33. দেখাও যে, (a, b) ও (c, d) বিন্দুদ্বয়ের সংযোগ রেখাংশের লম্ব সমদ্বিখন্ডক সরলরেখার সমীকরণ $(a-c)x+(b-d)y=\frac{1}{2}(a^2+b^2-c^2-d^2)$ [ব.'০১]

প্রমাণ: প্রদত্ত বিন্দুদ্বয়ের সংযোগ রেখাংশের মধ্যবিন্দুর স্থানাঙ্ক $(\frac{a+c}{2}, \frac{b+d}{2})$ (১)

$\therefore$ (a, b) ও (c, d) বিন্দুদ্বয়ের সংযোগ রেখাংশের লম্ব সমদ্বিখন্ডক সরলরেখার ঢাল $= -\frac{a-c}{b-d}$ (১)

$\therefore$ নির্ণেয় লম্ব সমদ্বিখন্ডক রেখার সমীকরণ,

$$y-\frac{b+d}{2}=-\frac{a-c}{b-d}(x-\frac{a+c}{2}) \quad (১)$$

$$\Rightarrow (b-d)y-\frac{b^2-d^2}{2}=-(a-c)x+\frac{a^2-c^2}{2}$$

$\therefore$ $(a-c)x+(b-d)y=\frac{1}{2}(a^2+b^2-c^2-d^2)$ (১)

34. $2x+by+4=0$, $4x-y-26=0$, $3x+y-1=0$ রেখাত্রয় সমবিন্দু হলে b এর মান নির্ণয় কর। [প্র.ভ.প.'০১]

সমাধান: প্রদত্ত রেখাত্রয় সমবিন্দু বলে,

$$\begin{vmatrix} 2 & b & 4 \\ 4 & -1 & -26 \\ 3 & 1 & -1 \end{vmatrix}=0 \quad (১)$$

$\Rightarrow 2(1+26)-b(-4+78)+4(4+3)=0$

$\Rightarrow 54-74b+28=0 \Rightarrow 74b=82$

$\therefore$ $b=\frac{82}{74}=\frac{41}{37}$ (Ans.) (১)

35. $ax+by+c=0$, $bx+cy+a=0$, $cx+ay+b=0$ রেখাত্রয় সমবিন্দু হলে, দেখাও যে, $a+b+c=0$. [সি.'০১, ঢা.'১৪]

প্রমাণ : প্রদত্ত রেখাত্রয় সমবিন্দু হলে,

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix}=0 \quad (১)$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} a+b+c & b & c \\ a+b+c & c & a \\ a+b+c & a & b \end{vmatrix}=0 \quad (১)$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} 0 & b-c & c-a \\ 0 & c-a & a-b \\ a+b+c & a & b \end{vmatrix}=0$$

$\Rightarrow (a+b+c)(ab-ca-b^2+bc-c^2+2ca-a^2)=0$ (১)

$\Rightarrow (a+b+c)(2a^2+2b^2+2c^2-2ab-2bc-2ca)=0$ [-2 দ্বারা গুণ করে।]

$\Rightarrow (a+b+c)\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\}=0$

এখানে, $a \neq b \neq c$, $\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\} \neq 0$

$\therefore$ $a+b+c=0$ (Showed) (১)

36. দেখাও যে, $2x=1-4t$, $y=1+t$ এবং $x=-2t$, $y=t-1$ রেখা দুইটি সমান্তরাল।

প্রমাণ : $2x=1-4t$, $y=1+t$ রেখাটিকে লেখা যায়,

$2x=1-4(y-1) \Rightarrow 2x+4y=5 \cdots (1)$ (১)

আবার, $x=-2t$, $y=t-1$ রেখাটিকে লেখা যায়-

$x=-2(y+1) \Rightarrow x+2y+2=0 \cdots (2)$ (১)

(1) রেখাটির ঢাল $=-\frac{2}{4}=-\frac{1}{2}$ এবং (১)

(2) রেখাটির ঢাল $=-\frac{1}{2}$

$\therefore$ রেখা দুইটির ঢাল পরস্পর সমান বলে তারা সমান্তরাল। (Showed) (১)

প্রশ্নমালা III G

এক নজরে প্রয়োজনীয় সূত্রাবলী ঃ

1. $P(x_1, y_1)$ বিন্দু থেকে $ax+by+c=0$ সরলরেখার লম্ব দূরত্ব $=\frac{|ax_1+by_1+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$

2.(i) $ax+by+c_1=0$ ও $ax+by+c_2=0$ সমান্তরাল সরলরেখা দুইটির মধ্যবর্তী দূরত্ব$=\frac{|c_2-c_1|}{\sqrt{a^2+b^2}}$

(ii) $ax+by+c=0$ হতে d একক দূরবর্তী রেখার সমীকরণ $ax+by+c \pm d\sqrt{a^2+b^2}=0$

3. $f(x, y) \equiv a_1 x + b_1 y + c_1 = 0$ ও $g(x, y) \equiv a_2 x + b_2 y + c_2 = 0$ রেখা দুইটির অন্তর্ভুক্ত কোণগুলোর সমদ্বিখন্ডকদ্বয়ের সমীকরণ $\frac{a_1 x + b_1 y + c_1}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}} = \pm \frac{a_2 x + b_2 y + c_2}{\sqrt{a_2^2 + b_2^2}}$

(i) $P(\alpha, \beta)$ বিন্দু ধারণকারী কোণটির সমদ্বিখন্ডকের সমীকরণ '+' হবে যখন $f(\alpha, \beta) \times g(\alpha, \beta) > 0$

'–' হবে যখন $f(\alpha, \beta) \times g(\alpha, \beta) < 0$

(ii) মূলবিন্দু ধারণকারী কোণটির সমদ্বিখন্ডকের সমীকরণ '+' অথবা '–' হবে যখন যথাক্রমে $c_1 \times c_2 > 0$ বা, < 0

(iii) $P(x', y')$ বিন্দুটি রেখাদ্বয়ের অন্তর্ভুক্ত স্থূলকোণে অথবা সূক্ষ্মকোণে অবস্থিত হবে যখন যথাক্রমে $f(x', y') \times g(x' + y')$

$$\times (a_1 a_2 + b_1 b_2 > 0 \text{ বা, } < 0$$

(iv) $a_1 a_2 + b_1 b_2 > 0$ হলে, '+' স্থূলকোণের ও '–' সূক্ষ্মকোণের সমদ্বিখন্ডকের সমীকরণ ।

$a_1 a_2 + b_1 b_2 < 0$ হলে, '+' সূক্ষ্মকোণের ও '–' স্থূলকোণের সমদ্বিখন্ডকের সমীকরণ ।

4. ABC ত্রিভুজের $AB \equiv a_1 x + b_1 y + c_1 = 0$, $AC \equiv a_2 x + b_2 y + c_2 = 0$, $BC \equiv px + qy + r = 0$ হলে, $\angle A$ স্থূলকোণ অথবা সূক্ষ্মকোণ হবে যদি যথাক্রমে $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ p & q \end{vmatrix} \begin{vmatrix} p & q \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} (a_1 a_2 + b_1 b_2) > 0$, অথবা < 0 হয়।

5. ABC ত্রিভুজের শীর্ষ তিনটি $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ ও $C(x_3, y_3)$ হলে, $\angle A$ সূক্ষ্মকোণ বা স্থূলকোণ হবে যদি যথাক্রমে $(x_1 - x_2)(x_1 - x_3) + (y_1 - y_2)(y_1 - y_3) > 0$, অথবা < 0 হয়।

6. ABC ত্রিভুজের শীর্ষ তিনটি $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ ও $C(x_3, y_3)$ হলে, অন্তঃব্যাসার্ধ, $r = \frac{1}{a+b+c} |\delta_{ABC}|$ এবং অন্তঃকেন্দ্র $= \left(\frac{ax_1 + bx_2 + cx_3}{a+b+c}, \frac{ay_1 + by_2 + cy_3}{a+b+c}\right)$; যখন $AB = c$, $BC = a$, $CA = b$ এবং $\delta_{ABC} = (x_1 - x_2)(y_2 - y_3) - (x_2 - x_3)(y_1 - y_2)$ অর্থাৎ অন্তঃকেন্দ্রের

$$\text{ভুজ} = \frac{\sum x_1 \sqrt{(x_2 - x_3)^2 + (y_2 - y_3)^2}}{\sum \sqrt{(x_2 - x_3)^2 + (y_2 - y_3)^2}} \text{ এবং}$$

$$\text{কোটি} = \frac{\sum y_1 \sqrt{(x_2 - x_3)^2 + (y_2 - y_3)^2}}{\sum \sqrt{(x_2 - x_3)^2 + (y_2 - y_3)^2}}$$

MCQ এর জন্য বিশেষ সূত্র ঃ

1. $a_1 x + b_1 y + c_1 = 0$ ও $a_2 x + b_2 y + c_2 = 0$ সমান্তরাল রেখাদ্বয়ের মধ্যবর্তী দূরত্ব $= \frac{|c_1 \sqrt{a_2^2 + b_2^2} - c_2 \sqrt{a_1^2 + b_1^2}|}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2} \sqrt{a_2^2 + b_2^2}}$

2. $f(x) \equiv ax + by + c = 0$ রেখা $g(x) \equiv a_1 x + b_1 y + c_1 = 0$ ও AB রেখাদ্বয়ের অন্তর্ভুক্ত কোণগুলোর একটি সমদ্বিখন্ডক হলে AB এর সমীকরণ

$$(a^2 + b^2) g(x) - 2(aa_1 + bb_1) f(x) = 0$$

3. $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ বিন্দুদ্বয়ের সংযোগ রেখাংশকে $ax + by + c = 0$ সরলরেখাটি N EMBED Equation.3 $|ax_1 + by_1 + c|$: $|ax_2 + by_2 + c|$ অনুপাতে বিভক্ত করে।

প্রশ্নমালা III G

1 (a) (1, 2) বিন্দু হতে $x - \sqrt{3} y + 4 = 0$ রেখার উপর একটি লম্ব অঙ্কিত হল। মূলবিন্দু থেকে এ লম্বের লম্বদূরত্ব নির্ণয় কর। [প্র.ভ.প.'০৫]

সমাধান : (1 , 2) বিন্দু হতে $x - \sqrt{3} y + 4 = 0$ রেখার উপর অঙ্কিত লম্বের সমীকরণ,

$$\sqrt{3} x + y = \sqrt{3} \times 1 + 2$$

$$\Rightarrow \sqrt{3} x + y - 2 - \sqrt{3} = 0 \cdots \cdots (1)$$

$\therefore$ মূলবিন্দুর থেকে (1) এর লম্ব দূরত্ব $= \frac{|-2 - \sqrt{3}|}{\sqrt{3 + 1}}$

$$= \frac{2 + \sqrt{3}}{2} \text{ (Ans.)}$$

(b) $4x + 3y = c$ এবং $12x - 5y = 2(c + 3)$ রেখা দুইটি হতে মূলবিন্দু সমদূরবর্তী । c এর ধনাত্মক

মান নির্ণয় কর। [রা.'০৮,'১২ ;চ.'০৬; য.'১০,'১৪; ঢা.'০৯]

সমাধান : $4x + 3y = c$ অর্থাৎ $4x + 3y - c = 0$ হতে

মূলবিন্দু দুরত্ব $= \frac{|-c|}{\sqrt{16+9}} = \frac{|c|}{5}$

আবার, $12x - 5y = 2(c+3)$ অর্থাৎ $12x - 5y - 2(c+3) = 0$ হতে মূলবিন্দুর দূরত্ব

$= \frac{|-2(c+3)|}{\sqrt{144+25}} = \frac{|2(c+3)|}{13}$

প্রশ্নমতে, $\frac{|2(c+3)|}{13} = \frac{|c|}{5} \Rightarrow \frac{2(c+3)}{13} = \pm\frac{c}{5}$

'+' নিয়ে, $10c + 30 = 13c \Rightarrow 3c = 30 \therefore c = 10$

'−' নিয়ে, $10c + 30 = -13c \Rightarrow 23c = -30$

$\Rightarrow c = -30/23$

$\therefore$ c এর ধনাত্মক মান 10. (Ans.)

(c) (a, b) বিন্দুটি $3x - 4y + 1 = 0$ এবং $4x + 3y + 1 = 0$ রেখাদ্বয় হতে সমদুরবর্তী হলে, দেখাও যে, $a + 7b = 0$ অথবা $7a - b + 2 = 0$

[রা.'০১,'১০; সি.'০১; মা.'০৮; চ.'১৩]

প্রমাণ ঃ $3x - 4y + 1 = 0$ রেখা হতে (a, b) বিন্দুর দূরত্ব $= \frac{|3a-4b+1|}{\sqrt{9+16}} = \frac{|3a-4b+1|}{5}$

আবার, $4x + 3y + 1 = 0$ রেখা হতে (a, b) বিন্দুর দূরত্ব $= \frac{|4a+3b+1|}{\sqrt{16+9}} = \frac{|4a+3b+1|}{5}$

প্রশ্নমতে, $\frac{|3a-4b+1|}{5} = \frac{|4a+3b+1|}{5}$

$\Rightarrow 3a-4b+1 = \pm(4a+3b+1)$

'+' নিয়ে, $3a-4b+1-4a-3b-1 = 0$

$\Rightarrow -a-7b = 0 \Rightarrow a+7b = 0$

'−' নিয়ে, $3a-4b+1+4a+3b+1 = 0$

$\Rightarrow 7a - b + 2 = 0$

$\therefore a + 7b = 0$ অথবা $7a - b + 2 = 0$

(d) মূলবিন্দু থেকে $x \sec\theta - y\,\mathrm{cosec}\,\theta = k$ ও $x \cos\theta - y\sin\theta = k\cos 2\theta$ রেখা দুইটির লম্ব দূরত্ব যথাক্রমে p ও p' হলে, প্রমাণ কর যে, $4p^2 + p'^2 = k^2$ [চ.'০৩,'১১; রা.'০৪;য.'০৯]

প্রমাণ : মূলবিন্দু থেকে $x\sec\theta - y\,\mathrm{cosec}\theta - k = 0$ এর দূরত্ব $p = \left|\frac{-k}{\sqrt{\sec^2\theta + \mathrm{cosec}^2\theta}}\right|$

মূলবিন্দু $(0, 0)$ থেকে $x\cos\theta - y\sin\theta - k\cos 2\theta = 0$ এর দূরত্ব,

$p' = \left|\frac{-k\cos 2\theta}{\sqrt{\cos^2\theta + \sin^2\theta}}\right|$

L.H.S. $= 4p^2 + p'^2$

$= 4\frac{k^2}{\sec^2\theta + \mathrm{cosec}^2\theta} + \frac{k\cos^2 2\theta}{1}$

$= \frac{4k^2}{1/\cos^2\theta + 1/\sin^2\theta} + k^2\cos^2 2\theta$

$= \frac{4k^2(\sin^2\theta\cos^2\theta)}{\sin^2\theta + \cos^2\theta} + k^2\cos^2 2\theta$

$= \frac{k^2(2\sin\theta\cos\theta)^2}{1} + k^2\cos^2 2\theta$

$= k^2(\sin^2 2\theta + \cos^2 2\theta)$

$= k^2 . 1 = k^2 =$ R.H.S. (Proved)

(e) দেখাও যে, $(\pm 4, 0)$ বিন্দু দুইটি থেকে $3x\cos\theta + 5y\sin\theta = 15$ এর উপর অঙ্কিত লম্ব দুইটির গুণফল θ মুক্ত হবে।

[য.'০৩; ঢা.'০৬; ব.'০৮ ; কু.'১৩]

প্রমাণ : $(4, 0)$ বিন্দু থেকে $3x\cos\theta + 5y\sin\theta - 15 = 0$ এর লম্বদূরত্ব

$= \left|\frac{12\cos\theta - 15}{\sqrt{9\cos^2\theta + 25\sin^2\theta}}\right| = d_1$ (ধরি)

$(-4, 0)$ বিন্দু থেকে $3x\cos\theta + 5y\sin\theta - 15 = 0$ এর লম্বদূরত্ব

$= \left|\frac{-12\cos\theta - 15}{\sqrt{9\cos^2\theta + 25\sin^2\theta}}\right| = d_2$ (ধরি)

$\therefore$ লম্বদূরত্ব দুইটির গুণফল,

$d_1 d_2 = \left|\frac{12\cos\theta - 15}{\sqrt{9\cos^2\theta + 25\sin^2\theta}}\right|$

$\left|\frac{-12\cos\theta - 15}{\sqrt{9\cos^2\theta + 25\sin^2\theta}}\right|$

$= |\frac{225 - 144\cos^2\theta}{9\cos^2\theta + 25(1 - \cos^2\theta)}|$

$= |\frac{9(25 - 16\cos^2\theta)}{(25 - 16\cos^2\theta)}| = 9$; যা θ মুক্ত।

∴ লম্ব দূরত্ব দুইটির গুণফল θ মুক্ত।

(f) (2, 3) বিন্দু এবং 4x + 37 – 7 = 0 রেখার সাপেক্ষে উক্ত বিন্দুর প্রতিবিম্বের মধ্যবর্তী দূরত্ব নির্ণয় কর। [প্র.ভ.প.'০৫; কু.'১১]

সমাধান ঃ (2 , 3) বিন্দু হতে $4x + 3y - 7 = 0$ রেখার দূরত্ব $= \frac{|4\times2+3\times3-7|}{\sqrt{16+9}}$

$= \frac{|8+9-7|}{5} = \frac{10}{5} = 2$ একক

∴ (2 , 3) বিন্দু এবং প্রদত্ত রেখার সাপেক্ষে উক্ত বিন্দুর প্রতিবিম্বের মধ্যবর্তী দূরত্ব $= 2\times2 = 4$ একক

2(a) $3x–2y = 1$ এবং $6x–4y + 9 = 0$ সমান্তরাল রেখাদ্বয়ের মধ্যবর্তী দূরত্ব নির্ণয় কর। [মা.'০৪,'০৬]

সমাধান ঃ প্রদত্ত রেখাদ্বয়,

$3x - 2y = 1 \Rightarrow 3x - 2y - 1 = 0 \cdots (1)$ এবং

$6x - 4y + 9 = 0 \Rightarrow 3x - 2y + \frac{9}{2} = 0 \cdots (2)$ ∴

(1) ও (2) সমান্তরাল রেখাদ্বয়ের মধ্যবর্তী দূরত্ব

$= \frac{|-1-\frac{9}{2}|}{\sqrt{9+4}} = \frac{|-\frac{11}{2}|}{\sqrt{13}} = \frac{11}{2\sqrt{13}}$ একক।

2(b) দেখাও যে, $4x + 7y - 26 = 0$ রেখার উপরিস্থিত যেকোন বিন্দু $3x + 4y - 12 = 0$ ও $5x + 12y - 52 = 0$ রেখা দুইটি হতে সমদূরবর্তী।

প্রমাণ ঃ ধরি, $4x + 7y - 26 = 0$ রেখার উপর $P(\alpha, \beta)$ যেকোন একটি বিন্দু ।

∴ $4\alpha + 7\beta - 26 = 0 \Rightarrow \alpha = \frac{26 - 7\beta}{4}$

$3x + 4y - 12 = 0$ রেখা হতে $P(\alpha, \beta)$ এর দূরত্ব

$= \frac{|3\alpha + 4\beta - 12|}{\sqrt{9+16}} = \frac{|3\frac{26-7\beta}{4} + 4\beta - 12|}{5}$

$= \frac{|78 - 21\beta + 16\beta - 48|}{5\times4} = \frac{|30 - 5\beta|}{5\times4}$

$= \frac{|6-\beta|}{4}$

$5x + 12y - 52 = 0$ রেখা হতে $P(\alpha, \beta)$ এর দূরত্ব =

$\frac{|5\alpha + 12\beta - 52|}{\sqrt{25+144}} = \frac{|5\frac{26-7\beta}{4} + 12\beta - 52|}{13}$

$= \frac{|130 - 35\beta + 48\beta - 208|}{13\times4} = \frac{|-78+13\beta|}{5\times4}$

$= \frac{13|6-\beta|}{13\times4} = \frac{|6-\beta|}{4}$

∴ $4x + 7y - 26 = 0$ রেখার উপরিস্থিত যেকোন বিন্দু $3x + 4y - 12 = 0$ ও $5x + 12y - 52 = 0$ রেখা দুইটি হতে সমদূরবর্তী।

বিকল্প পদ্ধতি : প্রশ্নমতে এটাই প্রমাণ করা যথেষ্ট যে, $3x + 4y - 12 = 0 \cdots (1)$ ও

$5x + 12y - 52 = 0 \cdots (2)$ রেখাদ্বয়ের অন্তর্ভুক্ত কোণগুলোর সমদ্বিখন্ডকদ্বয়ের একটি $4x + 7y - 26 = 0$

এখন,(1) ও (2) রেখাদ্বয়ের অন্তর্ভুক্ত কোণগুলোর সমদ্বিখন্ডকের সমীকরণ,

$\frac{3x+4y-12}{\sqrt{9+16}} = \pm\frac{5x+12y-52}{\sqrt{25+144}}$

$\Rightarrow \frac{3x+4y-12}{5} = \pm\frac{5x+12y-52}{13}$

$\Rightarrow 39x + 52y - 156 = \pm(25x + 60y - 260)$

'–' নিয়ে, $64x + 112y - 416 = 0$

$\Rightarrow 4x + 7y - 26 = 0$, যা একটি সমদ্বিখন্ডকের সমীকরণ।

3.(a) $12x - 5y + 26 = 0$ রেখা থেকে 2 একক দূরে এবং $x + 5y = 13$ রেখার উপর অবস্থিত বিন্দুসমূহের স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ ধরি, $x + 5y = 13 \cdots(1)$ রেখাস্থ বিন্দু (α, β) , $12x - 5y + 26 = 0 \cdots(2)$ রেখা থেকে 2 একক দূরে অবস্থিত।

∴ $\alpha + 5\beta = 13 \Rightarrow \alpha = 13 - 5\beta \cdots (3)$ এবং

$\frac{|12\alpha - 5\beta + 26|}{\sqrt{144+25}} = 2$

$\Rightarrow 12\alpha - 5\beta + 26 = \pm 26$

'+' নিয়ে, $12\alpha - 5\beta = 0$

$\Rightarrow 12(13-5\beta)-5\beta=0$ [(3) দ্বারা]

$\Rightarrow 156-60\beta-5\beta=0 \Rightarrow 65\beta=156$

$\Rightarrow \beta=\frac{156}{65}=\frac{12}{5} \therefore \alpha=13-5.\frac{12}{5}=1$

আবার, '–' নিয়ে, $12\alpha-5\beta+52=0$

$\Rightarrow 12(13-5\beta)-5\beta+52=0$ [(3) দ্বারা]

$\Rightarrow 156-60\beta-5\beta+52=0 \Rightarrow 65\beta=208$

$\Rightarrow \beta=\frac{208}{65}=\frac{16}{5} \therefore \alpha=13-5.\frac{16}{5}=-3$

$\therefore$ বিন্দুসমূহের স্থানাঙ্ক $(1, \frac{12}{5}), (-3, \frac{16}{5})$

3(b) (x, y) বিন্দুটি $3x-4y+1=0$ ও $4x+3y+1=0$ রেখা দুইটি হতে সমদূরবর্তী হলে দেখাও যে, $x+7y=0$ অথবা, $7x-y+2=0$. [চ.'০২; সি.'০৮]

সমাধান ঃ $3x-4y+1=0$ রেখা হতে (x, y) বিন্দুর দূরত্ব $=\frac{|3x-4y+1|}{\sqrt{9+16}}=\frac{|3x-4y+1|}{5}$ এবং

$4x+3y+1=0$ রেখা হতে (x, y) বিন্দুর দূরত্ব $=\frac{|4x+3y+1|}{\sqrt{16+9}}=\frac{|4x+3y+1|}{5}$

প্রশ্নমতে, $\frac{|3x-4y+1|}{5}=\frac{|4x+3y+1|}{5}$

$\therefore 3x-4y+1=\pm(4x+3y+1)$

'+' নিয়ে পাই, $3x-4y+1=4x+3y+1$

$\Rightarrow x+7y=0$

'–' নিয়ে পাই, $3x-4y+1=-4x-3y-1$

$\Rightarrow 7x-y+2=0$

4.(a) $12x-5y=7$ রেখার 2 একক দূরবর্তী সমান্তরাল রেখার সমীকরণ নির্ণয় কর। [ব.'১০ ; কু.'০৮; য.'১০,'১২; রা.'১৩; চ.'১৪]

সমাধান ঃ ধরি, $12x-5y=7$ অর্থাৎ $12x-5y-7=0$ রেখার সমান্তরাল রেখার সমীকরণ $12x-5y+k=0$

এ রেখা দুইটির মধ্যবর্তী দূরত্ব $=\frac{|k+7|}{\sqrt{144+25}}$

প্রশ্নমতে, $\frac{|k+7|}{\sqrt{144+25}}=2 \Rightarrow \frac{k+7}{13}=\pm 2$

$\Rightarrow k=\pm 26-7$

$\therefore k=19$ অথবা, $k=-33$

$\therefore$ নির্ণেয় রেখার সমীকরণ $12x-5y+19=0$

অথবা, $12x-5y-33=0$

4(b) $4x-3y=8$ সরলরেখার সমান্তরাল এবং তা থেকে 2 একক দূরে অবস্থিত রেখাসমূহের সমীকরণ নির্ণয় কর। [সি.'০৭,'১৩; ঢা'১০,'১৩; য.'০৪; মা.'০৫; চ.'০৯; ব.'১৩; দি.'১৪]

সমাধান ঃ ধরি, $4x-3y=8$ অর্থাৎ $4x-3y-8=0$ রেখার সমান্তরাল রেখার সমীকরণ $4x-3y+k=0$

এ রেখা দুইটির মধ্যবর্তী দূরত্ব $=\frac{|k+8|}{\sqrt{16+9}}$

প্রশ্নমতে, $\frac{|k+8|}{\sqrt{16+9}}=2 \Rightarrow \frac{k+8}{5}=\pm 2$

$\Rightarrow k=\pm 10-8$

$\therefore k=10-8=2$ এবং, $k=-10-8=-18$

$\therefore$ নির্ণেয় রেখাসমূহের সমীকরণ $4x-3y+2=0$

এবং $4x-3y-18=0$

4(c) (7, 17) বিন্দু দিয়ে যায় এবং (1, 9) বিন্দু থেকে 6 একক দূরে অবস্থিত সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ ধরি, (7, 17) বিন্দু দিয়ে যায় এরূপ রেখার সমীকরণ, $y-17=m(x-7)$

$\Rightarrow mx-y-7m+17=0 \cdots\cdots (1)$

(1) রেখাটি থেকে (1, 9) বিন্দুর দূরত্ব

$=\left|\frac{m-9-7m+17}{\sqrt{m^2+1}}\right|=\left|\frac{8-6m}{\sqrt{m^2+1}}\right|$

পশ্নমতে, $\left|\frac{8-6m}{\sqrt{m^2+1}}\right|=6 \Rightarrow \left|\frac{4-3m}{\sqrt{m^2+1}}\right|=3$

$\Rightarrow (4-3m)^2=9(m^2+1)$

$\Rightarrow 16-24m+9m^2=9m^2+9$

$\Rightarrow 24m=7 \Rightarrow m=7/24$

নির্ণেয় রেখার সমীকরণ $y-17=\frac{7}{24}(x-7)$

$\Rightarrow 24y-408=7x-49$

$\Rightarrow 7x-24y+359=0$

5. (a) এমন সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর যার ঢাল –1 এবং মূলবিন্দু থেকে যার দূরত্ব 4 একক।

[কু.'০৬; সি.'০৯]

সমাধান ঃ ধরি, -1 ঢাল বিশিষ্ট সরলরেখার সমীকরণ, $y = -1.x + c \Rightarrow x + y - c = 0 \cdots(1)$

মূলবিন্দু $(0,0)$ থেকে (1) এর দূরত্ব $= \frac{|-c|}{\sqrt{2}}$

প্রশ্নমতে, $\frac{|-c|}{\sqrt{2}} = 4 \Rightarrow |c| = 4\sqrt{2}$

$\Rightarrow c = \pm 4\sqrt{2}$

$\therefore$ নির্ণেয় রেখার সমীকরণ, $x + y \pm 4\sqrt{2} = 0$

5 (b) মূলবিন্দু থেকে 7 একক দূরত্বে এবং $3x - 4y + 7 = 0$ রেখার উপর লম্ব রেখাসমূহের সমীকরণ নির্ণয় কর।
[চ.'০৫; সি.'০৬,'১১; রা.' ০৯; দি.'০৯, '১১,'১২; ব.'১১; মা.'১৪]

সমাধান ঃ ধরি, প্রদত্ত রেখার উপর লম্ব রেখার সমীকরণ $4x + 3y + k = 0 \cdots \cdots (1)$

মূলবিন্দু $(0,0)$ থেকে (1) এর দূরত্ব $= \frac{|k|}{\sqrt{16+9}}$

প্রশ্নমতে, $\frac{|k|}{\sqrt{16+9}} = 7 \Rightarrow \frac{k}{5} = \pm 7$

$= \pm 35$

$\therefore$ নির্ণেয় রেখাসমূহের সমীকরণ $4x + 3y + 35 = 0$ এবং $4x + 3y - 35 = 0$

5(c) একটি সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর যা x-অক্ষের ধনাত্মক দিকের সাথে $60°$ কোণ উৎপন্ন করে এবং মূলবিন্দু থেকে 4 একক দূরে অবস্থিত। [চ.'১৩]

সমাধান : ধরি, রেখাটির সমীকরণ,

$y = x\tan 60° + c \Rightarrow y = \sqrt{3}x + c$

$\Rightarrow \sqrt{3}x - y + c = 0 \cdots \cdots(1)$

মূলবিন্দু $(0,0)$ থেকে (1) এর দূরত্ব $= \frac{|c|}{\sqrt{3+1}} = \frac{|c|}{2}$

প্রশ্নমতে, $\frac{|c|}{2} = 4 \Rightarrow \frac{c}{2} = \pm 4 \Rightarrow c = \pm 8$

$\therefore$ রেখাটির সমীকরণ $\sqrt{3}x - y + 8 = 0$

অথবা, $\sqrt{3}x - y - 8 = 0$

5(d) একটি সরলরেখা অক্ষ দুইটি থেকে সমমানের যোগবোধক অংশ ছেদ করে । মূল বিন্দু থেকে তার উপর অঙ্কিত লম্বের দৈর্ঘ্য 4 একক। তার সমীকরণ বের কর।

সমাধান ঃ ধরি, অক্ষ দুইটি থেকে সমমানের যোগবোধক অংশ ছেদ করে এরূপ সরলরেখার সমীকরণ,

$\frac{x}{a} + \frac{y}{a} = 1 \Rightarrow x + y = a \cdots(\text{i})$, যেখানে $a > 0.$

