(2)$ ও

$a_3x+b_3y+c_3=0\cdots(3)$ রেখা তিনটি দ্বারা গঠিত ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল =

$$\frac{\{c_1(a_2b_3-a_3b_2)-c_2(a_1b_3-a_3b_1)+c_3(a_1b_2-a_2b_1)\}^2}{2|(a_2b_3-a_3b_2)(a_1b_3-a_3b_1)(a_1b_2-a_2b_1)|}$$

6. (1) ও (2) রেখার ছেদবিন্দুগামী এবং (3) এর সমান্তরাল ও লম্ব এরূপ রেখার সমীকরণ যথাক্রমে $\frac{a_1x+b_1y+c_1}{a_2x+b_2y+c_2}=\frac{a_1b_3-a_3b_1}{a_2b_3-a_3b_2}$

$$\frac{a_1x+b_1y+c_1}{a_2x+b_2y+c_2}=\frac{a_1a_3+b_1b_3}{a_2a_3+b_2b_3}$$

1(i) (a) x অক্ষের ধনাত্মক দিকের সাথে 30^0 কোণ উৎপন্ন করে এরূপ সরলরেখার ঢাল নির্ণয় কর।

সমাধান: নির্ণেয় ঢাল = $\tan 30^0=\frac{1}{\sqrt{3}}$

(b) (3, –4) ও (4, –5) বিন্দুগামী সরলরেখার ঢাল নির্ণয় কর।

সমাধান: প্রদত্ত বিন্দুদ্বয় দিয়ে অতিক্রমকারী সরললেখার ঢাল = $\frac{-4-(-5)}{3-4}=\frac{1}{-1}=-1$

(c) একটি সরলরেখার সমীকরকরণ নির্ণয় কর যা x-অক্ষের সমান্তরাল এবং তার নিচে 4 একক দূরে অবস্থিত।

সমাধান: x-অক্ষের সমান্তরাল এবং তার নিচে 4 একক দূরে অবস্থিত এরূপ সরলরেখার সমীকরণ, $y=-4$

(d) একটি সরলরেখার সমীকরকরণ নির্ণয় কর যা y-অক্ষের সমান্তরাল এবং তার ডানে 5 একক দূরে অবস্থিত।

সমাধান: y-অক্ষের সমান্তরাল এবং তার ডানে 5 একক দূরে অবস্থিত এরূপ সরলরেখার সমীকরণ, $x=5$

(e) x –অক্ষের সমান্তরাল ও (3, –4) বিন্দুগামী সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর।

সমাধান: ধরি, x –অক্ষের সমান্তরাল সরলরেখার সমীকরণ, $y=k$ যেখানে k একটি ধ্রুবক।

$y=k$ রেখাটি (3, –4) বিন্দুগামী।

$\therefore\ -4=k\Rightarrow k=-4.$

k এর মান বসিয়ে পাই, : $y=-4$ (Ans.)

(f) (a , b) এবং (– a , – b) বিন্দুগামী রেখার সমীকরণ নির্ণয় করঃ

(g) (a , b) এবং (a + b , a – b)

সমাধান ঃ (a) (a, b) এবং $(-a, -b)$ বিন্দুগামী রেখার সমীকরণ, $\frac{x-a}{a+a}=\frac{y-b}{b+b}\Rightarrow\frac{x-a}{2a}=\frac{y-b}{2b}$

$\Rightarrow bx-ab=ay-ab\Rightarrow\ bx-ay=0$

[$(y_1-y_2)x-(x_1-x_2)y=(y_1-y_2)x_1-(x_1-x_2)y_1$ সুত্রের সাহায্যে]

$\Rightarrow (2b-a)x+by=2ab-a^2+b^2$

$\therefore\ (2b-a)x+by+a^2-2ab-b^2=0$

2. একটি সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর যা x-অক্ষের ধনাত্মক দিকের সাথে $\sin^{-1}(5/13)$ কোণ উৎপন্ন করে এবং y-অক্ষের ধনাত্মক দিকের ছেদাংশ 5 একক।

সমাধান: ধরি, $\theta=\sin^{-1}(5/13)\Rightarrow\sin\theta=\frac{5}{13}$

$\therefore\ \tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\frac{\sin\theta}{\sqrt{1-\sin^2\theta}}$

$\Rightarrow\ \tan\theta=\frac{5/13}{\sqrt{1-25/169}}=\frac{5}{13}\times\frac{13}{12}=\frac{5}{12}$

$\therefore$ নির্ণেয় রেখার ঢাল, $m=\frac{5}{12}$ এবং y-অক্ষের ছেদক অংশ, $c=5$ একক।

$\therefore$ নির্ণেয় রেখার সমীকরণ, $y=mx+c$

$\Rightarrow y=\frac{5}{12}x+5\Rightarrow 12y=5x+60.$ (Ans.)

3. (a) A(1, 1) , B(3, 4) এবং C(5, – 2) বিন্দু তিনটি ABC ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দু । AB ও AC এর মধ্যবিন্দুর সংযোগ রেখার সমীকরণ নির্ণয় কর।

[কু.'০৬,'০৮;ঢা.'১১;কু.'১৪; মা.বো.'০৭; য.'০৯]

সমাধান ঃ ধরি, AB ও AC এর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে D ও E. তাহলে, $D\equiv(\frac{1+3}{2},\frac{1+4}{2})=(2,\frac{5}{2})$ এবং

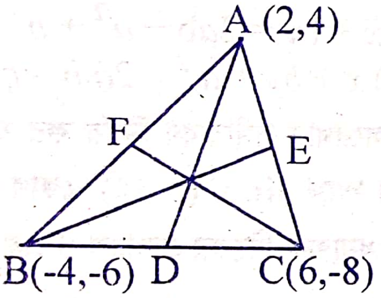
$E\equiv(\frac{1+5}{2},\frac{1-2}{2})=(3,-\frac{1}{2})$.

$\therefore$ DE রেখার সমীকরণ, $\dfrac{x-2}{2-3}=\dfrac{y-\frac{5}{2}}{\frac{5}{2}+\frac{1}{2}}$

$\Rightarrow \dfrac{x-2}{-1}=\dfrac{2y-5}{6} \Rightarrow 6x-12=-2y+5$

$\therefore$ $6x+2y-17=0$ (Ans.)

3(b) (2 , 4) , (– 4 , – 6) এবং (6 , – 8) বিন্দু তিনটি একটি ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দু । ত্রিভুজটির মধ্যমাগুলোর সমীকরণ নির্ণয় কর। [চ.'০৭] **সমাধান ঃ**



ধরি, ত্রিভুজের শীর্ষত্রয় A(2, 4), B(−4, −6) ও C(6 , − 8) এবং BC, CA , AB বাহুর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে D, E, F.

