১৩. দুইটি সরলরেখার ছেদবিন্দুগামী যেকোনো সরলরেখার সমীকরণঃ

মনে করি, $a_1x + b_1y + c_1 = 0 \cdots (1)$ এবং $a_2x + b_2y + c_2 = 0 \cdots (2)$ রেখাদ্বয়ের ছেদবিন্দু (x_1, y_1).

$\therefore \quad a_1x_1 + b_1y_1 + c_1 = 0$ এবং $a_2x_1 + b_2y_1 + c_2 = 0$

যেকোনো ধ্রুবক k $(k \neq 0)$ এর জন্য, $a_1x + b_1y + c_1 + k(a_2x + b_2y + c_2) = 0$ সমীকরণটি (1) ও (2) এর ছেদবিন্দু (x_1, y_1) দ্বারা সিদ্ধ হয়, এবং ইহা x ও y এর এক ঘাত বিশিষ্ট বলে একটি সরলরেখা নির্দেশ করে।

> **সুতরাং, k এর যেকোনো অশূন্য মানের জন্য $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ ও $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ সরলরেখাদ্বয়ের ছেদবিন্দুগামী সরলরেখার সমীকরণ $a_1x + b_1y + c_1 + k(a_2x + b_2y + c_2) = 0 \cdots (3)$**

বি.দ্র.: (i) k এর ভিন্ন ভিন্ন মনের জন্য সমীকরণ (3) ভিন্ন ভিন্ন সরলরেখা নির্দেশ করে এবং প্রত্যেক রেখাই (1) ও (2) রেখাদ্বয়ের ছেদবিন্দুগামী। (ii) অসংখ্য রেখা একটি নির্দিষ্ট বিন্দু দিয়ে অতিক্রম করে।

(iii) $a_1x + b_1y + c_1 + k(a_2x + b_2y + c_2) = 0 \cdots\cdots (1)$ সরলরেখাটি (α, β) বিন্দুগামী হলে,

$$a_1\alpha + b_1\beta + c_1 + k(a_2\alpha + b_2\beta + c_2) = 0 \Rightarrow k = -\frac{a_1\alpha + b_1\beta + c_1}{a_2\alpha + b_1\beta + c_2}$$

$\therefore$ (1) হতে পাই, $a_1x + b_1y + c_1 - \dfrac{a_1\alpha + b_1\beta + c_1}{a_2\alpha + b_2\beta + c_2}(a_2x + b_2y + c_2) = 0$

$$\Rightarrow a_1x + b_1y + c_1 = \frac{a_1\alpha + b_1\beta + c_1}{a_2\alpha + b_2\beta + c_2}(a_2x + b_2y + c_2) \Rightarrow \frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_1\alpha + b_1\beta + c_1} = \frac{a_2x + b_2y + c_2}{a_2\alpha + b_2\beta + c_2}$$

> $\therefore (\alpha, \beta)$ এবং $f(x, y) \equiv a_1x + b_1y + c_1 = 0$ ও $g(x, y) \equiv a_2x + b_2y + c_2 = 0$ **রেখার ছেদবিন্দুগামী সরলরেখার সমীকরণ,** $\dfrac{f(x,y)}{f(\alpha,\beta)} = \dfrac{g(x,y)}{g(\alpha,\beta)}$, **যখন** $f(\alpha,\beta) \neq 0$ **এবং** $g(\alpha,\beta) \neq 0$

যেমন, যে সরলরেখা (3 , 4) বিন্দু এবং $2x + 4y - 7 = 0$ ও $3x - 5y + 6 = 0$ রেখাদ্বয়ের ছেদবিন্দু দিয়ে অতিক্রম করে তার সমীকরণ $\dfrac{2x + 4y - 7}{2 \times 3 + 4 \times 4 - 7} = \dfrac{3x - 5y + 6}{3 \times 3 - 5 \times 4 + 6} \Rightarrow \dfrac{2x + 4y - 7}{15} = \dfrac{3x - 5y + 6}{-5}$

$$\Rightarrow 9x - 15y + 18 = -2x - 4y + 7 \Rightarrow 11x - 11y + 11 = 0 \Rightarrow x - y + 1 = 0$$

উদাহরণ –1: y-অক্ষের সমান্তরাল এবং $2x - 7y + 11 = 0$ ও $x + 3y - 8 = 0$ রেখাদ্বয়ের ছিদবিন্দুগামী সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর। **[সি.'১১; ঢা.'০৯; রা.'০৮; চ.'০৮;য.'১০,'১২]**

সমাধান : ধরি, প্রদত্ত রেখাদ্বয়ের ছেদবিন্দুগামী রেখাটির সমীকরণ $2x - 7y + 11 + k(x + 3y - 8) = 0$

$$\Rightarrow (2 + k)x + (-7 + 3k)y + 11 - 8k = 0$$

রেখাটি y-অক্ষের সমান্তরাল বলে, y এর সহগ $(-7 + 3k) = 0 \Rightarrow k = \dfrac{7}{3}$

$\therefore$ নির্ণেয় রেখার সমীকরণ $2x - 7y + 11 + \dfrac{7}{3}(x + 3y - 8) = 0$

$$\Rightarrow 6x - 21y + 33 + 7x + 21y - 56 = 0 \Rightarrow 13x - 23 = 0 \text{ (Ans.)}$$

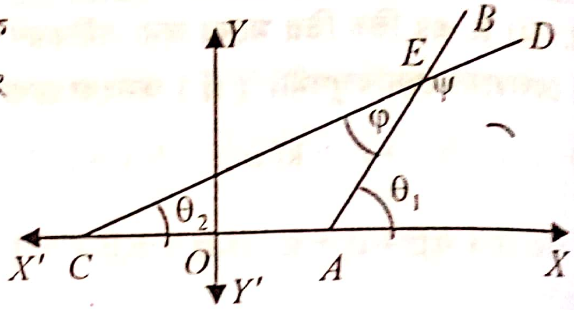
বিকল্প পদ্ধতি : $2x-7y+11=0$ ও

$x+3y-8=0$ রেখাদ্বয়ের ছেদবিন্দুর স্থানাঙ্ক $=\left(\frac{56-33}{6+7},\frac{11+16}{6+7}\right)=\left(\frac{23}{13},\frac{27}{13}\right)$

$\therefore$ y-অক্ষের সমান্তরাল এবং $\left(\frac{23}{13},\frac{27}{13}\right)$ বিন্দুগামী সরলরেখার সমীকরণ $x=\frac{23}{13}\Rightarrow 13x-23=0$ (Ans.)