মূল বিন্দু থেকে (i) এর উপর অঙ্কিত লম্বের দৈর্ঘ্য

$\frac{|0+0-a|}{\sqrt{1^2+1^2}} = 4 \Rightarrow |-a| = 4\sqrt{2}$

$\Rightarrow a = 4, [\because a > 0.]$

$\therefore$ নির্ণেয় সরলরেখার সমীকরণ, $x + y = 4\sqrt{2}$

6(a) $y = 2x + 1$ ও $2y - x = 4$ রেখা দুইটির অন্তর্ভুক্ত কোণগুলোর সমদ্বিখন্ডক y –অক্ষকে P ও Q বিন্দুতে ছেদ করে। PQ এর দূরত্ব নির্ণয় কর।
[রা.'১১,'১৪; সি.'০৫; ব.'১২;কু.'১৪; চুয়েট'০৮-০৯]

সমাধান ঃ প্রদত্ত $y = 2x + 1$ অর্থাৎ $2x - y + 1 = 0$ ও $2y - x = 4$ অর্থাৎ $x - 2y + 4 = 0$ রেখা দুইটির অন্তর্ভুক্ত কোণের সমদ্বিখন্ডকের সমীকরণ,

$$\frac{2x-y+1}{\sqrt{4+1}} = \pm\frac{x-2y+4}{\sqrt{1+4}}$$

$\Rightarrow 2x - y + 1 = \pm(x - 2y + 4)$

'+' নিয়ে, $x + y = 3 \Rightarrow \frac{x}{3} + \frac{y}{3} = 1$, যা y –অক্ষকে $P(0, 3)$ বিন্দুতে ছেদ করে।

'–' নিয়ে, $2x - y + 1 = -x + 2y - 4$

$\Rightarrow 3x - 3y = -5 \Rightarrow \frac{x}{-5/3} + \frac{y}{5/3} = 1$, যা y –অক্ষকে $Q(0, \frac{5}{3})$ বিন্দুতে ছেদ করে।

$\therefore$ PQ এর দূরত্ব $= |3 - \frac{5}{3}| = |\frac{4}{3}| = 1\frac{1}{3}$

6(b) দেখাও যে, (0,1) বিন্দুটি $12x - 5y + 1 = 0$ ও $5x + 12y - 16 = 0$ রেখাদ্বয়ের অন্তর্ভুক্ত কোণগুলোর একটি সমদ্বিখন্ডকের উপর অবস্থিত। [রা.'০৬; সি.'০৮,'১৪; কু. '১১,'১৩; চ. '০৮; য.'১১; দি.'১৩]

প্রমাণ : প্রশ্নমতে এটাই প্রমাণ করা যথেষ্ট যে, $12x - 5y + 1 = 0$ ও $5x + 12y - 16 = 0$ রেখাদ্বয় হতে $(0,1)$ বিন্দুটি সমদূরবর্তী ।

(1) থেকে $(0,1)$ বিন্দুর দূরত্ব $= \frac{|0-5+1|}{\sqrt{144+25}}$ [ব.'১

$= \frac{|-4|}{13} = \frac{4}{13}$

(2) থেকে $(0,1)$ বিন্দুর দূরত্ব $= \frac{|0+12-16|}{\sqrt{25+144}}$

$= \frac{|-4|}{13} = \frac{4}{13}$

$\therefore$ পদত্ত রেখাদ্বয় হতে $(0,1)$ বিন্দুটি সমদূরবর্তী ।

$\therefore$ $(0,1)$ বিন্দুটি পদত্ত রেখাদ্বয়ের অন্তর্ভুক্ত কোণগুলোর একটি সমদ্বিখন্ডকের উপর অবস্থিত।

বিকল্প পদ্ধতি ঃ পদত্ত রেখাদ্বয়ের অন্তর্ভুক্ত কোণগুলোর সমদ্বিখন্ডকের সমীকরণ,

$$\frac{12x-5y+1}{\sqrt{144+25}} = \pm\frac{5x+12y-16}{\sqrt{25+144}}$$

$\Rightarrow 12x - 5y + 1 = \pm(5x + 12y - 16)$

'+' নিয়ে, $12x - 5y + 1 = 5x + 12y - 16$

$\Rightarrow 7x - 17y + 17 = 0 \cdots(1)$

ধরি, $f(x, y) \equiv 7x - 17y + 17 = 0$

'–' নিয়ে, $12x - 5y + 1 = -5x - 12y + 16$

$\Rightarrow 17x + 7y - 15 = 0 \cdots\cdots(2)$

ধরি, $g(x, y) \equiv 17x + 7y - 15 = 0$

এখন, $f(0, 1) = 7.0 - 17.1 + 17 = 0$ এবং

$g(0, 1) = 17.0 + 7.1 - 15 = -8$

$\therefore$ $(0,1)$ বিন্দুটি (1) কে সিদ্ধ করে অর্থাৎ $(0,1)$ বিন্দুটি (1) দ্বারা সূচিত সমদ্বিখন্ডকের উপর অবস্থিত।

6(c) $4y - 3x = 3$ এবং $3y - 4x = 5$ রেখা দুইটির অন্তর্ভুক্ত স্থূলকোণের সমীকরণ নির্ণয় কর।

[ব.'০২; দি.'০৯]

সমাধান ঃ $4y - 3x = 3 \Rightarrow 3x - 4y + 3 = 0$ কে $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ এর সাথে এবং $3y - 4x = 5$ $\Rightarrow 4x - 3y + 5 = 0$ কে $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ এর সাথে তুলনা করে পাই,

$a_1a_2 + b_1b_2 = 3 \times 4 + (-4) \times (-3)$

$= 12 + 12 = 24 > 0$

$\therefore$ রেখা দুইটির অন্তর্ভুক্ত স্থূলকোণের সমদ্বিখন্ডকের সমীকরণ, $\frac{3x-4y+3}{\sqrt{9+16}} = \frac{4x-3y+5}{\sqrt{16+9}}$

$\Rightarrow 3x - 4y + 3 = 4x - 3y + 5$

$\Rightarrow -x - y - 2 = 0 \therefore x + y + 2 = 0$ (Ans.)

6(d) $3x + 4y = 11$ এবং $12x - 5y - 2 = 0$ রেখা দুইটির অন্তর্ভুক্ত সূক্ষ্মকোণের সমদ্বিখন্ডকের সমীকরণ নির্ণয় কর। **[প্র.ভ.প.'০৬;ব.'০৯]**

সমাধান ঃ $3x + 4y = 11 \Rightarrow 3x + 4y - 11 = 0$ কে $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ এর সাথে এবং $12x - 5y - 2 = 0$ কে $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ এর সাথে তুলনা করে পাই,

$a_1a_2 + b_1b_2 = 3 \times 12 + 4 \times (-5)$

$= 36 - 20 = 16 > 0$

$\therefore$ রেখা দুইটির অন্তর্ভুক্ত সূক্ষ্মকোণের সমদ্বিখন্ডকের সমীকরণ, $\frac{3x+4y-11}{\sqrt{9+16}} = -\frac{12x-5y-2}{\sqrt{144+25}}$

$\Rightarrow \frac{3x+4y-11}{5} = -\frac{12x-5y-2}{13}$

$\Rightarrow 39x + 52y - 143 = -60x + 25y + 10$

$\Rightarrow 99x + 27y - 153 = 0$

$\therefore 11x + 3y - 17 = 0$ (Ans.)

7(a) $4x - 4y + 3 = 0$ এবং $x + 7y - 2 = 0$ রেখা দুইটির অন্তর্ভুক্ত কোণগুলোর সমদ্বিখন্ডকের সমীকরণ নির্ণয় কর এবং দেখাও যে, সমদ্বিখন্ডকদ্বয় পরস্পর লম্ব। এদের কোনটি মূলবিন্দু ধারণকারী কোণের সমদ্বিখন্ডক।

[য.'০২,'০৭,'১২

সমাধান: প্রদত্ত রেখাদ্বয়ের অন্তর্ভুক্ত কোণগুলোর সমদ্বিখন্ডকের সমীকরণ ,

$$\frac{4x-4y+3}{\sqrt{16+16}} = \pm\frac{x+7y-2}{\sqrt{1+49}}$$

$$\Rightarrow \frac{4x-4y+3}{4\sqrt{2}} = \pm\frac{x+7y-2}{5\sqrt{2}}$$

$\Rightarrow 20x - 20y + 15 = \pm(4x + 28y - 8)$

'+' নিয়ে, $20x - 20y + 15 = 4x + 28y - 8$

$\Rightarrow 16x - 48y + 23 = 0 \cdots (1)$

'–' নিয়ে, $20x - 20y + 15 = -4x - 28y + 8$

$\Rightarrow 24x + 8y + 7 = 0 \cdots (2)$

২য় অংশ : (1) রেখার ঢাল $= -\frac{16}{-48} = \frac{1}{3}$

(2) রেখার ঢাল $= -\frac{24}{8} = -3$

এ ঢাল দুইটির গুণফল $= \frac{1}{3} \times -3 = -1$

সমদ্বিখন্ডকদ্বয় পরস্পর লম্ব।

∴ ৩য় অংশ ঃ প্রদত্ত রেখা দুইটির ধ্রুব পদ 3 ও −2 বিপরীত চিহ্নযুক্ত বলে '−' চিহ্ন নিয়ে প্রাপ্ত সমদ্বিখন্ডক সমীকরণ অর্থাৎ $24x + 8y + 7 = 0$, মূলবিন্দু ধারণকারী কোণের সমদ্বিখন্ডক।

7.(b) $4x + 3y + 2 = 0$ এবং $12x + 5y + 13 = 0$ রেখা দুইটির অন্তর্ভুক্ত যে কোণটি মূলবিন্দু ধারণ কারে তার সমদ্বিখন্ডকের সমীকরণ নির্ণয় কর। [মা.বো.'০৭]

সমাধান : প্রদত্ত রেখা দুইটির ধ্রুব পদ 2 ও 13 সমচিহ্নযুক্ত।

∴ মূলবিন্দু ধারণকারী কোণের সমদ্বিখন্ডকের সমীকরণ

$$\frac{4x+3y+2}{\sqrt{16+9}} = \frac{12x+5y+13}{\sqrt{144+25}}$$

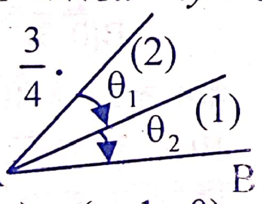
$$\Rightarrow \frac{4x+3y+2}{5} = \frac{12x+5y+13}{13}$$

$$\Rightarrow 60x + 25y + 65 = 52x + 39y + 26$$

$$\therefore 8x - 14y + 39 = 0 \text{ (Ans.)}$$

7. (c) $x + y + 1 = 0$ রেখাটি $3x - 4y + 3 = 0$ ও AB রেখা দুইটির অন্তর্ভুক্ত কোণগুলোর একটির সমদ্বিখন্ডক। AB রেখার সমীকরণ নির্ণয় কর।

সমাধান: ধরি, AB রেখার ঢাল m_2, $x + y + 1 = 0 \cdots(1)$ রেখার ঢাল, $m = -1$ এবং $3x - 4y + 3 = 0 \cdots(2)$ রেখার ঢাল, $m_1 = \frac{3}{4}$.



(1), (2) ও AB রেখাত্রয়ের ছেদবিন্দু $= \left(\frac{3+4}{-4-3}, \frac{3-3}{-4-3}\right) = (-1, 0)$

(2) ও (1) এর অনন্তর্ভুক্ত কোণ $\tan^{-1}\frac{m_1 - m}{1 + m_1 m}$ এবং (1) ও AB এর অনন্তর্ভুক্ত কোণ $\tan^{-1}\frac{m - m_2}{1 + mm_2}$ পরস্পর সমান।

$$\therefore \frac{m_1 - m}{1+m_1 m} = \frac{m - m_2}{1+mm_2} \Rightarrow \frac{\frac{3}{4}+1}{1+(-1)\frac{3}{4}} = \frac{-1-m_2}{1-m_2}$$

$$\Rightarrow \frac{4+3}{4-3} = \frac{-1-m_2}{1-m_2} \Rightarrow 7 = \frac{-1-m_2}{1-m_2}$$

$$\Rightarrow 7 - 7m_2 = -1 - m_2 \Rightarrow 6m_2 = 8$$

$$\Rightarrow m_2 = \frac{4}{3}$$

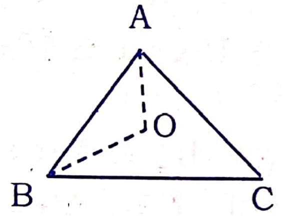
∴ AB রেখার সমীকরণ $y - 0 = \frac{4}{3}(x+1)$

$$\Rightarrow 3y = 4x + 4 \therefore 4x - 3y + 4 = 0 \text{ (Ans.)}$$

[MCQ এর জন্য, $(1^2 + 1^2)(3x - 4y + 3) - 2(1\times 3 + 1\times -4)(x + y + 1) = 0$ **]**

7(d) ABC ত্রিভুজের অন্তঃকেন্দ্র O । AB ও AO এর সমীকরণ যথাক্রমে $x - 7y + 5 = 0$ ও $x + 3y - 2 = 0$ হলে AC বাহুর সমীকরণ নির্ণয় কর।

সমাধান :



ABC ত্রিভুজের অন্তঃকেন্দ্র O ।

∴ ∠BAC এর সমদ্বিখন্ডক AO.

ধরি, AC বাহুর ঢাল m_2,

$AO \equiv x + 3y - 2 = 0 \cdots(1)$ এর ঢাল,

$m = -\frac{1}{3}$ এবং $AB \equiv x - 7y + 5 = 0 \cdots(2)$ বাহুর ঢাল, $m_1 = \frac{1}{7}$.

(2) ও (1) এর অনন্তর্ভুক্ত কোণ $\tan^{-1}\frac{m_1 - m}{1+m_1 m}$ এবং (1) ও AC এর অনন্তর্ভুক্ত কোণ $\tan^{-1}\frac{m - m_2}{1+mm_2}$ পরস্পর সমান।

$$\therefore \frac{m_1 - m}{1+m_1 m} = \frac{m - m_2}{1+mm_2}$$

$$\Rightarrow \frac{\frac{1}{7}+\frac{1}{3}}{1+\frac{1}{7}(-\frac{1}{3})} = \frac{-\frac{1}{3}-m_2}{1+(-\frac{1}{3})m_2}$$

$$\Rightarrow \frac{10}{21-1} = \frac{-1-3m_2}{3-m_2} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{-1-3m_2}{3-m_2}$$

$$\Rightarrow 3 - m_2 = -2 - 6m_2 \Rightarrow 5m_2 = -5$$

$\Rightarrow \; m_2 = -1$

এখন, $(1) - (2) \Rightarrow 10y - 7 = 0 \Rightarrow y = \frac{7}{10}$

(1) হতে, $x = 7.\frac{7}{10} - 5 = \frac{49-50}{10} = -\frac{1}{10}$

A শীর্ষের স্থানাঙ্ক $(-\frac{1}{10}, \frac{7}{10})$

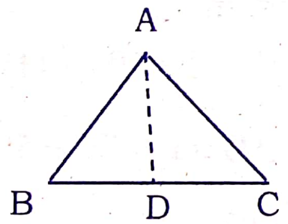
$\therefore \; A(-\frac{1}{10}, \frac{7}{10})$ বিন্দুগামী এবং -1 ঢালবিশিষ্ট AC বাহুর সমীকরণ, $y - \frac{7}{10} = -1(x + \frac{1}{10})$

$\Rightarrow 10y - 7 = -10x - 1 \Rightarrow 10x + 10y = 6$

$\therefore \; 5x + 5y = 3$ (Ans.)

7(e) ABC ত্রিভুজে, BC এর উপর D একটি বিন্দু যেন AB : AC = BD : CD । AB ও AD এর সমীকরণ যথাক্রমে $3x - 2y - 4 = 0$ ও $4x + y - 9 = 0$ হলে AC বাহুর সমীকরণ নির্ণয় কর।

সমাধান :



ABC ত্রিভুজে AB : AC = BD : CD ।

$\therefore$ $\angle BAC$ এর সমদ্বিখণ্ডক AD ।

ধরি, AC বাহুর ঢাল m_2,

$AD \equiv 4x + y - 9 = 0 \cdots(1)$ রেখার ঢাল, $m = -4$ এবং $AB \equiv 3x - 2y - 4 = 0 \cdots(2)$ রেখার ঢাল, $m_1 = \frac{3}{2}$.

(2) ও (1) এর অন্তর্ভুক্ত কোণ $\tan^{-1}\frac{m_1 - m}{1 + m_1 m}$ এবং (1) ও AC এর অন্তর্ভুক্ত কোণ $\tan^{-1}\frac{m - m_2}{1 + m m_2}$ পরস্পর সমান।

$\therefore \; \frac{m_1 - m}{1 + m_1 m} = \frac{m - m_2}{1 + m m_2} \Rightarrow \frac{\frac{3}{2} + 4}{1 + \frac{3}{2}(-4)} = \frac{-4 - m_2}{1 + (-4)m_2}$

$\Rightarrow \; \frac{3+8}{2-12} = \frac{-4-m_2}{1-4m_2} \Rightarrow \frac{11}{-10} = \frac{-4-m_2}{1-4m_2}$

$\Rightarrow \; 11 - 44m_2 = 40 + 10m_2 \Rightarrow 54m_2 = -29$

$\Rightarrow \; m_2 = -\frac{29}{54}$

এখন, $2 \times (1) + (2) \Rightarrow 8x - 18 + 3x - 4 = 0$

$\Rightarrow 11x = 22 \Rightarrow x = 2$

(1) হতে, $y = 9 - 8 = 1$

A শীর্ষের স্থানাঙ্ক $(2, 1)$

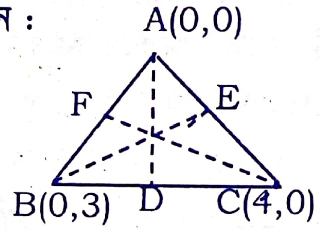
$\therefore \; A(2, 1)$ বিন্দুগামী এবং $-\frac{29}{54}$ ঢালবিশিষ্ট AC বাহুর সমীকরণ, $y - 1 = -\frac{29}{54}(x - 2)$

$\Rightarrow \; 54y - 54 = -29x + 58$

$\therefore \; 29x + 54y = 112$ (Ans.)

8. (a) (0 , 0) , (0 , 3) ও (4 , 0) বিন্দুগুলি দ্বারা গঠিত ত্রিভুজের কোণগুলির অন্তর্দ্বিখণ্ডক নির্ণয় কর এবং দেখাও যে, তারা সমবিন্দু। [কু.'১০; সি.'১১]

সমাধান :



মনে করি, ABC ত্রিভুজের শীর্ষ তিনটি A(0,0), B(0, 3) ও C(4, 0) এবং AD, BE ও CF ত্রিভুজটির কোণগুলির অন্তর্দ্বিখণ্ডক BC, CA ও AB বাহুকে যথাক্রমে D, E ও F বিন্দুতে ছেদ করে।

$\therefore \; BC = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5, \; AC = \sqrt{4^2 + 0^2} = 4$

$AB = \sqrt{0^2 + 3^2} = 3$

$\angle A$ এর অন্তর্দ্বিখণ্ডক AD বলে, D বিন্দু BC কে AB: AC = 3 : 4 অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত করবে।

$\therefore \; D \equiv (\frac{3.4 + 4.0}{3+4}, \frac{3.0 + 4.3}{3+4}) = (\frac{12}{7}, \frac{12}{7})$

অনুরূপভাবে, $E \equiv (\frac{3.4 + 5.0}{3+5}, \frac{3.0 + 5.0}{3+5}) = (\frac{3}{2}, 0)$

$F \equiv (\frac{4.0 + 5.0}{4+5}, \frac{4.3 + 5.0}{4+5}) = (0, \frac{4}{3})$

$\therefore$ AD অন্তর্দ্বিখণ্ডকের সমীকরণ,

$y = \frac{12/7}{12/7}x \quad \therefore\ y = x \quad \cdots(1)$

BE অন্তর্দ্বিখন্ডকের সমীকরণ,

$(x-0)(0-0)-(y-3)\ (0-\frac{3}{2})=0$

$\Rightarrow 3x + \frac{3}{2}y - \frac{9}{2} = 0 \Rightarrow 6x + 3y - 9 = 0$

$\therefore\ 2x + y - 3 = 0 \cdots (2)$

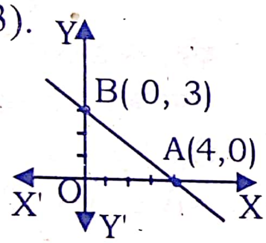
CF অন্তর্দ্বিখন্ডকের সমীকরণ,

$(x-4)(\ 0-\frac{4}{3}) - (y-0)\ (4-0) = 0$

$\Rightarrow -\frac{4}{3}x + \frac{16}{3} - 4y = 0 \Rightarrow -4x - 12y + 16 = 0$

$\therefore\ x + 3y - 4 = 0 \cdots (3)$

বিকল্প পদ্ধতি ঃ ধরি, OAB ত্রিভুজের শীর্ষ তিনটি O(0,0), A(4, 0) ও B(0, 3).



স্পষ্টতঃ OA ও OB বাহু যথাক্রমে x ও y অক্ষ বরাবর।

$\therefore$ OA বাহুর সমীকরণ $y = 0$

OB বাহুর সমীকরণ $x = 0$

এবং AB বাহুর সমীকরণ $\frac{x}{4} + \frac{y}{3} = 1$

$\Rightarrow 3x + 4y - 12 = 0$

OAB ত্রিভুজটির $\angle AOB = 90°$.

$\therefore$ $\angle OAB$ ও $\angle OBA$ সূক্ষ্মকোণ।

স্পষ্টতঃ $\angle AOB$ এর সমদ্বিখন্ডকের ঢাল ধনাত্মক ।

অতএব, $\angle AOB$ এর সমদ্বিখন্ডকের সমীকরণ

$\frac{y}{\sqrt{1^2}} = \frac{x}{\sqrt{1^2}} \quad \therefore\ y = x \cdots(1)$

BO ও BA বাহুর জন্য,

$a_1a_2 + b_1b_2 = 1.\,3 + 0.4 > 0$

$\therefore$ $\angle OBA$ এর সমদ্বিখন্ডকের সমীকরণ

$\frac{3x + 4y - 12}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = -\frac{x}{\sqrt{1^2}}$

$\Rightarrow 3x + 4y - 12 = -5x$

$\Rightarrow 8x + 4y - 12 = 0$

$\therefore\ 2x + y - 3 = 0 \cdots\cdots (2)$

আবার, AO ও AB বাহুর জন্য,

$a_1a_2 + b_1b_2 = 0.\,3 + 1.4 > 0$

$\therefore$ $\angle OAB$ এর সমদ্বিখন্ডকের সমীকরণ

$\frac{3x + 4y - 12}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = -\frac{y}{\sqrt{1^2}}$

$\Rightarrow 3x + 4y - 12 = -5y$

$\Rightarrow 3x + 9y - 12 = 0$

$\therefore\ x + 3y - 4 = 0 \cdots (3)$

দ্বিতীয় অংশ : সমীকরণ (1) ও (2) সমাধান করে পাই,

$x = 1, y = 1$ যা সমীকরণ (৩) কেও সিদ্ধ করে ।

$\therefore$ ΔABC এর কোণগুলির অন্তর্দ্বিখন্ডকত্রয় সমবিন্দু।

8. (b) যে ত্রিভুজের বাহুগুলোর সমীকরণ $4x + 3y - 12 = 0$, $3x - 4y + 16 = 0$ এবং $4x - 3y - 12 = 0$ তার অন্তঃকেন্দ্র নির্ণয় কর। **[সি.'০৩]**

সমাধানঃ ধরি, ABC ত্রিভুজের বাহু তিনটি

$AB \equiv 4x + 3y - 12 = 0 \cdots (1)$ i.e., $\frac{x}{3} + \frac{y}{4} = 1$

$BC \equiv 3x - 4y + 16 = 0 \cdots (2)$ i.e., $\frac{x}{\frac{-16}{3}} + \frac{y}{4} = 1$

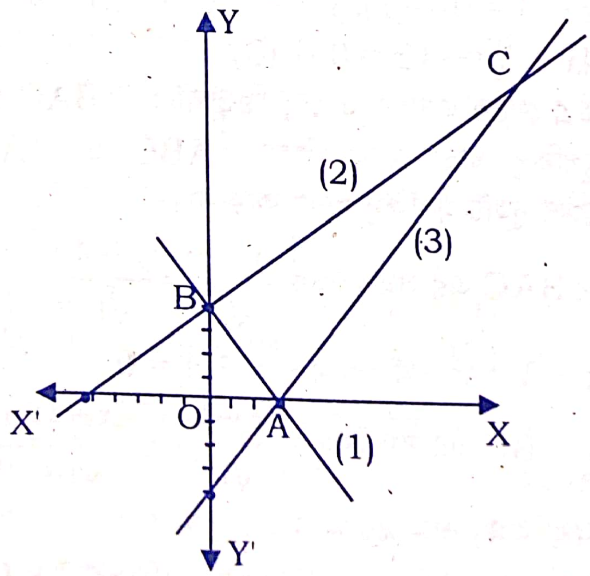
$CA \equiv 4x - 3y - 12 = 0 \cdots (3)$ i.e., $\frac{x}{3} + \frac{y}{-4} = 1$

চিত্রে ABC ত্রিভুজটি দেখানো হয়েছে।

সমীকরণ তিনটির ধ্রুবপদ ' – ' করে পাই,

$4x + 3y - 12 = 0,\ -3x + 4y - 16 = 0,$

$4x - 3y - 12 = 0$



$\angle ABC$ এবং $\angle BAC$ কোণ দুইটির মধ্যে মূলবিন্দু নাই। অতএব, $\angle ABC$ এর সমদ্বিখন্ডক

$$\frac{4x+3y-12}{\sqrt{16+9}} = -\frac{-3x+4y-16}{\sqrt{9+16}}$$

$\Rightarrow 4x + 3y - 12 = 3x - 4y + 16$

$\Rightarrow x + 7y - 28 = 0 \cdots (4)$ এবং

$\angle BAC$ এর সমদ্বিখন্ডক

$$\frac{4x+3y-12}{\sqrt{16+9}} = -\frac{4x-3y-12}{\sqrt{16+9}}$$

$\Rightarrow 4x + 3y - 12 = -4x + 3y + 12$

$\Rightarrow 8x = 24 \Rightarrow x = 3$

$\therefore (4) \Rightarrow 3 + 7y - 28 = 0 \Rightarrow y = \frac{25}{7}$

$\therefore$ প্রদত্ত রেখা তিনটি দ্বারা গঠিত ত্রিভুজের অন্তঃকেন্দ্র $(3, \frac{25}{7})$.

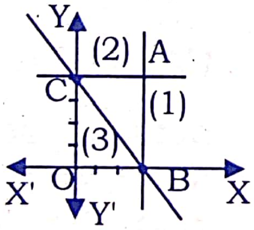
8. (c) যে ত্রিভুজের বাহুগুলোর সমীকরণ $x = 3, y = 4$ এবং $4x + 3y = 12$ তার কোণগুলোর সমদ্বিখন্ডকের সমীকরণ নির্ণয় কর।

সমাধান: ধরি, ABC ত্রিভুজের AB, BC ও CA বাহু তিনটির সমীকরণ যথাক্রমে $x = 3 \cdots (1)$

$y = 4 \cdots (2)$ ও

$4x + 3y = 12 \cdots (3)$

অর্থাৎ $\frac{x}{3} + \frac{y}{4} = 1$



চিত্রে ABC ত্রিভুজটি দেখানো হয়েছে। সমীকরণ তিনটির ধ্রুবপদ '–' করে পাই,

$x - 3 = 0 \cdots (1), y - 4 = 0 \cdots (2)$ এবং

$4x + 3y - 12 = 0 \cdots (3)$

চিত্র থেকে এটা স্পষ্ট যে, ত্রিভুজটির $\angle BAC$ কোণ মূলবিন্দু ধারণ করে কিন্তু $\angle ABC$ ও $\angle ACB$ কোণ দুইটি মূলবিন্দু ধারণ করে না।

$\therefore \angle BAC$ এর সমদ্বিখন্ডক $\frac{x-3}{\sqrt{1}} = \frac{y-4}{\sqrt{1}}$

$\Rightarrow x - 3 = y - 4 \Rightarrow x - y + 1 = 0$

$\angle ABC$ এর সমদ্বিখন্ডক $\frac{x-3}{\sqrt{1}} = -\frac{4x+3y-12}{\sqrt{16+9}}$

$\Rightarrow 5(x - 3) = -4x - 3y + 12$

$\Rightarrow 9x + 3y - 15 - 12 = 0 \Rightarrow 9x + 3y - 27 = 0$

$\Rightarrow 3x + y - 9 = 0$

$\angle ACB$ এর সমদ্বিখন্ডক $\frac{y-4}{\sqrt{1}} = -\frac{4x+3y-12}{\sqrt{16+9}}$

$\Rightarrow 5(y - 4) = -4x - 3y + 12$

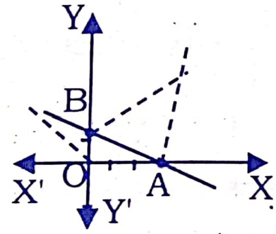
$\Rightarrow 5y - 20 + 4x + 3y - 12 = 0$

$\Rightarrow 4x + 8y - 32 = 0 \Rightarrow x + 2y - 8 = 0$

$\therefore$ ত্রিভুজের **কোণগুলোর সমদ্বিখন্ডকের সমীকরণ** $x - y + 1 = 0$, $3x + y - 9 = 0$ এবং $x + 2y - 8 = 0$

8. (d) $5x + 12y = 15$ এবং অক্ষ দুইটি সমন্বয়ে গঠিত ত্রিভুজের কোণ তিনটির বহির্দ্বিখন্ডকের সমীকরণ নির্ণয় কর।

সমাধান:



ধরি, প্রদত্ত রেখাটি অক্ষদুইটি সমন্বয়ে OAB ত্রিভুজ গঠন করে যার বাহু তিনটি

$OA \equiv y = 0 \cdots (1)$ $OB \equiv x = 0 \cdots (2)$ এবং

$AB \equiv 5x + 12y = 15 \cdots (3)$

i.e., $\frac{x}{3} + \frac{y}{5/4} = 1$

চিত্রে OAB ত্রিভুজটি দেখানো হয়েছে। চিত্র থেকে এটা স্পষ্ট যে, ত্রিভুজটির $\angle AOB = 90°$. অতএব, $\angle OAB$ ও $\angle OBA$ এর বহিঃস্থ কোণ দুইটি স্থূলকোণ এবং $\angle AOB$ এর বহির্দ্বিখন্ডকের ঢাল ঋণাত্মক ।

$\therefore$ (1) ও (2) এর অন্তর্ভুক্ত $\angle AOB$ কোণের বহির্দ্বিখন্ডকের সমীকরণ, $\frac{x}{\sqrt{1}} = -\frac{y}{\sqrt{1}} \Rightarrow x + y = 0$

(1) ও (3) সমীকরণে x-এর সহগদ্বয়ের গুণফল + y-এর সহগদ্বয়ের গুণফল $= 0 \times 5 + 1 \times 12 = 12 > 0$

$\therefore$ (1) ও (3) এর অন্তর্ভুক্ত কোণের বহির্দ্বিখন্ডকের সমীকরণ, $\frac{5x+12y-15}{\sqrt{25+144}} = \frac{y}{\sqrt{1}}$

$\Rightarrow 5x + 12y - 15 = 13y$

$\Rightarrow 5x - y - 15 = 0$

আবার, (2) ও (3) সমীকরণে, x-এর সহগদ্বয়ের গুণফল + y-এর সহগদ্বয়ের গুণফল $= 1 \times 5 + 0 \times 12 = 5 > 0$

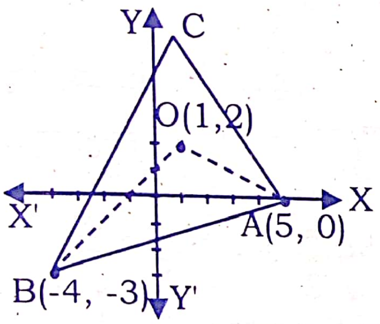
∴ (2) ও (3) এর অন্তর্ভুক্ত কোণের বহির্দ্বিখন্ডকের সমীকরণ, $\frac{5x+12y-15}{\sqrt{25+144}} = \frac{x}{\sqrt{1}}$

$\Rightarrow 5x + 12y - 15 = 13x$

$\Rightarrow 8x - 12y + 15 = 0$

8. (e) ΔABC এর শীর্ষ দুইটি $A(5, 0)$, $B(-4, -3)$ এবং অন্তঃকেন্দ্র $(1, 2)$ হলে, C বিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

সমাধান :



ধরি, ΔABC এর অন্তঃকেন্দ্র $O(1, 2)$.

