এক নজরে প্রয়োজনীয় সূত্রাবলী

1. (a) $(0, 0)$ কেন্দ্র এবং 'r' ব্যাসার্ধবিশিষ্ট বৃত্তের সমীকরণ $x^2 + y^2 = r^2$.

(b) (h, k) কেন্দ্র এবং 'r' ব্যাসার্ধবিশিষ্ট বৃত্তের সমীকরণ $(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$.

(h,k) কেন্দ্র এবং (α,β) বিন্দুগামী বৃত্তের সমীকরণ $(x-h)^2 + (y-k)^2 = (\alpha-h)^2 + (\beta-k)^2$

(c) $(-g, -f)$ কেন্দ্রবিশিষ্ট বৃত্তের সমীকরণ $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$, যেখানে ব্যাসার্ধ $= \sqrt{g^2+f^2-c}$

(d) (x_1, y_1) ও (x_2, y_2) বিন্দুদ্বয়ের সংযোগ রেখাংশকে ব্যাস ধরে অঙ্কিত বৃত্তের সমীকরণ,
$(x-x_1)(x-x_2) + (y-y_1)(y-y_2) = 0$.

(e) একটি বৃত্ত ও একটি সরলরেখার ছেদবিন্দুগামী বৃত্তের সমীকরণ, বৃত্ত + k(সরলরেখা)=0; ধ্রুবক $k \neq 0$

(f) দুইটি বৃত্তের ছেদবিন্দু দিয়ে যায় এরূপ বৃত্তের সমীকরণ, প্রথম বৃত্ত + k (দ্বিতীয় বৃত্ত) = 0; ধ্রুবক $k \neq 0$.

(g) $f(x, y) = 0$ বৃত্ত ও $g(x, y) = 0$ সরলরেখার (অথবা, $f(x, y) = 0$ ও $g(x, y) = 0$ বৃত্তদ্বয়ের) ছেদবিন্দু এবং (α, β) বিন্দুগামী বৃত্তের সমীকরণ
$$\frac{f(x,y)}{f(\alpha,\beta)} = \frac{g(x,y)}{g(\alpha,\beta)};\ f(\alpha,\beta)\neq 0,\ g(\alpha,\beta)\neq 0$$

(h) বক্রিকার পদ্ধতিঃ যেকোন দুইটি বিন্দু (x_1, y_1) ও (x_2, y_2) দিয়ে অতিক্রম করে এরূপ বৃত্তের সমীকরণ
$(x-x_1)(x-x_2) + (y-y_1)(y-y_2) + k\{(x-x_1)(y_1-y_2) - (y-y_1)(x_1-x_2)\} = 0$
; ধ্রুবক $k \neq 0$

2. (a) $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ বৃত্ত দ্বারা x-অক্ষের খণ্ডিতাংশ $= 2\sqrt{g^2-c}$ এবং y-অক্ষের খণ্ডিতাংশ $= 2\sqrt{f^2-c}$.

(b) $(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$ বৃত্ত দ্বারা x-অক্ষের খণ্ডিতাংশ $= 2\sqrt{r^2-k^2}$ এবং y-অক্ষের খণ্ডিতাংশ $= 2\sqrt{r^2-h^2}$.

3. (a) (r_1, θ_1) কেন্দ্র ও a ব্যাসার্ধ বিশিষ্ট পোলার স্থানাঙ্কে বৃত্তের সমীকরণ
$$a^2 = r^2 + r_1^2 - 2rr_1\cos(\theta-\theta_1)$$

(b) পোলার স্থানাঙ্কে বৃত্তের সাধারণ সমীকরণ
$r^2 + 2r(g\cos\theta + f\sin\theta) + c = 0$, যার কেন্দ্র $(\sqrt{g^2+f^2}, \tan^{-1}\frac{f}{g})$,
ব্যাসার্ধ $= \sqrt{g^2+f^2-c}$

MCQ এর জন্য বিশেষ সূত্র ঃ

1. $f(x, y) = 0$ বৃত্তের সাথে এককেন্দ্রিক এবং (x_1, y_1) বিন্দুগামী বৃত্তের সমীকরণ $f(x, y) = f(x_1, y_1)$

2. x-অক্ষকে মূলবিন্দুতে স্পর্শ করে এবং (x_1, y_1) বিন্দুগামী বৃত্তের সমীকরণ, $\frac{x^2+y^2}{y} = \frac{x_1^2+y_1^2}{y_1}$.