১৪. দুইটি অসমান্তরাল সরলরেখার উভয়ই y-অক্ষের অসমান্তরাল হলে তাদের মধ্যবর্তী কোণ :

(i) মনে করি, AB এবং CD সরলরেখা দুইটির সমীকরণ যথাক্রমে $y=m_1x+c_1$ এবং $y=m_2x+c_2$। তারা পরস্পরকে E বিন্দুতে এবং x-অক্ষকে যথাক্রমে A ও C বিন্দুতে ছেদ করে।



মনে করি, AB ও CD রেখাদ্বয় x-অক্ষের ধনাত্মক দিকের সাথে যথাক্রমে θ_1 ও θ_2 কোণ উৎপন্ন করে এবং তাদের মধ্যবর্তী কোণ φ অর্থাৎ $\angle AEC=\varphi$.

তাহলে, $\tan\theta_1=m_1$, $\tan\theta_2=m_2$ এবং

$\theta_1=\theta_2+\varphi\Rightarrow\varphi=\theta_1-\theta_2$

$$\therefore\ \tan\varphi=\tan(\theta_1-\theta_2)=\frac{\tan\theta_1-\tan\theta_2}{1+\tan\theta_1\tan\theta_2}=\frac{m_1-m_2}{1+m_1m_2}\Rightarrow\varphi=\tan^{-1}\frac{m_1-m_2}{1+m_1m_2}$$

কিন্তু, $\angle AED=\psi$ কোণের জন্য, $\tan\psi=\tan(\pi-\varphi)=-\tan\varphi=-\frac{m_1-m_2}{1+m_1m_2}\Rightarrow\psi=\tan^{-1}\left(-\frac{m_1-m_2}{1+m_1m_2}\right)$

$\therefore$ $\boldsymbol{y=m_1x+c_1}$ ও $\boldsymbol{y=m_2x+c_2}$ রেখাদ্বয়ের মধ্যবর্তী কোণ, $\boldsymbol{\theta=\pm\tan^{-1}\frac{m_1-m_2}{1+m_1m_2}}$.

(ii) সরলরেখা দুইটির সমীকরণ $a_1x+b_1y+c_1=0$ ও $a_2x+b_2y+c_2=0$ হলে,

$$m_1=-\frac{a_1}{b_1}\ \text{এবং}\ m_2=-\frac{a_2}{b_2}\quad\therefore\ \tan\theta=\pm\frac{-\frac{a_1}{b_1}+\frac{a_2}{b_2}}{1+(-a_1/b_1)(-a_2/b_2)}=\pm\frac{a_2b_1-a_1b_2}{a_1a_2+b_1b_2}$$

উদাহরণ-2: দুইটি সরলরেখা (3, 4) বিন্দু দিয়ে যায় এবং $x-y+4=0$ রেখার সাথে $60°$ কোণ উৎপন্ন করে। রেখা দুইটির সমীকরণ নির্ণয় কর। [সি.'১০; কু.'০৬,'১৩; দি.'১১; প্র.ভ.প.'০৮]

সমাধান : মনে করি, (3, 4) বিন্দুগামী সরলরেখার সমীকরণ $y-4=m(x-3)\cdots(1)$; এখানে m রেখাটির ঢাল।

আবার, $x-y+4=0$ রেখার ঢাল $=-\frac{1}{-1}=1$, $\left[\text{ঢাল}=-\frac{x\text{ এর সহগ}}{y\text{ এর সহগ}}\right]$

(1) রেখাটি প্রদত্ত রেখার সাথে $60°$ কোণ উৎপন্ন করে।

$$\therefore\ \tan 60°=\pm\frac{m-1}{1+m}\Rightarrow\sqrt{3}=\pm\frac{m-1}{1+m}$$

"+" নিয়ে, $m-1=\sqrt{3}+\sqrt{3}m\Rightarrow(1-\sqrt{3})m=\sqrt{3}+1$

$$\Rightarrow \quad m=\frac{\sqrt{3}+1}{1-\sqrt{3}}=\frac{(\sqrt{3}+1)(1+\sqrt{3})}{(1-\sqrt{3})(1+\sqrt{3})}=\frac{3+2\sqrt{3}+1}{1-3}=\frac{2(2+\sqrt{3})}{-2}=-(2+\sqrt{3})$$

$\therefore$ (1) এ $m=-(2+\sqrt{3})$ বসিয়ে পাই, $y-4=-(2+\sqrt{3})(x-3)$

$\Rightarrow$ $y-4=-(2+\sqrt{3})x+6+3\sqrt{3} \Rightarrow (2+\sqrt{3})x+y=10+3\sqrt{3}$

আবার, "$-$" নিয়ে, $m-1=-\sqrt{3}-\sqrt{3}m \Rightarrow (\sqrt{3}+1)m=-(\sqrt{3}-1)$

$$\Rightarrow \quad m=-\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}=-\frac{(\sqrt{3}-1)^2}{(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)}=-\frac{3-2\sqrt{3}+1}{3-1}=-(2-\sqrt{3})$$

(1) এ $m=-(2-\sqrt{3})$ বসিয়ে পাই, $y-4=-(2-\sqrt{3})(x-3)$

$\Rightarrow$ $y-4=-(2-\sqrt{3})x+6-3\sqrt{3} \Rightarrow (2-\sqrt{3})x+y=10-3\sqrt{3}$

$\therefore$ নির্ণেয় রেখা দুইটির সমীকরণ $(2+\sqrt{3})x+y=10+3\sqrt{3}$ এবং $(2-\sqrt{3})x+y=10-3\sqrt{3}$

১৫. দুইটি সরলরেখা পরস্পর সমান্তরাল বা লম্ব হওয়ার শর্তঃ

(i) দুইটি সরলরেখা পরস্পর সমান্তরাল হওয়ার শর্তঃ

যদি দুইটি সরলরেখা সমান্তরাল হয় তবে তাদের মধ্যবর্তী কোণ $\theta=0°$ এবং তখন $\tan\theta=0$.

$\therefore$ $y=m_1x+c$ ও $y=m_2x+c$ রেখাদ্বয় সমান্তরাল হলে, $\dfrac{m_1-m_2}{1+m_1m_2}=0 \Rightarrow m_1-m_2=0 \therefore m_1=m_2$

অনুরূপভাবে, $a_1x_1+b_1y_1+c_1=0$ ও $a_2x_1+b_2y_1+c_2=0$ রেখাদ্বয় সমান্তরাল হলে,

$$-\frac{a_1}{b_1}=-\frac{a_2}{b_2} \Rightarrow \frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2} \Rightarrow \frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}$$

$\therefore$ $y=m_1x+c_1$, $y=m_2x+c_2$ রেখাদ্বয় সমান্তরাল হবে যদি $m_1=m_2$ হয় এবং $a_1x+b_1y+c_1=0$ ও $a_2x+b_2y+c_2=0$ রেখাদ্বয় সমান্তরাল হবে যদি $\dfrac{a_1}{a_2}=\dfrac{b_1}{b_2}$ হয়।