AB এর ঢাল $= \frac{0+3}{5+4} = \frac{1}{3}$

AO এর ঢাল $= \frac{0-2}{5-1} = -\frac{1}{2}$

BO এর ঢাল $= \frac{2+3}{1+4} = 1$

AC রেখার ঢাল m_1 হলে,

$$\frac{m_1 + \frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}m_1} = \frac{-\frac{1}{2} - \frac{1}{3}}{1 + (-\frac{1}{2}).\frac{3}{4}}$$

$$\Rightarrow \frac{2m_1 + 1}{2 - m_1} = \frac{-3-2}{8-3} \Rightarrow \frac{2m_1 + 1}{2 - m_1} = -1$$

$\Rightarrow 2m_1 + 1 = -2 + m_1 \Rightarrow m_1 = -3$

∴ AC রেখার সমীকরণ, $y - 0 = -3(x - 5)$

$\Rightarrow y = -3x + 15 \cdots (1)$

আবার, BC রেখার ঢাল m_2 হলে,

$$\frac{m_2 - 1}{1 + 1.m_2} = \frac{1 - \frac{1}{3}}{1 + 1.\frac{1}{3}} = \frac{3-1}{3+1} = \frac{1}{2}$$

$\Rightarrow 2m_2 - 2 = 1 + m_2 \Rightarrow m_2 = 3$

∴ BC রেখার সমীকরণ, $y + 3 = 3(x + 4)$

$\Rightarrow y + 3 = 3x + 12$

$\Rightarrow -3x + 15 + 3 = 3x + 12$ [(1) দ্বারা]

$\Rightarrow 6x = 6 \Rightarrow x = 1$

∴ (1) হতে পাই, $y = -3.1 + 15 = 12$

(1) ও (2) এর ছেদবিন্দু $C \equiv (1, 12)$

বিকল্প পদ্ধতি : ধরি, ΔABC এর অন্তঃকেন্দ্র $O(1, 2)$.

∴ AB রেখার সমীকরণ, $\frac{x-5}{5+4} = \frac{y-0}{0+3}$

$\Rightarrow x - 5 = 3y \Rightarrow x - 3y - 5 = 0$

AO রেখার সমীকরণ, $\frac{x-5}{5-1} = \frac{y-0}{0-2}$

$\Rightarrow -2x + 10 = 4y \Rightarrow x + 2y - 5 = 0$

BO রেখার সমীকরণ, $\frac{x-1}{1+4} = \frac{y-2}{2+3}$

$\Rightarrow x - 1 = y - 2 \Rightarrow x - y + 1 = 0$

এখন, AC ও AB এর অন্তর্ভুক্ত কোণের সমদ্বিখন্ডক AO. অতএব, AC রেখার সমীকরণ,

$(1^2 + 2^2)(x - 3y - 5) - 2\{1.1 + (-3)(2)\}(x + 2y - 5) = 0$

$\Rightarrow 5(x - 3y - 5) + 10(x + 2y - 5) = 0$

$\Rightarrow x - 3y - 5 + 2x + 4y - 10 = 0$

$\Rightarrow 3x + y - 15 = 0 \Rightarrow y = -3x + 15 \cdots (1)$

আবার, BA ও BC এর অন্তর্ভুক্ত কোণের সমদ্বিখন্ডক BO. অতএব, BC রেখার সমীকরণ,

$(1^2 + 1^2)(x - 3y - 5) - 2\{1.1 + (-3)(-1)\}(x - y + 1) = 0$

$\Rightarrow x - 3y - 5 - 4(x - y + 1) = 0$

$\Rightarrow x - 3y - 5 - 4x + 4y - 4 = 0$

$\Rightarrow -3x + -3x + 15 - 9 = 0$ [(1) দ্বারা]

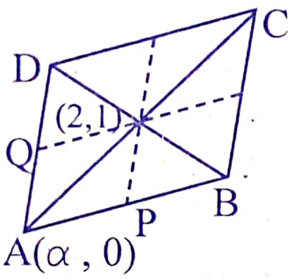
$\Rightarrow -6x = -6 \Rightarrow x = 1$

∴ (1) হতে পাই, $y = -3.1 + 15 = 12$

∴ AC ও BC এর ছেদবিন্দু $C \equiv (1, 12)$

10. (d) ABCD রম্বসের দুইটি বাহু $x - y = 5$ ও $7x - y = 3$ এর সমান্তরাল, কর্ণদ্বয় $(2, 1)$ বিন্দুতে ছেদ করে। A বিন্দু x- অক্ষের উপর অবস্থিত হলে A এর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

সমাধান:



ধরি, A এর স্থানাঙ্ক $(\alpha, 0)$.

$x - y = 5$ এর সমান্তরাল $(2,1)$ বিন্দুগামী রেখার সমীকরণ $x - y = 2 - 1 = 1 \cdots$(i) এবং

$A(\alpha,0)$ বিন্দুগামী রেখার সমীকরণ $x - y = \alpha \cdots$(ii)

আবার, $7x - y = 3$ এর সমান্তরাল $(2, 1)$ বিন্দুগামী রেখার সমীকরণ $7x - y = 7\times 2 - 1$

$\Rightarrow 7x - y = 13 \cdots$ (iii) এবং $A(\alpha, 0)$ বিন্দুগামী রেখার সমীকরণ $7x - y = 7\alpha \cdots$ (iv).

(i) ও (iv) এর ছেদবিন্দু $P\left(\frac{7\alpha-1}{6}, \frac{7\alpha-7}{6}\right)$

(ii) ও (iii) এর ছেদবিন্দু $Q\left(\frac{13-\alpha}{6}, \frac{13-7\alpha}{6}\right)$

$\therefore$ AP = AQ, [$\because$ ABCD একটি রম্বস]

$\Rightarrow AP^2 = AQ^2$

$$\Rightarrow \left(\alpha - \frac{7\alpha-1}{6}\right)^2 + \left(\frac{7\alpha-7}{6}\right)^2 = \left(\alpha - \frac{13-\alpha}{6}\right)^2 + \left(\frac{13-7\alpha}{6}\right)^2$$

$\Rightarrow (1-\alpha)^2 + 49(1-\alpha)^2 = 2(7\alpha - 13)^2$

$\Rightarrow 25(1-\alpha)^2 = (7\alpha - 13)^2$

$\Rightarrow 5(1-\alpha) = \pm(7\alpha - 13)$

'+' চিহ্ন নিয়ে, $5 - 5\alpha = 7\alpha - 13 \Rightarrow \alpha = 3/2$

'–' চিহ্ন নিয়ে, $5 - 5\alpha = -7\alpha + 13 \Rightarrow \alpha = 4$

$\therefore$ A এর স্থানাঙ্ক (4, 0) বা, (3/2, 0).

সম্ভাব্য ধাপসহ সমস্যা :

9. দেখাও যে, $\left(-\frac{1}{2}, -2\right)$ বিন্দুটি $2x-3y+4=0$ ও $6x+4y-7=0$ রেখা দুইটি হতে সমদূরবর্তী। **[য.'০৬]**

প্রমাণ: $2x - 3y + 4 = 0$ রেখা হতে $\left(-\frac{1}{2}, -2\right)$ এর দূরত্ব $= \frac{\left|2\times -\frac{1}{2} - 3\times -2 + 4\right|}{\sqrt{2^2+3^2}}$ (১)

$= \frac{|-1+6+4|}{\sqrt{13}} = \frac{|9|}{\sqrt{13}} = \frac{9}{\sqrt{13}}$

$6x + 4y - 7 = 0$ রেখা হতে $\left(-\frac{1}{2}, -2\right)$ এর লম্ব

দূরত্ব $= \frac{\left|6\times -\frac{1}{2} + 4\times -2 - 7\right|}{\sqrt{6^2+4^2}} = \frac{|-3-8-7|}{\sqrt{36+16}}$

$= \frac{|-18|}{\sqrt{52}} = \frac{18}{2\sqrt{13}} = \frac{9}{\sqrt{13}}$

$\therefore$ প্রদত্ত বিন্দু হতে রেখা দুইটি সমদূরবর্তী। (১)

10. এরূপ সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর যা মূলবিন্দু দিয়ে যায় এবং $2x + 3y - 5 = 0$ এবং $3x + 2y - 7 = 0$ রেখা দুইটির সাথে সমান সমান কোণ উৎপন্ন করে।

সমাধান : ধরি, মূলবিন্দুগামী রেখার সমীকরণ $y = mx$ (১)

অর্থাৎ $mx - y = 0 \cdots (1)$

$2x + 3y - 5 = 0$ এবং $3x + 2y - 7 = 0$

রেখার ঢাল যথাক্রমে $m_1 = -\frac{2}{3}$ এবং $m_2 = -\frac{3}{2}$ (১)

প্রদত্ত রেখাদ্বয় (1) রেখার সঙ্গে সমান সমান কোণ উৎপন্ন করে বলে, $\frac{m-m_1}{1+mm_1} = \pm\frac{m-m_2}{1+mm_2}$ (১)

$$\Rightarrow \frac{m+\frac{2}{3}}{1-\frac{2}{3}m} = \pm\frac{m+\frac{3}{2}}{1-\frac{3}{2}m}$$

$$\Rightarrow \frac{3m+2}{3-2m} = \pm\frac{2m+3}{2-3m}$$

$\Rightarrow$ '+' নিয়ে, $4 - 9m^2 = 9 - 4m^2$

$\Rightarrow 5m^2 = -5$, যা সম্ভব নয়।

'–' নিয়ে, $4 - 9m^2 = -9 + 4m^2$

$\Rightarrow 13m^2 = 13 \Rightarrow m^2 = 1 \Rightarrow m = \pm 1$

$\therefore$ রেখাটির সমীকরণ, $x - y = 0$ বা, $x + y = 0$ (১)

11(a) $(\sqrt{3},1)$ বিন্দু থেকে $\sqrt{3}x - y + 8 = 0$ এর উপর অঙ্কিত লম্বের দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর এই লম্ব x - অক্ষের সঙ্গে যে কোণ উৎপন্ন করে তা নির্ণয় কর। [কু.'০৭]

সমাধান : $(\sqrt{3},1)$ বিন্দু থেকে $\sqrt{3}x - y + 8 = 0$

এর উপর অঙ্কিত লম্বের দৈর্ঘ্য $= \dfrac{|3-1+8|}{\sqrt{3+1}}$ (১)

$= \dfrac{10}{2} = 5$

২য় অংশ : প্রদত্ত রেখার ঢাল $= \sqrt{3}$ (১)

$\therefore$ প্রদত্ত রেখার উপর লম্ব রেখার ঢাল $= -\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ (১)

$\therefore$ লম্বরেখা x -অক্ষের সঙ্গে যে কোণ উৎপন্ন করে তার পরিমাণ $= \tan^{-1}(-\dfrac{1}{\sqrt{3}})$ (১)

$= 180^0 - \tan^{-1}\dfrac{1}{\sqrt{3}} = 180^0 - 30^0 = 150^0$ (১)

11 (b) প্রমাণ কর যে, $(\pm c, 0)$ বিন্দু দুটি হতে $bx\cos\theta + ay\sin\theta = ab$ এর উপর অঙ্কিত লম্বদ্বয়ের গুণফল b^2 হয় যখন $a^2 = b^2 + c^2$ [কু.'০৯]

প্রমাণ : $(c, 0)$ বিন্দু হতে প্রদত্ত রেখার উপর অঙ্কিত

লম্ব $= \left|\dfrac{bc\cos\theta - ab}{\sqrt{b^2\cos^2\theta + a^2\sin^2\theta}}\right| = d_1$ (ধরি)(১)

এবং $(-c, 0)$ বিন্দু হতে প্রদত্ত রেখার উপর অঙ্কিত লম্ব

$= \left|\dfrac{-bc\cos\theta - ab}{\sqrt{b^2\cos^2\theta + a^2\sin^2\theta}}\right| = d_2$ (ধরি)

$\therefore d_1 d_2 = \left|\dfrac{-(b^2c^2\cos^2\theta - a^2b^2)}{b^2\cos^2\theta + a^2 - a^2\cos^2\theta}\right|$

$= \left|\dfrac{-b^2(c^2\cos^2\theta - a^2)}{(b^2-a^2)\cos^2\theta + a^2}\right|$

$= \left|\dfrac{b^2(a^2 - c^2\cos^2\theta)}{-c^2\cos^2\theta + a^2}\right|$ $[\because a^2 = b^2 + c^2]$

$\therefore$ লম্বদ্বয়ের গুণফল $= b^2$ (১)

12. $(1, -2)$ বিন্দু থেকে $7\dfrac{1}{2}$ একক দূরবর্তী এবং $3x + 4y = 7$ রেখাটির সমান্তরাল রেখাসমূহের সমীকরণ নির্ণয় কর।

[দি.'১০; চ.'১২; য.'১৩; ঢা.'১৪; সি.'১৩; ব.'১৪]

সমাধান ঃ ধরি, প্রদত্ত রেখার সমান্তরাল রেখার সমীকরণ $3x + 4y + k = 0 \cdots\cdots (1)$ (১)

(1) রেখা হতে $(1,-2)$ বিন্দুর দূরত্ব $= \dfrac{|3-8+k|}{\sqrt{9+16}}$ (১)

প্রশ্নমতে, $\dfrac{|3-8+k|}{\sqrt{9+16}} = 7\dfrac{1}{2} \Rightarrow \dfrac{k-5}{5} = \pm\dfrac{15}{2}$ (১)

$\therefore$ $2k - 10 = 75 \Rightarrow k = 85/2$ এবং

$2k - 10 = -75 \Rightarrow k = -65/2$

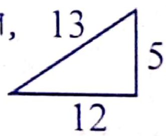
$\therefore$ নির্ণেয় রেখাসমূহের সমীকরণ $3x + 4y + \dfrac{85}{2} = 0$

$\Rightarrow 6x + 8y + 85 = 0$

এবং $3x + 4y - \dfrac{65}{2} = 0 \Rightarrow 6x + 8y = 65$ (১)

13. একটি সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর যা x-অক্ষের ধনাত্মক দিকের সাথে $\sin^{-1}(5/13)$ কোণ উৎপন্ন করে এবং y-অক্ষের ছেদক অংশ, c = 5 একক।

সমাধান: দেওয়া আছে, রেখার ঢাল,



$m = \tan\sin^{-1}(5/13)$ (১)

$= \tan\tan^{-1}\dfrac{5}{12} = \dfrac{5}{12}$ এবং (১)

y-অক্ষের ছেদক অংশ, c = 5 একক।

$\therefore$ নির্ণেয় রেখার সমীকরণ, $y = mx + c$

$\Rightarrow y = \dfrac{5}{12}x + 5 \Rightarrow 12y = 5x + 60$ (Ans.) (১)

14. (a) (3,2) ও (7,3) বিন্দু দুইটি $2x - 5y + 3 = 0$ রেখার একই অথবা বিপরীত পার্শ্বে অবস্থিত কিনা নির্ণয় কর। বিন্দু দুইটির কোনটি রেখাটির যে পার্শ্বে মূল বিন্দু, ঠিক সে পার্শ্বে অবস্থিত?

সমাধান ঃ ধরি, $f(x, y) = 2x - 5y + 3 = 0$

$\therefore$ $f(3, 2) = 2\times 3 - 5\times 2 + 3 = -1,$ (১)

$f(7, 3) = 14 - 15 + 3 = 2,$

$f(0, 0) = 2\times 0 - 5\times 0 + 3 = 3$

$f(3\ ,2)$ ও $f(7, 3)$ বিপরীত চিহ্নবিশিষ্ট বলে, বিন্দু দুইটি রেখাটির বিপরীত পার্শ্বে অবস্থিত। (১)

আবার, $f(7, 3)$ ও $f(0, 0)$ একই চিহ্নবিশিষ্ট বলে, মূলবিন্দু ও $(7, 3)$ বিন্দু রেখাটির একই পার্শ্বে অবস্থিত। (১)

14. (b) দেখাও যে, মূলবিন্দু ও (1,6) বিন্দুটি $x - y + 4 = 0$ এবং $x + 2y - 4 = 0$ রেখাদ্বয়ের অন্তর্ভুক্ত বিপ্রতীপ কোণে অবস্থিত।

প্রমাণ ঃ ধরি, $f(x, y) \equiv x - y + 4 = 0 \cdots (1)$

এবং $g(x, y) \equiv x + 2y - 4 = 0 \cdots (2)$

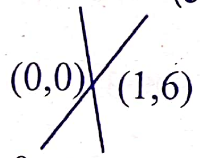
$\therefore\ f(0,0) = 0 - 0 + 4 = 4$ (১)

$f(1\ ,6) = 1 - 6 + 4 = -1$

$f(0,0) \times f(1\ ,6) = 4 \times -1 < 0$

$\therefore$ মূলবিন্দু ও $(1,6)$ বিন্দু (1) রেখার বিপরীত পাশে অবস্থিত। (১)

আবার, $g(0,0) = 0 + 0 - 4 = -4$



$g(1\ ,6) = 1 + 12 - 4 = 9$

$g(0,0) \times g(1\ ,6) = -4 \times 9 < 0$

$\therefore$ মূলবিন্দু ও $(1,6)$ বিন্দু (2) রেখার বিপরীত পাশে অবস্থিত। (১)

$\therefore$ মূলবিন্দু ও $(1,6)$ বিন্দুটি $x - y + 4 = 0$ এবং $x + 2y - 4 = 0$ রেখাদ্বয়ের অন্তর্ভূক্ত বিপ্রতীপ কোণে অবস্থিত। (১)

14(c) দেখাও যে, মূলবিন্দু এবং (2, – 1) বিন্দুটি যথাক্রমে $2x - y - 4 = 0$ এবং $4x + 2y - 9 = 0$ রেখাদ্বয়ের অন্তর্ভুক্ত স্থূলকোণে এবং সূক্ষ্মকোণে অবস্থিত।

প্রমাণ ঃ ধরি, $f(x, y) \equiv 2x - y - 4 = 0 \cdots (1)$

এবং $g(x, y) \equiv 4x + 2y - 9 = 0 \cdots (2)$

$\therefore\ f(0,0) = -4,\ g(0\ ,0) = -9$ (১)

$f(2, -1) = 4 + 1 - 4 = 1$

$g(2\ ,-1) = 8 - 2 - 9 = -3$

এবং $a_1a_2 + b_1b_2 = 2 \times 4 + (-1) \times 2 = 6$

এখন, $f(0,0) \times g(0,0)(a_1a_2 + b_1b_2) = 216 > 0$

$\therefore$ মূলবিন্দু প্রদত্ত রেখাদ্বয়ের অন্তর্ভুক্ত স্থূলকোণে অবস্থিত। (১)

এবং $f(2,-1) \times g(2,-1)(a_1a_2 + b_1b_2) = -18 < 0$

$\therefore$ $(2, -1)$ বিন্দুটি প্রদত্ত রেখাদ্বয়ের অন্তর্ভুক্ত সূক্ষ্মকোণে অবস্থিত। (১)

15. $2x + 3y + 5 = 0$ এবং $4x - 6y - 7 = 0$ রেখা দুইটির অন্তর্ভুক্ত যে কোণটি (1 , 2) বিন্দু ধারণ করে তার সমদ্বিখন্ডকের সমীকরণ নির্ণয় কর।

সমাধান : ধরি, $f(x, y) \equiv 2x + 3y + 5 = 0$

এবং $g(x, y) \equiv 4x - 6y - 7 = 0$

$f(1,2) \times g(1, 2) = (2 + 6 + 5)(4 - 12 - 7)$
$= 12\ .(-15) < 0$ (১)

$\therefore$ $(1,2)$ বিন্দু ধারণকারী সমদ্বিখন্ডকের সমীকরণ,

$$\frac{2x+3y+5}{\sqrt{4+9}} = -\frac{4x-6y-7}{\sqrt{16+36}}$$ (১)

$$\Rightarrow \frac{2x+3y+5}{\sqrt{13}} = -\frac{4x-6y-7}{\sqrt{52}}$$

$$\Rightarrow \frac{2x+3y+5}{\sqrt{13}} = -\frac{4x-6y-7}{2\sqrt{13}}$$

$\Rightarrow 4x + 6y + 10 = -4x + 6y + 7$

$\Rightarrow 8x + 3 = 0$ (Ans.)

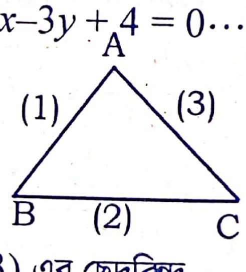
16. (a) $4x + 3y = 12,\ \ 3x - 4y + 16 = 0$ ও $4x - 3y + 4 = 0$ রেখা তিনটি দ্বারা গঠিত ত্রিভুজের লম্বকেন্দ্র নির্ণয় কর।

সমাধান : ধরি, ABC ত্রিভুজের বাহু তিনটি

$AB \equiv 4x + 3y - 12 = 0 \cdots (1)$

$BC \equiv 3x - 4y + 16 = 0 \cdots (2)$

$CA \equiv 4x - 3y + 4 = 0 \cdots (3)$



(1) ও (3) এর ছেদবিন্দু,

$$A \equiv \left(\frac{12-36}{-12-12}, \frac{-48-16}{-12-12}\right) = \left(1, \frac{8}{3}\right)$$ (১)

(1) ও (2) এর ছেদবিন্দু,

$$B \equiv \left(\frac{48-48}{-16-9}, \frac{-36-64}{-16-9}\right) = (0, 4)$$

$\therefore$ $A(1,\frac{8}{3})$ বিন্দুগামী এবং BC এর উপর লম্বরেখার সমীকরণ $4x+3y=4.1+3.\frac{8}{3}$ (২)

$\Rightarrow 4x+3y-12=0 \cdots (4)$

আবার , B(0, 4) বিন্দুগামী এবং AC এর উপর লম্বরেখার সমীকরণ $3x+4y=3.0+4.4$

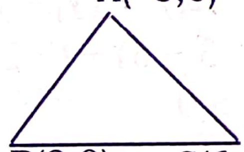
$\Rightarrow 3x+4y-16=0 \cdots (5)$

(4) ও (5) এর ছেদবিন্দুর স্থানাঙ্ক

$=(\frac{-48+48}{16-9},\frac{-36+64}{16-9})=(0,4)$, যা প্রদত্ত ত্রিভুজের লম্বকেন্দ্র (১)

16 (b) A(– 3 , 0) , B(3 , 0) ও C(6 , 6) বিন্দু তিনটি ABC ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দু। ত্রিভুজটির লম্বকেন্দ্র ও পরিকেন্দ্র নির্ণয় কর।

সমাধান :



A (–3,0) বিন্দুগামী এবং BC রেখার উপর লম্ব রেখার সমীকরণ,

$(3-6)x+(0-6)y=-3\times-3-6\times0$ (২)

$\Rightarrow -3x-6y-9=0$

$\Rightarrow x+2y+3=0\cdots(1)$

B(3,0) বিন্দুগামী এবং AC রেখার উপর লম্ব রেখার সমীকরণ,

$(-3-6)x+(0-6)y=-9.3+(-6).0$

$\Rightarrow -9x-6y+27=0$

$\Rightarrow 3x+2y-9=0\cdots\cdots(2)$

(1) ও (2) এর ছেদবিন্দু $(\frac{-18-6}{2-6},\frac{9+9}{2-6})$

$=(\frac{-24}{-4},\frac{18}{-4})=(6,-\frac{9}{2})$, যা ত্রিভুজটির লম্বকেন্দ্র। (১)

এবং AC এর মধ্যবিন্দু $(\frac{3}{2},3)$. (১)

এখন, BC এর মধ্যবিন্দু $(\frac{9}{2},3)$ দিয়ে যায় এবং BC এর উপর লম্ব এরূপ রেখার সমীকরণ,

$(3-6)x+(0-6)y=-3.\frac{9}{2}+(-6).3$

$\Rightarrow -3x-6y=\frac{-27-36}{2}=\frac{-63}{2}$

$\Rightarrow -6x-12y+63=0$

$\Rightarrow 2x+4y-21=0\cdots(3)$

আবার, AC এর মধ্যবিন্দু $(\frac{3}{2},3)$ দিয়ে যায় এবং AC এর উপর লম্ব এরূপ রেখার সমীকরণ,

$(-3-6)x+(0-6)y=-9.\frac{3}{2}-6.3$

$\Rightarrow -9x-6y=\frac{-27-36}{2}=\frac{-63}{2}$

$\Rightarrow -18x-12y+63=0$

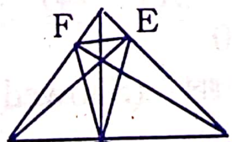
$\Rightarrow 6x+4y-21=0\cdots\cdots(4)$

(3) ও (4) এর ছেদবিন্দু $(\frac{-84+84}{8-24},\frac{-126+42}{8-24})$

$=(\frac{0}{-16},\frac{-84}{-16})=(0,\frac{21}{4})$, যা ত্রিভুজটির পরিকেন্দ্র । (১)

16. (c) সূক্ষ্মকোণী ত্রিভুজ ABC এর শীর্ষ তিনটি A(4 , 0), B(0 , 2) ও C(3 , 5) হলে, Δ ABC এর পাদত্রিভুজের অন্তঃকেন্দ্র নির্ণয় কর।

সমাধান : ধরি, Δ ABC এ AD , BE, CF যথাক্রমে BC, CA, AB এর উপর লম্ব ।



অতএব, Δ ABCএর পাদত্রিভুজ Δ DEF. (১)

BC এর উপর লম্ব AD এর সমীকরণ,

$(3-0)x+(5-2)y=3\times4+3\times0$ (২)

$\Rightarrow 3x+3y-12=0$

$\Rightarrow x+y-4=0\cdots(1)$

আবার, CA এর উপর লম্ব BE এর সমীকরণ,

$(4-3)x + (0-5)y = 1 \times 0 - 5 \times 2$

$\Rightarrow x - 5y + 10 = 0 \cdots (2)$

$(1) - (2) \Rightarrow 6y - 14 = 0 \Rightarrow y = \frac{7}{3}$

$\therefore$ (1) হতে পাই, $x + \frac{7}{3} - 4 = 0$

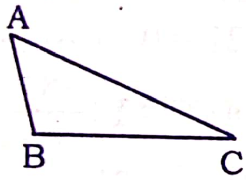
$\Rightarrow x + \frac{7-12}{3} = 0 \Rightarrow x = \frac{5}{3}$

$\therefore$ ΔABC এর লম্বকেন্দ্র $= (\frac{5}{3}, \frac{7}{3})$. (১)

$\therefore$ পাদত্রিভুজ ΔDEF পরিকেন্দ্র $=$ ΔABC এর লম্বকেন্দ্র $= (\frac{5}{3}, \frac{7}{3})$ (Ans.) (১)

17. (a) ΔABC এর AB, BC, CA বাহু তিনটির সমীকরণ যথাক্রমে $4x + 3y - 12 = 0$, $x - 4y + 4 = 0$, $6x + 5y - 15 = 0$. দেখাও যে, $\angle ABC$ একটি স্থূলকোণ।

প্রমাণ :



AB, BC, CA বাহু তিনটির সমীকরণকে যথাক্রমে $a_1x + b_1y + c_1 = 0$,

$a_2x + b_2y + c_2 = 0$,

$px + qy + r = 0$ এর সাথে তুলনা করে পাই,

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ p & q \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} p & q \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} (a_1a_2 + b_1b_2) \quad (১)$$

$$= \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 6 & 5 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 6 & 5 \\ 1 & -4 \end{vmatrix} \{4.1 + 3.(-4)\}$$

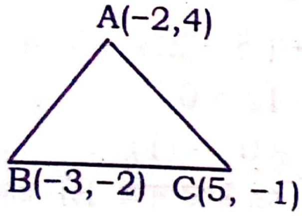
$= (20-16)(-24-5)(4-12)$ (১)

$= 4(-29)(-8) > 0$

$\therefore$ $\angle ABC$ একটি স্থূলকোণ। (Showed) (১)

17. (b) প্রমাণ কর যে, $A(-2, 4)$, $B(-3, -2)$ ও $C(5, -1)$ বিন্দু তিনটি একটি সূক্ষ্মকোণী ত্রিভুজের শীর্ষ।

প্রমাণ ঃ



$AB = \sqrt{(-2+3)^2 + (4+2)^2}$

$= \sqrt{1+36} = \sqrt{37}$ (১)

$BC = \sqrt{(-3-5)^2 + (-2+1)^2} = \sqrt{64+1}$

$= \sqrt{65}$

$CA = \sqrt{(5+2)^2 + (-1-4)^2} = \sqrt{49+25}$

$= \sqrt{74}$

AB, BC, CA এর যেকোন দুইটির সমষ্টি তৃতীয়টি অপেক্ষা বৃহত্তর। অতএব, A, B, C বিন্দু তিনটি একটি ত্রিভুজ গঠন করে। (১)

এখন, $\angle A$ এর ক্ষেত্রে,

$(x_1 - x_2)(x_2 - x_3) + (y_1 - y_2)(y_2 - y_3)$

$= (-2+3)(-2-5) + (4+2)(4+1)$

$= -7 + 30 = 23 > 0$

$\therefore$ $\angle A$ সূক্ষ্মকোণ।

$\angle B$ এর ক্ষেত্রে,

$(x_1 - x_2)(x_2 - x_3) + (y_1 - y_2)(y_2 - y_3)$

$= (-3+2)(-3-5) + (-2-4)(-2+1)$

$= 8 + 6 = 14 > 0$

$\therefore$ $\angle B$ সূক্ষ্মকোণ।

$\angle C$ এর ক্ষেত্রে,

$(x_1 - x_2)(x_2 - x_3) + (y_1 - y_2)(y_2 - y_3)$

$= (5+2)(5+3) + (-1-4)(-1+2)$

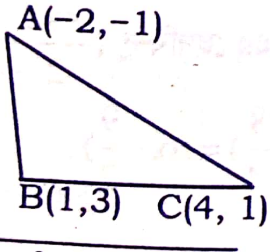
$= 56 - 5 = 53 > 1$

$\therefore$ $\angle C$ সূক্ষ্মকোণ। (১)

$\therefore$ প্রদত্ত বিন্দু তিনটি একটি সূক্ষ্মকোণী ত্রিভুজের শীর্ষ। (১)

17. (c) প্রমাণ কর যে, $(-2, -1)$, $(1, 3)$ ও $(4, 1)$ বিন্দু তিনটি একটি স্থূলকোণী ত্রিভুজের শীর্ষ।

প্রমাণ ঃ ধরি, প্রদত্ত বিন্দু তিনটি $A(-2,-1)$, $B(1,3)$ ও $(4,1)$.