$\therefore$ $D\equiv(\dfrac{-4+6}{2},\dfrac{-6-8}{2})=(1,-7)$

$E\equiv(\dfrac{6+2}{2},\dfrac{-8+4}{2})=(4,-2)$

$F\equiv(\dfrac{2-4}{2},\dfrac{4-6}{2})=(-1,-1)$

$\therefore$ AD মধ্যমার সমীকরণ, $\dfrac{x-2}{2-1}=\dfrac{y-4}{4+7}$

$\Rightarrow 11x-22=y-4 \Rightarrow 11x-y-18=0$

BE মধ্যমার সমীকরণ, $\dfrac{x+4}{-4-4}=\dfrac{y+6}{-6+2}$

$\Rightarrow -4x-16=-8y-48$

$\Rightarrow -4x+8y+32=0 \Rightarrow x-2y-8=0$

CF মধ্যমার সমীকরণ, $\dfrac{x-6}{6+1}=\dfrac{y+8}{-8+1}$

$\Rightarrow -x+6=y+8 \Rightarrow x+y+2=0$

[MCQ এর জন্য, AD মধ্যমার সমীকরণ, $(8+6+8)x-(4+4-6)y=22\times2-2\times4=36$
$\Rightarrow 11x-y-18=0$]

3(c) A(h , k) বিন্দুটি $6x-y=1$ রেখার উপর এবং B(k , h) বিন্দুটি $2x-5y=5$ রেখার উপর অবস্থিত। AB সরলরেখাটির সমীকরণ নির্ণয় কর। [দি.'০৯; ঢা.,চ.'১২,'১৪; ব.'১০; রা.,য.'১১; সি.,য.'১৪]

সমাধান ঃ A(h , k) বিন্দুটি $6x-y=1$ রেখার উপর অবস্থিত । $\therefore$ $6h-k=1 \cdots\cdots (1)$

আবার, B(k , h) বিন্দুটি $2x-5y=5$ রেখার উপর অবস্থিত । $\therefore$ $2k-5h=5 \cdots\cdots (2)$

$(1)\times2+(2) \Rightarrow 12h-5h=7 \Rightarrow h=1$

(1) হতে আমরা পাই, $6.1-k=1 \Rightarrow k=5$

$\therefore$ $A\equiv(1,5)$ এবং $B\equiv(5,1)$

$\therefore$ AB রেখার সমীকরণ, $\dfrac{x-1}{1-5}=\dfrac{y-5}{5-1}$

$\Rightarrow 4x-4=-4y+20 \Rightarrow 4x+4y=24$

$\therefore$ $x+y-6=0$ (Ans.)

3(d) যদি (a, b) , (a',b') , $(a-a',b-b')$ বিন্দুত্রয় সমরেখ হয়, তবে দেখাও যে, তাদের সংযোগ রেখাটি মূলবিন্দু দিয়ে যায় এবং $ab'=a'b$. [কু.'০৯]

প্রমাণ: ধরি, প্রদত্ত বিন্দুত্রয় A(a, b) , $B(a',b')$, $C(a-a',b-b')$. বিন্দু তিনটি সমরেখ বলে,

AB রেখার ঢাল = AC রেখার ঢাল

$\Rightarrow \dfrac{b-b'}{a-a'}=\dfrac{b-b+b'}{a-a+a'} \Rightarrow \dfrac{b-b'}{a-a'}=\dfrac{b'}{a'}$

$\Rightarrow a'b-a'b'=ab'-a'b'$ $\therefore$ $a'b'=ab'$

এখন, A(a, b) , $B(a',b')$ বিন্দুগামী রেখার সমীকণ

$\dfrac{x-a}{a-a'}=\dfrac{y-b}{b-b'} \Rightarrow (b-b')x-ab+ab'$

$=(a-a')y-ab+a'b$

$\Rightarrow (b-b')x-(a-a')y=0$ $[\because a'b'=ab']$

যেহেতু সমীকরণটি ধ্রুবপদ মুক্ত, সুতরাং বিন্দুত্রয়ের সংযোগ রেখাটি মূলবিন্দু দিয়ে যায়।

4. (a) $x-4=0$, $y-5=0$, $x+3=0$ এবং $y+2=0$ রেখাগুলো দ্বারা উৎপন্ন চর্তুভুজের কর্ণদ্বয়ের সমীকরণ নির্ণয় কর। [ঢা.'১২; চ.'০৫; কু.'০৯ ; ব.'১৪]

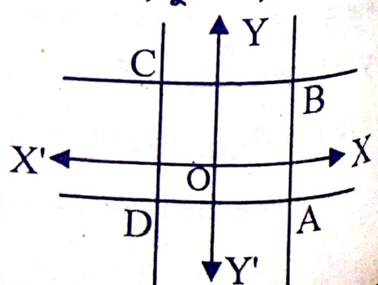
সমাধান :

ধরি, $AB\equiv x=4$

$DC\equiv x=-3$

$BC\equiv y=5$ এবং

$DA\equiv y=-2$ রেখা



চারটি ABCD চর্তুভুজের বাহু।

AB ও AD বাহুদ্বয় A(4 , − 2) বিন্দুতে , AB ও BC বাহুদ্বয় B(4,5) বিন্দুতে, BC ও CD বাহুদ্বয় C(−3,5) বিন্দুতে, CD ও DA বাহুদ্বয় D(−3, −2) বিন্দুতে ছেদ করে।

∴ AC কর্ণের সমীকরণ, $\frac{x-4}{4+3}=\frac{y+2}{-2-5}$

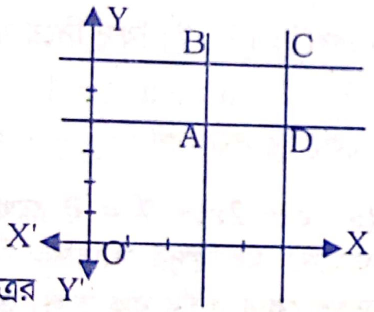
$\Rightarrow -x+4=y+2 \Rightarrow x+y-2=0$

BD কর্ণের সমীকরণ, $\frac{x-4}{4+3}=\frac{y-5}{5+2}$

$\Rightarrow x-4=y-5 \Rightarrow x-y+1=0$

∴ কর্ণদ্বয়ের সমীকরণ, $x-y+1=0, x+y-2=0$

4(b) $x=4$, $x=8$, $y=6$ এবং $y=10$ রেখাগুলো দ্বারা উৎপন্ন আয়তক্ষেত্রের কর্ণদ্বয়ের সমীকরণ নির্ণয় কর। [চ.'০২]



সমাধান : ধরি,
$AB \equiv x=4$
$D \equiv x=8$
$BC \equiv y=10$ এবং
$AD \equiv y=6$ রেখা
চারটি ABCD আয়তক্ষেত্রের বাহু।