(ii) দুইটি সরলরেখা পরস্পর লম্ব হওয়ার শর্তঃ [ব. '১৫]

যদি দুইটি সরলরেখা লম্ব হয় তবে তাদের মধ্যবর্তী কোণ $\varphi=90°$ এবং তখন $\tan\varphi=\tan 90°$, যা অসংজ্ঞায়িত।

কিন্তু $\cot\varphi=\cot 90°=0$

অতএব, $y=m_1x+c_1$ ও $y=m_2x+c_2$ রেখাদ্বয় লম্ব হলে, $\dfrac{1+m_1m_2}{m_1-m_2}=0 \Rightarrow m_1m_2=-1$

অনুরূপভাবে, $a_1x+b_1y+c_1=0$ ও $a_2x+b_2y+c_2=0$ রেখাদ্বয় লম্ব হলে,

$$\left(-\frac{a_1}{b_1}\right)\times\left(-\frac{a_2}{b_2}\right)=-1 \Rightarrow a_1a_2=-b_1b_2 \quad \therefore a_1a_2+b_1b_2=0$$

$\therefore$ $y = m_1x + c_1$, $y = m_2x + c_2$ রেখাদ্বয় লম্ব হবে যদি $m_1m_2 = -1$ হয় এবং $a_1x + b_1y + c_1 = 0$, $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ রেখাদ্বয় লম্ব হবে যদি $a_1a_2 + b_1b_2 = 0$ হয়।

১৬. **বিভিন্ন শর্তাধীনে সরল রেখার সমীকরণ:**

(i) প্রদত্ত সরলরেখার সমান্তরাল সরলরেখার সমীকরণ:

দুইটি সমান্তরাল সরলরেখার ঢাল সমান বলে তাদেরকে (a) $y = mx + c_1$ এবং $y = mx + c_2$ (i) $ax + by + c_1 = 0$ এবং $ax + by + c_2 = 0$ আকারে লেখা যায়।

স্পষ্ট যে, দুইটি রেখার সমীকরণে কেবল ধ্রুবক পদের পার্থক্য হলে তারা পরস্পর সমান্তরাল হয়।

সুতরাং, $ax + by + c = 0$ রেখার সমান্তরাল রেখার সমীকরণকে $ax + by + k = 0$ বা $ax + by = k$ আকারে লেখা যায়; যেখানে k একটি ধ্রুবক।

অনুসিদ্ধান্ত : $ax + by + c = 0$ এর সমান্তরাল এবং (α, β) বিন্দুগামী সরলরেখার সমীকরণ $ax + by = a\alpha + b\beta$

প্রমাণ: মনে করি, $ax + by + c = 0$ এর সমান্তরাল রেখার সমীকরণ $ax + by = k \cdots\cdots(1)$

(1) রেখাটি (α, β) বিন্দুগামী হলে আমরা পাই, $a\alpha + b\beta = k$

$\therefore$ (1) এ k এর মান বসিয়ে পাই, $ax + by = a\alpha + b\beta$

(ii) প্রদত্ত সরলরেখার লম্ব সরলরেখার সমীকরণ:

দুইটি লম্বরেখার ঢালদ্বয়ের গুণফল -1 হওয়ায় $y = mx + c$ এর লম্ব রেখার সমীকরণ $y = -\frac{1}{m}x + k$; যেখানে k একটি ধ্রুবক।

আবার, $ax + by = c \Rightarrow y = -\frac{a}{b}x + \frac{c}{b}$ এর লম্বরেখার সমীকরণ $y = \frac{b}{a}x + k_1 \Rightarrow bx - ay + ak_1 = 0$

$\Rightarrow bx - ay + k = 0 \cdots\cdots(1)$; যেখানে, k_1 এবং $k = ak_1$ ধ্রুবক।

অতএব, প্রদত্ত সমীকরণে x ও y এর সহগ দুইটি পরস্পর বিনিময় করে এদের যেকোনো একটির চিহ্ন এবং ধ্রুব পদের পরিবর্তন করলে ঐ রেখার উপর লম্ব যেকোনো রেখার সমীকরণ পাওয়া যায়।

(1) রেখাটি (α, β) বিন্দুগামী হলে, $b\alpha - a\beta + k \Rightarrow k = -(b\alpha - a\beta)$

$\therefore$ (1) এ k এর মান বসিয়ে পাই, $bx - ay - (b\alpha - a\beta) = 0 \Rightarrow bx - ay = b\alpha - a\beta$

$\therefore$ **$ax + by + c = 0$ রেখার উপর লম্ব এবং (α, β) বিন্দুগামী সরলরেখার সমীকরণ $bx - ay = b\alpha - a\beta$.**

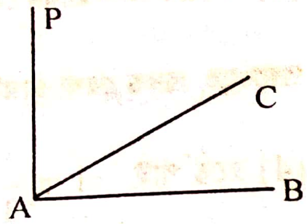
বি.দ্র. : (x_1, y_1) বিন্দুগামী এবং (x_2, y_2) ও (x_3, y_3) বিন্দুদ্বয়ের সংযোগ রেখার উপর লম্বরেখার সমীকরণ, $y - y_1 = -\frac{x_2 - x_3}{y_2 - y_3}(x - x_1)$

উদাহরণ-3: AB ও AC রেখা দুইটির সমীকরণ যথাক্রমে $y = 2x + 1$ ও $y = 4x - 1$ । AB এর উপর অঙ্কিত লম্ব AP এর সমীকরণ নির্ণয় কর। [ঢা. '০৬; সি.'০৮; কু.'১২; ব.'১২,'১৫; য.'১৩]

সমাধান : মনে করি, AB $\equiv 2x - y + 1 = 0$ ও AC $\equiv 4x - y - 1 = 0$ রেখাদ্বয়ের ছেদবিন্দুগামী AP রেখাটির সমীকরণ, $2x - y + 1 + k(4x - y - 1) = 0$

$\Rightarrow (2+4k)x+(-1-k)y+1-k=0$

AP, AB এর উপর লম্ব।



$\therefore$ $2(2+4k)+(-1)(-1-k)=0$ $[a_1a_2+b_1b_2=0$ সূত্রের সাহায্যে $]$

$\Rightarrow 4+8k+1+k=0 \Rightarrow 9k=-5 \Rightarrow k=-\frac{5}{9}$

$\therefore$ রেখাটির সমীকরণ $2x-y+1+(-\frac{5}{9})(4x-y-1)=0 \Rightarrow 18x-9y+9-20x+5y+5=0$

$\Rightarrow -2x-4y+14=0 \Rightarrow x+2y=7$

বিকল্প পদ্ধতি: দেওয়া আছে, AB $\equiv y=2x+1 \cdots\cdots(1)$ এবং AC $\equiv y=4x-1\cdots\cdots(2)$

(1) ও (2) হতে, $2x+1=4x-1 \Rightarrow x=1$ এবং $y=2+1=3$

$\therefore$ AB ও AC রেখা দুইটি A(1 , 3) বিন্দুতে ছেদ করে।

A(1, 3) বিন্দুগামী এবং $AB \equiv 2x-y+1=0$ সরলরেখার উপর লম্ব AP রেখাটির সমীকরণ,

$x+2y=1+2\times3 \Rightarrow x+2y=7$ (Ans.)