3. কেন্দ্র (h, k) এবং x-অক্ষকে স্পর্শ করে এরূপ বৃত্তের সমীকরণ $x^2 + y^2 - 2hx - 2ky + h^2 = 0$

4. কেন্দ্র (h, k) এবং y-অক্ষকে স্পর্শ করে এরূপ বৃত্তের সমীকরণ $x^2 + y^2 - 2hx - 2ky + h^2 = 0$

প্রশ্নমালা – IV A

1. $ax^2 + 2bxy - 2y^2 + 8x + 12y + 6 = 0$ একটি বৃত্ত নির্দেশ করলে, 'a' ও 'b' এর মান নির্ণয় কর। অতপর বৃত্তটির কেন্দ্র ও ব্যাসার্ধ নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ $ax^2+2bxy-2y^2+8x+12y+6=0$ একটি বৃত্ত নির্দেশ করলে, xy এর সহগ, $2b = 0$

$\Rightarrow b = 0$ এবং x^2 ও y^2 এর সহগ দুইটি সমান অর্থাৎ $a = -2$.

$\therefore$ বৃত্তটির সমীকরণ হবে,
$-2x^2 - 2y^2 + 8x + 12y + 6 = 0$

$\Rightarrow x^2 + y^2 + 2(-2)x + 2(-3)y - 3 = 0$

$\therefore$ বৃত্তটির কেন্দ্র $(-2, -3)$ এবং
ব্যাসার্ধ $= \sqrt{2^2+3^2-(-3)} = \sqrt{4+9+3} = 4$

2. (a, b) কেন্দ্র এবং $\sqrt{a^2+b^2}$ ব্যাসার্ধ বিশিষ্ট বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ (a, b) কেন্দ্র এবং $\sqrt{a^2+b^2}$ ব্যাসার্ধ বিশিষ্ট বৃত্তের সমীকরণ,

$(x-a)^2+(y-b)^2=(\sqrt{a^2+b^2})^2$

$\Rightarrow x^2-2ax+a^2+y^2-2by+b^2=a^2+b^2$

$\therefore x^2+y^2-2ax-2by=0$ (Ans.)

3. (a) এরূপ বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর যা $x^2+y^2-4x+5y+9=0$ বৃত্তের সাথে এককেন্দ্রিক এবং $(2,-1)$ বিন্দু দিয়ে অতিক্রম করে।

[কু.'০৫; য.'১০; দি.'১৩]

সমাধান ঃ $x^2+y^2-4x+5y+9=0$ বৃত্তটির কেন্দ্রের স্থানাঙ্ক $=(-\frac{-4}{2},-\frac{5}{2})=(2,-\frac{5}{2})$,যা নির্ণেয় বৃত্তের কেন্দ্র।

এখন নির্ণেয় বৃত্তের ব্যাসার্ধ = কেন্দ্র $(2,-\frac{5}{2})$ হতে $(2,-1)$ বিন্দুর দূরত্ব $=|-\frac{5}{2}+1|=\frac{3}{2}$

$\therefore$ নির্ণেয় বৃত্তের সমীকরণ,

$(x-2)^2+(y+\frac{5}{2})^2=(\frac{3}{2})^2$

$\Rightarrow x^2-4x+4+y^2+5y+\frac{25}{4}-\frac{9}{4}=0$

$\Rightarrow x^2-4x+4+y^2+5y+\frac{25-9}{4}=0$

$\Rightarrow x^2-4x+4+y^2+5y+4=0$

$\therefore x^2+y^2-4x+5y+8=0$ (Ans.)