AB ও AD বাহুদ্বয় A(4 , 6) বিন্দুতে , AB ও BC বাহুদ্বয় B(4,10) বিন্দুতে, BC ও CD বাহুদ্বয় C(8,10) বিন্দুতে, CD ও DA বাহুদ্বয় D(8, 6) বিন্দুতে ছেদ করে।

∴ AC কর্ণের সমীকরণ $\frac{x-4}{4-8}=\frac{y-6}{6-10}$

$\Rightarrow x-4=y-6 \Rightarrow x-y+2=0$

BD কর্ণের সমীকরণ, $\frac{x-4}{4-8}=\frac{y-10}{10-6}$

$\Rightarrow x-4=-y+10 \Rightarrow x+y-14=0$

∴ কর্ণদ্বয়ের সমীকরণ, $x-y+2=0, x+y-14=0$

5. (a) $3x+\sqrt{3}y+2=0$ এবং $x\cos\alpha+y\sin\alpha=p$ একই সরলরেখা নির্দেশ করলে p এর মান নির্ণয় কর। [মা.বো.'০৫]

সমাধান: দেওয়া আছে, $3x+\sqrt{3}y+2=0$ এবং $x\cos\alpha+y\sin\alpha=p$ একই সরলরেখা নির্দেশ করে।

$\therefore \frac{\cos\alpha}{3}=\frac{\sin\alpha}{\sqrt{3}}=\frac{-p}{2}$

$\Rightarrow \cos\alpha=\frac{-3p}{2}$ এবং $\sin\alpha=\frac{-\sqrt{3}p}{2}$

$\therefore \sin^2\alpha+\cos^2\alpha=(\frac{-\sqrt{3}p}{2})^2+(\frac{-3p}{2})^2$

$\Rightarrow 1=\frac{3p^2}{4}+\frac{9p^2}{4} \Rightarrow 12p^2=4$

$\Rightarrow p^2=\frac{1}{3} \quad \therefore p=\frac{1}{\sqrt{3}}$ (Ans.)

(b) $3x-4y=12$ এবং $x\cos\alpha+y\sin\alpha=p$ একই সরলরেখা নির্দেশ করলে p এবং α এর মান নির্ণয় কর। [প্র.ভ.প '০৪]

সমাধান: দেওয়া আছে, $3x-4y=12$ এবং $x\cos\alpha+y\sin\alpha=p$ একই সরলরেখা নির্দেশ করে।

$\therefore \frac{\cos\alpha}{3}=\frac{\sin\alpha}{-4}=\frac{p}{12}$

$\Rightarrow \cos\alpha=\frac{3p}{12}=\frac{p}{4}$ এবং $\sin\alpha=\frac{-p}{3}$

$\therefore \sin^2\alpha+\cos^2\alpha=(\frac{p}{4})^2+(\frac{-p}{3})^2$

$\Rightarrow 1=\frac{p^2}{16}+\frac{p^2}{9} \Rightarrow \frac{p^2(9+16)}{16.9}=1$

$\Rightarrow p^2=\frac{144}{25} \quad \therefore p=\frac{12}{5}$ (Ans.)

আবার, $\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{-p/3}{p/4}=\frac{-4}{3}$

$\therefore \alpha=\tan^{-1}(\frac{-4}{3})=2\pi-\tan^{-1}(\frac{4}{3})$ (Ans.)

6. (a) একটি সরলরেখা অক্ষদ্বয় হতে সমান সমান অংশ কর্তন করে এবং (α , β) বিন্দু দিয়ে অতিক্রম করে তার সমীকরণ নির্ণয় কর। [কু.'০৪; দি.'১১]

সমাধান: ধরি, অক্ষদ্বয় হতে সমান সমান অংশ কর্তন করে এরূপ রেখাটির সমীকরণ $\frac{x}{a}+\frac{y}{\pm a}=1$

$\Rightarrow x\pm y=a \Rightarrow x+y=a$ অথবা, $x-y=a$

রেখাটি (α , β) বিন্দু দিয়ে অতিক্রম করলে,

$a=\alpha+\beta$ অথবা, $a=\alpha-\beta$

যখন O মূলবিন্দু। [কু.'০২; য.'০৪,'১২; ব.'০৫; ; রা., চ., দি.'১০]

সমাধান: ধরি, রেখাটির সমীকরণ $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1\cdots(1)$

এখানে, $a = OA$ এবং $b = OB$

প্রশ্নমতে, $OA - OB = 2 \Rightarrow a - b = 2$

$\Rightarrow a = b + 2 \cdots\cdots (2)$

(1) রেখাটি (3 ,2) বিন্দুগামী।

$\therefore \frac{3}{a}+\frac{2}{b}=1 \Rightarrow \frac{3}{b+2}+\frac{2}{b}=1$ [$\because$ a = b+2]

$\Rightarrow \frac{3b+2b+4}{(b+2)b}=1 \Rightarrow b^2+2b=5b+4$

$\Rightarrow b^2-3b-4=0 \Rightarrow (b-4)(b+1)=0$

$\therefore$ b = 4 অথবা, b = − 1

(2) $\Rightarrow$ a = 4 + 2 = 6, যখন b = 4

অথবা, a = −1 + 2 = 1 , যখন b = −1

$\therefore$ রেখাটির সমীকরণ $\frac{x}{6}+\frac{y}{4}=1 \Rightarrow 2x+3y=12$

অথবা, $\frac{x}{1}+\frac{y}{-1}=1 \Rightarrow x-y=1$

8(d) $x \cos\alpha + y \sin\alpha = p$ **সরলরেখাটি** x **ও** y**-অক্ষকে যথাক্রমে A ও B বিন্দুতে ছেদ করে।** α **কে পরিবর্তনশীল ধরে দেখাও যে, AB এর মধ্যবিন্দুর সঞ্চারপথের সমীকরণ** $p^2(x^2+y^2)=4x^2y^2$.

[য. '০২; ব. '০ ২; সি.'০৩; কু.'০৭; ঢা.'১১]

সমাধান: প্রদত্ত রেখার সমীকরণ,

$x\cos\alpha + y\sin\alpha = p$

$\Rightarrow \frac{x}{p/\cos\alpha}+\frac{y}{p/\sin\alpha}=1 \cdots\cdots (1)$

$\therefore$ (1) রেখাটি x ও y-অক্ষকে যথাক্রমে A(p/cosα, 0) এবং B (0 , p/sinα) বিন্দুতে ছেদ করে ।

$\therefore$ AB এর মধ্যবিন্দুর স্থানাঙ্ক $\left(\frac{p}{2\cos\alpha}, \frac{p}{2\sin\alpha}\right)$

ধরি AB এর মধ্যবিন্দুর সেটের যেকোন একটি উপাদান (x, y).