(iii) তিনটি সরলরেখা সমবিন্দু হওয়ার শর্তঃ

$a_1x+b_1y+c_1=0, a_2x+b_2y+c_2=0$ এবং $a_3x+b_3y+c_3=0$ সরলরেখা তিনটি (x_1, y_1) বিন্দু দিয়ে অতিক্রম করলে (x_1, y_1) বিন্দুটি প্রদত্ত সরলরেখার সমীকরণকে সিদ্ধ করবে।

$\therefore$ $a_1x_1+b_1y_1+c_1=0\cdots\cdots(1)$, $a_2x_1+b_2y_1+c_2=0\cdots\cdots(2)$, $a_3x_1+b_3y_1+c_3=0\cdots\cdots(3)$

(1), (2) এবং (3) হতে x_1, y_1 অপনায়ন করে আমরা পাই, $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}=0$, **যা নির্ণেয় শর্ত।**

উদাহরণ -4 : $x-3y+2=0$, $x-6y+3=0$, $ax+by+1=0$ ও $x+ay=0$ সরলরেখাগুলি সমবিন্দু হলে a ও b এর মান নির্ণয় কর। **[ব.'০৩]**

সমাধান: $x-3y+2=0\cdots(1)$ $x-6y+3=0\cdots(2)$ $ax+by+1=0\cdots(3)$ ও $x+ay=0\cdots(4)$ রেখাগুলি সমবিন্দু।

$\therefore$ (1), (2) ও (4) হতে পাই, $\begin{vmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 1 & -6 & 3 \\ 1 & a & 0 \end{vmatrix}=0 \Rightarrow \begin{vmatrix} 0 & 3 & -1 \\ 0 & -6-a & 3 \\ 1 & a & 0 \end{vmatrix}=0 \Rightarrow 9-6-a=0$ $\therefore a=3.$

আবার,(2), (3) ও (4) হতে পাই, $\begin{vmatrix} 1 & -6 & 3 \\ a & b & 1 \\ 1 & a & 0 \end{vmatrix}=0 \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & -6 & 3 \\ 3 & b & 1 \\ 1 & 3 & 0 \end{vmatrix}=0$

$\Rightarrow 1(-6-3b)-3(1-9)=0 \Rightarrow -6-3b+24=0 \therefore b=6$

বিকল্প পদ্ধতি: প্রদত্ত রেখাগুলি, $x-3y+2=0\cdots(1)$ $x-6y+3=0\cdots(2)$ $ax+by+1=0\cdots(3)$ ও $x+ay=0\cdots(4)$

$(1)-(2) \Rightarrow 3y-1 \Rightarrow y=\frac{1}{3}$

$\therefore$ (1) হতে পাই, $x-1+2=0 \Rightarrow x=-1$

$\therefore$ (1) ও (2) রেখাদ্বয়ের ছেদবিন্দু $(-1, \frac{1}{3})$

প্রশ্নমতে, প্রদত্ত রেখা চারটি সমবিন্দু বলে (3) ও (4) রেখাদ্বয় $(-1, \frac{1}{3})$ বিন্দু দিয়ে অতিক্রম করে।

$\therefore$ (4) হতে পাই, $-1 + \frac{1}{3}a = 0 \Rightarrow a = 3$ এবং

(3) হতে পাই, $3(-1) + b.\frac{1}{3} + 1 = 0 \Rightarrow \frac{1}{3}b = 2 \Rightarrow b = 6$

উদাহরণ-5: A(2 , 1) ও B(5 , 2) বিন্দু দুইটির সংযোগ রেখাংশের লম্ব সমদ্বিখন্ডকের সমীকরণ নির্ণয় কর। রেখাটি y-অক্ষকে যে বিন্দুতে ছেদ করে তার স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর। [য.'০৮; চ.'০৮; রা.'১১; ব.'০৭; ঢা.'১০]

সমাধান : AB রেখাংশের মধ্যবিন্দুর স্থানাঙ্ক $(\frac{2+5}{2}, \frac{1+2}{2}) = (\frac{7}{2}, \frac{3}{2})$ এবং AB রেখার ঢাল $= \frac{1-2}{2-5} = \frac{1}{3}$

$\therefore$ AB এর উপর লম্ব রেখার ঢাল $= -3$

$\therefore$ নির্ণেয় রেখার সমীকরণ $y - \frac{3}{2} = -3\ (x - \frac{7}{2}) \Rightarrow 2y - 3 = -6x + 21$

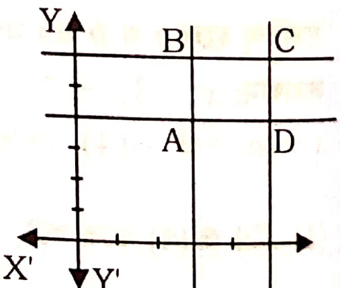
$$\Rightarrow 6x + 2y = 24 \Rightarrow 3x + y = 12 \text{ (Ans.)}$$

এখন, $3x + y = 12 \Rightarrow \frac{x}{4} + \frac{y}{12} = 1$

$\therefore$ রেখাটি y-অক্ষকে যে বিন্দুতে ছেদ করে তার স্থানাঙ্ক (0 , 12)

উদাহরণ- 6: $x = 3, x = 5, y = 4$ এবং $y = 6$ রেখাগুলি দ্বারা উৎপন্ন বর্গের কর্ণ দুইটির সমীকরণ নির্ণয় কর। [য.'০৫,'১১; সি.'০৫; রা.'০৭; ব.'০৭]

সমাধান : ধরি, $AB \equiv x = 3$, $DC \equiv x = 5$, $BC \equiv y = 6$ এবং $AD \equiv y = 4$ রেখা চারটি ABCD বর্গের বাহু। AB ও AD বাহুদ্বয় A(3, 4) বিন্দুতে , AB ও BC বাহুদ্বয় B(3, 6) বিন্দুতে, BC ও CD বাহুদ্বয় C(5, 6) বিন্দুতে, CD ও AD বাহুদ্বয় D(5 , 4) বিন্দুতে ছেদ করে।



$\therefore$ AC কর্ণের সমীকরণ $(x - 3)(4 - 6) - (y - 4)\ (3 - 5) = 0$

$[(x - x_1)(y_1 - y_2) - (y - y_1)(x_1 - x_2) = 0$ সূত্রের সাহায্যে]