[MCQ এর জন্য, $x^2+y^2-4x+5y=2^2+1^2-4.2+5(-1)=4+1-8-5$]

3(b) একটি বৃত্তের কেন্দ্র $(4,-5)$ এবং এটি মূলবিন্দু দিয়ে যায়। তার সমীকরণ এবং অক্ষ দুইটি থেকে তা কি পরিমাণ অংশ ছেদ করে তা নির্ণয় কর।

[সি.'০৬; য.'০৮; কু.'১৪]

সমাধান ঃ কেন্দ্র $(4,-5)$ এবং মূলবিন্দু দিয়ে যায় এরূপ বৃত্তের সমীরকণ,

$x^2+y^2+2(-4)x+2(5)y=0$

$\therefore x^2+y^2-8x+10y=0 \cdots(1)$

(1) বৃত্তটিকে $x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$ এর সাথে তুলনা করে পাই, $g=-4$, $f=5$, $c=0$

$\therefore$ বৃত্তটি দ্বারা x–অক্ষের খন্ডিতাংশের পরিমাণ $2\sqrt{g^2-c}=2\sqrt{4^2-0}=8$ এবং

বৃত্তটি দ্বারা y–অক্ষের খন্ডিতাংশের পরিমাণ $2\sqrt{g^2-c}=2\sqrt{5^2-0}=10$

4. (a) একটি বৃত্তের কেন্দ্র $(4,-8)$ এবং তা y-অক্ষকে স্পর্শ করে। তার সমীকরণ নির্ণয় কর।

[ব.'০১; ঢা.'০২]

সমাধান ঃ $(4,-8)$ কেন্দ্রবিশিষ্ট বৃত্তটি y-অক্ষকে স্পর্শ করে।

$\therefore$ বৃত্তটির ব্যাসার্ধ = | কেন্দ্রের ভুজ | = | 4 | = 4

$\therefore$ বৃত্তের সমীকরণ, $(x-4)^2+(y+8)^2=4^2$

$\Rightarrow x^2-8x+16+y^2+16y+64=16$

$\therefore x^2+y^2-8x+16y+64=0$

[MCQ এর জন্য, $x^2+y^2-8x+16y+8^2=0$]

4. (b) $(-5, 7)$ কেন্দ্রবিশিষ্ট এবং x-অক্ষকে স্পর্শ করে এরূপ বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর। [মা.'০৭]

সমাধান ঃ $(-5,7)$ কেন্দ্রবিশিষ্ট বৃত্তটি x-অক্ষকে স্পর্শ করে।

$\therefore$ বৃত্তটির ব্যাসার্ধ = | কেন্দ্রের y-স্থানাঙ্ক $|=|7|=7$

$\therefore$ বৃত্তের সমীকরণ, $(x+5)^2+(y-7)^2=7^2$

$\Rightarrow x^2+10x+25+y^2-14y+49=49$

$\therefore x^2+y^2+10x-14y+25=0$

4. (c) $(2, 3)$ বিন্দুতে কেন্দ্রবিশিষ্ট এবং x-অক্ষকে স্পর্শ করে এরূপ বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর। বৃত্তটি y-অক্ষ হতে যে পরিমাণ অংশ ছেদ করে তা নির্ণয় কর। [রা.'০১; কু.'০৯]

সমাধান ঃ $(2, 3)$ কেন্দ্রবিশিষ্ট বৃত্তটি x-অক্ষকে স্পর্শ করে।

$\therefore$ বৃত্তটির ব্যাসার্ধ = | কেন্দ্রের কোটি| = | 3 | = 3

$\therefore$ বৃত্তের সমীকরণ, $(x-2)^2+(y-3)^2=3^2$

$\Rightarrow x^2-4x+4+y^2-6y+9=9$

$\therefore x^2+y^2-4x-6y+4=0$

এখন বৃত্তটিকে $x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$ এর সাথে তুলনা করে পাই, $g=-2$, $f=-3$, $c=4$

$\therefore$ বৃত্তটি দ্বারা y–অক্ষের খন্ডিতাংশের পরিমাণ $2\sqrt{g^2-c}=2\sqrt{9-4}=2\sqrt{5}$

5. একটি বৃত্ত (– 6, 5), (– 3, – 4) এবং (2, 1) বিন্দু তিনটি দ্বারা অতিক্রম করে। বৃত্তটির সমীকরণ, কেন্দ্রের স্থানাঙ্ক এবং ব্যাসার্ধ নির্ণয় কর।