$\therefore x=\frac{p}{2\cos\alpha} \Rightarrow \cos\alpha=\frac{p}{2x}$ এবং

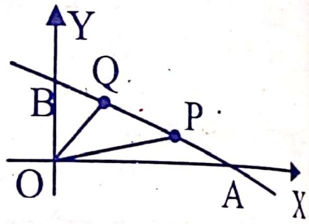
$y=\frac{p}{2\sin\alpha} \Rightarrow \sin\alpha=\frac{p}{2y}$

$\therefore \cos^2\alpha+\sin^2\alpha=\left(\frac{p}{2x}\right)^2+\left(\frac{p}{2y}\right)^2$

$\Rightarrow 1=\frac{p^2}{4x^2}+\frac{p^2}{4y^2} \Rightarrow \frac{p^2(y^2+x^2)}{4x^2y^2}=1$

$\therefore p^2(x^2+y^2)=4x^2y^2$. (Showed)

9. $x + 3y - 12 = 0$ **রেখার অক্ষদ্বয়ের মধ্যবর্তী খন্ডিতাংশের ত্রিখন্ডক বিন্দুদ্বয়ের সাথে মূলবিন্দুর সংযোগ রেখার সমীকরণ নির্ণয় কর।** [কু.'০৩, '০৭; ব.'০৭; য.'০৮; রা.'১০]



সমাধান: প্রদত্ত রেখা

$x+3y-12=0$

$\Rightarrow x+3y=12$

$\Rightarrow \frac{x}{12}+\frac{y}{4}=1\cdots(1)$

$\therefore$ (1) রেখাটি x ও y-অক্ষকে যথাক্রমে (ধরি) A(12 , 0) ও B(0 , 4) বিন্দুতে ছেদ করে। ধরি, AB রেখাংশের সমত্রিখন্ডক বিন্দু P ও Q এবং O মূলবিন্দু ।

$\therefore P \equiv \left(\frac{1\times0+2\times12}{1+2}, \frac{1\times4+2\times0}{1+2}\right)=(8,\frac{4}{3})$

$Q \equiv \left(\frac{2\times0+1\times12}{2+1}, \frac{2\times4+1\times0}{2+1}\right)=(4,\frac{8}{3})$

$\therefore$ OP রেখার সমীকরণ, $y=\frac{4/3}{8}x$

$\Rightarrow y=\frac{1}{6}x \Rightarrow x=6y$ এবং

$\therefore$ OQ রেখার সমীকরণ, $y=\frac{8/3}{4}x$

$\Rightarrow y=\frac{2}{3}x \Rightarrow 2x=3y$

$\therefore$ নির্ণেয় রেখাদ্বয়ের সমীকরণ, $x=6y$ ও $2x=3y$

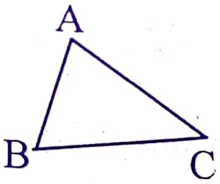
10. (a) $2y + x - 5 = 0$, $y + 2x - 7 = 0$ **এবং** $x - y + 1 = 0$ **রেখাত্রয় দ্বারা গঠিত ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।** [য.'০৩]

সমাধান: মনে করি, ABC ত্রিভুজের বাহু তিনটি,

$AB \equiv x+2y-5=0\cdots(1)$,

$BC \equiv 2x + y - 7 = 0 \cdots (2),$

$CA \equiv x - y + 1 = 0 \cdots (3)$



(1) ও (3) এর ছেদবিন্দু ,

$A \equiv (\frac{2-5}{-1-2}, \frac{-5-1}{-2-1}) = (1, 2)$

(1) ও (2) এর ছেদবিন্দু,

$B \equiv (\frac{-14+5}{1-4}, \frac{-10+7}{1-4}) = (3, 1)$

(2) ও (3) এর ছেদবিন্দু,

$C \equiv (\frac{1-7}{-2-1}, \frac{-7-2}{-2-1}) = (2, 3)$

$\therefore \delta_{ABC} = (1-3)(1-3) - (2-1)(3-2)$
$= 4 - 1 = 3$

$\therefore \Delta ABC$ এর ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2} | \delta_{ABC} | = \frac{3}{2}$ বর্গ একক

$\therefore$ রেখাত্রয় দ্বারা গঠিত ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল $\frac{3}{2}$ বর্গ একক।

$$[\Delta = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & -5 \\ 2 & 1 & -7 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}^2}{2\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}} = \frac{9^2}{2 \times 27} = \frac{3}{2}]$$

10(b) দেখাও যে, $x = a$, $y = b$ এবং $y = mx$ রেখাত্রয় দ্বারা গঠিত ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল $\frac{1}{2|m|}(b - ma)^2$ বর্গ একক।

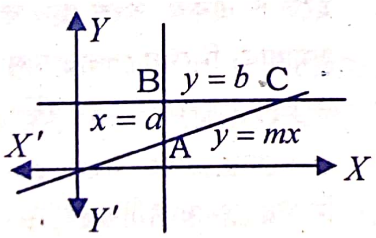
[য. '০৫; রা.'০৮; কু.'১২; ব.'১৩]

প্রমাণ ঃ ধরি, ABC ত্রিভুজের বাহু তিনটি,

$AB \equiv x = a \cdots (1),$

$BC \equiv y = b \cdots (2),$

$AC \equiv y = mx \cdots (3)$



(1) ও (3) এর ছেদবিন্দু , $A \equiv (a, ma)$

(1) ও (2) এর ছেদবিন্দু , $B \equiv (a, b)$

(2) ও (3) এর ছেদবিন্দু , $C \equiv (\frac{b}{m}, b)$

$\therefore \delta_{ABC} = (a-a)(b-b) - (ma-b)(a - \frac{b}{m})$

$= -(ma - b)\frac{ma-b}{m} = -\frac{(b-ma)^2}{m}$

$\therefore$ প্রদত্ত রেখাত্রয় দ্বারা গঠিত ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল

$= \frac{1}{2} | -\frac{(b-ma)^2}{m} |$ বর্গ একক

$= \frac{1}{2|m|}(b - ma)^2$ বর্গ একক। Showed)

11(a) দেখাও যে, (–3, 6) বিন্দু হতে $x - 2y - 5 = 0$ রেখার উপর অঙ্কিত যেকোন রেখাংশকে $x - 2y + 5 = 0$ রেখাটি সমদ্বিখন্ডিত করে।

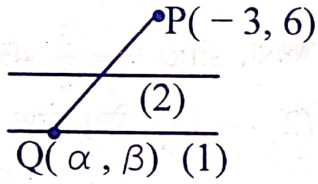
[সি.'০১; য.'০৫; ঢা.'০৯; চ.'১১; দি.'১২]