$\Rightarrow (x - 3).(-2) - (y - 4)(-2) = 0 \Rightarrow x - 3 - y + 4 = 0$

$\Rightarrow x - y + 1 = 0$

BD কর্ণের সমীকরণ $(x - 3)\ (6 - 4) - (y - 6)(3 - 5) = 0$

$\Rightarrow (x - 3)\ (2) - (y - 6)(-2) = 0\ \ x - 3 + y - 6 \Rightarrow x + y - 9 = 0$

প্রশ্নমালা III F

1. (a) মূলবিন্দু এবং $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ ও $\frac{x}{b} + \frac{y}{a} = 1$ রেখাদ্বয়ের ছেদবিন্দুগামী সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর। [চ.'০৫,'০৭]

(b) দেখাও যে, k এর সব মানের জন্য একগুচ্ছ সরলরেখা $(3 + 2k)x + 5ky - 3 = 0$ একটি নির্দিষ্ট বিন্দুগামী। বিন্দুটির স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর। উত্তর : (a) $x - y = 0$ (b) $(1, -2/5)$ [রা.'০৩]

2. (a) $x - 2y - 1 = 0$ ও $2x + 3y + 2 = 0$ রেখাদ্বয়ের ছেদবিন্দুগামী এবং $\tan 45°$ ঢাল বিশিষ্ট সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর। উত্তর : $7x - 7y - 3 = 0$ **[কু.'০৮,'০৯]**

(b) $5x - 9y + 13 = 0$ ও $9x - 5y + 11 = 0$ রেখাদ্বয়ের ছেদ বিন্দু দিয়ে যায় এবং x-অক্ষের সঙ্গে $45°$ কোণ উৎপন্ন করে এরূপ সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর। **[ঢা.'১২ ; বুয়েট'০৭-০৮]**

উত্তর : $7x - 7y + 12 = 0, 2x + 2y - 1 = 0$

(c) মূলবিন্দু এবং $4x + 3y - 8 = 0$ ও $x + y = 1$ রেখা দুইটির ছেদবিন্দুগামী সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর। উত্তর : $4x + 5y = 0.$ **[কু.'১১]**

3. **(a)** দুইটি সরলরেখা $(6, 7)$ বিন্দু দিয়ে যায় এবং তারা $3x + 4y = 11$ রেখার সঙ্গে $45°$ কোণ উৎপন্ন করে। রেখা দুইটির সমীকরণ নির্ণয় কর। উ: $x - 7y + 43 = 0, 7x + y - 49 = 0$ **[রা.'১১,'১৩; চ.'১১; ব.'১৩]**

(b) দুইটি সরলরেখা $(-1, 2)$ বিন্দু দিয়ে যায় এবং তারা $3x - y + 7 = 0$ রেখার সঙ্গে $45°$ কোণ উৎপন্ন করে। রেখা দুইটির সমীকরণ নির্ণয় কর এবং তাদের সমীকরণ হতে দেখাও যে, তারা পরস্পর লম্বভাবে অবস্থান করে। **[রা.'১০; ব.'১১; সি.'০৭,'১২,'১৪; মা.'০৯,'১৫; য.'১১,'১৪; য.,দি.'১৩; কু.'১৫]**

উত্তর : $2x + y = 0, x - 2y + 5 = 0$।

4. **(a)** $(4, -3)$ বিন্দুগামী এবং $2x + 11y - 2 = 0$ রেখার সমান্তরাল সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর। **[সি.'০৬]**

(b) y-অক্ষের সমান্তরাল এবং $2x - 3y + 4 = 0$ ও $3x + 3y - 5 = 0$ রেখা দুইটির ছেদবিন্দুগামী সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর। **[চ.'০৪; ব.'০৪; মা.বো.'০৭; ব.'১০; দি.'১৪]**

(c) x- অক্ষের সমান্তরাল এবং $x - 3y + 2 = 0$ ও $x + y - 2 = 0$ রেখা দুইটির ছেদবিন্দুগামী সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর। **[কু.'০৭; সি.'১০]**

উত্তর : (a) $2x + 11y + 25 = 0$, (b) $5x - 1 = 0$, (c) $y - 1 = 0$

5. **(a)** দুইটি সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর যারা $7x + 13y - 87 = 0$ ও $5x - 8y + 7 = 0$ রেখাদ্বয়ের ছেদবিন্দুগামী এবং অক্ষ দুইটি হতে সমান সংখ্যামানের অংশ ছেদ করে। **[চ.'০৬; সি.'০৬; ব.'১৪]**

উত্তর : $x + y - 9 = 0$ এবং $x - y - 1 = 0.$

(b) যদি $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ সরলরেখাটি $2x - y = 1$ ও $3x - 4y + 6 = 0$ রেখাদ্বয়ের ছেদবিন্দুগামী হয় এবং $4x + 3y - 6 = 0$ রেখাটির সমান্তরাল হয়, তাহলে a ও b এর মান নির্ণয় কর। উত্তর : $a = \frac{17}{4}, b = \frac{17}{3}$

[ঢা'১২; সি.'১৩]

(c) $3x - 4y + 1 = 0$ ও $5x + y - 1 = 0$ রেখাদ্বয়ের ছেদবিন্দু দিয়ে যায় এবং অক্ষদ্বয় হতে একই চিহ্নবিশিষ্ট সমান সমান অংশ ছেদ করে এরূপ সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর। উত্তর : $23x + 23y = 11$ **[রা.'০২]**

(d) $A(1, 1)$, $B(3, 4)$ ও $C(5, -2)$ বিন্দুগুলি ABC ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দু। AB ও AC এর মধ্যবিন্দুর সংযোগ সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর। দেখাও যে, সরলরেখাটি BC এর সমান্তরাল। **[চ.,দি.'১০; ঢা.'১১]**

উত্তর : $6x + 2y = 17$

6. **(a)** $(4, -3)$ বিন্দু দিয়ে যায় এবং $2x + 11y = 2$ রেখার উপর লম্ব সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর।

উত্তর : $11x - 2y - 50 = 0$ **[ব.'১২; কু.'১৪; মা.'১২,'১৪,'১৫]**

(b) $(2, 5)$ বিন্দু দিয়ে যায় এবং $3x + 12y = 3$ রেখার উপর লম্ব সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর।

উত্তর : $12x - 3y - 9 = 0$ [কু.'০৫; চ.'১৪]

7. (a) মূলবিন্দু ও (x_1, y_1) বিন্দুর সংযোগ রেখা এবং $(b, 0)$ ও (x_2, y_2) বিন্দুদ্বয়ের সংযোগ রেখা পরস্পর লম্ব হলে প্রমাণ কর যে, $x_1x_2 + y_1y_2 = bx_1$. [চ.'০৩; রা.'০৪,'১৩; ব.'০৬; ঢা.'১০]

(b) $(2, 3)$ বিন্দুগামী সরলরেখার উপর (x, y) যেকোনো একটি বিন্দু এবং রেখাটি $(-1, 2)$ ও $(-5, 4)$ বিন্দুদ্বয়ের সংযোগ রেখার উপর লম্ব। প্রমাণ কর যে, $2x - y - 1 = 0$.