[ব.'০২;দি.'০৯]

সমাধান ঃ খলিফার নিয়মানুসারে ধরি (–6 , 5) ও (–3, – 4) বিন্দুগামী বৃত্তের সমীকরণ ,

$(x + 6)(x + 3) + (y - 5)(y + 4) + k\{(x + 6)(5 + 4) -(y - 5)(- 6 + 3)\} = 0$

$\Rightarrow x^2 + 9x + 18 + y^2 - y - 20 + k(9x + 54 + 3y - 15) = 0$

$\Rightarrow x^2 + y^2 + 9x - y - 2 + k(9x + 3y + 39) = 0 \cdots (1)$

(1) বৃত্তটি (2, 1) বিন্দুগামী বলে,

$4 + 1 + 18 -1-2 + k(18 + 3 + 39) = 0$

$\Rightarrow 60k = - 20 \Rightarrow k = -\frac{1}{3}$

(1) এ k এর মান বসিয়ে পাই,

$x^2 + y^2 + 9x - y - 2 -3x - y -13 = 0$

$\therefore x^2 + y^2 + 6x - 2y - 15 = 0 \cdots (1)$

(1) বৃত্তটির কেন্দ্রের স্থানাঙ্ক $(-\frac{6}{2}, -\frac{-2}{2})$

$= (- 3 , 1)$ এবং ব্যাসার্ধ = $\sqrt{9+1-(-15)} = 5$

[MCQ : $\frac{(x + 6)(x + 3) + (y - 5)(y + 4)}{9(x + 6) - (-3)(y - 5)}$

$= \frac{(2 + 6)(2 + 3) + (1 - 5)(1 + 4)}{9(2 + 6) - (-3)(1 - 5)}$]

6. (a) $2x - y = 3$ রেখার উপর কেন্দ্রবিশিষ্ট একটি বৃত্ত (3 , – 2) ও (– 2 , 0) বিন্দু দুইটি দিয়ে অতিক্রম করে। বৃত্তটির সমীকরণ নির্ণয় কর। [চ.'০৮; ব. '১০,'১২; সি. '০৬; য. '০৭; কু. '০৭; রা.'১০,'১৩]

সমাধান ঃ খলিফার নিয়মানুসারে ধরি (3 , –2) ও (–2, 0) বিন্দুগামী বৃত্তের সমীকরণ ,

$(x -3)(x + 2) + (y + 2)(y - 0) + k\{(x - 3)(-2-0) - (y + 2)(3 + 2)\} = 0$

$\Rightarrow x^2 - x - 6 + y^2 + 2y + k(- 2x + 6 - 5y -10) = 0$

$\Rightarrow x^2 + y^2 + (-1-2k)x + (2 - 5k)y - 6 - 4k = 0 \cdots\cdots (1)$

বৃত্তটির কেন্দ্র $(\frac{1 + 2k}{2}, -\frac{2 - 5k}{2})$, $2x-y=3$ রেখার উপর অবস্থিত।

$\therefore 2\frac{1 + 2k}{2} - (-\frac{2 - 5k}{2}) = 3$

$\Rightarrow 2 + 4k + 2 - 5k = 6$

$\Rightarrow - k = 2 \Rightarrow k = - 2$

k এর মান (1) এ বসিয়ে পই,

$x^2 + y^2 + (-1+ 4)x + (2 +10)y-6 +8 = 0$

$\therefore x^2 + y^2 + 3x + 12y + 2 = 0$ (Ans.)