প্রমাণ : প্রদত্ত রেখাদ্বয়,

$x - 2y - 5 = 0 \cdots (1)$ ও

$x - 2y + 5 = 0 \cdots (2)$

এবং বিন্দুটি $P(-3,6)$



(2) রেখার উপর $Q(\alpha, \beta)$ যেকোন একটি বিন্দু নেই। তাহলে, $\alpha - 2\beta - 5 = 0$ ... ... (3)

এখন ইহা প্রমাণ করা যথেষ্ট যে , PQ এর মধ্যবিন্দু $(\frac{-3+\alpha}{2}, \frac{6+\beta}{2})$, $x - 2y + 5 = 0$ রেখার উপর অবস্থিত।

(1) এর বামপক্ষ $= x - 2y + 5$

$= \frac{-3+\alpha}{2} - 2\frac{6+\beta}{2} + 5$

$= \frac{1}{2}(\alpha - 3 - 12 - 2\beta + 10)$

$= \frac{1}{2}(\alpha - 2\beta - 5) = \frac{1}{2} \times 0 = 0$ [(3) দ্বারা]

$\therefore$ PQ এর মধ্যবিন্দু $x - 2y + 5 = 0$ রেখার উপর অবস্থিত।

(3) হতে পাই, $y = b.$

11(b) মূলবিন্দু হতে কোন সরলরেখার উপর অঙ্কিত লম্বের দৈর্ঘ্য 5 একক এবং লম্বটি x-অক্ষের ধনাত্মক দিকের সাথে 120° কোণ উৎপন্ন করে ; রেখাটির সমীকরণ নির্ণয় কর।

[মা.বো.'০৮]

সমাধানঃ নির্ণেয় রেখার সমীকরণ

$x\cos 120° + y\sin 120° = 5$

$\Rightarrow x(-\frac{1}{2}) + y.\frac{\sqrt{3}}{2} = 5 \Rightarrow -x + \sqrt{3}y = 10$

$\therefore x - \sqrt{3}y + 10 = 0$ (Ans.)

12 (a) (2 , – 1) বিন্দুগামী একটি সরলরেখার ঢাল $-\frac{3}{4}$. এ রেখার উপর (2 , – 1) বিন্দু হতে 15 একক দূরে অবস্থিত দুইটি বিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ মনে করি, রেখাটি x-অক্ষের সাথে α কোণ উৎপন্ন করে।

$\therefore \tan\alpha = -\frac{3}{4}$

$\Rightarrow \sin\alpha = \frac{3}{5}$ এবং $\cos\alpha = -\frac{4}{5}$

অথবা, $\sin\alpha = -\frac{3}{5}$ এবং $\cos\alpha = \frac{4}{5}$

(2 , – 1) বিন্দু হতে 15 একক দূরে অবস্থিত বিন্দুর স্থানাঙ্ক (x , y) হলে, $\frac{x-2}{\cos\alpha} = \frac{y+1}{\sin\alpha} = 15$

$\therefore x - 2 = 15\cos\alpha \Rightarrow x = 15\cos\alpha + 2$ এবং

$y + 1 = 15\sin\alpha \Rightarrow y = 15\sin\alpha - 1$

$\sin\alpha = \frac{3}{5}$ এবং $\cos\alpha = -\frac{4}{5}$ এর জন্য,

$x = 15 \times -\frac{4}{5} + 2 = -12 + 2 = -10$ এবং

$y = 15 \times \frac{3}{5} - 1 = 9 - 1 = 8$

$\sin\alpha = -\frac{3}{5}$ এবং $\cos\alpha = \frac{4}{5}$ এর জন্য,

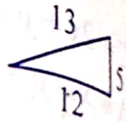
$x = 12 + 2 = 14$ এবং $y = -9 - 1 = -10$

$\therefore$ বিন্দু দুইটির স্থানাঙ্ক (–10, 8) ও (14 , –10)

(b) A $(3, -\frac{7}{2})$ বিন্দুগামী একটি সরলরেখার ঢাল $\frac{5}{12}$. রেখাটির উপরস্থ P বিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর যেন $AP = \frac{13}{2}$ হয়।

সমাধান ঃ মনে করি, রেখাটি x-অক্ষের সাথে α কোণ উৎপন্ন করে।

$\therefore \tan\alpha = \frac{5}{12}$



$\Rightarrow \sin\alpha = \frac{5}{13}$ এবং $\cos\alpha = \frac{12}{13}$

অথবা, $\sin\alpha = -\frac{5}{13}$ এবং $\cos\alpha = -\frac{12}{13}$

$\therefore$ A$(3, -\frac{7}{2})$ বিন্দু হতে $AP = \frac{13}{2}$ একক দূরে অবস্থিত P বিন্দুর স্থানাঙ্ক (x , y) হ…

$\frac{x-3}{\cos\alpha} = \frac{y+7/2}{\sin\alpha} = \frac{13}{2}$

$\therefore x - 3 = \frac{13}{2}\cos\alpha \Rightarrow x = \frac{13}{2}\cos\alpha + 3$ এ…

$y + \frac{7}{2} = \frac{13}{2}\sin\alpha \Rightarrow y = \frac{13}{2}\sin\alpha - \frac{7}{2}$

$\sin\alpha = \frac{5}{13}$ এবং $\cos\alpha = \frac{12}{13}$ এর জন্য,

$x = \frac{13}{2} \times \frac{12}{13} + 3 = 6 + 3 = 9$ এবং

$y = \frac{13}{2} \times \frac{5}{13} - \frac{7}{2} = \frac{5}{2} - \frac{7}{2} = -1$

$\sin\alpha = -\frac{5}{13}$ এবং $\cos\alpha = -\frac{12}{13}$ এর জন্য, $x = -6 + 3 = -3$ এবং $y = -\frac{5}{2} - \frac{7}{2} = -6$

$\therefore$ বিন্দু দুইটির স্থানাঙ্ক (9, – 1) ও (–3 , –6)

সম্ভাব্য ধাপসহ সমস্যা :

13. সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর যা y-অক্ষের সাথে 30° কোণ উৎপন্ন করে এবং y-অক্ষের ধনাত্মক দিক হতে 5 একক অংশ ছেদ করে ।

সমাধানঃ নির্ণেয় রেখার ঢাল, $m = \cot(\pm 30°)$

$= \pm\cot 30° = \pm\sqrt{3}$ এবং

y-অক্ষের ছেদক অংশ, $c = 5$ একক।

$\therefore$ নির্ণেয় রেখার সমীকরণ, $y = mx + c$

$\Rightarrow y = \pm\sqrt{3}x + 5$ (Ans.)