(c) $A(1, 1)$, $B(3, 4)$ ও $C(5, -2)$ বিন্দুগুলি ABC ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দু । A বিন্দুগামী এবং BC রেখার উপর লম্ব সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর। উত্তর : $x - 3y + 2 = 0$ [প্র.ভ.প.'০৪]

8. (a) এরূপ একটি সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর যা $\frac{x}{a} - \frac{y}{b} = 1$ রেখার উপর লম্ব এবং প্রদত্ত রেখা ও x-অক্ষের ছেদ বিন্দু দিয়ে অতিক্রম করে। উত্তর : $ax + by = a^2$ [চ.'০২; ব.'০৫; কু.'০৮,'১০;ঢা.'১৫]

(b) এরূপ একটি সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর যা $3x + 2y = 9$ ও $2x + 3y = 11$ রেখাদ্বয়ের ছেদ বিন্দু দিয়ে যায় এবং প্রথম রেখার উপর লম্ব হয়। উত্তর : $2x - 3y + 7 = 0$ [ব.'০২]

9. (a) এরূপ একটি সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর যা $(1, 2)$ ও $(4, 5)$ বিন্দুদ্বয়ের সংযোগ রেখাংশকে $3 : 1$ অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত করে এবং ঐ রেখার উপর লম্ব হয়। উত্তর : $2x + 2y = 15$

(b) $P(h, k)$ বিন্দু হতে x ও y-অক্ষের উপর যথাক্রমে PA ও PB লম্ব । P বিন্দুগামী এবং AB রেখার উপর লম্ব এরূপ সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর। উত্তর : $hx - ky = h^2 - k^2$.

(c) এরূপ একটি সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর যা $4x + 7y = 11$ রেখার উপর লম্ব এবং y-অক্ষ হতে 2 একক দৈর্ঘ্য কর্তন করে। উত্তর : $7x - 4y \pm 8 = 0$

10. (a) $3x - 4y + 8 = 0$ রেখার সমান্তরাল দিকে $3x + y + 4 = 0$ রেখা হতে $(1, 2)$ বিন্দুর দূরত্ব নির্ণয় কর। উত্তর : 3 একক। [রা.'০২; য.'০৮]

(b) যে সরলরেখা x-অক্ষের ধনাত্মক দিকের সাথে $\tan^{-1}(\frac{3}{4})$ কোণ উৎপন্ন করে তার সমান্তরাল বরাবর $3x + 5y - 11 = 0$ রেখা হতে $(-1, 1)$ বিন্দুর দূরত্ব নির্ণয় কর। উত্তর : $5/3$ একক।

(c) যে সরলরেখা $y = 2x$ রেখার সঙ্গে $45°$ কোণ উৎপন্ন করে তার সমান্তরাল বরাবর $3x - 4y = 15$ রেখা হতে মূলবিন্দুর দূরত্ব নির্ণয় কর। উত্তর : $\sqrt{10}$ বা, $3\sqrt{10}$ একক।

11. (a) $(8, 5)$ ও $(-4, -3)$ বিন্দুদ্বয়ের সংযোগ রেখাংশের লম্ব সমদ্বিখন্ডক সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর।
উত্তর : $3x + 2y - 8 = 0$ [রা.'১২; ঢা.'০৬; কু.'০৬; সি.'০৯,'১৩; চ.'১২]

(b) $(2, 1)$ ও $(6, 3)$ বিন্দুদ্বয়ের সংযোগ রেখাংশের লম্ব সমদ্বিখন্ডক সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর। [য.'০৬]
উত্তর : $y + 2x = 10$

12. (a) $(2, 3)$ বিন্দু হতে $4x + 3y - 7 = 0$ সরলরেখার উপর অঙ্কিত লম্বের পাদবিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর এবং এর সাহায্যে বিন্দুটি হতে সরলরেখার লম্ব-দূরত্ব নির্ণয় কর। [য.'০৯; রা., ব.'০৯; ঢা.'১০; মা.'১৩; সি.,'০৯,'১৫]

(b) $(2, -1)$ বিন্দু হতে $3x - 4y + 5 = 0$ সরলরেখা উপর অঙ্কিত লম্বের পাদবিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।
[য.'১২; সি.'০৭,'১২; ঢা.'০৮,'১৪; কু.'০৪; চ.'০৭,'১০; মা.বো.'০৮,'০৯; রা.'১২; দি.'১২]

(c) $(3, 1)$ বিন্দু হতে $2x + y - 3 = 0$ সরলরেখা উপর অঙ্কিত লম্বের পাদবিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর। [ব.'০৪]

(d) P(h , k) বিন্দু হতে মূলবিন্দুগামী সরলরেখার উপর লম্বের পাদবিন্দুর সঞ্চারপথ নির্ণয় কর।

উত্তর : (a) $(\frac{2}{5}, \frac{9}{5})$; 2 (b) $(\frac{1}{5}, \frac{7}{5})$ (c) $(\frac{7}{5}, \frac{1}{5})$ (d) $x^2 + y^2 = hx + ky$

13. (a) এরূপ সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর যা x-অক্ষের সমান্তরাল এবং $4x + 3y = 6$ ও $x - 2y = 7$ সরলরেখা দুইটির সঙ্গে সমবিন্দু।

উত্তর : $y + 2 = 0$ [কু.'০৫; ঢা.'০৭; ব.'০৮]

(b) $3x + 5y - 2 = 0$, $2x + 3y = 0$, $ax + by + 1 = 0$ রেখাত্রয় সমবিন্দু হলে, a ও b এর মধ্যে সম্পর্ক নির্ণয় কর।

উত্তর : 6a − 4b = 1 [য.'০৯,'১৩; দি.'১১; চ.'১২]

14. (a) দেখাও যে, $x = t$, $y = 2t + 1$ এবং $x = 2t$, $y = -t - 4$ রেখা দুইটি পরস্পরকে (− 2 , − 3) বিন্দুতে সমকোণে ছেদ করে। [ব.'১১]

(b) OABC একটি সামান্তরিক। x-অক্ষ বরাবর OA অবস্থিত। OC বাহুর সমীকরণ $y = 2x$ এবং B বিন্দুর স্থানাঙ্ক (4 , 2). A ও C বিন্দুর স্থানাঙ্ক এবং AC কর্ণের সমীকরণ নির্ণয় কর।

উত্তর : (3 , 0), (1 , 2) ; $x + y - 3 = 0$ [রা.'১৩; য.'০৭; ঢা.'০৮; সি.'০৮; চ.'১১; দি.'১৪; ব.'১৪]