$\therefore$ $AB = \sqrt{(-2-1)^2 + (-1-3)^2}$

$= \sqrt{9+16} = 5$ (১)

$BC = \sqrt{(1-4)^2 + (3-1)^2} = \sqrt{9+4} = \sqrt{13}$

$CA = \sqrt{(4+2)^2 + (1+1)^2} = \sqrt{36+4} = \sqrt{40}$

AB , BC , CA এর যেকোন দুইটির সমষ্টি তৃতীয়টি অপেক্ষা বৃহত্তর । অতএব, A, B, C বিন্দু তিনটি একটি ত্রিভুজ গঠন করে যার CA বৃহত্তম বহু।(১)

CA বৃহত্তম বহুর বিপরীত কোণ $\angle B$ এর ক্ষেত্রে,

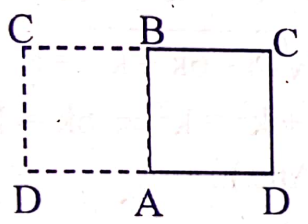
$(1-4)(1+2) + (3-1)(3+1)$

$\therefore$ $\angle B$ স্থূলকোণ। (১)

$\therefore$ প্রদত্ত বিন্দু তিনটি একটি স্থূলকোণী ত্রিভুজেরশীর্ষ। (১)

18. (a) A(0, 7) এবং B(4,9) বিন্দুদ্বয় ABCD বর্গের শীর্ষবিন্দু হলে C ও D এর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর ।

সমাধান ঃ



$AB = \sqrt{(0-4)^2 + (7-9)^2} = \sqrt{16+4} = 2\sqrt{5}$ (১)

AB বাহুর সমীকরণ

$(x-0)(7-9) - (y-7)(0-4) = 0$ (১)

$\Rightarrow -2x + 4y - 28 = 0 \Rightarrow x - 2y + 14 = 0$

A(0,7) বিন্দুগামী AB বাহুর উপর লম্ব AD বাহুর সমীকরণ, $2x + y = 2\times 0 + 7$ (১)

$\Rightarrow 2x + y - 7 = 0 \cdots\cdots (1)$

B(4,9) বিন্দুগামী AB বাহুর উপর লম্ব BC বাহুর সমীকরণ, $2x + y = 2\times 4 + 9$

$\Rightarrow 2x + y - 17 = 0 \cdots\cdots (2)$

AB এর সমান্তরাল $2\sqrt{5}$ একক দূরবর্তী CD বাহুর সমীকরণ $x - 2y + 14 \pm 2\sqrt{5}\ \sqrt{1^2 + 2^2} = 0$ (১)

$\Rightarrow x - 2y + 14 \pm 10 = 0$

$\therefore x - 2y + 24 = 0 \cdots\cdots (3)$

$x - 2y + 4 = 0 \cdots\cdots (4)$

(1) ও (3) ছেদবিন্দু D এর স্থানাঙ্ক (–2 ,11) (১)

(2) ও (3) ছেদবিন্দু C এর স্থানাঙ্ক (2 ,13)

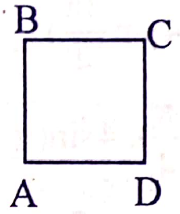
আবার, (1) ও (4) ছেদবিন্দু D এর স্থানাঙ্ক (2 ,3)

(2) ও (4) ছেদবিন্দু C এর স্থানাঙ্ক (6 ,5)

$\therefore$ C(2,13) ও D (–2 ,11) অথবা, C(6 , 5) ও D(2 , 3) (১)

18. (b) (0, 7) ও (6 , 5) বিন্দুদ্বয় একটি বর্গের কর্ণের শীর্ষবিন্দু হলে অপর শীর্ষবিন্দু দুইটির স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর ।

সমাধান ঃ



ধরি, ABCD বর্গের AC কর্ণেও শীর্ষবিন্দু A(0, 7) ও C(6 , 5).

$= -9 + 8 = -1 < 0$

$\therefore AC = \sqrt{36+4} = 2\sqrt{10}$ (১)

AC কর্ণের লম্বসমদ্বিখণ্ডক BD কর্ণের সমীকরণ,

$(0-6)x + (7-5)y = \frac{1}{2}(0 + 49 - 36 - 25)$ (১)

$\Rightarrow -6x + 2y + 6 = 0$

$\Rightarrow 3x - y - 3 = 0 \cdots\cdots (1)$

AC কর্ণের সমীকরণ $x + 3y = 0 + 3\times 7$

$\Rightarrow x + 3y - 21 = 0$

AC কর্ণের সমান্তরাল $2\sqrt{10}$ একক দূরবর্তী রেখার সমীকরণ সরলরেখার সমীকরণ,

$x + 3y - 21 \pm \sqrt{10}\sqrt{1^2 + 3^2} = 0$ (১)

$\Rightarrow x + 3y - 21 \pm 10 = 0$

$\therefore x + 3y - 11 = 0 \cdots\cdots (2)$ এবং

$x + 3y - 31 = 0 \cdots\cdots (3)$

(1) ও (2) এর ছেদবিন্দুর স্থানাঙ্ক (2, 3)

(1) ও (3) এর ছেদবিন্দুর স্থানাঙ্ক (4, 9)

$\therefore$ অপর শীর্ষবিন্দু দুইটির স্থানাঙ্ক (2, 3) ও (4, 9) (১)

(CQ উপযোগী কিছু সমস্যা)

19. (a) $(\sqrt{3}, -1)$ কে পোলার স্থানাঙ্কে প্রকাশ কর।

সমাধানঃ ধরি, $(\sqrt{3}, -1)$ এর পোলার স্থানাঙ্ক (r, θ).

$\therefore r = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + (-1)^2} = 2$ এবং

$\theta = \tan^{-1}\frac{-1}{\sqrt{3}} = -\tan^{-1}\frac{1}{\sqrt{3}} = -\frac{\pi}{6}$

$\therefore$ $(\sqrt{3}, -1)$ এর পোলার স্থানাঙ্ক $(2, -\frac{\pi}{6})$

(b) $(4, \frac{3\pi}{4})$ কে কার্তেসীয় স্থানাঙ্কে প্রকাশ কর।

সমাধান: $(4, \frac{3\pi}{4})$ এর কার্তেসীয় স্থানাঙ্ক

$$= (4\cos\frac{3\pi}{4}, 4\sin\frac{3\pi}{4})$$

$$= (4\cos(\pi - \frac{\pi}{4}), 4\sin(\pi - \frac{\pi}{4}))$$

$$= (-4\cos\frac{\pi}{4}, 4\sin\frac{\pi}{4})$$

$$= (-4\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}, 4\cdot\frac{1}{\sqrt{2}})$$

$$= (-2\sqrt{2},\ 2\sqrt{2})\ \text{(Ans.)}$$

(c) (6 , 0) এবং (0 , 6) বিন্দুদ্বয় একটি সমবাহু ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দু হলে তৃতীয় শীর্ষের স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

সমাধান: মনে করি, সমবাহু ত্রিভুজের তৃতীয় শীর্ষের স্থানাঙ্ক $R(x, y)$. $\therefore\ PQ^2 = QR^2 = RP^2$

এখন, $QR^2 = RP^2$ হতে পাই,

$$\Rightarrow (0-x)^2 + (6-y)^2 = (x-6)^2 + (y-0)^2$$

$$\Rightarrow x^2 + 36 - 12y + y^2 = x^2 - 12x + 36 + y^2$$

$$\Rightarrow -12y = -12x \Rightarrow y = x \cdots\cdots (1)$$

$PQ^2 = QR^2$ হতে পাই,

$$\Rightarrow 6^2 + 6^2 = x^2 + 36 - 12y + y^2$$

$$\Rightarrow 72 = x^2 + 36 - 12x + x^2 \quad [\because y = x]$$

$$\Rightarrow 2x^2 - 12x - 36 = 0$$

$$\Rightarrow x^2 - 6x - 18 = 0$$

$$\therefore x = \frac{-(-6) \pm \sqrt{36 - 4.1.(-18)}}{2.1}$$

$$\frac{6 \pm \sqrt{36+72}}{2.1} = \frac{6 \pm 6\sqrt{3}}{2} = 3 \pm 3\sqrt{3}$$

$\therefore$ $y = 3 + 3\sqrt{3}$, যখন $x = 3 + 3\sqrt{3}$ এবং

$y = 3 - 3\sqrt{3}$, যখন $x = 3 - 3\sqrt{3}$

$\therefore$ তৃতীয় শীর্ষের স্থানাঙ্ক $(3+3\sqrt{3}, 3+3\sqrt{3})$ বা, $(3-3\sqrt{3}, 3-3\sqrt{3})$

(d) কোনো বিন্দুর কোটি 5 এবং (4, 5) হতে বিন্দুটির দূরত্ব 3 একক হলে, বিন্দুটির ভুজ নির্ণয় কর।

সমাধান: ধরি, বিন্দুটির স্থানাঙ্ক (x, 5).

$\therefore$ (4, 5) হতে (x, 5) বিন্দুটির দূরত্ব $= |x - 4|$

প্রশ্নমতে, $|x - 4| = 3 \Rightarrow x - 4 = \pm 3$

$$\Rightarrow x = 4 \pm 3 \quad \therefore x = 7, 1$$

$\therefore$ বিন্দুটির ভুজ 7 অথবা 1 ।

(e) x–অক্ষ এবং (2, 3) বিন্দু থেকে (5, k) বিন্দুটির দূরত্ব সমান হলে, k এর মান নির্ণয় কর।

সমাধান: x- অক্ষ হতে (5, k) বিন্দুর দূরত্ব = k

(2, 3) বিন্দু থেকে (5, k) বিন্দুটির দূরত্ব

$$= \sqrt{(2-5)^2 + (3-k)^2}$$

$$= \sqrt{9 + 9 - 6k + k^2} = \sqrt{18 - 6k + k^2}$$

প্রশ্নমতে, $\sqrt{18 - 6k + k^2} = k$

$$\Rightarrow 18 - 6k + k^2 = k^2 \Rightarrow 6k = 18$$

$$\therefore k = 3\ \text{(Ans.)}$$

(f) (2, –3) ও (4 , 6) বিন্দুদ্বয়ের সংযোগ রেখাংশকে x-অক্ষ যে অনুপাতে বিভক্ত করে তা নির্ণয় কর।

সমাধান: প্রদত্ত (2, –3) ও (4 , 6) বিন্দুদ্বয়ের সংযোগ রেখাংশকে $k:1$ অনুপাতে অন্তর্বিভক্তকারী বিন্দুটির

$$\text{স্থানাঙ্ক} = (\frac{k\times4 + 1\times2}{k+1}, \frac{k\times6 + 1\times(-3)}{k+1})$$

এ বিন্দুটি x-অক্ষের উপর অবস্থিত হলে এর কোটি

$$\frac{6k-3}{k+1} = 0 \Rightarrow 6k - 3 = 0 \Rightarrow k = \frac{1}{2}$$

অর্থাৎ $k : 1 = 1 : 2$ (Ans.)

(g) একটি ত্রিভুজের দুইটি শীর্ষবিন্দু (–2, 9) ও (3, –1) এবং এর ভরকেন্দ্র (2, 2) ; তৃতীয় শীর্ষ নির্ণয় কর।

সমাধান: মনে করি, তৃতীয় শীর্ষের স্থানাঙ্ক (x, y).

$\therefore$ (–2, 9), (3, –1) ও (x, y) শীর্ষ বিশিষ্ট ত্রিভুজের ভরকেন্দ্রের স্থানাঙ্ক

$$= (\frac{-2+3+x}{3}, \frac{9-1+y}{3}) = (\frac{1+x}{3}, \frac{8+y}{3})$$

প্রশ্নমতে, $\frac{1+x}{3} = 2 \Rightarrow x = 6 - 1 = 5$

$\frac{8+y}{3} = 2 \Rightarrow 8 + y = 6 \Rightarrow y = 6-8 = -2$

ত্রিভুজটির তৃতীয় শীর্ষের স্থানাঙ্ক $(5, -2)$

(h) যে সরলরেখার অক্ষদ্বয়ের মধ্যবর্তী খন্ডিতাংশ (2, 5) বিন্দুতে সমদ্বিখন্ডিত হয় তার সমীকরণ নির্ণয় কর।

সমাধান: মনে করি, সরলরেখাটির সমীকরণ,

$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \cdots\cdots$ (i) , যা x-অক্ষকে A(a, 0) এবং y-অক্ষকে B(0, b) বিন্দুতে ছেদ করে।

$\therefore$ AB এর মধ্যবিন্দুর স্থানাঙ্ক $(\frac{a+0}{2}, \frac{0+b}{2})$

প্রশ্নমতে, $\frac{a}{2} = 2 \Rightarrow a = 4,\ \frac{b}{2} = 5 \Rightarrow y = 10$

$\therefore$ সরলরেখাটির সমীকরণ, $\frac{x}{4} + \frac{y}{10} = 1$ (Ans.)

(i) $3x - 4y + 1 = 0$ রেখা এবং $(-1, 2)$ বিন্দুগামী এর সমান্তরাল রেখার মধ্যবর্তী দূরত্ব নির্ণয় কর।

সমাধান: $3x - 4y + 1 = 0$ রেখার সমান্তরাল এবং $(-1, 2)$ বিন্দুগামী সরলরেখার সমীকরণ,

$3x - 4y = 3 \times (-1) - 4 \times 2$

$\Rightarrow 3x - 4y = -3 - 8 \Rightarrow 3x - 4y + 11 = 0$

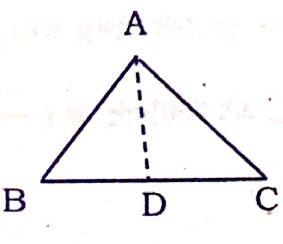
$\therefore$ $3x - 4y + 1 = 0$ ও $3x - 4y + 11 = 0$ সমান্তরাল রেখাদ্বয়ের দূরত্ব $= \frac{|1-11|}{\sqrt{3^2+4^2}}$

$= \frac{|-10|}{5} = \frac{10}{5} = 2$ একক।

20. ABC ত্রিভুজের শীর্ষত্রয় A(–4, –1) , B(–1, 3) এবং C(8 , – 6).

(a) $\angle BAC$ এর সমদ্বিখন্ডক BC কে D বিন্দুতে ছেদ করে। D বিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

সমাধান:



$\angle BAC$ এর সমদ্বিখন্ডক BC কে D বিন্দুতে ছেদ করে।

$\therefore$ BD : CD = AB : AC

$= \sqrt{(-4+1)^2 + (-1-3)^2} : \sqrt{(-4-8)^2 + (-1+6)^2}$

$= \sqrt{9+16} : \sqrt{144+25} = 5 : 13$

$\therefore$ D বিন্দুর স্থানাঙ্ক

$= (\frac{5\times8+13\times(-1)}{5+13}, \frac{5\times(-6)+13\times3}{5+13})$

$= (\frac{40-13}{18}, \frac{-30+39}{18}) = (\frac{27}{18}, \frac{9}{18}) = (\frac{3}{2}, \frac{1}{2})$

(b) অক্ষদ্বয় দ্বারা BC রেখার মধ্যবর্তী খন্ডিতাংশের দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

সমাধান: BC রেখার সমীকরণ,

$(x + 1)(3 + 6) - (y-3)(-1 - 8) = 0$

$\Rightarrow 9(x + 1) + 9(y-3) = 0$

$\Rightarrow x + 1 + y - 3 = 0 \Rightarrow x + y = 2$

$\Rightarrow \frac{x}{2} + \frac{y}{2} = 1$, যা x-অক্ষকে (2, 0) বিন্দুতে এবং y-অক্ষকে (0, 2) বিন্দুতে ছেদ করে।

$\therefore$ নির্ণেয় দৈর্ঘ্য $= \sqrt{(2-0)^2 + (0-2)^2}$

$= \sqrt{4+4} = 2\sqrt{2}$ (Ans.)

(c) অক্ষদ্বয় ও BC রেখা দ্বারা গঠিত ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

সমাধান: BC রেখার সমীকরণ,

$(x + 1)(3 + 6) - (y-3)(-1 - 8) = 0$

$\Rightarrow 9(x + 1) + 9(y-3) = 0$

$\Rightarrow x + 1 + y - 3 = 0 \Rightarrow x + y = 2$

$\Rightarrow \frac{x}{2} + \frac{y}{2} = 1$

$\therefore$ অক্ষদ্বয় ও BC রেখা দ্বারা গঠিত ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল

$= \frac{1}{2}(2\times2) = 2$ বর্গ একক।

(d) AB ও AC এর মধ্যবিন্দুর সংযোগ রেখার সমীকরণ নির্ণয় কর।

সমাধানঃ AB এর মধ্যবিন্দুর স্থানাঙ্ক $(\frac{-4-1}{2},\frac{-1+3}{2})=(-\frac{5}{2},1)$

AC এর মধ্যবিন্দুর স্থানাঙ্ক $(\frac{-4+8}{2},\frac{-1-6}{2})$

$=(2,-\frac{7}{2})$

$\therefore$ নির্ণেয় রেখার সমীকরণ,

$(x+\frac{5}{2})(1+\frac{7}{2})-(y-1)(-\frac{5}{2}-2)=0$

$\Rightarrow \frac{9}{2}(x+\frac{5}{2})+\frac{9}{2}(y-1)=0$

$\Rightarrow x+\frac{5}{2}+y-1=0 \Rightarrow x+y+\frac{5-2}{2}=0$

$\Rightarrow 2x+2y+3=0$ (Ans.)

(e) A হতে BC এর লম্ব দূরত্ব নির্ণয় কর।

সমাধানঃ BC রেখার সমীকরণ,

$(x+1)(3+6)-(y-3)(-1-8)=0$

$\Rightarrow x+1+y-3=0 \Rightarrow x+y=2$

$\therefore$ $A(-4,-1)$ হতে BC এর লম্ব দূরত্ব

$=\frac{|-4-1-2|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\frac{|-9|}{\sqrt{2}}=\frac{9}{\sqrt{2}}$ একক।

(f) অক্ষদ্বয় ও BC রেখা দ্বারা গঠিত ত্রিভুজের অন্তকেন্দ্র নির্ণয় কর।

সমাধানঃ BC রেখার সমীকরণ,

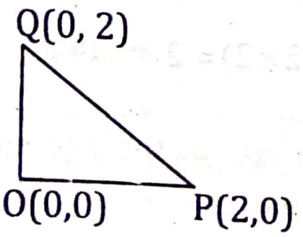
$(x+1)(3+6)-(y-3)(-1-8)=0$

$\Rightarrow 9(x+1)+9(y-3)=0$

$\Rightarrow x+1+y-3=0 \Rightarrow x+y=2$

$\Rightarrow \frac{x}{2}+\frac{y}{2}=1$, যা x-অক্ষকে (ধরি) P(2, 0) এবং y-অক্ষকে Q(0, 2) বিন্দুতে ছেদ করে।

$\therefore$ অক্ষদ্বয় ও BC রেখা দ্বারা গঠিত ত্রিভুজ OPQ এর শীর্ষত্রয় O(0, 0), P(2, 0), Q(0, 2).



এখন, $a=PQ=\sqrt{2^2+2^2}=2\sqrt{2}$, $b=OQ=2$, $c=OP=2$

$\therefore$ অক্ষদ্বয় ও BC রেখা দ্বারা গঠিত ত্রিভুজের অন্তকেন্দ্র

$\equiv(\frac{ax_1+bx_2+cx_3}{a+b+c},\frac{ay_1+by_2+cy_3}{a+b+c})$

$=(\frac{2\sqrt{2}\times0+2\times2+2\times0}{2\sqrt{2}+2+2},\frac{2\sqrt{2}\times0+2\times0+2\times2}{2\sqrt{2}+2+2})$

$=(\frac{4}{2(2+\sqrt{2})},\frac{4}{2(2+\sqrt{2})})$

$=(\frac{2(2-\sqrt{2})}{(2+\sqrt{2})(2-\sqrt{2})},\frac{2(2-\sqrt{2})}{(2+\sqrt{2})(2-\sqrt{2})})$

$=(\frac{2(2-\sqrt{2})}{4-2},\frac{2(2-\sqrt{2})}{4-2})$

$=(2-\sqrt{2},2-\sqrt{2})$ (Ans.)

(g) B ও C বিন্দুগামী সরলরেখা একটি বর্গের কর্ণ হলে A বিন্দুগামী বাহুদ্বয়ের সমীকরণ নির্ণয় কর।

সমাধানঃ বর্গটির একটি কর্ণের ঢাল,

$m_1=\frac{3+6}{-1-8}=-1$.

ধরি, $A(-4,-1)$ বিন্দুগামী বর্গটির বাহুর সমীকরণ $y+1=m(x+4)$ ..... (i), যা কর্ণের সাথে 45^0 কোণ উৎপন্ন করে।

$\therefore \tan(\pm45^0)=\frac{m-m_1}{1+mm_1}=\frac{m+1}{1-m}$

$\Rightarrow \pm1=\frac{m+1}{1-m}$

'+' চিহ্ন নিয়ে, $1-m=m+1 \Rightarrow m=0$

$\therefore$ $A(-4,-1)$ বিন্দুগামী বর্গটির একটি বাহুর সমীকরণ $y+1=0(x+4) \Rightarrow y+1=0$

আবার, $A(-4,-1)$ বিন্দুগামী এবং $y+1=0$ বাহুর উপর লম্ব অপর বাহুর সমীকরণ $x+4=0$

(h) BC বাহুর লম্ব সমদ্বিখন্ডক y-অক্ষকে যে বিন্দুতে ছেদ করে তার স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

সমাধানঃ BC এর মধ্যবিন্দু $\equiv(\frac{-1+8}{2},\frac{3-6}{2})$

$= (\frac{7}{2}, -\frac{3}{2})$

BC এর ঢাল $= \frac{3+6}{-1-8} = -1$

$\therefore$ BC এর লম্বরেখার ঢাল $= 1$

BC বাহুর লম্ব সমদ্বিখন্ডকের সমীকরণ,

$y-(-\frac{3}{2}) = 1(x-\frac{7}{2}) \Rightarrow 2y + 3 = 2x - 7$

$\Rightarrow 2x - 2y = 10 \Rightarrow \frac{x}{5} + \frac{y}{-5} = 1$, যা y-অক্ষকে $(0, -2)$ বিন্দুতে ছেদ করে।

21. (a) একটি সামান্তরিকের শীর্ষবিন্দু যথাক্রমে (α, β), $(-4, 13)$, $(8, 8)$ এবং $(13, -4)$ হলে এর ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

সমাধান: $(-4, 13)$, $(8, 8)$ এবং $(13, -4)$ বিন্দু দ্বারা গঠিত ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল

$= \frac{1}{2}|(-4-8)(8+4) - (13-8)(8-13)|$

$= \frac{1}{2}|(-12)(12) - (5)(-5)|$

$= \frac{1}{2}|-144 + 25| = \frac{119}{2}$ বর্গ একক।

$\therefore$ সামান্তরিকটির নির্ণেয় ক্ষেত্রফল $= 2 \times \frac{119}{2}$

$= 119$ বর্গ একক।

(b) ABCD রম্বসের $A(-1, 2)$, $B(\alpha, 0)$ এবং $C(3, 5)$। B ও D শীর্ষদ্বয়ের স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

সমাধান: মনে করি, D শীর্ষের স্থানাঙ্ক (x, y).

AC কর্ণের মধ্যবিন্দু $(\frac{-1+3}{2}, \frac{2+5}{2}) = (1, \frac{7}{2})$

এবং ঢাল $= \frac{2-5}{-1-3} = \frac{-2}{-4} = \frac{1}{2} = m_1$ (ধরি)

BD কর্ণের মধ্যবিন্দু $(\frac{\alpha + x}{2}, \frac{y}{2})$ এবং

ঢাল $= \frac{y}{x - \alpha} = m_2$ (ধরি)

ABCD রম্বসের বৈশিষ্ট্য অনুযায়ী, $(1, \frac{7}{2})$ ও $(\frac{\alpha + x}{2}, \frac{y}{2})$ বিন্দুদ্বয় অভিন্ন।

$\therefore \frac{\alpha + x}{2} = 1 \Rightarrow \alpha + x = 2 \ldots.$ (i)

$\frac{y}{2} = \frac{7}{2} \Rightarrow y = 7$

আবার, $m_1 m_2 = -1$

$\Rightarrow \frac{y}{x - \alpha} \times \frac{1}{2} = -1 \Rightarrow 2(\alpha - x) = 7$

$\Rightarrow \alpha - x = \frac{7}{2}$ ..... (ii)

$(i) + (ii) \Rightarrow 2\alpha = 2 + \frac{7}{2} = \frac{11}{2} \Rightarrow \alpha = \frac{11}{4}$

$(i) + (ii) \Rightarrow 2x = 2 - \frac{7}{2} = -\frac{3}{2} \Rightarrow x = -\frac{3}{4}$

$\therefore B \equiv (\alpha, 0) = (\frac{11}{4}, 0)$, $D \equiv (-\frac{3}{4}, 7)$

(c) যে সরলরেখার অক্ষদ্বয়ের মধ্যবর্তী খন্ডিত অংশ $(6, 2)$ বিন্দুতে $2 : 3$ অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত হয় তার সাথে উক্ত বিন্দুতে 45^0 কোণ উৎপন্নকারী সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর।

সমাধান: মনে করি, যে সরলরেখার অক্ষদ্বয়ের মধ্যবর্তী খন্ডিত অংশ $(6, 2)$ বিন্দুতে $2 : 3$ অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত হয় তার সমীকরণ $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$, যা x-অক্ষকে $A(a, 0)$ বিন্দুতে এবং y-অক্ষকে $B(0, b)$ বিন্দুতে ছেদ করে।

$\therefore$ AB রেখাংশকে $2 : 3$ অনুপাতে অন্তর্বিভক্তকারী বিন্দু $(\frac{2\times0+3\times a}{2+3}, \frac{2\times b+3\times0}{2+3}) = (\frac{3a}{5}, \frac{2b}{5})$ ও $(6, 2)$ অভিন্ন।

$\therefore \frac{3a}{5} = 6 \Rightarrow 3a = 30 \Rightarrow a = 10$

$\frac{2b}{5} = 2 \Rightarrow b = 5$

$\therefore$ AB এর ঢাল $= -\frac{b}{a} = -\frac{5}{10} = -\frac{1}{2}$

AB এর সাথে 45^0 উৎপন্নকারী রেখার ঢাল m হলে,

$\tan(\pm 45^0) = \frac{m+\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}m} = \frac{2m+1}{2-m}$

$\Rightarrow \pm 1 = \frac{2m+1}{2-m}$

'+' চিহ্ন নিয়ে, $2m + 1 = 2 - m$

$\Rightarrow 3m = 1 \Rightarrow m = \frac{1}{3}$

'+' চিহ্ন নিয়ে, $2m + 1 = -2 + m$

$\Rightarrow m = -3$

$\therefore$ (6, 2) বিন্দুগামী নির্ণেয় রেখার সমীকরণ,

$y - 2 = \frac{1}{3}(x - 6) \Rightarrow x - 3y = 0$

অথবা, $y - 2 = -3(x - 6) \Rightarrow 3x + y = 20$

(d) $3x + 4y - 2 = 0$ রেখার উপর $(2, -1)$ বিন্দু হতে 15 একক দূরে অবস্থিত দুইটি বিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

সমাধান: মনে করি, রেখাটি x-অক্ষের সাথে α কোণ উৎপন্ন করে।

$\therefore \tan\alpha = -\frac{3}{4}$

$\Rightarrow \sin\alpha = \frac{3}{5}$ এবং $\cos\alpha = -\frac{4}{5}$

অথবা, $\sin\alpha = -\frac{3}{5}$ এবং $\cos\alpha = \frac{4}{5}$

$(2, -1)$ বিন্দু হতে 15 একক দূরে অবস্থিত বিন্দুর স্থানাঙ্ক (x, y) হলে, $\frac{x-2}{\cos\alpha} = \frac{y+1}{\sin\alpha} = 15$

$\therefore x - 2 = 15\cos\alpha \Rightarrow x = 15\cos\alpha + 2$ এবং

$y + 1 = 15\sin\alpha \Rightarrow y = 15\sin\alpha - 1$

$\sin\alpha = \frac{3}{5}$ এবং $\cos\alpha = -\frac{4}{5}$ এর জন্য,

$x = 15 \times -\frac{4}{5} + 2 = -12 + 2 = -10$ এবং

$y = 15 \times \frac{3}{5} - 1 = 9 - 1 = 8$

$\sin\alpha = -\frac{3}{5}$ এবং $\cos\alpha = \frac{4}{5}$ এর জন্য,

$x = 12 + 2 = 14$ এবং $y = -9 - 1 = -10$

$\therefore$ বিন্দু দুইটির স্থানাঙ্ক $(-10, 8)$ ও $(14, -10)$

(e) $(1, 2), (-4, -10)$ বিন্দুগামী রেখা থেকে 2 একক দূরে এবং $x + 5y = 13$ রেখার উপর অবস্থিত বিন্দুসমূহের স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

সমাধান: $(1, 2), (-4, -10)$ বিন্দুগামী রেখার সমীকরণ,

$(x - 1)(2 + 10) - (y - 2)(1 + 4) = 0$

$\Rightarrow 12x - 12 - 5y + 10 = 0$

$\Rightarrow 12x - 5y - 2 = 0 \quad \cdots\cdots(1)$

ধরি, $x + 5y = 13 \quad \cdots\cdots(2)$ রেখাস্থ বিন্দু (α, β), (1) রেখা থেকে 2 একক দূরে অবস্থিত।

$\therefore \alpha + 5\beta = 13 \Rightarrow \alpha = 13 - 5\beta \cdots (3)$ এবং

$\frac{|12\alpha - 5\beta - 2|}{\sqrt{144+25}} = 2$

$\Rightarrow 12\alpha - 5\beta - 2 = \pm 26$

'+' নিয়ে, $12\alpha - 5\beta - 28 = 0$

$\Rightarrow 12(13 - 5\beta) - 5\beta - 28 = 0 \quad$ [(3) দ্বারা]

$\Rightarrow 156 - 60\beta - 5\beta - 28 = 0 \Rightarrow 65\beta = 128$

$\Rightarrow \beta = \frac{128}{65}$

$\therefore \alpha = 13 - 5.\frac{128}{65} = \frac{845-640}{65} = \frac{205}{65}$

আবার, '–' নিয়ে, $12\alpha - 5\beta + 52 = 0$

$\Rightarrow 12(13 - 5\beta) - 5\beta + 24 = 0 \quad$ [(3) দ্বারা]

$\Rightarrow 156 - 60\beta - 5\beta + 24 = 0 \Rightarrow 65\beta = 180$

$\Rightarrow \beta = \frac{180}{65} = \frac{36}{13}$

$\therefore \alpha = 13 - 5.\frac{36}{13} = \frac{169-180}{13} = -\frac{11}{13}$

$\therefore$ বিন্দুসমূহের স্থানাঙ্ক $(\frac{205}{65}, \frac{128}{65})$, $(-\frac{11}{13}, \frac{36}{13})$

(f) (–1, 1), (3, 4) বিন্দুগামী রেখার উপর লম্ব এবং মূলবিন্দু থেকে 7 একক দূরে অবস্থিত রেখাসমূহের সমীকরণ নির্ণয় কর।

সমাধানঃ (–1, 1), (3, 4) বিন্দুগামী রেখার সমীকরণ,

$(x + 1)(1 - 4) - (y - 1)(-1 - 3) = 0$

$\Rightarrow -3x - 3 + 4y - 4 = 0$

$\Rightarrow 3x - 4y + 7 = 0 \cdots\cdots (1)$

ধরি, (1) এর উপর লম্ব রেখার সমীকরণ $4x + 3y + k = 0 \cdots\cdots (2)$

মূলবিন্দু (0,0) থেকে (1) এর দূরত্ব $= \frac{|k|}{\sqrt{16+9}}$

প্রশ্নমতে, $\frac{|k|}{\sqrt{16+9}} = 7 \Rightarrow \frac{k}{5} = \pm 7 = \pm 35$

$\therefore$ নির্ণেয় রেখাসমূহের সমীকরণ $4x + 3y + 35 = 0$ এবং $4x + 3y - 35 = 0$

(g) $3x + 4y = 11$ এবং $12x - 5y - 2 = 0$ রেখা দুইটির অন্তর্ভুক্ত সূক্ষ্মকোণের সমদ্বিখন্ডক অক্ষদ্বয়ের সাথে যে ত্রিভুজ গঠন করে তার ভরকেন্দ্র নির্ণয় কর।

সমাধানঃ $3x + 4y = 11 \Rightarrow 3x + 4y - 11 = 0$ কে $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ এর সাথে এবং $12x - 5y - 2 = 0$ কে $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ এর সাথে তুলনা করে পাই,

$a_1a_2 + b_1b_2 = 3 \times 12 + 4 \times (-5)$

$= 36 - 20 = 16 > 0$

$\therefore$ রেখা দুইটির অন্তর্ভুক্ত সূক্ষ্মকোণের সমদ্বিখন্ডকের সমীকরণ, $\frac{3x + 4y - 11}{\sqrt{9+16}} = -\frac{12x - 5y - 2}{\sqrt{144+25}}$

$\Rightarrow \frac{3x + 4y - 11}{5} = -\frac{12x - 5y - 2}{13}$

$\Rightarrow 39x + 52y - 143 = -60x + 25y + 10$

$\Rightarrow 99x + 27y - 153 = 0$

$\Rightarrow 11x + 3y = 17$

$\Rightarrow \frac{x}{17/11} + \frac{y}{17/3} = 1 \cdots\cdots (1)$, যা অক্ষদ্বয়কে $(\frac{17}{11}, 0)$ ও $(0, \frac{17}{3})$ বিন্দুতে ছেদ করে।

$\therefore$ (1) রেখা অক্ষদ্বয়ের সাথে যে ত্রিভুজ গঠন করে তার ভরকেন্দ্রের স্থানাঙ্ক

$(\frac{17/11}{3}, \frac{17/3}{3}) = (\frac{17}{33}, \frac{17}{9})$ (Ans.)