14. একটি সরলরেখা (6 , – 1) বিন্দু দিয়ে যায় এবং যা দ্বারা অক্ষদ্বয়ের খণ্ডিত অংশের গুণফল 1 তার সমীকরণ নির্ণয় কর।

সমাধান: ধরি, রেখাটির সমীকরণ $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1\cdots(1)$

প্রশ্নমতে , $ab=1\Rightarrow b=\frac{1}{a}\cdots\cdots(2)$ (১)

(1) রেখাটি (6 , – 1) বিন্দুগামী ।

$\therefore\ \frac{6}{a}+\frac{-1}{b}=1\Rightarrow\frac{6}{a}-a=1\quad[\because\frac{1}{b}=a]$ (১)

$\Rightarrow 6-a^2=a\Rightarrow a^2+a-6=0$

$\Rightarrow (a+3)(a-2)=0\ \therefore a=2\ ,-3$ (১)

$\therefore\ b=\frac{1}{2},\ -\frac{1}{3}$

$\therefore$ রেখাটির সমীকরণ, $\frac{x}{2}+2y=1\Rightarrow x+4y=2$

অথবা, $\frac{x}{-3}-3y=1\Rightarrow x+9y+3=0$ (১)

15. একটি সরলরেখা দ্বারা অক্ষদ্বয়ের খন্ডিত অংশের সমষ্টি ও অন্তরফল যথাক্রমে 9 ও 5 তার সমীকরণ নির্ণয় কর।

সমাধান: ধরি, রেখাটির সমীকরণ $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1\cdots(1)$

প্রশ্নমতে, $a+b=9\Rightarrow b=9-a\cdots(2)$ (১)

এবং $|a-b|=5\Rightarrow a-b=\pm5$

$\Rightarrow a-9+a=\pm5$ [(2) দ্বারা]

$\Rightarrow 2a=12$ বা, 4 $\therefore a=6$ বা, 2

$\therefore$ (2) হতে পাই, $b=9-6=3$, যখন $a=6$

$b=9-2=7$, যখন $a=2$

$\therefore$ রেখাটির সমীকরণ $\frac{x}{6}+\frac{y}{3}=1\Rightarrow x+2y=6$

অথবা, $\frac{x}{2}+\frac{y}{7}=1\Rightarrow 7x+2y=14$ (১)

16. $2x+y=3$ ও $3x-5y=-4$ রেখাদ্বয় x-অক্ষের সাথে যে ত্রিভুজ গঠন করে তার ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

সমাধান: x-অক্ষের সমীকরণ , $y=0$ (১)

মনে করি, ABC ত্রিভুজের বাহু তিনটি,

$AB\equiv 2x+y-3=0\cdots(1)$,

$AC\equiv 3x-5y+4=0\cdots(2)$

$BC\equiv y=0\cdots(3)$,

(1) ও (2) এর ছেদবিন্দু ,

$A\equiv(\frac{4-15}{-10-3},\frac{-9-8}{-10-3})=(\frac{11}{13},\frac{17}{13})$ (১)

(1) ও (3) এর ছেদবিন্দু , $B\equiv(\frac{3}{2},0)$

(2) ও (3) এর ছেদবিন্দু, $C\equiv(-\frac{4}{3},0)$

$$\therefore\ \delta_{ABC}=\begin{vmatrix}11/13 & 17/13 & 1\\ 3/2 & 0 & 1\\ -4/3 & 0 & 1\end{vmatrix}$$ (১)

$$=-\frac{17}{13}(\frac{3}{2}+\frac{4}{3})=-\frac{17}{13}\times\frac{17}{6}=-\frac{289}{78}$$

$\therefore\ \Delta$ ABC এর ক্ষেত্রফল $=\frac{1}{2}|-\frac{289}{78}|$ বর্গ একক

$=\frac{289}{156}$ বর্গ একক (Ans.) (১)

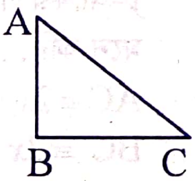
17. একটি ত্রিভুজের বাহুত্রয়ের সমীকরণ $x+2y=4$, $2x-y=3$ ও $x-y+2=0$. প্রমাণ কর যে, ত্রিভুজটি সমকোণী এবং এর ক্ষেত্রফল $7\frac{1}{2}$ বর্গ একক।

সমাধান: মনে করি, ABC ত্রিভুজের বাহু তিনটি,

$AB\equiv x+2y-4=0\cdots(1)$,

$BC\equiv 2x-y-3=0\cdots(2)$,

$CA\equiv x-y+2=0\cdots(3)$



(1) ও (3) এর ছেদবিন্দু ,

$A\equiv(\frac{4-4}{-1-2},\frac{-4-2}{-1-2})=(0,2)$ (১)

(1) ও (2) এর ছেদবিন্দু,

$B\equiv(\frac{-6-4}{-1-4},\frac{-8+3}{-1-4})=(2,1)$

(2) ও (3) এর ছেদবিন্দু,

$C\equiv(\frac{-2-3}{-2+1},\frac{-3-4}{-2+1})=(5,7)$

এখন, $AB=\sqrt{2^2+1^2}=\sqrt{5}$ (১)

$BC = \sqrt{3^2 + 6^2} = \sqrt{9+36} = 3\sqrt{5}$

$CA = \sqrt{5^2+5^2} = \sqrt{25+25} = 5\sqrt{2}$

AB, BC, CA এর যেকোন দুইটির সমষ্টি তৃতীয়টি অপেক্ষা বৃহত্তর এবং $AB^2 + BC^2 = 5 + 45$

$= 50 = CA^2.$

অতএব, ABC ত্রিভুজটি সমকোণী যার $\angle B = 90^0$. (১)

২য় অংশ : ত্রিভুজটি ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2}(AB \times BC)$

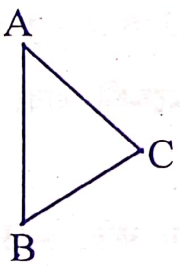
$= \frac{1}{2}(\sqrt{5} \times 3\sqrt{5})$ বর্গ একক $= 7\frac{1}{2}$ বর্গ একক (১)

$[\ \Delta = \left|\frac{\{-4(-2+1)+3(-1-2)+2(-1-4)\}^2}{2(-2+1)(-1-2)(-1-4)}\right|$

$= \left|\frac{(4-9-10)^2}{2(-1)(-3)(-5)}\right| = \frac{15}{2}\ ]$

18. দেখাও যে, $2x + 7y = 14$ ও $2x - 7y = 14$ রেখাদ্বয় y-অক্ষের সাথে সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ গঠন করে।

সমাধান:



y-অক্ষের সমীকরণ , $x = 0$ (১)

মনে করি, ABC ত্রিভুজের বাহু তিনটি,

$AC \equiv 2x + 7y - 14 = 0 \cdots(1)$,

$BC \equiv 2x - 7y - 14 = 0 \cdots (2)$

$AB \equiv x = 0 \cdots (3)$,

(1) ও (3) এর ছেদবিন্দু , $A \equiv (0, 2)$ (১)