(c) A, B ও C এর স্থানাঙ্ক যথাক্রমে (1, − 2), (− 3 , 0) ও (5 , 6). প্রমাণ কর যে, AB ও AC রেখদ্বয় পরস্পরকে সমকোণে ছেদ করে। বিন্দুগুলি একটি আয়তক্ষেত্রের তিনটি শীর্ষবিন্দু হলে চতুর্থ শীর্ষের স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

উত্তরঃ (1 , 8) [য.'০৪]

(d) একটি ত্রিভুজের দুইটি শীর্ষবিন্দু যথাক্রমে A(6 , 1) ও B(1, 6) এবং এর লম্ববিন্দু P(3 , 2) ; অবশিষ্ট শীর্ষের স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

উত্তর : (− 2 , − 3) [ঢা.'০৪]

15. (a) $4x + 7y - 12=0$ রেখাটি একটি বর্গের কর্ণ নির্দেশ করে এবং বর্গের একটি শীর্ষ (3,2) বিন্দুতে অবস্থিত। এ বিন্দুটি দিয়ে অতিক্রমকারী বর্গের বাহু দুইটির সমীকরণ নির্ণয় কর।

উঃ $3x - 11y + 13 = 0$; $11x + 3y + 39 = 0$

(b) দেখাও যে, $2x + y + 5 = 0$ ও $x - 2y - 3 = 0$ রেখা দুইটি পরস্পর লম্ব। রেখা দুইটিকে কোনো আয়তক্ষেত্রের দুইটি সন্নিহিত বাহু ধরলে এবং অপর বাহু দুইটি (3 , 4) বিন্দুতে পরস্পরকে ছেদ করলে অবশিষ্ট বাহু দুইটির সমীকরণ নির্ণয় কর।

উত্তর : $2x + y = 10$, $2y = x + 5$.

(c) ABCD সামান্তরিকের AB , BC বাহু দুইটির সমীকরণ যথাক্রমে $x - y + 1= 0$, $x - y + 2 = 0$ এবং D বিন্দুর স্থানাঙ্ক (2 , − 4) হলে AD ও DC এর সমীকরণ নির্ণয় কর। উত্তর : $x - y - 6 = 0$; $2x + y = 0$.

(d) A(3, − 1), B(− 2 , 3) বিন্দু দুইটি একটি ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দু এবং তার লম্ব বিন্দুটি মূলবিন্দুতে । অবশিষ্ট শীর্ষের স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

উত্তর : $(-\frac{36}{7}, -\frac{45}{7})$

(e) ABCD রম্বসের দুইটি বাহু x − y = 5 ও 7x − y = 3 এর সমান্তরাল, কর্ণদ্বয় (2, 1) বিন্দুতে ছেদ করে। A বিন্দু x- অক্ষের উপর অবস্থিত হলে A এর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

উত্তর : (4, 0) বা, (3/2, 0)

সম্ভাব্য ধাপসহ সমস্যা :

16. $4x - 3y - 1 = 0$ ও $2x - 5y + 3 = 0$ রেখাদ্বয়ের ছেদ বিন্দু দিয়ে যায় এবং অক্ষ দুইটির সঙ্গে সমান সমান কোণ উৎপন্ন করে এরূপ সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর।

উঃ $x + y = 2$, $x - y = 0$ (৩)

17. $2x + 3y - 1= 0$ ও $x - 2y + 3 = 0$ রেখা দুইটির অন্তর্ভুক্ত সূক্ষ্মকোণ নির্ণয় কর। [প্র.ভ.প.'০৪] (২)

উঃ $\tan^{-1}\frac{7}{4}$

18. k-এর মান কত হলে $5x + 4y - 6 = 0$ ও $2x + ky + 9 = 0$ রেখা দুইটি পরস্পর সমান্তরাল হবে? উ: $\frac{8}{5}$ (১)

19. $5x - 3y - 7 = 0$ ও $4x + y - 9 = 0$ রেখা দুইটির ছেদবিন্দু দিয়ে যায় এবং $13x - y - 1 = 0$ রেখার সমান্তরাল সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর। উ: $13x - y - 25 = 0$ (৩)

20. k এর মান কত হলে $2x - y + 7 = 0$ ও $3x + ky - 5 = 0$ রেখা দুইটি পরস্পর লম্ব হবে ? উ: 6 (১)

21. $(2, -3)$ বিন্দুগামী এবং $(5, 7)$ ও $(-6, 3)$ বিন্দুদ্বয়ের সংযোগ রেখার উপর লম্ব এরূপ সরলরেখার সীকরণ নির্ণয় কর। উ: $11x + 4y = 10$ (৩)

22. এরূপ একটি সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর যা $2x + 3y + 4 = 0$ ও $3x + 4y - 5 = 0$ রেখা দুইটির ছেদ বিন্দু দিয়ে যায় এবং $6x - 7y + 8 = 0$ রেখার উপর লম্ব হয়। উ: $7x + 6y - 85 = 0$ (৩)

23. $(2, 5)$ ও $(5, 6)$ বিন্দুগামী সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর। দেখাও যে, তা $(-4, 5)$ ও $(-3, 2)$ বিন্দুদ্বয়ের সংযোগ সরলরেখার উপর লম্ব। (৪)

24. $(-3, -2)$ বিন্দুগামী এবং $2x + 3y = 3$ রেখার উপর লম্ব সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর। মূলবিন্দুগামী এবং এই দুইটি রেখার ছেদবিন্দুগামী সরলরেখারও সমীকরণ নির্ণয় কর। উ: $3x - 2y + 5 = 0$, $19x + 9y = 0$ (৪)

25. $(1, 2)$, $(4, 4)$, $(2, 8)$ বিন্দুগুলো একটি ত্রিভুজের বাহুগুলোর মধ্যবিন্দু । বাহুগুলোর সমীকরণ নির্ণয় কর। (৩)
উ: $2x - 3y + 20 = 0$

26. এরূপ সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর যা $2x + 3y = 1$ ও $x - 2y + 3 = 0$ সরলরেখা দুইটির সঙ্গে সমবিন্দু এবং অক্ষদ্বয় হতে সমান সংখ্যামানের অংশ ছেদ করে। উ: $x + y = 0$, $x - y + 2 = 0$ (৪)

27. দুইটি সরলরেখা $(3, 2)$ বিন্দু দিয়ে যায় এবং তারা $x - 2y = 3$ রেখার সঙ্গে $45°$ কোণ উৎপন্ন করে । রেখা দুইটির সমীকরণ নির্ণয় কর। উ: $3x - y = 7$, $x + 3y = 9$ [য.'০৮] (৪)