22. $AB \equiv 4x + 3y - 8 = 0$,

$AC \equiv x + y - 1 = 0$

(a) মূলবিন্দু ও A বিন্দুগামী সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর।

সমাধানঃ $x + y - 1 = 0 \Rightarrow y = 1 - x \cdots$ (i)

$4x + 3y - 8 = 0 \Rightarrow 4x + 3(1 - x) - 8 = 0$

$\Rightarrow 4x + 3 - 3x - 8 = 0$

$\therefore x = 5, y = 1 - 5 = -4$

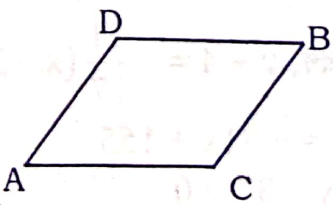
$\therefore A \equiv (5, -4)$

$\therefore$ মূলবিন্দু (0, 0) ও A(5, – 4) বিন্দুগামী সরলরেখার সমীকরণ,

$y = \frac{-4}{5}x \Rightarrow 4x + 5y = 0$ (Ans.)

(b) রম্বসের একটি বাহু AC এবং একটি কর্ণ AB হলে A বিন্দুগামী অপর বাহুর সমীকরণ নির্ণয় কর।

সমাধানঃ



মনে করি, ACBD রম্বসের

$AB \equiv 4x + 3y - 8 = 0 \cdots\cdots$ (i)

$AC \equiv x + y - 1 = 0 \cdots\cdots$ (ii)

$\therefore \angle DAC$ এর সমদ্বিখন্ডক AB.

ধরি, AD বাহুর ঢাল m_2,

(i) এর ঢাল, $m = -\frac{4}{3}$ এবং (ii) বাহুর ঢাল, $m_1 = -1$.

(ii) ও (i) এর অন্তর্ভুক্ত কোণ $\tan^{-1}\dfrac{m_1-m}{1+m_1m}$ এবং

(i) ও AD এর অন্তর্ভুক্ত কোণ $\tan^{-1}\dfrac{m-m_2}{1+mm_2}$

পরস্পর সমান।

$$\therefore \frac{m_1-m}{1+m_1m}=\frac{m-m_2}{1+mm_2}$$

$$\Rightarrow \frac{-1+\frac{4}{3}}{1+(-1)(-\frac{4}{3})}=\frac{-\frac{4}{3}-m_2}{1+(-\frac{4}{3})m_2}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{3+4}=\frac{-4-3m_2}{3-4m_2}\Rightarrow\frac{1}{7}=\frac{-4-3m_2}{3-4m_2}$$

$$\Rightarrow 3-4m_2=-28-21m_2\Rightarrow 17m_2=-31$$

$$\Rightarrow m_2=-\frac{31}{17}$$

এখন, $x+y-1=0\Rightarrow y=1-x\cdots\cdots$ (i)

$4x+3y-8=0\Rightarrow 4x+3(1-x)-8=0$

$\Rightarrow 4x+3-3x-8=0$

$\therefore x=5, y=1-5=-4$

$\therefore A\equiv(5,-4)$

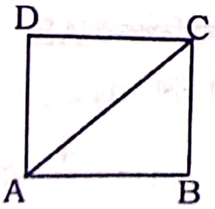
$\therefore$ A(5, −4) বিন্দুগামী এবং $-\dfrac{31}{17}$ ঢালবিশিষ্ট AD বাহুর সমীকরণ, $y+4=-\dfrac{31}{17}(x-5)$

$\Rightarrow 17y+68=-31x+155$

$\Rightarrow 31x+17y-87=0$

(c) বর্গের একটি কর্ণ AC হলে A বিন্দুগামী বাহুদ্বয়ের সমীকরণ নির্ণয় কর।

সমাধানঃ



মনে করি, ABCD বর্গের AC কর্ণের সমীকরণ $x+y-1=0$, যা A বিন্দুগামী বাহু AB ও AD এর সাথে 45^0 কোণ উৎপন্ন করে।

AC কর্ণের ঢাল=−1. A বিন্দুগামী বাহুর ঢাল m হলে,

$$\tan(\pm45^0)=\frac{m+1}{1+m(-1)}\Rightarrow\frac{m+1}{1-m}=\pm1$$

'+' নিয়ে পাই, $m+1=1-m\Rightarrow 2m=0$

$\Rightarrow m=0$

এখন, $x+y-1=0\Rightarrow y=1-x\cdots\cdots$ (i)

$4x+3y-8=0\Rightarrow 4x+3(1-x)-8=0$

$\Rightarrow 4x+3-3x-8=0$

$\therefore x=5, y=1-5=-4$

$\therefore$ A(5, −4) বিন্দুগামী এবং 0 ঢাল বিশিষ্ট একটি বাহুর সমীকরণ $y+4=m(x-5)\Rightarrow y+4=0$ এবং এ বাহুর উপর লম্ব এবং A(5, −4) বিন্দুগামী অপর বাহুর সমীকরণ, $x=5$.

(d) A বিন্দুগামী AC এর লম্বরেখা অক্ষদ্বয়ের সাথে যে ত্রিভুজ গঠন করে তার ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

সমাধানঃ AC বাহুর সমীকরণ,

$x+y-1=0\Rightarrow y=1-x\cdots$ (i)

AB বাহুর সমীকরণ,

$4x+3y-8=0$

$\Rightarrow 4x+3(1-x)-8=0$, [(i) দ্বারা]

$\Rightarrow 4x+3-3x-8=0$

$\therefore x=5, y=1-5=-4$

$\therefore$ AB ও AC এর ছেদবিন্দু A(5, −4)

$\therefore$ A বিন্দুগামী AC এর উপর লম্ব রেখার সমীকরণ

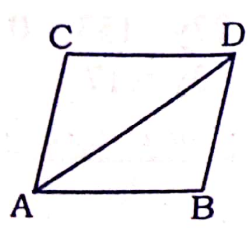
$x-y=5-(-4)\Rightarrow x-y=9$

$$\Rightarrow \frac{x}{9}+\frac{y}{-9}=1$$

এর রেখা অক্ষদ্বয়ের সাথে যে ত্রিভুজ গঠন করে তার ক্ষেত্রফল $=\dfrac{1}{2}|(9)(-9)|=\dfrac{81}{2}$ বর্গ একক।

(e) ABDC সামান্তরিকের AB ও AC দুইটি বাহু। $D\equiv(1,1)$ হলে BC কর্ণের সমীকরণ নির্ণয় কর।

সমাধানঃ



AC বাহুর সমীকরণ,

$x+y-1=0 \Rightarrow y=1-x \cdots$ (i)

BC বাহুর সমীকরণ,

$4x+3y-8=0$

$\Rightarrow 4x+3(1-x)-8=0$, [(i) দ্বারা]

$\Rightarrow 4x+3-3x-8=0$

$\therefore x=5, y=1-5=-4$

$\therefore$ AB ও AC এর ছেদবিন্দু A(5, −4)

$\therefore$ AD এর মধ্যবিন্দু স্থানাঙ্ক

$=(\frac{5+1}{2}, \frac{-4+1}{2})=(3, -\frac{3}{2})$, যা BC কর্ণের উপর অবস্থিত।

AB বাহুর সমান্তরাল D(1, 1) শীর্ষগামী CD বাহুর সমীকরণ $4x+3y=4\times1+3\times1$

$\Rightarrow 4x+3y=7 \cdots\cdots$ (ii)

এখন, (i) ও (ii) হতে পাই,

$4x+3(1-x)=7 \Rightarrow 4x+3-3x=7$

$\therefore x=4, y=1-4=-3$

$\therefore$ AC ও CD এর ছেদবিন্দু C(4, − 3)

$\therefore$ BC কর্ণের সমীকরণ,

$(x-4)(-3+\frac{3}{2})-(y+3)(4-1)=0$

$\Rightarrow (x-4)(-\frac{3}{2})-(y+3).3=0$

$\Rightarrow -x+4-2y-6=0$

$\therefore x+2y+2=0$ (Ans.)

বহুনির্বাচনি প্রশ্ন:

1. **Sol^n.:** সবগুলি তথ্য সত্য। $\therefore$ Ans. (d)

2. **Sol^n.** C বিন্দুর পোলার স্থানাঙ্ক $(\sqrt{1+1}, \tan^{-1}\frac{1}{-1})=(\sqrt{2}, \pi-\frac{\pi}{4})$

$=(\sqrt{2}, \frac{3\pi}{4})$ $\therefore$ Ans. (c)

3. **Sol^n.:** সব তথ্য সত্য। $\therefore$ Ans. (d)

4. **Sol^n.:** অনুপাত $=|7|:|-5|=7:5$

5. **Sol^n.:** ত্রিভুজটির ক্ষেত্রফল $=\frac{1}{2}|x_1y_2-x_2y_1|$

$=\frac{1}{2}|3\times(-8)-5\times3|$

$=\frac{1}{2}|-24-15|=\frac{39}{2}=19{\cdot}5$ বর্গ একক।

$\therefore$ Ans. (c)

6. **Sol^n.:** $\theta=\tan^{-1}(\frac{4\sqrt{3}}{-4})=180^0-60^0$

$=120^0$ $\therefore$ Ans. (b)

7. **Sol^n.:** রেখাটির সমীকরণ, $x=a \Rightarrow x=3$

$\therefore$ Ans. (c)

8. **Sol^n.:** $y=mx+c$ সমীকরণে c হচ্ছে y-অক্ষের ছেদক অংশ। $\therefore$ Ans. (d)

9. **Sol^n.:** সব তথ্য সত্য। $\therefore$ Ans. (d)

10. **Sol^n.:** রেখার সমীকরণ

$3x+4y=3\times5+4\times(-3)=3$ $\therefore$ Ans. (a)

11. **Sol^n.:** লম্বদূরত্ব$=\frac{|-12|}{\sqrt{9+16}}=\frac{12}{5}$ $\therefore$ Ans.(b)

12. **Sol^n.:** সব তথ্য সত্য। $\therefore$ Ans. (d)

13. **Sol^n.:** $\theta=\tan^{-1}\frac{-\sqrt{3}}{-\sqrt{3}}=\pi+\frac{\pi}{4}=\frac{5\pi}{4}$

$\therefore$ Ans. (c)

14. **Sol^n.:** সরলরেখার সমীকরণ

$7x-3y=7\times2-3\times1=11$ $\therefore$ Ans.(b)

15. **Sol^n.:** $y=6$ ও $x=5$ এর ছেদবিন্দু A(5, 6)

$y^2=6(x-7)$ এ $y=6$ বসিয়ে পাই,

$36=6(x-7) \Rightarrow x=6+7=13$

$\therefore$ B বিন্দুর স্থানাঙ্ক (13, 6)

$\therefore$ $AB=|13-5|=8$ $\therefore$ Ans. (c)

16. **Sol^n.:** AC কর্ণের ঢাল $=\frac{-1-6}{-2-5}=1$

$\therefore$ AC এর উপর লম্ব BD কর্ণের ঢাল $=-1$

$\therefore$ Ans. (d)

17. **Sol^n.:** $D\equiv(-2+5-1, -1+6-3)$

$=(2, 2)$ $\therefore$ Ans. (a)

18. **Sol^n.:** AB রেখার সমীকরণ, $\frac{x}{3}+\frac{y}{2}=1$

$\Rightarrow 2x+3y=6 \quad \therefore$ Ans. (a)

19. Sol^n.: OC রেখার ঢাল $= -\dfrac{0-3}{2-0} = -\dfrac{-3}{2}$

$\dfrac{3}{2}$, OAB ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল $= \dfrac{1}{2}(3\times 2) = 3$ ব.একক এবং B(0, 2) বিন্দুর পোলার স্থানাঙ্ক

$(\sqrt{0+2^2},\ \cot^{-1}\dfrac{0}{2}) = (2, 90^0) \quad \therefore$ Ans. (b)

20. Sol^n.: নির্ণেয় বিন্দু $(\dfrac{3.9+5.1}{3+5}, \dfrac{3.12+5.4}{3+5})$

$=(3,7) \quad \therefore$ Ans. (b)

21. Sol^n.: $\dfrac{1}{2}|6.0-8.4|=16 \therefore$ Ans. (b)

22. নির্ণেয় বিন্দু $(\dfrac{3.5-4.3}{3-4}, \dfrac{3.2-4.(-1)}{3-4})$

$=(-3,-10) \quad \therefore$ Ans. (d)

23. Sol^n.: $(2-a-1)(a-3-a)-(-1-a+3)(a+1-a-2)=0$

$\Rightarrow (1-a)(-3)-(2-a)(-1)=0$

$\Rightarrow -3+3a+2-a=0 \Rightarrow 2a=1 \Rightarrow a=\dfrac{1}{2}$

বিকল্প পদ্ধতি: ১ম শীর্ষকে শূন্য বানাতে ভুজ হতে 2 বিয়োগ ও কোটির সাথে 1 যোগ করি।

$(2,-1), (a+1, a-3), (a+2, a)$

$(0,0), (a-1, a-2), (a, a+1)$

$\therefore (a-1)(a+1)-a(a-2)=0$

$\Rightarrow a^2-1-a^2+2a=0 \Rightarrow a=1/2$

$\therefore$ Ans. (d)

24. Sol^n.: $P \equiv (\sqrt{3+9}, \tan^{-1}\dfrac{-3}{-\sqrt{3}})$

$\equiv (2\sqrt{3}, \pi+\dfrac{\pi}{3}) \equiv (2\sqrt{3}, \dfrac{4\pi}{3})$

$\therefore \quad Q \equiv (2\sqrt{3}, \dfrac{4\pi}{3}-\dfrac{\pi}{6}) \equiv (2\sqrt{3}, \dfrac{7\pi}{6}) \therefore$ Ans. (c)

25. Sol^n.: P বিন্দুটি (x, 0) হলে,

$x^2+2^2=(x-6)^2+4^2$

$\Rightarrow x^2+4=x^2-12x+36+16$

$\Rightarrow 12x=48 \Rightarrow x=4 \therefore$ P এর স্থানাঙ্ক (4, 0).

$\therefore$ Ans. (d)

26. Sol^n.: $r = a\sin\theta \Rightarrow r^2 = a\, r\sin\theta$

$\Rightarrow x^2+y^2 = \therefore$ Ans. (c)

27. Sol^n.: $y=-5x+9$ রেখার সাথে লম্ব রেখার নতি

$= -\dfrac{1}{-5} = \dfrac{1}{5} \quad \therefore$ Ans. (c)

28. Sol^n.: $\begin{vmatrix} 3 & 5 & -2 \\ 2 & 3 & 0 \\ a & b & 1 \end{vmatrix} = 0$

$\Rightarrow -2(2b-3a)+1(9-10)=0$

$\Rightarrow -2(2b-3a)-1=0 \Rightarrow 6a-4b-1=0$

$\therefore$ Ans. (c)

29. Sol^n.: (1, 2) বিন্দু হতে $x=\sqrt{3}y+4$ রেখার উপর অঙ্কিত লম্বরেখার সমীকরণ,

$\sqrt{3}x+y=\sqrt{3}\times 1+2$

$\Rightarrow \sqrt{3}x+y-2-\sqrt{3}=0$

$\therefore$ (0, 0) বিন্দু হতে দূরত্ব $= \dfrac{|\sqrt{3}.0+0-2-\sqrt{3}|}{\sqrt{3+1}}$

$= \dfrac{2+\sqrt{3}}{2} \quad \therefore$ Ans. (b)

30. নিয়ম: $ax+by+c=0$ রেখার সমান্তরাল এবং (x_1, y_1) বিন্দু হতে d একক দূরে অবস্থিত সরলরেখার সমীকরণ

$ax+by=ax_1+by_1 \pm d\sqrt{a^2+b^2}$

Sol^n.: $3x+4y=3\times 1+4\times(-2)\pm 7.5(\sqrt{3^2+4^2})$

$\Rightarrow 3x+4y=3-8\pm 37.5$

$\Rightarrow 3x+4y=32.5,-42.5$

$\therefore$ Ans. (d)

31. Sol^n.: $\frac{c}{\sqrt{3^2+4^2}} = \pm\frac{2(c+3)}{\sqrt{12^2+5^2}}$

$\Rightarrow 13c = \pm(10c+30)$

$\therefore$ $13c = 10c+30 \Rightarrow c = 10,$

$13c = -10c-30 \Rightarrow c = -30/23$

$\therefore$ Ans. (c)

32. Sol^n.: x অক্ষকে (6/4,0) =(3/2, 0) কোন বিন্দুতে ছেদ করে। $\therefore$ Ans. (a)

33. Sol^n.: উদ্দীপক সরলরেখাটির ঢাল $=-\frac{4}{-2}=2$ $\therefore$ Ans. (a)

34. Sol^n.: $(-1,\sqrt{3})$ বিন্দুর পোলার স্থানাংক

$=(\sqrt{1+3},\tan^{-1}\frac{\sqrt{3}}{-1}) = (2,\pi-\frac{\pi}{3})$

$=(2,\frac{2\pi}{3})$

$\therefore$ Ans. (d)

35. Sol^n.: $(-1,\sqrt{3})$ বিন্দুর পোলার স্থানাংক

$=(\sqrt{1+3},\tan^{-1}\frac{\sqrt{3}}{-1}) = (2,\pi-\frac{\pi}{3})$

$=(2,\frac{2\pi}{3})$ $\therefore$ Ans. (b)

36. Sol^n.: $y=-7x+9$ রেখার সাথে লম্ব রেখার নতি

$= = -\frac{1}{-7}=\frac{1}{7}$ $\therefore$ Ans. (a)

37. Sol^n.: $B \equiv (0,\frac{12}{-4}) = (0,-3)$ $\therefore$ Ans. (c)

38. Sol^n.: প্রদত্ত রেখার উপর লম্ব এবং (1, 2) বিন্দুগামী সরলরেখার সমীকরণ

$4x+3y = 4\times1+3\times2$

$\Rightarrow 4x+3y=10$ $\therefore$ Ans. (b)

39. Sol^n.: $(x-2)^2+(y+3)^2=3^2$ $\therefore$ Ans. (d)

40. Sol^n.: $4x-3y+5=0$ রেখাটির ঢাল

$=-\frac{a}{b}=-\frac{4}{-3}=\frac{4}{3}$ $\therefore$ Ans. (b)

41. Sol^n.: (1, 1) বিন্দুগামী $2x-3y-5=0$ রেখার উপর লম্বরেখার সমীকরণ,

$3x+2y=3\times1+2\times1$

$\Rightarrow 3x+2y=5$ $\therefore$ Ans. (a)

42. Sol^n.: (1,–1) বিন্দুটির পোলার স্থানাঙ্ক =

$(\sqrt{1+1},\tan^{-1}\frac{-1}{1}) = (\sqrt{2},360^0-45^0)$

$=(\sqrt{2},315^0)$ $\therefore$ Ans. (d)

43. Sol^n.: $3x-2y+6=0$ সরলরেখা দ্বারা x-অক্ষের খন্ডিতাংশ $=\frac{c}{a}=\frac{6}{3}=-2$ $\therefore$ Ans. (b)

44. Sol^n.: x- অক্ষের উপর লম্বরেখার সমীকরণে y অনুপস্থিত থাকে।

$\therefore$ নির্ণেয় রেখার সমীকরণ, $x+y-y+x=6-2 \Rightarrow 2x=4 \Rightarrow x=2$

$\therefore$ Ans. (a)

45. Sol^n.: $3x+4y+1=0$ রেখার ঢাল $=-\frac{a}{b}=-\frac{3}{4}$ $\therefore$ Ans. (b)

46. মূল বিন্দু হতে AB এর লম্ব দূরত্ব $\therefore$ Ans. (c)

47. AB এর মধ্যবিন্দুর স্থানাংক $=(\frac{-c}{2a},\frac{-c}{2a})=(-\frac{12}{8},-\frac{12}{6})=(-\frac{3}{2},-2)$

$\therefore$ Ans. (a)

48. AB সরলরেখার সমীকরণ, $\frac{x}{-3}+\frac{y}{5}=1$

$\Rightarrow 5x-3y=-15$

$\Rightarrow 5x-3y+15=0$ $\therefore$ Ans. (a)

49. OAB ত্রিভুজের ভারকেন্দ্রের স্থানাঙ্ক $(\frac{0+0-3}{3},\frac{0+0+5}{3}) = (-1,\frac{5}{3})$

$\therefore$ Ans. (c)

50. $3x-5y+1=0$ সরলরেখার ঢাল $=-\frac{3}{-5}=\frac{3}{5}$

$\therefore$ Ans. (d)

51. $(-\sqrt{2},-\sqrt{2})$ বিন্দুর পোলার স্থানাঙ্ক

$=(\sqrt{2+2},\tan^{-1}\frac{-\sqrt{2}}{-\sqrt{2}})$

$=(2,\pi+\frac{\pi}{4})=(2,\frac{5\pi}{4})$ $\therefore$ Ans. (c)

52. নির্ণেয় বিন্দু $(\frac{2.(-8)+1.1}{2+1},\frac{2.1+1.(-2)}{2+1})$

$=(-5,0)$ $\therefore$ Ans. (d)

53. $D\equiv(\frac{-3+7}{2},\frac{-3-1}{2})=(2,-2)$

$\therefore$ $CD=\sqrt{(5-2)^2+(2+2)^2}=5$

$\therefore$ Ans. (d)

54. (–3,–3) (7,–1) (5,2)
(0, 0) (10, 2) (8, 5)

$\therefore$ ΔABC এর ক্ষেত্রফল $=\frac{1}{2}(10\times5-2\times8)$

$=\frac{1}{2}(50-16)=17$ $\therefore$ Ans. (c)

55. x অক্ষের উপর লম্ব এবং মূলবিন্দুগামী রেখার সমীকরণ, $x=0$ $\therefore$ Ans. (a)

56. $x-y-2=0$ এবং $2x-2y+4=0\Rightarrow x-y+2=0$ রেখাদ্বয়ের মধ্যবর্তী দূরত্ব $=\frac{|-2-2|}{\sqrt{1+1}}=\frac{4}{\sqrt{2}}=2\sqrt{2}$

$\therefore$ Ans. (c)

57. $y=-2x$ এবং $2y=x\Rightarrow y=\frac{1}{2}x$ রেখাদ্বয়ের ঢালদ্বয়ের গুণফল $=-1$

$\therefore$ তাদের মধ্যবর্তী কোণ 90^0 . $\therefore$ Ans. (a)

58. কোনো বিন্দুর পোলার স্থানাংকের কোণটি 90^0 হলে ঐ বিন্দুর কার্তেসীয় স্থানাংকের ভুজ, $x=r\cos 90^0=0$

$\therefore$ Ans. (b)

59. AB সরলরেখার সমীকরণ,

$x\cos60^0+y\sin60^0=3$

$\Rightarrow x.\frac{1}{2}+y.\frac{\sqrt{3}}{2}=3\Rightarrow x+\sqrt{3}y=6$

$\therefore$ Ans. (b)

60. $OA=6$

$\therefore$ ΔOAC এর ক্ষেত্রফল $=\frac{1}{2}(OA\times OC)\sin60^0$

$=\frac{1}{2}(6\times3).\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{9\sqrt{3}}{2}$ $\therefore$ Ans. (d)

ভর্তি পরীক্ষার MCQ (অতিরিক্ত):

1. $y=3x+7$ এবং $3y-x=8$ সরলরেখাদ্বয়ের অন্তর্ভুক্ত সূক্ষ্মকোণ – [DU 08-09]

Sol^n : এখানে $m_1=3$, $m_2=\frac{1}{3}$

$\tan\theta=|\frac{3-\frac{1}{3}}{1+3.\frac{1}{3}}|=\frac{8}{6}\Rightarrow\theta=\tan^{-1}\frac{4}{3}$

2. $2x-3y+6=0$ রেখার উপর লম্ব এবং (1,-1) বিন্দুগামী রেখার সমীকরণ–[DU, 02-03, 97-98; RU 06-07]

Sol^n : রেখার সমীকরণ $3x+2y=3-2=1$

3. $5x-2y+4=0$ এবং $4x-3y+5=0$ রেখাদ্বয়ের ছেদবিন্দু এবং মূলবিন্দু দিয়ে গমনকারী রেখার সমীকরণ – [DU 05-07; Jt.U 07-08]

Sol^n : সমীকরণ $5(5x-2y)-4(4x-3y)=0$

$\Rightarrow 25x-10y-16x+12y=0$

$\Rightarrow 9x+2y=0$

4. একটি সরলরেখার অক্ষদ্বয়ের মধ্যবর্তী অংশ (2,3) বিন্দুতে সমদ্বিখণ্ডিত হয়। রেখাটির সমীকরণ– [DU04-05]

Sol^n : রেখার সমীকরণ $\frac{x}{2\times2}+\frac{y}{2\times3}=1$

$\Rightarrow 3x+2y=12$

5. সরলরেখা $3x+4y-12=0$ দ্বারা অক্ষদ্বয়ের মধ্যবর্তী খণ্ডিত অংশের দৈর্ঘ্য– [DU 03-04]

Sol^n : দৈর্ঘ্য $=\sqrt{(12/3)^2+(12/4)^2}$

$=\sqrt{16+9}=5$

6. $2x - 5y + 10 = 0$ দ্বারা নির্দেশিত সরলরেখা এবং অক্ষদ্বয় দ্বারা বেষ্টিত ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল– **[DU 99-00]**

Sol^n : $\frac{1}{2}.\frac{10^2}{2\times5}=5$

7. একটি সরলরেখা (3,5) বিন্দু দিয়ে যায় অক্ষদ্বয় হতে বিপরীত চিহ্ন বিশিষ্ট অংশ ছেদ করে। সরলরেখাটির সমীকরণ কি? **[DU 98-99]**

Sol^n : সমীকরণ, $x-y=3-5 \Rightarrow x-y+2=0$

8. α এর কোন মানের জন্য $(\alpha-1)x + (\alpha+1)y = 7$ রেখাটি $3x + 5y + 7 = 0$ রেখার সমান্তরাল হবে? **[DU 01-02]**

Sol^n : $\frac{\alpha-1}{3}=\frac{\alpha+1}{5} \Rightarrow 2\alpha = 8 \Rightarrow \alpha = 4$

9. $5x-5\sqrt{3}y + 2=0$ এবং $3\sqrt{3}x+3y=4$ রেখা দুইটির অন্তর্ভুক্ত কোণ হবে– **[BUET 06-07]**

Sol^n : এখানে, $m_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}$, $m_2 = -\sqrt{3}$

$m_1 m_2 = -1$ $\therefore$ অন্তর্ভুক্ত কোণ $= 90°$

10. (2,3) বিন্দু হতে $4x + 3y - 7 = 0$ রেখার সাপেক্ষে প্রতিবিম্ব বিন্দুর দূরত্ব – **[BUET 06-07]**

Sol^n : দূরত্ব $= 2\frac{|8+9-7|}{\sqrt{16+9}}=\frac{2.10}{5}=4$

11. মূলবিন্দু হতে $3x + 4y = 10$ রেখটির লম্বদূরত্ব **[DU 07-08, Jt.U 07-08]**

Sol^n : লম্বদূরত্ব $=\frac{|-10|}{\sqrt{9+16}}=2$

12. (4, –2) বিন্দু হতে $5x + 12y = 3$ রেখার উপর অঙ্কিত লম্বের দৈর্ঘ্য – **[DU 06-07, 04-05; RU 06-07, 05-06; CU 02-03]**

Sol^n : লম্বদূরত্ব $=\frac{|20-24-3|}{\sqrt{25+144}}=\frac{7}{13}$

13. α সূক্ষ্মকোণ হলে $x\cos\alpha + y\sin\alpha = 4$ এবং $4x + 3y = 5$ সমান্তরাল রেখাদ্বয়ের দূরত্ব– **[DU 06-07**

Sol^n : সমান্তরাল রেখাদ্বয়ের দূরত্ব =

$$\left|\frac{-4}{\sqrt{\cos^2\alpha+\sin^2\alpha}}-\frac{-5}{\sqrt{4^2+3^2}}\right|$$
$= 4-1 = 3$

14. (1, –1) এবং (2,4) বিন্দুদ্বয়ের সংযোগ রেখাংশের লম্ব সমদ্বিখন্ডকের সমীকরণ– **[DU 04-05]**

Sol^n : লম্ব সমদ্বিখন্ডকের সমীকরণ

$$(1-2)x+(-1-4)y=\frac{1}{2}(1^2+1^2-2^2-4^2)$$
$\Rightarrow -x-5y+10=0 \Rightarrow x+5y-10=0$

15. (–5,7) ও (3,–1) বিন্দুদ্বয়ের সংযোগ রেখাংশের লম্ব সমদ্বিখন্ডকের সমীকরণ–**[DU00-01;RU06-07]**

Sol^n : $-8x+8y=\frac{1}{2}(25+49-9-1)=32$

$\Rightarrow x-y+4=0$

16. $y = 1 + \frac{1}{2+x}$ বক্ররেখা x- অক্ষকে A বিন্দুতে এবং y - অক্ষকে B বিন্দুতে ছেদ করলে AB রেখার সমীকরণ – **[DU 07-08, Jt.U 08-09]**

Sol^n : $2y + xy = 2 + x + 1$

$\Rightarrow x-2y+3=0$ [$\because$ সরলরেখায় xy থাকেনা]

17. x এর কোন মানের জন্য (1, –x), (1, x) এবং (x^2, –1) বিন্দু তিনটি একই রেখায় অবস্থান করবে? **[BUET 12-13]**

Sol^n : $\begin{vmatrix}1 & 1 & x^2 & 1\\ -x & x & -1 & -x\end{vmatrix}=0$

$\Rightarrow x-1-x^3-(-x+x^3-1)=0$
$\Rightarrow x-1-x^3+x-x^3+1=0$
$\Rightarrow -2x^2+2x=0$
$\Rightarrow x(x-1)(x+1)=0$
$\Rightarrow x=0, 1, -1$

সৃজনশীল প্রশ্ন :

1. $y=2x+1$ ও $2y-x=4$ দুইটি সরলরেখার সমীকরণ।

(a) মূলবিন্দু ও প্রদত্ত রেখাদ্বয়ের ছেদ বিন্দুগামী রেখার সমীকরণ নির্ণয় কর।

সমাধান : (a) ধরি, প্রদত্ত রেখাদ্বয়ের ছেদবিন্দুগামী রেখার সমীকরণ,

$2x - y + 1 + k(x - 2y + 4) = 0 \cdots$ (i) ; যা মূলবিন্দু $(0, 0)$ দিয়ে অতিক্রম করে।

$\therefore \; 2\times0 - 0 + 1 + k(0 - 2\times0 + 4) = 0$

$\Rightarrow 4k = -1 \Rightarrow k = -\frac{1}{4}$

$\therefore$ (i) হতে পাই, $2x - y + 1 - \frac{1}{4}(x - 2y + 4) = 0$

$\Rightarrow 8x - 4y + 4 - x + 2y - 4 = 0$

$\Rightarrow 7x - 2y = 0$ (Ans.)