(2) ও (3) এর ছেদবিন্দু , $B \equiv (0, -2)$

$(1) + (2) \Rightarrow 4x = 28 \Rightarrow x = 7$

$(1) \Rightarrow 14 + 7y - 14 = 0 \Rightarrow y = 0$

$\therefore$ (1) ও (2) এর ছেদবিন্দু, $C \equiv (7, 0)$

এখন, $AB = \sqrt{2^2+2^2} = 2\sqrt{2}$ (১)

$BC = \sqrt{2^2+7^2} = \sqrt{4+49} = \sqrt{53}$

$CA = \sqrt{7^2+2^2} = \sqrt{49+4} = \sqrt{53}$

AB, BC, CA এর যেকোন দুইটির সমষ্টি তৃতীয়টি অপেক্ষা বৃহত্তর এবং $BC = \sqrt{53} = CA$

প্রদত্ত রেখাদ্বয় y-অক্ষের সাথে সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ গঠন করে। (১)

19. $x + ay = a$ রেখাটি x ও y-অক্ষকে যথাক্রমে A ও B বিন্দুতে ছেদ করে যেন OA = 3.OB হয়, যখন O মূলবিন্দু। P এর স্থানাঙ্ক $(0, -9)$ হলে, AP এর সমীকরণ নির্ণয় কর।

সমাধান: প্রদত্ত রেখার সমীকরণ, $x + ay = a$

$\Rightarrow \frac{x}{a} + \frac{y}{1} = 1 \cdots\cdots (1)$ (১)

$\therefore$ (1) রেখাটি x ও y-অক্ষকে যথাক্রমে A(a, 0) এবং B (0 ,1) বিন্দুতে ছেদ করে এবং OA = a ও OB = 1. (১)

প্রশ্নমতে, $OA = 3.OB \Rightarrow a = 3.1 = 3$ (১)

$\therefore$ A বিন্দুর স্থানাঙ্ক (3 , 0)

$\therefore$ AP এর সমীকরণ $\frac{x-3}{3-0} = \frac{y-0}{0+9}$

$\Rightarrow 9x - 27 = 3y \ \therefore 3x - y = 9$ (Ans.) (১)

20. t এর যেকোন বাস্তব মানের জন্য P বিন্দুর স্থানাঙ্ক $(t+5, 2t-4)$ হলে, এর সঞ্চারপথের সমীকরণ নির্ণয় কর। সঞ্চারপথটি অক্ষদ্বয় হতে যে অংশ ছেদ করে তা নির্ণয় কর।

সমাধান: P বিন্দুর কার্তেসীয় স্থানাঙ্ক (x , y)

$\therefore t + 5 = x \Rightarrow t = x - 5 \cdots (1)$ এবং (১)

$2t - 4 = y \Rightarrow 2(x-5) - 4 = y$ [(1) দ্বারা]

$\therefore 2x - y = 14$; যা নির্ণেয় সঞ্চারপথের সমীকরণ। (১)

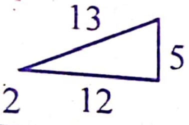
২য় অংশ ঃ $2x - y = 14 \Rightarrow \frac{x}{7} + \frac{y}{-14} = 1$ (১)

$\therefore$ সঞ্চারপথটির x–অক্ষের খন্ডিতাংশ $= 7$ এবং y –অক্ষের খন্ডিতাংশ $= -14$. (১)

21. (– 1,1) বিন্দুগামী একটি সরলরেখার ঢাল $\frac{5}{12}$. এ রেখার উপর (– 1 , 1) বিন্দু হতে 26 একক দূরে অবস্থিত দুইটি বিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ মনে করি, রেখাটি x-অক্ষের সাথে α কোণ উৎপন্ন করে।

$\therefore \tan\alpha = \dfrac{5}{12}$



(১)

$\Rightarrow \sin\alpha = \dfrac{5}{13}$ এবং $\cos\alpha = \dfrac{12}{13}$

অথবা, $\sin\alpha = -\dfrac{5}{13}$ এবং $\cos\alpha = -\dfrac{12}{13}$ (১)

$(-1, 1)$ বিন্দু হতে 26 একক দূরে অবস্থিত বিন্দুর স্থানাঙ্ক (x, y) হলে, $\dfrac{x+1}{\cos\alpha} = \dfrac{y-1}{\sin\alpha} = 26$ (১)

$\therefore x + 1 = 26\cos\alpha \Rightarrow x = 26\cos\alpha - 1$ এবং $y - 1 = 26\sin\alpha \Rightarrow y = 26\sin\alpha + 1$

$\sin\alpha = \dfrac{5}{13}$ এবং $\cos\alpha = \dfrac{12}{13}$ এর জন্য,

$x = 26 \times \dfrac{12}{13} - 1 = 24 - 1 = 23$ এবং

$y = 26 \times \dfrac{5}{13} + 1 = 10 + 1 = 11$

$\sin\alpha = -\dfrac{5}{13}$ এবং $\cos\alpha = -\dfrac{12}{13}$ এর জন্য, $x = -24 - 1 = -25$ এবং $y = -10 + 1 = -9$

$\therefore$ দুইটি বিন্দুর স্থানাঙ্ক $(23, 11)$ ও $(-25, -9)$ (১)

সৃজনশীল প্রশ্ন:

22. একটি সরলরেখা x ও y অক্ষকে যথাক্রমে $A(a, 0)$ ও $B(0, b)$ বিন্দুতে ছেদ করে।

(a) মূলবিন্দুগামী একটি রেখার সমীকরণ নির্ণয় কর যা x-অক্ষের ধনাত্মক দিকের সাথে $135°$ কোণ উৎপন্ন করে।

সমাধান : মূলবিন্দুগামী এবং x-অক্ষের ধনাত্মক দিকের সাথে $135°$ কোণ উৎপন্ন করে এরূপ রেখার সমীকরণ $y = x\tan 135^0$

$\Rightarrow y = x\tan(180^0 - 45^0)$

$\Rightarrow y = -x\tan 45^0 \Rightarrow y = -x \cdot 1$

$\therefore x + y = 0$

(b) উদ্দীপকে উল্লেখিত সরলরেখাটির অক্ষদ্বয়ের মধ্যবর্তী খন্ডিত অংশ $(-4, 3)$ বিন্দুতে $5 : 3$ অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত হলে তার সমীকরণ নির্ণয় কর।

সমাধান : x ও y অক্ষকে যথাক্রমে $A(a, 0)$ ও $B(0, b)$ বিন্দুতে ছেদ করে এরূপ সরলরেখার সমীকরণ $\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} = 1 \cdots\cdots$ (i)

(i) $A(a, 0)$ ও $B(0, b)$ বিন্দুর সংযোগ রেখাংশকে $5 : 3$ অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত করে এরূপ বিন্দুর স্থানাঙ্ক