28. দুইটি সরলরেখা $(6, -7)$ বিন্দু দিয়ে যায় এবং তারা $y + \sqrt{3}\,x = 1$ রেখার সঙ্গে $60°$ কোণ উৎপন্ন করে । রেখা দুইটির সমীকরণ নির্ণয় কর। উ: $y + 7 = 0$, $y + 7 = \sqrt{3}(x - 6)$ [ঢা.'০৫; দি.'০৯; কু.'১১] (৪)

29. দুইটি সরলরেখা মূলবিন্দু দিয়ে যায় এবং তারা $3y = 2x$ রেখার সঙ্গে $\tan^{-1}\frac{1}{2}$ কোণ উৎপন্ন করে। রেখা দুইটির সমীকরণ নির্ণয় কর। উ: $7x = 4y$, $x = 8y$ [ব.'১১] (৪)

30. $(1, 2)$ বিন্দুগামী এবং $3x - 4y + 8 = 0$ রেখার সমান্তরাল সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর। [কু.'০৪] (২)
উ: $3x - 4y + 5 = 0$

31. $(2, -3)$ বিন্দু দিয়ে যায় এবং $2x - 3y = 7$ রেখার উপর লম্ব সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর। (২)
উ: $3x + 2y = 0$ [কু.'০১; য.'০৭; মা.'০৩]

32. $P(4, 11)$ ও $Q(-2, 2)$ বিন্দুদ্বয়ের সংযোগ রেখাংশের লম্ব সমদ্বিখন্ডক সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর। (৩)
উ: $4x + 6y - 43 = 0$ [প্র.ভ.প. '০৪]

33. দেখাও যে, (a, b) ও (c, d) বিন্দুদ্বয়ের সংযোগ রেখাংশের লম্ব সমদ্বিখন্ডক সরলরেখার সমীকরণ

$$(a - c)x + (b - d)y = \frac{1}{2}(a^2 + b^2 - c^2 - d^2)$$

[ব.'০১] (৪)

34. $2x + by + 4 = 0$, $4x - y - 26 = 0$, $3x + y - 1 = 0$ রেখাত্রয় সমবিন্দু হলে b এর মান নির্ণয় কর।
[প্র.ভ.প.'০১] (২)

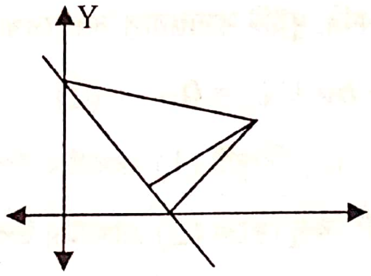
35. $ax + by + c = 0$, $bx + cy + a = 0$, $cx + ay + b = 0$ রেখাত্রয় সমবিন্দু হলে, দেখাও যে, $a + b + c = 0$.
[সি.'০১, ঢা.'১৪] (৪)

36. দেখাও যে, $2x = 1 - 4t$, $y = 1 + t$ এবং $x = -2t$, $y = t - 1$ রেখা দুইটি সমান্তরাল। (৪)

১৭. লম্ব দূরত্ব

I. $P(x_1, y_1)$ বিন্দু থেকে $ax + by + c = 0$ সরলরেখার লম্ব দূরত্ব নির্ণয় করতে হবে।

প্রদত্ত রেখা হতে পাই, $\dfrac{x}{-c/a} + \dfrac{y}{-c/b} = 1 \ldots\ldots (1)$



$\therefore$ $A(-\dfrac{c}{a}, 0)$ ও $B(0, -\dfrac{c}{b})$ বিন্দু দুইটি সরলরেখা (1) উপর অবস্থিত।

$\therefore$ $\delta_{ABP} = \dfrac{c}{ab}(ax_1 + by_1 + c)$ এবং $\Delta ABP = \dfrac{1}{2}|\delta_{ABP}|$ বর্গ একক।

এখন, $AB = \sqrt{\left(-\dfrac{c}{a}\right)^2 + \left(-\dfrac{c}{b}\right)^2} = \sqrt{\dfrac{c^2}{a^2b^2}(a^2 + b^2)} = \sqrt{|\dfrac{c}{ab}|^2 (a^2 + b^2)} = |\dfrac{c}{ab}|\sqrt{a^2 + b^2}$

$P(x_1, y_1)$ বিন্দু থেকে $ax + by + c = 0$ রেখার লম্ব দূরত্ব d হলে, $\Delta ABC = \dfrac{1}{2}AB \times d$ বর্গ একক।

$\therefore$ $\dfrac{1}{2}AB \times d = \dfrac{1}{2}|\delta_{ABP}| \Rightarrow |\dfrac{c}{ab}|\sqrt{a^2+b^2} \times d = |\dfrac{c}{ab}(ax_1 + by_1 + c)| = |\dfrac{c}{ab}||(ax_1 + by_1 + c|$

$\therefore$ $d = \dfrac{|ax_1 + by_1 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$

$\therefore$ $P(x_1, y_1)$ বিন্দু থেকে $ax + by + c = 0$ সরলরেখার লম্ব দূরত্ব $= \dfrac{|ax_1 + by_1 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$

নোটঃ মূলবিন্দু থেকে $ax + by + c = 0$ সরলরেখার লম্ব দূরত্ব $= \dfrac{|c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$

উদাহরণ-1. দেখাও যে, $(\sqrt{5}, 0)$ ও $(-\sqrt{5}, 0)$ বিন্দু দুইটি হতে $2x\cos\alpha - 3y\sin\alpha = 6$ এর উপর অঙ্কিত লম্ব দুইটির গুণফল α মুক্ত হবে। [কু.'০৫; রা.'০৭]

সমাধান : মনে করি, $(\sqrt{5}, 0)$ ও $(-\sqrt{5}, 0)$ বিন্দু দুইটি হতে $2x\cos\alpha - 3y\sin\alpha - 6 = 0$ এর উপর অঙ্কিত লম্ব দুইটি যথাক্রমে d_1 ও d_2.

$\therefore$ $d_1 = |\dfrac{2\sqrt{5}\cos\alpha - 6}{\sqrt{4\cos^2\alpha + 9\sin^2\alpha}}|$ এবং $d_2 = |\dfrac{-2\sqrt{5}\cos\alpha - 6}{\sqrt{4\cos^2\alpha + 9\sin^2\alpha}}|$

এখন, $d_1 \times d_2 = |\dfrac{2\sqrt{5}\cos\alpha - 6}{\sqrt{4\cos^2\alpha + 9\sin^2\alpha}}| \times |\dfrac{-2\sqrt{5}\cos\alpha - 6}{\sqrt{4\cos^2\alpha + 9\sin^2\alpha}}|$

$= |\dfrac{-(2\sqrt{5}\cos\alpha + 6)(2\sqrt{5}\cos\alpha - 6)}{4\cos^2\alpha + 9\sin^2\alpha}| = |\dfrac{-(20\cos^2\alpha - 36)}{4\cos^2\alpha + 9(1 - \cos^2\alpha)}|$