(b) রেখা দুইটির অন্তর্ভুক্ত কোণদ্বয়ের সমদ্বিখন্ডক y – অক্ষকে P ও Q বিন্দুতে ছেদ করলে PQ এর দূরত্ব নির্ণয় কর।

সমাধান : প্রশ্নমালা III G এর 6(a) দ্রষ্টব্য।

(c) মূলবিন্দু থেকে $\sqrt{5}$ একক দূরত্বে এবং $2y - x = 4$ রেখার উপর লম্ব রেখাদ্বয়ের সমীকরণ নির্ণয় কর।

সমাধান : ধরি, $2y - x = 4 \Rightarrow x - 2y + 4 = 0$ রেখার উপর লম্ব সরলরেখার সমীকরণ,

$2x + y + k = 0$

মূলবিন্দু $(0,0)$ হতে (i) এর লম্ব দূরত্ব $= \frac{|k|}{\sqrt{2^2 + 1^2}}$

প্রশ্নমতে, $\frac{|k|}{\sqrt{2^2+1^2}} = \sqrt{5} \Rightarrow k = \pm 5$

$\therefore$ রেখাসমূহের সমীকরণ, $2x + y \pm 5 = 0$

2. A(1, 1) , B(3, 4) এবং C(5, – 2) বিন্দু তিনটি ABC ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দু ।

(a) A শীর্ষগামী ABC ত্রিভুজের মধ্যমার সমীকরণ নির্ণয় কর ।

সমাধান: BC এর মধ্যবিন্দুর স্থানাঙ্ক

$= (\frac{3+5}{2}, \frac{4-2}{2}) = (4, 1)$

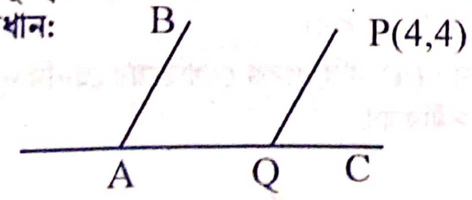
A(1, 1) শীর্ষগামী নির্ণেয় মধ্যমার সমীকরণ,

$(x - 4)(1-1) - (y-1)(4-1) = 0$

$\therefore y - 1 = 0$ (Ans.)

(b) AB রেখার সমান্তরাল বরাবর (4, 4) বিন্দু হতে AC এর দূরত্ব নির্ণয় কর ।

সমাধান:



AB বাহুর ঢাল $= \frac{1-4}{1-3} = \frac{3}{2}$

AB এর সমান্তরাল এবং P(4, 4) বিন্দুগামী PQ রেখার সমীকরণ, $y - 4 = \frac{3}{2}(x - 4)$

$\Rightarrow 2y - 8 = 3x - 12$

$\Rightarrow 3x - 2y - 4 = 0 \cdots\cdots$ (i)

AC বাহুর সমীকরণ,

$(x - 1)(1+2) - (y-1)(1-5) = 0$

$\Rightarrow 3(x - 1) + 4(y-1) = 0$

$\Rightarrow 3x - 3 + 4y - 4 = 0$

$\Rightarrow 3x + 4y - 7 = 0 \cdots\cdots$ (ii)

$(ii) - (i) \Rightarrow 6y - 3 = 0 \Rightarrow y = \frac{1}{2}$

(i) হতে, $3x - 2.\frac{1}{2} - 4 = 0 \Rightarrow x = \frac{5}{3}$

$\therefore$ Q বিন্দুর স্থানাঙ্ক $(\frac{5}{3}, \frac{1}{2})$ $\cdots\cdots$(i)

$\therefore$ নির্ণেয় দূরত্ব , $PQ = \sqrt{(4 - \frac{5}{3})^2 + (4 - \frac{1}{2})^2}$

$= \sqrt{(\frac{7}{3})^2 + (\frac{7}{2})^2} = \sqrt{\frac{49}{9} + \frac{49}{4}}$

$= 7\sqrt{\frac{1}{9} + \frac{1}{4}} = 7\sqrt{\frac{4+9}{36}} = \frac{7\sqrt{13}}{6}$ একক।

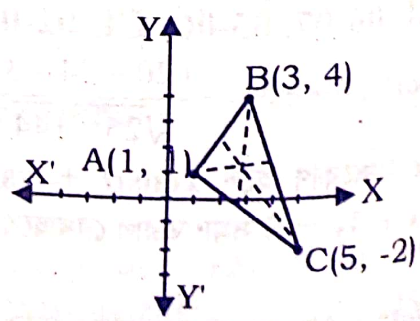
(b) AB ও AC এর মধ্যবিন্দুর সংযোগ রেখার সমীকরণ নির্ণয় কর।

সমাধান: প্রশ্নমালা III E এর 3(a) দ্রষ্টব্য।

[কু.'০৬,'০৮;ঢা.'১১;কু.'১৪; মা.বো.'০৭; য.'০৯]

(c) ABC ত্রিভুজের অন্তঃকেন্দ্র নির্ণয় কর ।

সমাধান:



$a = BC = \sqrt{(3-5)^2 + (4+2)^2} = \sqrt{4+36}$

$= 2\sqrt{10}$

$b = CA = \sqrt{(1-5)^2+(1+2)^2} = \sqrt{16+9} = 5$

$c = AB = \sqrt{(1-3)^2+(1-4)^2} = \sqrt{4+9} = \sqrt{13}$

∴ ABC ত্রিভুজের অন্তঃকেন্দ্রের স্থানাঙ্ক

$= \left(\frac{ax_1+bx_2+cx_3}{a+b+c}, \frac{ay_1+by_2+cy_3}{a+b+c}\right)$

$= \left(\frac{2\sqrt{10}.1+5.3+\sqrt{13}.5}{\sqrt{10}+5+\sqrt{13}}, \frac{2\sqrt{10}.1+5.4+\sqrt{13}.(-2)}{\sqrt{10}+5+\sqrt{13}}\right)$

$= \left(\frac{15+2\sqrt{10}+5\sqrt{13}}{5+2\sqrt{10}+\sqrt{13}}, \frac{20+2\sqrt{10}-2\sqrt{13}}{5+2\sqrt{10}+\sqrt{13}}\right)$

বিকল্প পদ্ধতি: AB, BC ও CA বাহু তিনটির সমীকরণ যথাক্রমে,

$(x-1)(1-4)-(y-1)(1-3)=0$

$\Rightarrow -3x+3+2y-2=0$

$\Rightarrow 3x-2y-1=0 \cdots\cdots (1)$

$(x-3)(4+2)-(y-4)(3-5)=0$

$\Rightarrow 6x-18+2y-8=0$

$\Rightarrow 3x+y-13=0 \cdots\cdots (2)$ এবং

$(x-1)(1+2)-(y-1)(1-5)=0$

$\Rightarrow 3x-3+4y-4=0$

$\Rightarrow 3x+4y-7=0 \cdots\cdots (3)$

চিত্রে ABC ত্রিভুজটি দেখানো হয়েছে।

চিত্র থেকে এটা স্পষ্ট যে, ত্রিভুজটির ∠BAC কোণ মূলবিন্দু ধারণ করে কিন্তু ∠ABC ও ∠ACB কোণ দুইটি মূলবিন্দু ধারণ করে না।

$AB = 3x-2y-1=0 \cdots\cdots (1)$

$BC = 3x+y-13=0$

$CA = 3x+4y-7=0$

∴ ∠BAC এর সমদ্বিখন্ডক

$\frac{3x-2y-1}{\sqrt{9+4}} = \frac{3x+4y-7}{\sqrt{9+16}}$

$\Rightarrow \frac{3x-2y-1}{\sqrt{13}} = \frac{3x+4y-7}{5}$

$\Rightarrow 15x-10y-5=3\sqrt{13}\,x+4\sqrt{13}\,y-7\sqrt{13}$

$\Rightarrow (15-3\sqrt{13})x-(10+4\sqrt{13})y-5+7\sqrt{13}=0$

∠ABC এর সমদ্বিখন্ডক

$\frac{3x-2y-1}{\sqrt{9+4}} = -\frac{3x+y-13}{\sqrt{9+1}}$

$\Rightarrow \frac{3x-2y-1}{\sqrt{13}} = -\frac{3x+y-13}{\sqrt{10}}$

$\Rightarrow 3\sqrt{13}\,x+\sqrt{13}\,y-13\sqrt{13} = -3\sqrt{10}\,x+2\sqrt{10}+\sqrt{10}$

$\Rightarrow (3\sqrt{13}+3\sqrt{10})x+(\sqrt{13}-2\sqrt{10})y-13\sqrt{13}-\sqrt{10}=0$

∠ACB এর সমদ্বিখন্ডক

$\frac{3x+4y-7}{\sqrt{9+16}} = -\frac{3x+y-13}{\sqrt{9+1}}$

$\Rightarrow \frac{3x+4y-7}{5} = -\frac{3x+y-13}{\sqrt{10}}$

$\Rightarrow 15x+5y-65 = -3\sqrt{10}\,x-4\sqrt{10}\,y+7\sqrt{10}$

$\Rightarrow (15+3\sqrt{10})x+(5+4\sqrt{10})y-65-7\sqrt{10}=0$

∴ ত্রিভুজের কোণগুলির সমদ্বিখন্ডকের সমীকরণ,

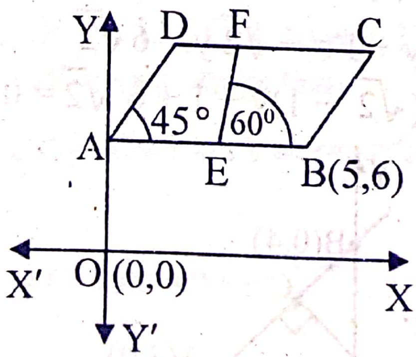
$(15-3\sqrt{13})x-(10+4\sqrt{13})y$
$5+7\sqrt{13}=0,$

$(3\sqrt{13}+3\sqrt{10})x+(\sqrt{13}-2\sqrt{10})y-13\sqrt{13}-\sqrt{10}=0$ এবং

$(15+3\sqrt{10})x+(5+4\sqrt{10})y-65-7\sqrt{10}=0$

ত্রিভুজের কোণগুলির সমদ্বিখন্ডত্রয়ের যেকোনো দুইটির ছেদবিন্দু হবে ABC ত্রিভুজের অন্তঃকেন্দ্র।

3. চিত্রে, ABCD সামান্তরিকে AB বাহু x অক্ষের সমান্তরাল। AB এর মধ্যবিন্দু E.



(a) AD বাহুর সমীকরণ নির্ণয় কর।

সমাধান: AD বাহুর ঢাল m = tan 45° = 1,

y অক্ষের ছেদাংশ c = B বিন্দুর y স্থানাঙ্ক = 6

$\therefore$ AD বাহুর সমীকরণ $y = mx + c$

$\Rightarrow y = x + 6 = x + 6 \Rightarrow x - y + 6 = 0$

(b) EF রেখার সমীকরণ নির্ণয় কর।

সমাধান: এখানে, A বিন্দুর স্থানাঙ্ক (0, 6)

$\therefore$ AB এর মধ্যবিন্দু E এর স্থানাঙ্ক

$$\left(\frac{0+5}{2}, \frac{6+6}{2}\right) = \left(\frac{5}{2}, 6\right)$$

EF রেখার ঢাল, $m = \tan 60^0 = \sqrt{3}$

$\therefore$ EF রেখার সমীকরণ $y - 6 = \sqrt{3}\left(x - \frac{5}{2}\right)$

$\Rightarrow 2y - 12 = 2\sqrt{3}x - 5\sqrt{3}$

$\therefore 2\sqrt{3}x - 2y + 12 - 5\sqrt{3} = 0$

(c) $\angle ABC$ এর সমদ্বিখন্ডকের সমীকরণ নির্ণয় কর। x অক্ষের সমান্তরাল এবং B(5, 6) বিন্দুগামী AB বাহুর সমীকরণ $y = 6$.

সমাধান: ABCD সামান্তরিক বলে, AD || BC.

$\therefore$ BC রেখার ঢাল $= \tan 45^0 = 1$

$\therefore$ B(5, 6) বিন্দুগামী BC বাহুর সমীকরণ

$y - 6 = 1(x - 5) \Rightarrow x - y + 1 = 0$

আবার, x-অক্ষের সমান্তরাল B(5, 6) বিন্দুগামী AB বাহুর সমীকরণ $y = 6 \Rightarrow y - 6 = 0$

এখান, $\angle ABC$ এর ক্ষেত্রে,

$a_1a_2 + b_1b_2 = 1 \times 0 + (-1) \times 1 = -1 < 0$

$\therefore$ $\angle ABC$ একটি স্থূলকোণ।

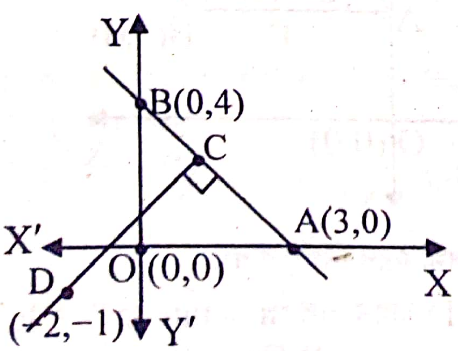
$\therefore$ ABC কোণের সমদ্বিখন্ডকের সমীকরণ,

$$\frac{x - y + 1}{\sqrt{1+1}} = -\frac{y + 6}{\sqrt{1}}$$

$\Rightarrow x - y + 1 = -\sqrt{2}y - 6\sqrt{2}$

$\therefore x + (\sqrt{2} - 1)y + 1 + 6\sqrt{2} = 0$

4.



(a) AB বাহু বিশিষ্ট বর্গের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

সমাধান: $AB = \sqrt{(3-0)^2 + (0-4)^2}$

$= \sqrt{9+16} = 5$

$\therefore$ AB বাহু বিশিষ্ট বর্গের ক্ষেত্রফল $= AB^2 = 5^2$

$= 25$ বর্গ একক।

(b) C বিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

সমাধান: AB রেখার সমীকরণ $\frac{x}{3} + \frac{y}{4} = 1$

$\Rightarrow 4x + 3y - 12 = 0 \cdots \cdots (i)$

আবার, AB এর উপর লম্ব এবং D (–2, –1) বিন্দুগামী CD রেখার সমীকরণ,

$3x - 4y = 3 \times (-2) - 4 \times (-1) = -6 + 4$

$\Rightarrow 3x - 4y + 2 = 0 \cdots \cdots (ii)$

$(i) \times 4 + (ii) \times 3 \Rightarrow 16x + 9x = 48 - 6$

$\Rightarrow 25x = 42 \Rightarrow x = \frac{42}{25}$

(i) হতে, $4 \times \frac{42}{25} + 3y - 12 = 0$

$\Rightarrow 3y = 12 - \frac{168}{25} = \frac{300 - 168}{25} = \frac{132}{25}$

$\Rightarrow y = \frac{44}{25}$

$\therefore$ C বিন্দুর স্থানাঙ্ক $\left(\frac{42}{25}, \frac{44}{25}\right)$

(c) (1, –1) বিন্দুগামী এবং AB রেখার সাথে 45° কোণ উৎপন্ন করে এরূপ রেখার সমীকরণ নির্ণয় কর।

সমাধান : ধরি, (1, –1) বিন্দুগামী রেখার সমীকরণ

$y + 1 = m(x - 1) \cdots (1)$

AB রেখার ঢাল $= \frac{4-0}{0-3} = -\frac{4}{3}$

প্রশ্নমতে, $\tan 45° = \pm \dfrac{m - (-\frac{4}{3})}{1 + m(-\frac{4}{3})}$

$\Rightarrow 1 = \pm \frac{3m + 4}{3 - 4m} \Rightarrow 3 - 4m = \pm(3m + 4)$

'+' নিয়ে, $3 - 4m = 3m + 4 \Rightarrow 7m = -1$

$\Rightarrow m = -\dfrac{1}{7}$

' নিয়ে $3 - 4m = -3m - 4 \Rightarrow m = 7$

$\therefore$ রেখা দুইটির সমীকরণ, $y + 1 = -\dfrac{1}{7}(x - 1)$

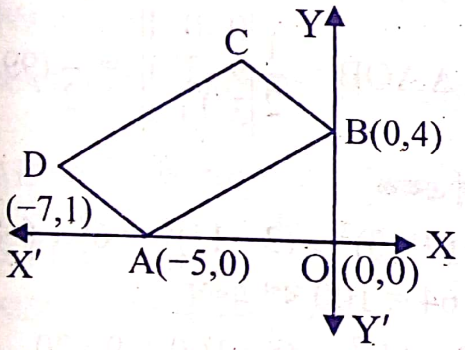
$\Rightarrow x + 7y + 6 = 0$ এবং

$y - 2 = \dfrac{1}{2}(x + 1) \Rightarrow 2y - 4 = x + 1$

$\Rightarrow y + 1 = 7(x - 1) \Rightarrow y + 1 = 7x - 7$

$\therefore 7x - y - 8 = 0$

5. চিত্রে, ABCD একটি সামান্তরিক।



(a) D বিন্দু হতে AB এর লম্ব দূরত্ব নির্ণয় কর।

সমাধান: AB রেখার সমীকরণ, $\dfrac{x}{-5} + \dfrac{y}{4} = 1$

$\Rightarrow 4x - 5y = -20 \Rightarrow 4x - 5y + 20 = 0$

$D(-7, 1)$ বিন্দু হতে AB এর লম্ব দূরত্ব

$= \dfrac{|4\times(-7) - 5\times 1 + 20|}{\sqrt{16 + 25}}$

$= \dfrac{|-28 - 5 + 20|}{\sqrt{41}} = \dfrac{|-13|}{\sqrt{41}} = \dfrac{13}{\sqrt{41}}$ একক

(b) AC বাহু বিবেচনা করে অঙ্কিত বর্গের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

সমাধান: ধরি, C বিন্দুর স্থানাঙ্ক (α, β).

ABCD একটি সামান্তরিক বলে, BD কর্ণের মধ্যবিন্দু $\left(\dfrac{0-7}{2}, \dfrac{4+1}{2}\right)$ অর্থাৎ $\left(\dfrac{-7}{2}, \dfrac{5}{2}\right)$ এবং

AC কর্ণের মধ্যবিন্দু $\left(\dfrac{-5+x}{2}, \dfrac{0+y}{2}\right)$ একই হবে।

$\therefore \dfrac{-5+x}{2} = \dfrac{-7}{2} \Rightarrow x = -7 + 5 = -2$ এবং

$\dfrac{y}{2} = \dfrac{5}{2} \Rightarrow y = 5$

$\therefore$ C বিন্দুর স্থানাঙ্ক $(-2, 5)$

এখন, $AC = \sqrt{(-5+2)^2 + (0-5)^2} = \sqrt{9+25} = \sqrt{34}$

$\therefore$ AC বাহু বিবেচনা করে অঙ্কিত বর্গের ক্ষেত্রফল $= AC^2 = (\sqrt{34})^2 = 34$ বর্গ একক।

(c) B বিন্দু হতে DA এর উপর অঙ্কিত লম্বের পাদবিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর

সমাধান: AD রেখার সমীকরণ $\dfrac{x+7}{-7+5} = \dfrac{y-1}{1-0}$

$\Rightarrow x + 7 = -2y + 2$

$\Rightarrow x + 2y + 5 = 0 \;\cdots\cdots (i)$

আবার, AD এর উপর লম্ব এবং $B(0, 4)$ বিন্দুগামী রেখার সমীকরণ,

$2x - y = 2 \times 0 - 4$

$\Rightarrow 2x - y + 4 = 0 \cdots\cdots (ii)$

$(i) + (ii) \times 2 \Rightarrow x + 4x = -5 - 8$

$\Rightarrow 5x = -13 \Rightarrow x = -\dfrac{13}{5}$

(ii) হতে, $2\times\left(-\dfrac{13}{5}\right) - y + 4 = 0$

$\Rightarrow y = 4 - \dfrac{26}{5} = \dfrac{20 - 26}{5} = -\dfrac{6}{5} \Rightarrow y = -\dfrac{6}{5}$

$\therefore$ লম্বের পাদবিন্দুর স্থানাঙ্ক $\left(-\dfrac{13}{5}, -\dfrac{6}{5}\right)$

6. $A(1, 1), B(-4, 13), C(8, 8)$ এবং D বিন্দুগুলি একটি রম্বসের কৌণিক বিন্দু।

(a) AC কর্ণ দ্বারা y-অক্ষের খন্ডিত অংশের দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

সমাধান: AC কর্ণের সমীকরণ $\dfrac{x-1}{1-8} = \dfrac{y-1}{1-8}$

$\Rightarrow x - 1 = y - 1 \Rightarrow x - y = 0$; যা মূলবিন্দুগামী সরলরেখার সমীকরণ।

$\therefore$ AC কর্ণ দ্বারা y-অক্ষের খন্ডিত অংশের দৈর্ঘ্য 0

(b) BD কর্ণের সমীকরণ নির্ণয় কর।

সমাধান: AC কর্ণের ঢাল $= \frac{1-8}{1-8} = 1$

রম্বসের কর্ণদ্বয় পরস্পরের উপর লম্ব।

$\therefore$ BD কর্ণের ঢাল $= -1$

$\therefore$ $B(-4, 13)$ বিন্দুগামী BD কর্ণের সমীকরণ

$y - 13 = -1(x + 4) \Rightarrow y - 13 = -x - 4$

$\therefore$ $x + y - 9 = 0$ (Ans.)

(c) ভেক্টর পদ্ধতিতে $\angle ABC$ এর মান নির্ণয় কর.

সমাধান: $\overrightarrow{BA} = (1+4)\hat{i} + (1-13)\hat{j}$

$= 5\hat{i} - 12\hat{j}$

এবং $\overrightarrow{BC} = (8+4)\hat{i} + (8-13)\hat{j} = 12\hat{i} - 5\hat{j}$

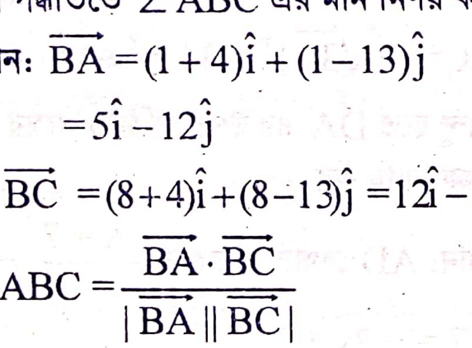
$$\therefore \cos ABC = \frac{\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{BA}||\overrightarrow{BC}|}$$

$$= \frac{(5\hat{i} - 12\hat{j}) \cdot (12\hat{i} - 5\hat{j})}{|5\hat{i} - 12\hat{j}||12\hat{i} - 5\hat{j}|}$$

$$= \frac{60 + 60}{\sqrt{25 + 144}\sqrt{25 + 144}} = \frac{120}{169}$$

$$\therefore \angle ABC = \cos^{-1}\left(\frac{120}{169}\right)$$

7.



(a) $3x + 5y = 11$ দ্বারা x - অক্ষের খন্ডিত অংশের দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

সমাধান: $3x + 5y = 11 \Rightarrow \frac{3x}{11} + \frac{5y}{11} = 1$

$$\Rightarrow \frac{x}{11/3} + \frac{y}{11/5} = 1$$

$\therefore$ x - অক্ষের খন্ডিত অংশের দৈর্ঘ্য $= \frac{11}{3}$

(b) OC রেখার সমীকরণ নির্ণয় কর।

সমাধান: AB রেখার ঢাল $= \frac{11-3}{3-9} = \frac{8}{-6} = -\frac{4}{3}$

AB রেখার উপর লম্ব OC রেখার ঢাল

$= -\left(-\frac{3}{4}\right) = \frac{3}{4}$

মূলবিন্দুগামী এবং $\frac{3}{4}$ ঢালবিশিষ্ট OC রেখার সমীকরণ

$y = mx \Rightarrow y = \frac{3}{4}x \quad \therefore 4y = 3x$ (Ans.)

(c) $\Delta AOB : AB^2$ নির্ণয় কর।

সমাধান: $\Delta AOB = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 9 & 3 & 1 \\ 3 & 11 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}(99 - 9)$

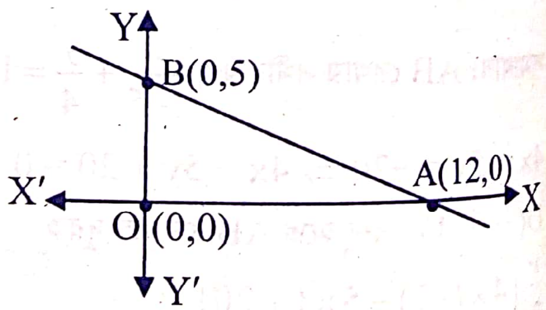
$= 45$ বর্গ একক

$AB^2 = (9-3)^2 + (3-11)^2 = 6^2 + (-8)^2$

$= 36 + 64 = 100$ বর্গ একক

$\therefore$ $\Delta AOB : AB^2 = 45 : 100 = 9 : 20$

8.



(a) উদ্দীপকে উল্লেখিত OAB ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

সমাধান: OAB ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল

$= \frac{1}{2}(OA \times OB)$

$= \frac{1}{2}(12 \times 5) = 30$ বর্গ একক ।

(b) AB রেখাংশকে $5 : 12$ অনুপাতে অন্ত:বিভক্ত করে এরূপ বিন্দু ও মূলবিন্দুর সংযোগ সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর।

সমাধান: AB রেখাংশকে $5 : 12$ অনুপাতে অন্ত:বিভক্ত করে এরূপ বিন্দুর স্থানাঙ্ক,

$(x_1,y_1)=(\frac{5\times0+12\times12}{5+12},\frac{5\times5+12\times0}{5+12})$

$=(\frac{144}{17},\frac{25}{17})$

$\therefore$ (x_1,y_1) বিন্দু ও মূলবিন্দুর সংযোগ সরলরেখার সমীকরণ, $xy_1-yx_1=0$

$\Rightarrow x.\frac{25}{17}-y.\frac{144}{17}=0$

$\therefore$ $25x-144y=0$ (Ans.)

(c) ΔOAB এর $\angle A$ এর সমদ্বিখন্ডকের সমীকরণ নির্ণয় কর।

সমাধান: OA রেখার সমীকরণ, $y=0\cdots\cdots$ (i)

AB রেখার সমীকরণ, $\frac{x}{12}+\frac{y}{5}=1$

$\Rightarrow 5x+12y=60\Rightarrow 5x+12y-60=0\cdots$ (ii)

এখানে, $\angle OAB$ সূক্ষ্মকোণ এবং

$a_1a_2+b_1b_2=5.0+121>0$

$\therefore$ $\angle A$ সমদ্বিখন্ডকের সমীকরণ,

$\frac{5x+12y-60}{\sqrt{5^2+12^2}}=-\frac{y}{\sqrt{1^2}}$

$\Rightarrow 5x+12y-60=13y$ $\therefore$ $5x-y-60=0$ (Ans.)

9. $3x-4y+12=0\cdots\cdots$ (i) , $7x+\sqrt{15}y-14=0\cdots\cdots$ (ii)

(a) (i) নং রেখা দ্বারা অক্ষদ্বয়ের খন্ডিতাংশের দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

সমাধান: $3x-4y+12=0\Rightarrow 3x-4y=-12$

$\Rightarrow \frac{3x}{-12}-\frac{4y}{-12}=12\Rightarrow\frac{x}{-4}+\frac{y}{3}=12$

$\therefore$ x ও y -অক্ষের খন্ডিতাংশের দৈর্ঘ্য যথাক্রমে $|-4|=4$ ও $|3|=3$.