$\left(\dfrac{5\times0+3\times a}{5+3}, \dfrac{5\times b+3\times0}{5+3}\right)$

$= \left(\dfrac{3a}{8}, \dfrac{5b}{8}\right)$

প্রশ্নমতে, $\dfrac{3a}{8} = -4 \Rightarrow a = -\dfrac{32}{3}$ এবং

$\dfrac{5b}{8} = 3 \Rightarrow b = \dfrac{24}{5}$

(i) এ a ও b এর মান বসিয়ে পাই,

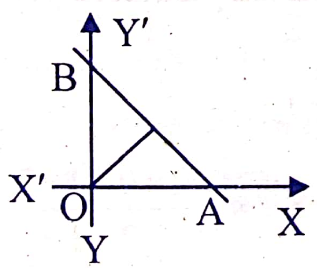
$\dfrac{x}{-32/3} + \dfrac{y}{24/5} = 1$

$\Rightarrow \dfrac{3x}{-32} + \dfrac{5y}{24} = 1 \Rightarrow -9x + 20y = 96$

$\therefore$ নির্ণেয় রেখার সমীকরণ, $9x - 20y + 96 = 0$

(c) উদ্দীপকে উল্লেখিত সরলরেখাটির সমীকরণ নির্ণয় কর যা অক্ষদ্বয়ের সাথে 8 বর্গ একক ক্ষেত্রফলবিশিষ্ট ত্রিভুজ গঠন করে এবং মূলবিন্দু থেকে যার উপর অঙ্কিত লম্ব x-অক্ষের ধনাত্মক দিকের সাথে $45°$ কোণ উৎপন্ন করে।

সমাধান:



ধরি, রেখাটির সমীকরণ

$x\cos 45° + y\sin 45° = p$

$\Rightarrow \dfrac{x}{\sqrt{2}} + \dfrac{y}{\sqrt{2}} = p \Rightarrow \dfrac{x}{\sqrt{2}p} + \dfrac{y}{\sqrt{2}p} = 1 \cdots (1)$

উত্তরঃ $9x - 20y + 96 = 0$

(1) রেখাটির x-অক্ষকে $A(\sqrt{2}p, 0)$ এবং y-অক্ষকে $B(0, \sqrt{2}p)$ বিন্দুতে ছেদ করে।

প্রশ্নমতে, $\Delta OAB = \frac{1}{2}(OA \times OB) = 8$

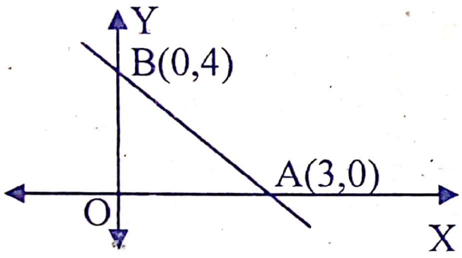
$\Rightarrow \frac{1}{2}(\sqrt{2}p \times \sqrt{2}p) = 16$

$\Rightarrow p^2 = 16 \Rightarrow p = \pm 4$

$\therefore$ রেখাটির সমীকরণ, $x + y + 4\sqrt{2} = 0$

থবা, $x + y - 4\sqrt{2} = 0$

23.



(a) ΔAOB এর ভারকেন্দ্র G হলে AG নির্ণয় কর।

সমাধান : $G \equiv \left(\frac{0+0+3}{3}, \frac{0+4+0}{3}\right) = \left(1, \frac{4}{3}\right)$

$AG = \sqrt{(3-1)^2 + (0-\frac{4}{3})^2} = \sqrt{4 + \frac{16}{9}}$

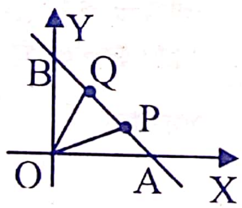
$= \sqrt{\frac{36+16}{9}} = \sqrt{\frac{52}{9}} = \frac{2\sqrt{13}}{3}$ একক।

(b) P ও Q বিন্দুদ্বয় AB রেখাকে সমান তিন ভাগে বিভক্ত করলে OP ও OQ এর সমীকরণ নির্ণয় কর।

P বিন্দুর স্থানাঙ্ক

$\left(\frac{1\times 0 + 2\times 3}{1+2}, \frac{1\times 4 + 2\times 0}{1+2}\right)$

$= \left(2, \frac{4}{3}\right)$



Q বিন্দুর স্থানাঙ্ক $\left(\frac{2\times 0 + 1\times 3}{2+1}, \frac{2\times 4 + 1\times 0}{2+1}\right)$

$= \left(1, \frac{8}{3}\right)$

$\therefore$ OP রেখার সমীকরণ, $y = \frac{4/3}{2}x$

$\Rightarrow y = \frac{2}{3}x \Rightarrow 2x = 3y$ এবং

$\therefore$ OQ রেখার সমীকরণ, $y = \frac{8/3}{1}x$

$\Rightarrow y = \frac{8}{3}x \Rightarrow 3x = 8y$

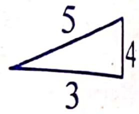
$\therefore$ নির্ণেয় রেখাদ্বয়ের সমীকরণ, $2x = 3y$ ও $3x = 8y$

(c) AB রেখাস্থ A বিন্দু হতে 10 একক দূরে অবস্থি দুইটি বিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

সমাধান : AB রেখার ঢাল $= \frac{4-0}{0-3} = -\frac{4}{3}$

মনে করি, রেখাটি x-অক্ষের সাথে α কোণ উৎপন্ন করে।

$\therefore \tan\alpha = -\frac{4}{3}$



$\Rightarrow \sin\alpha = \frac{4}{5}$ এবং $\cos\alpha = -\frac{3}{5}$

অথবা, $\sin\alpha = -\frac{4}{5}$ এবং $\cos\alpha = \frac{3}{5}$

A(3, 0) বিন্দু হতে 10 একক দূরে অবস্থিত বিন্দুর স্থানাঙ্ক (x , y) হলে, $\frac{x-3}{\cos\alpha} = \frac{y-0}{\sin\alpha} = 10$

$\therefore x - 3 = 10\cos\alpha \Rightarrow x = 10\cos\alpha + 3$ এবং

$y = 10\sin\alpha$

$\sin\alpha = \frac{4}{5}$ এবং $\cos\alpha = -\frac{3}{5}$ এর জন্য,

$x = 10 \times (-\frac{3}{5}) + 3 = -6 + 3 = -3$ এবং

$y = 15 \times \frac{4}{5} = 12$

$\sin\alpha = -\frac{3}{5}$ এবং $\cos\alpha = \frac{4}{5}$ এর জন্য,

$x = 6 + 3 = 9$ এবং $y = -12$

$\therefore$ বিন্দু দুইটির স্থানাঙ্ক (–3, 12) ও (9 , –12)