(b) (i) রেখাস্থ ও মূলবিন্দু হতে 10 একক দূরবর্তী বিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

সমাধান: মনে করি, (i) রেখাস্থ বিন্দুটি $P(\alpha,\beta)$.

$\therefore$ $3\alpha-4\beta+12=0\Rightarrow\alpha=\frac{4\beta-12}{3}$

মূলবিন্দু O এবং $P(\alpha,\beta)$ বিন্দুর মধ্যবর্তী দূরত্ব,

$OP=\sqrt{\alpha^2+\beta^2}=|10|$

$\Rightarrow \alpha^2+\beta^2=100\cdots\cdots$ (i)

$\Rightarrow (\frac{4\beta-12}{3})^2+\beta^2=100$

$\Rightarrow 16\beta^2-96\beta+144+9\beta^2=900$

$\Rightarrow 25\beta^2-96\beta-756=0$

$\Rightarrow \beta=\frac{96\pm\sqrt{9216-4\times25(-756)}}{2\times25}$

$=\frac{96\pm\sqrt{84816}}{2\times25}=\frac{96\pm2\sqrt{21204}}{2\times25}$

$=\frac{48\pm\sqrt{21204}}{25}$

$=\frac{48+\sqrt{21204}}{25},\frac{48-\sqrt{21204}}{25}$

$\therefore$ $\alpha=\frac{4\beta-12}{3}=\frac{1}{3}(\frac{192+4\sqrt{21202}}{25}-12)$

$=\frac{1}{3}(\frac{192+4\sqrt{21202}-300}{25})$

$=\frac{4\sqrt{21202}-108}{75}$, যখন $\beta=\frac{48+\sqrt{21204}}{25}$

$\alpha=\frac{-4\sqrt{21202}-108}{75}$, যখন $\beta=\frac{48-\sqrt{21204}}{25}$

$\therefore$ মূলবিন্দু হতে 10 একক দূরবর্তী বিন্দুর স্থানাঙ্ক

$(\frac{4\sqrt{21202}-108}{75},\frac{48+\sqrt{21204}}{25})$

$(\frac{-4\sqrt{21202}-108}{75},\frac{48-\sqrt{21204}}{25})$

(c) (i) ও (ii) নং সমীকরণদ্বয়ের মধ্যবর্তী কোণের মূলবিন্দুধারী সমদ্বিখন্ডকের ঢাল নির্ণয় কর।

সমাধান: $3x-4y+12=0\cdots\cdots$ (i) ,

$7x+\sqrt{15}y-14=0\cdots\cdots$ (ii)

প্রদত্ত রেখাদ্বয়ের ধ্রুবক পদদ্বয় বিপরীত চিহ্নযুক্ত।

$\therefore$ মূলবিন্দুধারী কোণের সমদ্বিখন্ডকের সমীকরণ,

$\frac{3x-4y+12}{\sqrt{3^2+4^2}}=-\frac{7x+\sqrt{15}y-14}{\sqrt{7^2+(\sqrt{15})^2}}$

$$\Rightarrow \frac{3x-4y+12}{\sqrt{3^2+4^2}} = -\frac{7x+\sqrt{15}y-14}{\sqrt{7^2+(\sqrt{15})^2}}$$

$$\Rightarrow \frac{3x-4y+12}{\sqrt{25}} = -\frac{7x+\sqrt{15}y-14}{\sqrt{49+15}}$$

$$\Rightarrow \frac{3x-4y+12}{5} = -\frac{7x+\sqrt{15}y-14}{8}$$

$$\Rightarrow 24x-32y+96=-35x-5\sqrt{15}y+70$$

$$\Rightarrow 59x-(32-5\sqrt{15})y+26=0$$

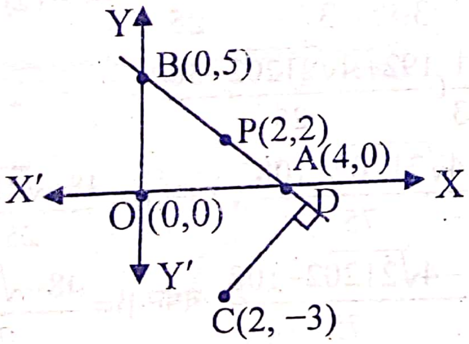
$$\Rightarrow 59x-(32-5\sqrt{15})y+26=0$$

$$\Rightarrow (32-5\sqrt{15})y=59x+26$$

$$\Rightarrow y=\frac{59}{32-5\sqrt{15}}x+\frac{26}{32-5\sqrt{15}}$$

$\therefore$ মূলবিন্দুধারী কোণের সমদ্বিখন্ডকের ঢাল $=\frac{59}{32-5\sqrt{15}}$

10.



(a) P বিন্দুর পোলার স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

সমাধান: P(2, 2) বিন্দুর পোলার স্থানাঙ্ক

$$= (\sqrt{2^2+2^2}, \tan^{-1}\frac{2}{2})$$

$$= (2\sqrt{2}, \tan^{-1}1) = (2\sqrt{2}, \frac{\pi}{4})$$

(b) AB রেখার সাথে 45^0 কোণ উৎপন্ন করে এবং (2, −1) বিন্দুগামী রেখার সমীকরণ নির্ণয় কর।

সমাধান: AB রেখার ঢাল, $m_1 = \frac{5-0}{0-4} = -\frac{5}{4}$

ধরি, (2, −1) বিন্দুগামী রেখার সমীকরণ,

$y + 1 = m(x-2)$; যা AB রেখার সাথে 45^0 কোণ উৎপন্ন করে।

$$\therefore \frac{m-m_1}{1+mm_1} = \tan(\pm 45^0) \Rightarrow \frac{m+\frac{5}{4}}{1-\frac{5}{4}m} = \pm 1$$

$$\Rightarrow \frac{4m+5}{4-5m} = \pm 1 \Rightarrow 4m+5 = \pm(4-5m)$$

'+' নিয়ে, $4m + 5 = 4 - 5m$

$$\Rightarrow 9m = -1 \Rightarrow m = -\frac{1}{9}$$

'–' নিয়ে, $4m + 5 = -4 + 5m$

$$\Rightarrow -m = -9 \Rightarrow m = 9$$

$\therefore$ নির্ণেয় রেখার সমীকরণ,

$$y + 1 = -\frac{1}{9}(x-2) \Rightarrow 9y + 9 = -x + 2$$

$\Rightarrow x + 9y + 7 = 0$ এবং

$$y + 1 = 9(x-2) \Rightarrow 9x - 9 = y + 1$$

$$\Rightarrow 9x - y - 10 = 0$$

(c) CD এর মধ্যবিন্দু নির্ণয় কর।

সমাধান: AB রেখার সমীকরণ,

$$\frac{x}{4}+\frac{y}{5}=1 \Rightarrow 5x+4y=20 \cdots (i)$$

AB রেখার উপর লম্ব এবং C(2, −3) বিন্দু CD রেখার সমীকরণ,

$$4x - 5y = 4\times 2 - 5\times(-3)$$

$$\Rightarrow 4x - 5y = 8 + 15$$

$$\Rightarrow 4x - 5y = 23 \cdots\cdots (ii)$$

$$(i)\times 5 + (ii)\times 4 \Rightarrow 25x + 16x = 100 + 92$$

$$\Rightarrow 41x = 192 \Rightarrow x = \frac{192}{41}$$

(i) হতে, $5\times\frac{192}{41} + 4y = 20$

$$\Rightarrow \frac{240}{41} + y = 5 \Rightarrow y = 5 - \frac{240}{41} = -\frac{35}{41}$$

$\therefore$ D বিন্দুর স্থানাঙ্ক $(\frac{192}{41}, -\frac{35}{41})$

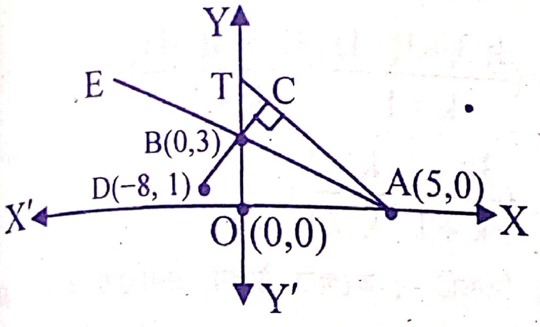
$\therefore$ CD এর মধ্যবিন্দুর স্থানাঙ্ক

$$= (\frac{2+\frac{192}{41}}{2}, \frac{-3-\frac{35}{41}}{2})$$

$=(\frac{82+192}{84},\frac{-123-35}{84})$

$=(\frac{274}{82},\frac{-158}{82})=(\frac{137}{41},\frac{-79}{41})$

11.



(a) P(− 2, 3) ও Q(4, −1) বিন্দুগামী রেখাংশকে y - অক্ষ যে অনুপাতে বিভক্ত করে তা নির্ণয় কর।

সমাধান: ধরি, P(− 2, 3) ও Q(4, −1) বিন্দুগামী রেখাংশকে y - অক্ষ k : 1 অনুপাতে R বিন্দুতে বিভক্ত করে।

$\therefore$ R বিন্দুর স্থানাঙ্ক $=(\frac{k.4+1.(-2)}{k+1},\frac{k.(-1)+1.3}{k+1})$

$=(\frac{4k-2}{k+1},\frac{-k+3}{k+1})$

R বিন্দু y - অক্ষের উপর অবস্থিত বলে এর x - স্থানাঙ্ক শূন্য হবে।

$\therefore \frac{4k-2}{k+1}=0 \Rightarrow 4k-2=0 \Rightarrow k=\frac{1}{2}$

$\Rightarrow k:1=1:2$

$\therefore$ নির্ণেয় অনুপাত 1 : 2 (Ans.)

(b) AC রেখার সমীকরণ নির্ণয় কর।

সমাধান: B(0,3) ও D(−8, 1) বিন্দুগামী CD রেখার সমীকরণ,

$(x-0)(3-1)-(y-3)(0+8)=0$

$\Rightarrow 2x-8y+24=0 \Rightarrow x-4y+12=0$

CD রেখার উপর লম্ব AC রেখার সমীকরণ,

$4x+y+k=0$; যা A(5, 0) বিন্দুগামী।

$\therefore 4.5-0+k=0 \Rightarrow k=-20$

$\therefore$ AC রেখার সমীকরণ, $4x+y-20=0$

(c) দেখাও যে, AE ও OT রেখার অন্তর্গত কোণের সমদ্বিখন্ডকদ্বয় পরস্পর লম্ব।

সমাধান: A(5,0) ও B(0,3) বিন্দুগামী AE রেখার সমীকরণ, $(x-5)(0-3)-(y-0)(5-0)$

$\Rightarrow -3x+15-5y=0$

$\Rightarrow 3x+5y-15=0 \cdots$ (i)

OT অর্থাৎ y অক্ষের সমীকরণ, $x=0 \cdots$ (ii) AE ও OT রেখার অন্তর্গত কোণের সমদ্বিখন্ডকদ্বয়ের সমীকরণ, $\frac{3x+5y-15}{\sqrt{3^2+5^2}}=\pm\frac{y}{\sqrt{1^2}}$

$\Rightarrow 3x+5y-15=\pm\sqrt{34}y$

$\Rightarrow 3x+(5\pm\sqrt{34})y-15=0$

$\therefore 3x+(5+\sqrt{34})y-15=0$,

$3x+(5-\sqrt{34})y-15=0$

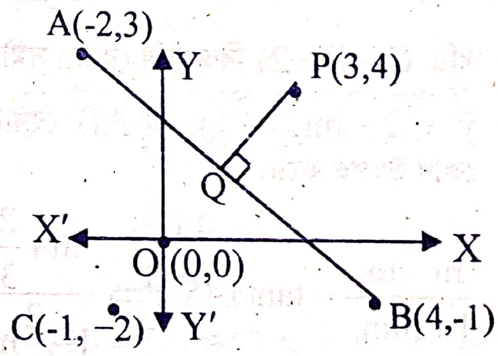
এ সমদ্বিখন্ডকদ্বয়ের ক্ষেত্রে,

$a_1a_2+b_1b_2=3\times3+(5+\sqrt{34})(5-\sqrt{34})$

$=9+25-34=34-34=0$

$\therefore$ AE ও OT রেখার অন্তর্গত কোণের সমদ্বিখন্ডকদ্বয় পরস্পর লম্ব।

12.



(a) AB রেখাকে y-অক্ষ যে অনুপাতে বিভক্ত করে তা নির্ণয় কর।

সমাধান: AB রেখাকে P বিন্দু k : 1 অনুপাতে বিভক্ত করলে এর স্থানাঙ্ক

$=(\frac{k.4+1(-2)}{k+1},\frac{k.(-1)+1.3}{k+1})$

P বিন্দুটি y-অক্ষের উপর অবস্থিত হলে এর x-স্থানাঙ্ক শূন্য হবে।

$\therefore \frac{4k-2}{k+1}=0 \Rightarrow 4k-2=0 \Rightarrow k=\frac{1}{2}$

$\Rightarrow k:1=1:2$

(b) Q বিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

সমাধান: A(-2,3) ও B(4,-1) বিন্দুগামী AB রেখার সমীকরণ,

$(x+2)(3+1)-(y-3)(-2-4)=0$

$\Rightarrow 4(x+2)+6(y-3)=0$
$\Rightarrow 2x+4+3y-9=0$
$\Rightarrow 2x+3y=5 \cdots\cdots$ (i)

AB রেখার উপর লম্ব এবং P(3, 4) বিন্দুগামী PQ রেখার সমীকরণ, .

$3x-2y=3.3-2.4=9-8$
$\Rightarrow 3x-2y=1 \cdots\cdots$ (ii)
$(i)\times 2+(ii)\times 3 \Rightarrow 4x+9x=10+3$
$\Rightarrow 13x=13 \Rightarrow x=1$
(i) হতে, $3y=5-2x=5-2\times 1$
$\Rightarrow 3y=3 \Rightarrow y=1$
$\therefore$ Q বিন্দুর স্থানাঙ্ক (1, 1)

(c) C বিন্দুগামী এবং AB রেখার সাথে 45^0 কোণ উৎপন্ন করে এরূপ রেখাদ্বয়ের সমীকরণ নির্ণয় কর।

সমাধান: AB রেখার ঢাল, $m_1=\frac{3+1}{-2-4}=\frac{4}{-6}=\frac{2}{3}$

ধরি, C(−1, −2) বিন্দুগামী রেখার সমীকরণ ,

$y+2=m(x+1)$; যা AB রেখার সাথে 45^0 কোণ উৎপন্ন করে।

$$\frac{m-m_1}{1+mm_1}=\tan(\pm 45^0) \Rightarrow \frac{m+\frac{2}{3}}{1-\frac{2}{3}m}=\pm 1$$

$$\Rightarrow \frac{3m+2}{3-2m}=\pm 1 \Rightarrow 3m+2=\pm(3-2m)$$

'+' নিয়ে, $3m+2=3-2m$

$\Rightarrow 5m=1 \Rightarrow m=\frac{1}{5}$

'−' নিয়ে, $3m+2=-3+2m \Rightarrow m=-5$

$\therefore$ নির্ণেয় রেখাদ্বয়ের সমীকরণ,

$y+2=\frac{1}{5}(x+1) \Rightarrow 5y+10=x+1$
$\Rightarrow x-5y-9=0$ এবং
$y+2=-5(x+1) \Rightarrow y+2=-5x-5$
$\Rightarrow 5x+y+7=0$

13. ΔABC এর বাহুগুলির মধ্যবিন্দু যথাক্রমে D(−1, −1), E(3, 1), F(0, 3)

(a) DE রেখাংশ অক্ষদ্বয় দ্বারা যে অনুপাতে বিভক্ত হয় তা নির্ণয় কর।

সমাধান: DE রেখাংশ যে বিন্দুতে k : 1 অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত হয় তার স্থানাঙ্ক

$$=\left(\frac{k.3+1(-1)}{k+1}, \frac{k.1+1(-1)}{k+1}\right)$$

$$=\left(\frac{3k-1}{k+1}, \frac{k-1}{k+1}\right)$$

এ বিন্দুটি x-অক্ষের উপর অবস্থিত হলে, এর y স্থানাঙ্ক $\frac{k-1}{k+1}=0 \Rightarrow k=1 \Rightarrow k:1=1:1$

আবার, এ বিন্দুটি y-অক্ষের উপর অবস্থিত হলে, এর x স্থানাঙ্ক $\frac{3k-1}{k+1}=0 \Rightarrow 3k-1=0$

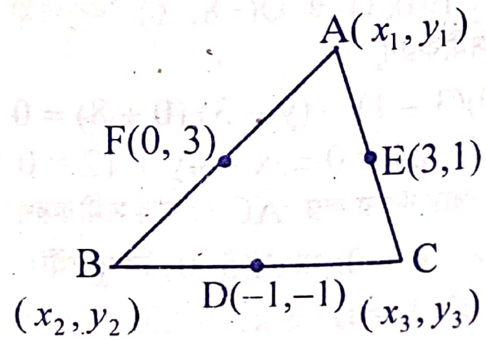
$\Rightarrow k=\frac{1}{3} \Rightarrow k:1=1:3$

$\therefore$ DE রেখাংশ x-অক্ষ দ্বারা 1 : 1 অনুপাতে এবং y-অক্ষ দ্বারা 1 : 3 অনুপাতে বিভক্ত হয়।

(b) ক্ষেত্রফলের সাহায্যে প্রমাণ কর যে,

$\Delta ABC=4\Delta DEF$

প্রমাণ: মনে করি, ABC ত্রিভুজের শীর্ষত্রয় $A(x_1,y_1)$, $B(x_2,y_2)$ ও $C(x_3,y_3)$ এবং BC, CA ও AB এর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে D(−1, −1), E(3 , 1) ও F(0, 3)



$\therefore \frac{x_1+x_2}{2}=0 \Rightarrow x_1+x_2=0 \cdots\cdots (1)$

$y_1+y_2=6 \cdots (2)$, $x_2+x_3=-2 \cdots (3)$
$y_2+y_3=-2 \cdots (4)$, $x_3+x_1=6 \cdots (5)$
$y_3+y_1=2 \cdots (6)$

$(1) + (3) - (5) \Rightarrow 2x_2 = -8 \Rightarrow x_2 = -4$

$\therefore$ (1) হতে পাই, $x_1 = 4$ এবং (3) হতে পাই $x_3 = 2$

আবার, $(2) + (4) - (6) \Rightarrow 2y_2 = 2 \Rightarrow y_2 = 1$

$\therefore$ (2) হতে পাই, $y_1 = 5$ এবং (4) হতে পাই $y_3 = -3$

$\therefore$ শীর্ষত্রয়ের স্থানাঙ্ক A(4, 5), B(−4, 1), C(2, −3)

$\therefore \Delta ABC = \frac{1}{2}|(4+4)(1+3)-(5-1)(-4-2)|$

$= \frac{1}{2}|(8)(4)-(4)(-6)| = \frac{1}{2}|32+24|$

$= \frac{1}{2}|32+24| = 28$ বর্গ একক

$\Delta DEF = \frac{1}{2}|(-1-3)(1-3)-(-1-1)(3-0)|$

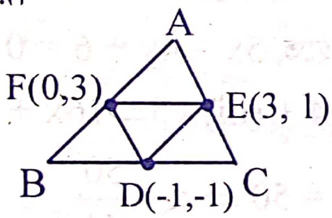
$= \frac{1}{2}|(-4)(-2)-(-2)(3)|$

$= \frac{1}{2}|8+6)| = 7$ বর্গ একক

$\therefore \Delta ABC = 28 = 4 \times 7 = 4\,\Delta DEF$

(c) D, E , F এর স্থানাঙ্ক ব্যবহার করে ΔABC এর পরিকেন্দ্র নির্ণয় কর।

সমাধান:



ধরি, ABC ত্রিভুজে BC , CA ; AB বাহুর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে D(−1, −1), E(3, 1) , F(0 , 3).

$\therefore$ BC || FE , CA || DF এবং AB || ED .

$\therefore$ BC রেখার ঢাল = FE রেখার ঢাল $= \frac{3-1}{0-3} = -\frac{2}{3}$

AC রেখার ঢাল = FD রেখার ঢাল $= \frac{3+1}{0+1} = 4$

$\therefore$ D(−1 , −1) বিন্দুগামী BC বাহুর উপর লম্ব রেখার সমীকরণ, $y + 1 = \frac{3}{2}(x+1)$

$\Rightarrow y = \frac{3}{2}(x+1) - 1 = \frac{3x+3-2}{2}$

$\Rightarrow y = \frac{3x+1}{2} \ldots\ldots$ (i)

E(3, 1) বিন্দুগামী CA বাহুর উপর লম্ব রেখার সমীকরণ $y - 1 = -\frac{1}{4}(x-3)$

$\Rightarrow 4y - 4 = -x + 3$

$\Rightarrow 4 \times \frac{3x+1}{2} - 4 = -x + 3$, [(i) দ্বারা]

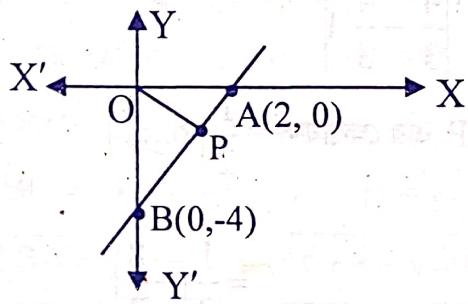
$\Rightarrow 6x + 2 - 4 = -x + 3$

$\Rightarrow 7x = 5 \Rightarrow x = \frac{5}{7}$

(i) হতে, $y = \frac{3 \times \frac{5}{7} + 1}{2} = \frac{15+7}{14} = \frac{22}{14} = \frac{11}{7}$

$\therefore$ ΔABC এর পরিকেন্দ্র $(\frac{5}{7}, \frac{11}{7})$

14.



(a) $x - \sqrt{3}y = 5$ রেখাটি x-অক্ষের ধনাত্মক দিকের সাথে যে কোণ উৎপন্ন করে তা নির্ণয় কর।

সমাধান: $x - \sqrt{3}y = 5 \Rightarrow \sqrt{3}y = x + 5$

$\Rightarrow y = \frac{1}{\sqrt{3}}x + \frac{5}{\sqrt{3}}$ রেখাটি x-অক্ষের ধনাত্মক দিকের সাথে θ কোণ উৎপন্ন করলে,

$\tan\theta = \frac{1}{\sqrt{3}} = \tan 30^0 \therefore \theta = 30^0$ (Ans.)

(b) AB এর উপর লম্ব এবং A বিন্দুগামী রেখাটি y অক্ষকে যে বিন্দুতে ছেদ করে তার স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

সমাধান: AB রেখার সমীকরণ, $\frac{x}{2} + \frac{y}{-4} = 1$

$\Rightarrow 2x - y = 4$

AB এর লম্বরেখার সমীকরণ, $x + 2y + k = 0$; যা A(2, 0) বিন্দু দিয়ে অতিক্রম করে।

(b) যদি E বিন্দু AC এর মধ্যবিন্দু এবং F, AB কে 3 : 2 অনুপাতে বহির্বিভক্ত করে তাহলে ΔAEF এর ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

সমাধান: AC এর মধ্যবিন্দু মধ্যবিন্দু এর স্থানাঙ্ক

$$E = (\frac{-3+3}{2}, \frac{5-7}{2}) = (0,-1)$$

AB কে 3 : 2 অনুপাতে বহির্বিভক্ত করে এরূপ বিন্দু

F এর স্থানাঙ্ক $= (\frac{3.6-2.(-3)}{3-2}, \frac{3.5-2.5}{3-2})$

$$= (\frac{18+6}{1}, \frac{15-10}{1}) = (24,5)$$

$$\delta_{AEF} = \begin{vmatrix} -3 & 5 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 24 & 5 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -3 & 6 & 0 \\ -24 & -6 & 0 \\ 24 & 5 & 1 \end{vmatrix}$$

$= 18 + 144 = 162$

$\therefore$ ΔAEF এর ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2}|\delta_{AEF}| = \frac{1}{2}|162|$

$= 81$ বর্গ একক।

(c) C বিন্দুগামী AB এর লম্বরেখা x-অক্ষের ধনাত্মক দিকের সাথে যে কোণ উৎপন্ন করে তা নির্ণয় কর।

সমাধান: A(−3,5), B(6,5) বিন্দুগামী AB রেখার সমীকরণ,

$(x+3)(5-5) - (y-5)(-3-6) = 0$

$\Rightarrow y - 5 = 0 \cdots \cdots$ (i)

(i) এর উপর লম্বরেখার সমীকরণ,

$x + k = 0$; যা C(3, −7) বিন্দু দিয়ে অতিক্রম করে।

$\therefore$ $3 + k = 0 \Rightarrow k = -3$

C বিন্দুগামী AB এর লম্বরেখার সমীকরণ,

$x - 3 = 0$; যা y- অক্ষের সমান্তরাল।

y- অক্ষের সমান্তরাল সরলরেখা x-অক্ষের ধনাত্মক দিকের সাথে কোণ 90^0 উৎপন্ন করে।

$\therefore$ নির্ণেয় কোণ 90^0.

18. $2x + 5y - 6 = 0 \cdots \cdots$ (i)

(a) (i) নং রেখার ঢাল নির্ণয় কর।

সমাধান: $2x + 5y - 6 = 0 \Rightarrow 5y = -2x + 6$

$\Rightarrow y = -\frac{2}{5}x + \frac{6}{5}$

$\therefore$ (i) নং রেখার ঢাল $= -\frac{2}{5}$

(b) মূলবিন্দু ও (i) নং রেখা দ্বারা অক্ষদ্বয়ের খন্ডিতাংশের মধ্যবিন্দু দিয়ে অতিক্রম করে এরূপ রেখার সমীকরণ নির্ণয় কর।

সমাধান: $2x + 5y - 6 = 0 \Rightarrow 2x + 5y = 6$

$\Rightarrow \frac{2x}{6} + \frac{5y}{6} = 1 \Rightarrow \frac{x}{3} + \frac{y}{6/5} = 1$; যা x-অক্ষকে

A(3, 0) বিন্দুতে এবং y-অক্ষকে $B(0, \frac{6}{5})$ বিন্দুতে ছেদ করে।

AB এর মধ্যবিন্দুর স্থানাঙ্ক $(\frac{3+0}{2}, \frac{0+\frac{6}{5}}{2})$

$= (\frac{3}{2}, \frac{3}{5})$

$\therefore$ মূলবিন্দু (0, 0) ও $(\frac{3}{2}, \frac{3}{5})$ বিন্দুগামী নির্ণেয় রেখার

সমীকরণ, $y = \frac{3/5}{3/2}x \Rightarrow y = \frac{2}{5}x$

$\Rightarrow 2x = 5y$ (Ans.)

(c) (2, −1) বিন্দু হতে (i) নং রেখার উপর যে লম্বরেখার সমীকরণ পাওয়া যায় তা এবং প্রদত্ত রেখার ছেদবিন্দু নির্ণয় কর ক্রেমারের নিয়মে।

সমাধান: প্রদত্ত রেখা $2x + 5y = 6 \cdots$ (i) এর উপর লম্বরেখার সমীকরণ,

$5x - 2y + k = 0 \cdots \cdots$ (ii) ; যা (2, −1) বিন্দু দিয়ে অতিক্রম করে।

$\therefore$ $5.2 - 2.(-1) + k = 0$

$\Rightarrow 10 + 2 + k = 0 \Rightarrow k = -12$

(ii) হতে, $5x - 2y = 12 \cdots \cdots$ (iii)

(i) ও (iii) নং সমীকরণের ক্ষেত্রে, ক্রেমারের নিয়ম ব্যবহার করে পাই,

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 5 & -2 \end{vmatrix} = -4 - 25 = -29$$

$D_x = \begin{vmatrix} 6 & 5 \\ 12 & -2 \end{vmatrix} = -12 - 60 = -72$

$D_y = \begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 5 & 12 \end{vmatrix} = 24 - 30 = -6$

$\therefore \quad x = \frac{D_x}{D} = \frac{-72}{-29} = \frac{72}{29}$

$y = \frac{D_y}{D} = \frac{-6}{-29} = \frac{6}{29}$

$\therefore$ ছেদবিন্দুর স্থানাঙ্ক $(\frac{72}{29}, \frac{6}{29})$

19. $3x - 4y + 18 = 0 \cdots \cdots$ (i)
$4x - 3y - 5 = 0 \cdots \cdots$ (ii)
$5x + 12y + 13 = 0 \cdots \cdots$ (iv)
$y = 1 \cdots \cdots \cdots$ (iv)

(a) (i) নং রেখাটি অক্ষদ্বয়ের সাথে যে ত্রিভুজ গঠন করে তার ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

সমাধান: $3x - 4y + 18 = 0 \Rightarrow 3x - 4y = -18$

$\Rightarrow \frac{3x}{-18} + \frac{-4y}{-18} = 1 \Rightarrow \frac{x}{-6} + \frac{y}{9/2} = 1$

$\therefore$ প্রদত্ত রেখাটি অক্ষদ্বয়ের সাথে যে ত্রিভুজ গঠন করে তার ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2}|ab| = \frac{1}{2}|(-6) \times \frac{9}{2}|$

$= \frac{1}{2}|-27| = \frac{27}{2}$ বর্গ একক।

(b) y-অক্ষের উপর অবস্থিত যে বিন্দু দুইটি হতে (i) নং রেখা সমদূরবর্তী মূলবিন্দু হতে তাদের দূরত্বের সমষ্টি নির্ণয় কর।

সমাধান: মনে করি, y-অক্ষের উপর অবস্থিত $(0, \alpha)$ ও $(0, \beta)$ বিন্দু দুইটি হতে $3x - 4y + 18 = 0 \cdots$(i) নং রেখা সমদূরবর্তী, যেখানে $\alpha \neq \beta$ ।

$\therefore \quad \frac{0 - 4\alpha + 18}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \pm \frac{0 - 4\beta + 18}{\sqrt{3^2 + 4^2}}$

$\Rightarrow -4\alpha + 18 = \pm(-4\beta + 18)$

'+' নিয়ে, $-4\alpha + 18 = -4\beta + 18$

$\Rightarrow -4(\alpha - \beta) = 0 \Rightarrow \alpha = \beta$ কিন্তু $\alpha \neq \beta$

'–' নিয়ে, $-4\alpha + 18 = 4\beta - 18$

$\Rightarrow -4\alpha + 18 = 4\beta - 18$

$\Rightarrow -4(\alpha + \beta) = -36 \Rightarrow \alpha + \beta = 9$

$\therefore$ মূলবিন্দু হতে বিন্দু দুইটির দূরত্বের সমষ্টি $= \alpha + \beta = 9$

(c) (ii), (iii) ও (iv) রেখা তিনটি দ্বারা গঠিত ত্রিভুজের অন্তঃকেন্দ্র নির্ণয় কর।

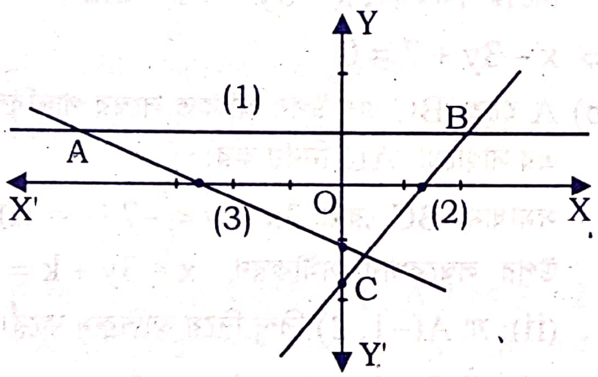
সমাধান: মনে করি, ABC ত্রিভুজের বাহু তিনটি $AB \equiv y - 1 = 0 \cdots (1)$,

$BC \equiv 4x - 3y - 5 = 0 \cdots (2)$

i.e., $\frac{x}{5/4} + \frac{y}{-5/3} = 1$

এবং $CA \equiv 5x + 12y + 13 = 0 \cdots \cdots (3)$

i.e., $\frac{x}{-13/5} + \frac{y}{-13/12} = 1$.



চিত্রে ABC ত্রিভুজটি দেখানো হয়েছে। চিত্র থেকে এটা স্পষ্ট যে, ত্রিভুজটির প্রতিটি কোণ মূলবিন্দু ধারণ করে।

এখন, (1) ও (2) রেখার ধ্রুবক পদের চিহ্ন একই বলে $\angle ABC$ কোণের সমদ্বিখন্ডকের সমীকরণ,

$\frac{y-1}{\sqrt{1}} = \frac{4x - 3y - 5}{\sqrt{16 + 9}}$

$\Rightarrow 5y - 5 = 4x - 3y - 5 \Rightarrow 4x - 8y = 0$

$\Rightarrow x - 2y = 0 \cdots \cdots (4)$

আবার, (1) ও (3) রেখার ধ্রুবক পদের চিহ্ন বিপরীত বলে $\angle BAC$ কোণের সমদ্বিখন্ডকের সমীকরণ,

$\frac{y-1}{\sqrt{1}} = -\frac{5x + 12y + 13}{\sqrt{25 + 144}}$

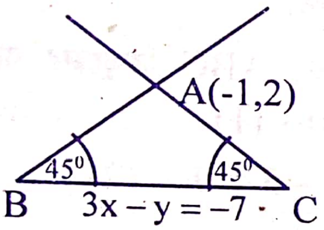
$\Rightarrow 13y - 13 = -5x - 12y - 13$

$\Rightarrow 5x + 25y = 0 \Rightarrow x + 5y = 0 \cdots \cdots (5)$

(4) এবং (5) রেখা সমাধান করে পাই,
$x = 0$ ও $y = 0$.

$\therefore$ প্রদত্ত রেখা তিনটি দ্বারা গঠিত ত্রিভুজের অন্তঃকেন্দ্র (0 , 0) .

20.



(a) $\angle BAC$ এর সমদ্বিখন্ডকের সমীকরণ নির্ণয় কর।

সমাধান: চিত্রানুসারে, $\angle B = \angle C = 45^0$

$\therefore$ $A(-1, 2)$ শীর্ষগামী এবং BC বাহুর উপর লম্বরেখা হবে $\angle BAC$ এর সমদ্বিখন্ডকের সমীকরণ ।

$\therefore$ নির্ণেয় সমীকরণ, $x - 3y = -1 - 3.2$

$\Rightarrow x - 3y + 7 = 0$

(b) A হতে BC এর উপর অঙ্কিত লম্বের পাদবিন্দু D এর সাহায্যে AD নির্ণয় কর।

সমাধান: BC রেখা $3x - y = -7$ ······(i) এর উপর লম্বরেখার সমীকরণ, $x + 3y + k = 0$ ··· (ii); যা $A(-1, 2)$ বিন্দু দিয়ে অতিক্রম করে।

$\therefore$ $-1 + 3.2 + k = 0 \Rightarrow k = -5$

$\therefore$ (ii) হতে, $x + 3y - 5 = 0$

$\Rightarrow x = 5 - 3y$ ··· ··· (iii)

(i) হতে, $3(5 - 3y) - y = -7$

$\Rightarrow 15 - 9y - y = -7$

$\Rightarrow -10y = -22 \Rightarrow y = \dfrac{11}{5}$ এবং

(iii) হতে, $x = 5 - 3\times\dfrac{11}{5} = \dfrac{25-33}{5}$

$\Rightarrow x = \dfrac{-8}{5}$

$\therefore$ A হতে BC এর উপর অঙ্কিত লম্বের পাদবিন্দু D এর স্থানাঙ্ক $(\dfrac{-8}{5}, \dfrac{11}{5})$

$$\therefore \ AD = \sqrt{(-1+\frac{8}{5})^2 + (2-\frac{11}{5})^2}$$

$$= \sqrt{(\frac{-5+8}{5})^2 + (\frac{10-11}{5})^2}$$

$$= \sqrt{\frac{9}{25}+\frac{1}{25}} = \sqrt{\frac{10}{25}} = \sqrt{\frac{2}{5}} \text{ (Ans.)}$$

(c) উদ্দীপকের সাহায্যে AB ও AC এর সমীকরণ নির্ণয় কর।

সমাধান: BC রেখা $3x - y = -7$ এর ঢাল,

$$m_1 = -\frac{3}{-1} = 3$$

ধরি, $C(-1, 2)$ বিন্দুগামী রেখার সমীকরণ,

$y - 2 = m(x + 1)$; যা AB ও AC রেখার সাথে 45^0 কোণ উৎপন্ন করে।

$$\therefore \ \frac{m-m_1}{1+mm_1} = \tan(\pm 45^0) \Rightarrow \frac{m-3}{1+3m} = \pm 1$$

$\Rightarrow m - 3 = \pm(1+3m)$

'+' নিয়ে, $m - 3 = 1 + 3m$

$\Rightarrow -2m = 4 \Rightarrow m = -2$

'−' নিয়ে, $m - 4 = -1 - 3m \Rightarrow 4m = 2$

$m = \dfrac{1}{2}$

$\therefore$ নির্ণেয় সমীকরণ,

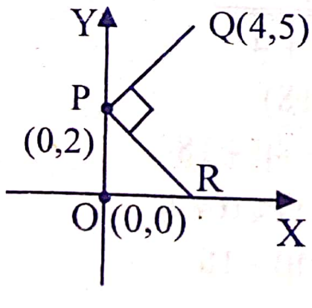
$y - 2 = -2(x + 1) \Rightarrow y - 2 = -2x - 2$

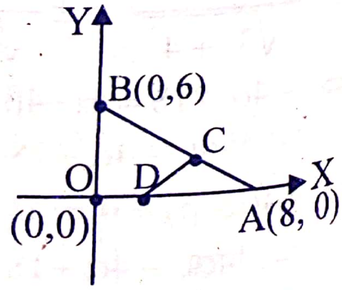
$\Rightarrow 2x + y = 0$ এবং

$y - 2 = \dfrac{1}{2}(x + 1) \Rightarrow 2y - 4 = x + 1$

$\Rightarrow x - 2y + 5 = 0$

21.





AC : BC = 1:2

(a) $P(0,2)$ বিন্দুর পোলার স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

সমাধান: $P(0,2)$ বিন্দুর পোলার স্থানাঙ্ক

$= (r\cos\theta, r\sin\theta)$

এখানে, $r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{0^2 + 2^2} = 2$ এবং

$\theta = \tan^{-1}\frac{y}{x} = \cot^{-1}\frac{x}{y} = \cot^{-1}\frac{0}{2} = 90^0$

$\therefore$ $P(0,2)$ বিন্দুর পোলার স্থানাঙ্ক

$= (2\cos 90^0, 2\sin 90^0)$

(b) PR রেখার সমীকরণ থেকে R বিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

সমাধান: PQ রেখার ঢাল $= \frac{5-2}{4-0} = \frac{3}{4}$

$\therefore$ PQ এর লম্ব PR রেখার ঢাল $= -\frac{4}{3}$

$\therefore$ $P(0, 2)$ বিন্দুগামী PR রেখার সমীকরণ,

$y - 2 = -\frac{4}{3}(x - 0) \Rightarrow 3y - 6 = -4x$

$\Rightarrow 4x + 3y = 6 \Rightarrow \frac{x}{3/2} + \frac{y}{2} = 1$

$\therefore$ R বিন্দুর স্থানাঙ্ক $(\frac{3}{2}, 0)$

(c) $\angle OBA$ এর সমদ্বিখন্ডক BD হলে, ΔDAC এর ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

সমাধান: $AC : BC = 1 : 2$

$\therefore$ C বিন্দুর স্থানাঙ্ক

$= (\frac{1\times0+2\times8}{1+2}, \frac{1\times6+2\times0}{1+2})$

$= (\frac{16}{3}, \frac{6}{3}) = (\frac{16}{3}, 2)$

$\angle OBA$ এর সমদ্বিখন্ডক BD বলে,

$OD : DA = OB : AB = 6 : \sqrt{6^2 + 8^2}$

$= 6 : 10 = 3 : 5$

$\therefore$ $D \equiv (\frac{3\times8+5\times0}{3+5}, \frac{3\times0+5\times0}{3+5}) = (3, 0)$

$\therefore$ ΔDAC এর ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 8 & 0 & 1 \\ 16/3 & 2 & 1 \end{vmatrix}$

$= \frac{1}{2}\{-2(3 - 8)\} = \frac{1}{2}\{-2(-5)\}$

$= 5$ বর্গ একক।

22. $A(3,5), B(7, 5), C(-3, 7), D(-4, -10)$

(a) D বিন্দুর পোলার স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

সমাধান: $D(-4, -10)$ বিন্দুর পোলার স্থানাঙ্ক

$= (r\cos\theta, r\sin\theta)$

এখানে, $r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(-4)^2 + (-10)^2}$

$= \sqrt{16+100} = \sqrt{116} = 2\sqrt{29}$ এবং

$\theta = \tan^{-1}\frac{y}{x} = \tan^{-1}\frac{-10}{-4} = \pi + \tan^{-1}\frac{10}{4}$

$= \pi + \tan^{-1}\frac{5}{2}$

$\therefore$ $D(-4, -10)$ বিন্দুর পোলার স্থানাঙ্ক

$= (2\sqrt{29}\cos\theta, 2\sqrt{29}\sin\theta)$, যেখানে

$\theta = \pi + \tan^{-1}\frac{5}{2}$

(b) যদি E বিন্দু AC এর মধ্যবিন্দু, F, AB কে $3 : 2$ অনুপাতে বহির্বিভক্ত করে এবং G, ΔABC এর ভরকেন্দ্র হয়, তাহলে ΔEFG এর ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

সমাধান: AC এর মধ্যবিন্দু E এর স্থানাঙ্ক $=$ $(\frac{3-3}{2}, \frac{5+7}{2}) = (0,6)$

AB কে $3 : 2$ অনুপাতে বহির্বিভক্ত করে এরূপ বিন্দু

F এর স্থানাঙ্ক $= (\frac{3\times7-2\times3}{3-2}, \frac{3\times5-2\times5}{3-2})$

$= (\frac{21-6}{1}, \frac{15-10}{1}) = (15,5)$

ΔABC এর ভরকেন্দ্র G এর স্থানাঙ্ক

$= (\frac{3+7-3}{3}, \frac{5+5+7}{3}) = (\frac{7}{3}, \frac{17}{3})$

$\therefore$ ΔEFG এর ক্ষেত্রফল

$= \frac{1}{2}|(0-15)(5-\frac{17}{3}) - (6-5)(15-\frac{7}{3})|$

$=\frac{1}{2}|(-15)(-\frac{2}{3})-\frac{38}{3})|$

$=\frac{1}{2}|\frac{30-38}{3}|=\frac{1}{2}|\frac{-8}{3}|=\frac{4}{3}$ বর্গ একক।

(c) C বিন্দুগামী AB এর লম্বরেখা x-অক্ষের ধনাত্মক দিকের সাথে যে কোণ উৎপন্ন করে তা নির্ণয় কর।

সমাধান: A(3,5), B(7, 5) বিন্দুগামী AB রেখার সমীকরণ, $(x-3)(5-5)-(y-5)(3-7)=0$

$\Rightarrow\ y-5=0$

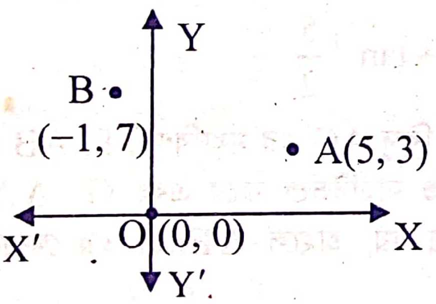
$y-5=0$ রেখার উপর লম্বরেখার সমীকরণ $x+k=0$, যা C(−3, 7) বিন্দুগামী।

$\therefore\ -3+k=0\Rightarrow k=3$

$\therefore$ C বিন্দুগামী AB এর লম্বরেখার সমীকরণ $x+3=0\cdots\cdots$ (i), যা x-অক্ষের উপর লম্ব।

$\therefore$ C বিন্দুগামী AB এর লম্বরেখা x-অক্ষের ধনাত্মক দিকের সাথে 90^0 কোণ উৎপন্ন করে।

23.



(a) y-অক্ষ AB রেখাংশকে যে অনুপাতে বিভক্ত করে তা নির্ণয় কর।

সমাধান: মনে করি, y-অক্ষ AB রেখাংশকে P বিন্দুতে k: 1 অনুপাতে বিভক্ত করে।

P বিন্দুর স্থানাঙ্ক $=(\frac{k.(-1)+1.5}{k+1},\frac{k.7+1.3}{k+1})$; যা y- আক্ষের উপর অবস্থিত।

$\therefore\ \frac{k.(-1)+1.5}{k+1}=0\Rightarrow -k+5=0$

$\Rightarrow k=5\Rightarrow k:1=5:1$

$\therefore$ y-অক্ষ AB রেখাংশকে 5 : 1অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত করে।

(b) B বিন্দুগামী OACB সামান্তরিকের OC কর্ণের উপর লম্ব রেখার সমীকরণ নির্ণয় কর।

সমাধান: ধরি, OACB সামান্তরিকের C শীর্ষের স্থানাঙ্ক (α,β).

সামান্তরিকটির AB কর্ণের মধ্যবিন্দু $(\frac{5-1}{2},\frac{3+7}{2})$ $=(2,5)$ এবং OC কর্ণের মধ্যবিন্দু $(\frac{\alpha}{2},\frac{\beta}{2})$ অভিন্ন।

$\therefore\ \frac{\alpha}{2}=2\Rightarrow\alpha=4,\ \frac{\beta}{2}=5\Rightarrow\beta=10$

$\therefore$ C শীর্ষের স্থানাঙ্ক (4,10)

$\therefore$ OC কর্ণের সমীকরণ, $y=\frac{10}{4}x$

$\Rightarrow y=\frac{5}{2}x\Rightarrow 5x=2y\Rightarrow 3x-2y=0$

$\therefore$ B(−1, 7) বিন্দুগামী OC কর্ণের উপর লম্ব রেখার সমীকরণ, $2x+3y=2.(-1)+3.7$

$\Rightarrow\ 2x+3y=-2+21$

$\Rightarrow\ 2x+3y-19=0$ (Ans.)

(c) $x-y=0$ রেখার সমান্তরাল বরবার O হতে AB এর দূরত্ব নির্ণয় কর।

সমাধান: $x-y=0\Rightarrow y=x\cdots\cdots$ (i)

A(5, 3) ও B(−1, 7) বিন্দুগামী সরলরেখার সমীকরন,

$(x-5)(3-7)-(y-3)(5+1)\}=0$

$\Rightarrow\ -4x+20-6y+18=0$

$\Rightarrow\ -4x-6y+38=0$

$\Rightarrow\ 2x+3y-19=0$

$\Rightarrow\ 2x+3y=19$, [(i) দ্বারা]

$\Rightarrow\ 5x=19\Rightarrow x=\frac{19}{5},\ y=\frac{19}{5}$

$\therefore$ প্রদত্ত রেখা ও এর ছেদবিন্দু $Q(\frac{19}{5},\frac{19}{5})$ (ধরি)।

$\therefore$ নির্ণেয় দূরত্ব $=OQ=\sqrt{(0-\frac{19}{5})^2+(0-\frac{19}{5})^2}$

$=\sqrt{2(\frac{19}{5})^2}=\frac{19\sqrt{2}}{5}$ একক।

24. দৃশ্যকল্প-I: $3x-4y+12=0$.

দৃশ্যকল্প-II: $8x+15y-12=0$.[ঢা.বো. '১৭]

(a) $\vec{A}=\hat{i}-2\hat{j}-3\hat{k}$ এবং $\vec{B}=2\hat{i}-\hat{j}-\hat{k}$ ভেক্টর দুইটি লম্ব কিনা যাচাই কর। ২

সমাধান: $\vec{A}\cdot\vec{B}=(\hat{i}-2\hat{j}-3\hat{k})\cdot(2\hat{i}-\hat{j}-\hat{k})$

$=2+2+3=7\neq 0$

$\therefore$ প্রদত্ত ভেক্টর দুইটি লম্ব নয়।

(b) দৃশ্যকল্প- II নং সরলরেখার সমান্তরাল 2 একক দূরবর্তী সরলরেখার মূলবিন্দু হতে লম্ব দূরত্ব নির্ণয় কর। ৪

সমাধান: $8x+15y-12=0$ ... (i) সরলরেখার সমান্তরাল 2 একক দূরবর্তী সরলরেখার সমীকরণ,

$8x+15y+k=0$ ... ... (ii)

(i) ও (ii) রেখার মধ্যবর্তী দূরত্ব

$=\frac{|k+12|}{\sqrt{8^2+15^2}}=\frac{|k+12|}{17}$

প্রশ্নমতে, $\frac{|k+12|}{17}=2\Rightarrow k+12=\pm 34$

$\Rightarrow k=22,-46$

(ii) হতে, $8x+15y+22=0$,

$8x+15y-46=0$

$\therefore$ মূলবিন্দু হতে এ সরলরেখা দুইটির লম্ব দূরত্ব

$=\frac{|0.x+0.y+22|}{\sqrt{8^2+15^2}}=\frac{22}{17}$ এবং

$\frac{|0.x+0.y-46|}{\sqrt{8^2+15^2}}=\frac{46}{17}$

(c) দৃশ্যকল্প-I এবং দৃশ্যকল্প-II সমীকরণদ্বয়ের মধ্যবর্তী কোণের যে সমদ্বিখন্ডক x অক্ষের সাথে সূক্ষ্মকোণ উৎপন্ন করে তার ঢাল নির্ণয় কর। ৪

সমাধান: $3x-4y+12=0$ ও

$8x+15y-12=0$ রেখাদ্বয়ের মধ্যবর্তী কোণের সমদ্বিখন্ডকের সমীকরণ,

$$\frac{3x-4y+12}{\sqrt{3^2+4^2}}=\pm\frac{8x+15y-12}{\sqrt{8^2+15^2}}$$

$$\Rightarrow \frac{3x-4y+12}{5}=\pm\frac{8x+15y-12}{17}$$

$\Rightarrow 17(3x-4y+12)=\pm 5(8x+15y-12)$

$\therefore\ 51x-68y+204=40x+75y-60$

$\Rightarrow 11x-143y+264=0$ ......(1) এবং

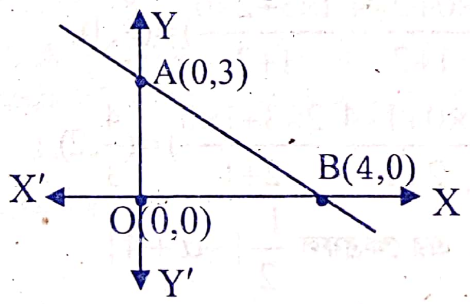
$51x-68y+204=-40x-75y+60$

$\Rightarrow 91x+7y+144=0$ ......(2)

(1) নং সমদ্বিখন্ডকের ঢাল $=\frac{11}{143}>0$, x অক্ষের সাথে সূক্ষ্মকোণ উৎপন্ন করে এবং (2) নং সমদ্বিখন্ডকের ঢাল $=-\frac{91}{7}<0$, x অক্ষের সাথে স্থূলকোণ উৎপন্ন করে।

$\therefore$ নির্ণেয় ঢাল $=\frac{11}{143}=\frac{1}{13}$

25. দৃশ্যকল্প : [চট্টগ্রাম বোর্ড ২০১৭]



(a) (3, 5) ও (6, 7) বিন্দুদ্বয়ের সংযোজক রেখার লম্বদ্বিখন্ডকের ঢাল নির্ণয় কর। ২

সমাধান: (3, 5) ও (6, 7) বিন্দুদ্বয়ের সংযোজক রেখার ঢাল $=\frac{5-7}{3-6}=\frac{-2}{-3}=\frac{2}{3}$

$\therefore$ (3, 5) ও (6, 7) বিন্দুদ্বয়ের সংযোজক রেখার লম্বদ্বিখন্ডকের ঢাল $-\frac{1}{2/3}=-\frac{3}{2}$

(b) দৃশ্যকল্পের আলোকে AB রেখা হতে 3 একক দূরবর্তী সমান্তরাল রেখার সমীকরণ নির্ণয় কর। ৪

সমাধান: AB রেখার সমীকরণ, $\frac{x}{4}+\frac{y}{3}=1$

$\Rightarrow 3x+4y=12\Rightarrow 3x+4y-12=0$ ...(i)

ধরি, (i) রেখা হতে 3 একক দূরবর্তী সমান্তরাল রেখার সমীকরণ $3x + 4y + k = 0 \cdots$(ii)

$\therefore \quad \frac{|k+12|}{\sqrt{3^2+4^2}} = 3 \Rightarrow k + 12 = \pm 15$

$\Rightarrow k = 3, -27$

$\therefore$ নির্ণেয় রেখার সমীকরণ,

$3x + 4y + 3 = 0$ এবং $3x + 4y - 27$

(c) দৃশ্যকল্পের $P(\alpha, 0)$ বিন্দু ও AB রেখাংশের সমত্রিখন্ডন বিন্দুদ্বয় যে ত্রিভুজ গঠন করে তার ক্ষেত্রফল 3 বর্গ একক হলে P বিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর। ৪

সমাধান: মনে করি, AB রেখাংশের সমত্রিখন্ডন বিন্দুদ্বয় C ও D.

C বিন্দু AB রেখাংশকে 1 : 2 অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত করলে, D বিন্দু AB রেখাংশকে 2 : 1 অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত করবে।

$\therefore \quad C \equiv \left(\frac{1\times0+2\times4}{1+2}, \frac{1\times3+2\times0}{1+2}\right) = \left(\frac{8}{3}, 1\right),$

$D \equiv \left(\frac{2\times0+1\times4}{2+1}, \frac{2\times3+1\times0}{2+1}\right) = \left(\frac{4}{3}, 2\right)$

$\therefore \quad \Delta PCD$ এর ক্ষেত্রফল $\frac{1}{2}|-\alpha+4|$

$= \frac{1}{2}\left|(\alpha - \frac{8}{3})(1-2) - (0-1)(\frac{8}{3} - \frac{4}{3})\right|$

$= \frac{1}{2}\left|-\alpha + \frac{8}{3} + \frac{4}{3}\right| = \frac{1}{2}|-\alpha+4|$

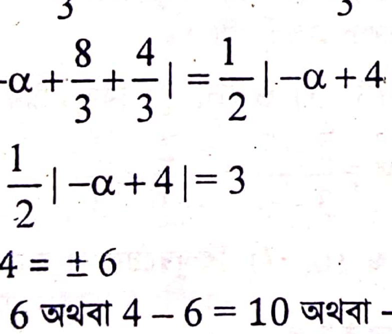
প্রশ্নমতে, $\frac{1}{2}|-\alpha+4| = 3$

$\Rightarrow -\alpha + 4 = \pm 6$

$\Rightarrow \alpha = 4 + 6$ অথবা $4 - 6 = 10$ অথবা -2

$\therefore$ P বিন্দুর স্থানাঙ্ক $(10, 0)$ অথবা $(-2, 0)$ একক।

26. [য .বো.'১৭]



চিত্রে : $G, \Delta ABC$ এর ভরকেন্দ্র ; D, BC এর মধ্যবিন্দু, $EB \perp BC$।

(a) কী শর্তে A, B, C(2t, t−1) বিন্দু তিনটি ধনাত্মক ক্রমে থাকবে?

সমাধান: A(3, 5) , B(2, 1), C(2t, t−1) বিন্দু তিনটি ধনাত্মক ক্রমে থাকার নির্ণেয় শর্ত

$(3-2)(1-t+1) - (5-1)(2-2t) > 0$

$\Rightarrow 2 - t - 8 + 8t > 0$

$\Rightarrow 7t - 6 > 0 \Rightarrow t > \frac{6}{7}$

ΔABC এর ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 6 & 3 & 1 \end{vmatrix}$

$= \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & 4 & 0 \\ -4 & -2 & 0 \\ 6 & 3 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}(-2+16)$

$= 7$ বর্গ একক।

(b) দেখাও যে, G বিন্দুটি AD রেখাকে 2:1 অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত করে।

সমাধান: BC এর মধ্যবিন্দু D এর স্থানাঙ্ক

$\left(\frac{2+6}{2}, \frac{1+3}{2}\right) = (4,2)$

ΔABC এর ভরকেন্দ্র G এর স্থানাঙ্ক

$\left(\frac{3+2+6}{3}, \frac{5+1+3}{3}\right) = \left(\frac{11}{3}, 3\right)$

আবার, G বিন্দুটি AD রেখাকে k:1 অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত করলে,

G এর স্থানাঙ্ক $= \left(\frac{k\times4+1\times3}{k+1}, \frac{k\times2+1\times5}{k+1}\right)$

$= \left(\frac{4k+3}{k+1}, \frac{2k+5}{k+1}\right)$

$\therefore \quad \frac{4k+3}{k+1} = \frac{11}{3} \Rightarrow 12k + 9 = 11k + 11$

$\Rightarrow k = 2 \Rightarrow k : 1 = 2 : 1$

আবার, $\frac{2k+5}{k+1} = 3 \Rightarrow 2k + 5 = 3k + 3$

$\Rightarrow k = 2 \Rightarrow k : 1 = 2 : 1$

$\therefore$ G বিন্দুটি AD রেখাকে 2:1 অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত করে

(c) $\angle EBC$ কোণের সমদ্বিখন্ডক রেখাদ্বয়ের সমীকরণ নির্ণয় কর।

সমাধান: B(2, 1) ও C(6, 3) বিন্দুগামী BC রেখার সমীকরণ,

$(x-2)(1-3)-(y-1)(2-6)=0$

$\Rightarrow -2(x-2)+4(y-1)=0$

$\Rightarrow -(x-2)+2(y-1)=0$

$\Rightarrow -x+2+2y-2=0 \Rightarrow x-2y=0$

B(2, 1) বিন্দুগামী BC এর উপর লম্বরেখা BE এর সমীকরণ, $2x+y=2.2+1$

$\Rightarrow 2x+y-5=0$

$\therefore$ $\angle EBC$ কোণের সমদ্বিখন্ডক রেখাদ্বয়ের সমীকরণ

$$\frac{x-2y}{\sqrt{1^2+2^2}}=\pm\frac{2x+y-5}{\sqrt{2^2+1^2}}$$

$\Rightarrow x-2y=\pm(2x+y-5)$

$\therefore$ $x-2y=2x+y-5$

$\Rightarrow x+3y=5$ এবং

$x-2y=-2x-y+5 \Rightarrow 3x-y=5$

ব্যবহারিক অনুশীলন

1. পরীক্ষণের নাম ঃ A(8 , 10) ও B(18, 20) বিন্দুর সংযোগ রেখাংশকে 2 : 3 অনুপাতে বহির্বিভক্তকারী বিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয়।

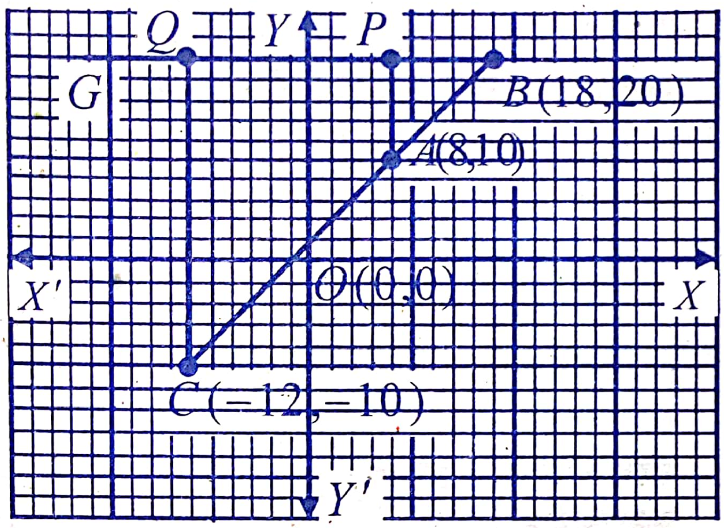
মূলতত্ত্বঃ $A(x_1, y_1)$ এবং $B(x_2, y_2)$ বিন্দুদ্বয়ের সংযোগ রেখাংশকে $m_1 : m_2$ অনুপাতে বহির্বিভক্তকারী বিন্দুর স্থানাঙ্ক

$$\left(\frac{m_1x_2-m_2x_1}{m_1-m_2}, \frac{m_1y_2-m_2y_1}{m_1-m_2}\right)$$

প্রয়োজনীয় উপকরণ ঃ (i) পেন্সিল (ii) স্কেল (iii) গ্রাফ পেপার (iv) ইরেজার (v) শার্পনার (vi) পেন্সিল কম্পাস।

(i) একটি ছক কাগজে স্থানাঙ্কের অক্ষ রেখা X'OX ও YOY' আঁকি।

(ii) x - অক্ষ ও y - অক্ষ বরাবর ক্ষুদ্রতম বর্গের 2 বাহুর দৈর্ঘ্য = 1 একক ধরে A(8 , 10) ও B(18 20) বিন্দুদ্বয়কে গ্রাফ পেপারে স্থাপন করি এবং সরু পেন্সিল দিয়ে সংযোগ করে AB রেখাংশ লেখচিত্রে উপস্থাপন করি।



(iii)B বিন্দু দিয়ে x অক্ষের সমান্তরাল BG রেখার উপর যেকোন দুইটি বিন্দু P ও Q নেই যেন. PQ : BQ = 2 : 3 হয়। (এখানে, B থেকে 15 বর্গ দূরে Q এবং P থেকে 10 বর্গ দূরে Q বিন্দু অবস্থিত।)

(iv)P, A যোগ করি এবং PA এর সমান্তরাল QC রেখা অঙ্কন করি যা BA এর বর্ধিতাংশকে C বিন্দুতে ছেদ করে।

ফল সংকলন ঃ

C এর স্থানাঙ্ক	
গ্রাফ হতে প্রাপ্ত মান	সূত্র হতে প্রাপ্ত মান
(-12,-10)	$\left(\frac{2\times18-3\times8}{2-3}, \frac{2\times20-3\times10}{2-3}\right)$ $=\left(\frac{36-24}{-1}, \frac{40-30}{-1}\right)$ $=(-12,-10)$

ফলাফল ঃ প্রদত্ত বিন্দুদ্বয়ের সংযোগ রেখাংশকে 2 : 3 অনুপাতে বহির্বিভক্তকারী বিন্দুর স্থানাঙ্ক (−12, −10).