6. (b) $x + 2y - 10 = 0$ রেখার উপর কেন্দ্রবিশিষ্ট একটি বৃত্ত (3 , 5) ও (6, 4) বিন্দু দুইটি দিয়ে অতিক্রম করে। বৃত্তটির সমীকরণ নির্ণয় কর।

[ঢা.'০২; রা.'০৮; য.'১২]

সমাধান ঃ খলিফার নিয়মানুসারে ধরি (3 , 5) ও (6, 4) বিন্দুগামী বৃত্তের সমীকরণ ,

$(x -3)(x - 6) + (y - 5)(y - 4) + k\{(x - 3)(5-4) - (y - 5)(3 - 6)\} = 0$

$\Rightarrow x^2 - 9x + 18 + y^2 - 9y + 20 + k(x - 3 + 3y -15) = 0$

$\Rightarrow x^2 + y^2 + (-9 + k)x + (-9 + 3k)y + 38 - 18k = 0 \cdots\cdots (1)$

(1) বৃত্তটির কেন্দ্র $(\frac{9-k}{2}, \frac{9-3k}{2})$, $x + 2y -10 = 0$ রেখার উপর অবস্থিত।

$\therefore \frac{9-k}{2} + 2.\frac{9-3k}{2} = 10$

$\Rightarrow 9 -k + 18 -6k = 20$

$\Rightarrow -7k = -7 \Rightarrow k = 1$

k এর মান (1) এ বসিয়ে পই,

$x^2 + y^2 - 8x - 6y + 38 - 18 = 0$

$\therefore x^2 + y^2 - 8x - 6y + 20 = 0$ (Ans.)

7. (a) x-অক্ষের উপর কেন্দ্রবিশিষ্ট একটি বৃত্ত (3 , 5) ও (6, 4) বিন্দু দুইটি দিয়ে অতিক্রম করে। বৃত্তটির সমীকরণ নির্ণয় কর।[কু., রা., ব.'০৩; দি.'১০ সি.১৪]

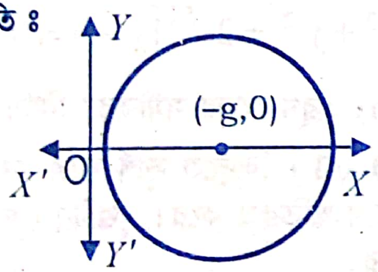
সমাধান ঃ খলিফার নিয়মানুসারে ধরি (3 , 5) ও (6, 4) বিন্দুগামী বৃত্তের সমীকরণ ,

$(x-3)(x-6)+(y-5)(y-4)+$
$k\{(x-3)(5-4)-(y-5)(3-6)\}=0$
$\Rightarrow x^2-9x+18+y^2-9y+20+$
$k(x-3+3y-15)=0$
$\Rightarrow x^2+y^2+(-9+k)x+(-9+3k)y$
$+38-18k=0 \cdots\cdots (1)$

(1) বৃত্তটির কেন্দ্র $(\frac{k-9}{2}, \frac{9-3k}{2})$, x-অক্ষের উপর অবস্থিত। $\therefore \frac{9-3k}{2}=0 \Rightarrow k=3$

k এর মান (1) এ বসিয়ে পই,
$x^2+y^2+(-9+3)x+38-54=0$
$\therefore x^2+y^2-6x-16=0$ (Ans.)

বিকল্প পদ্ধতি ঃ



ধরি, কেন্দ্র x-অক্ষের উপর অবস্থিত এরূপ বৃত্তের সমীকরণ $x^2+y^2+2gx+c=0 \cdots\cdots (1)$

(1) বৃত্তটি (3, 5) ও (6, 4) বিন্দু দিয়ে অতিক্রম করে।

$\therefore 9+25+6g+c=0$
$\Rightarrow 34+6g+c=0 \cdots\cdots (2)$ এবং
$36+16+12g+c=0$
$\Rightarrow 52+12g+c=0 \cdots\cdots (3)$
$(3)-(2) \Rightarrow 18+6g=0 \Rightarrow g=-3$
$\therefore$ (2) হতে পাই, $34-18+c=0 \Rightarrow c=-16$
(1) এ g ও c এর মান বসিয়ে পাই,
$x^2+y^2-6x-16=0$ (Ans.)

7. **(b) y-অক্ষের উপর কেন্দ্রবিশিষ্ট একটি বৃত্ত মূলবিন্দু এবং (p , q) বিন্দু দিয়ে অতিক্রম করে। বৃত্তটির সমীকরণ নির্ণয় কর।**
[রা. '০২; সি. '০৪; য. '০৫; ঢা. '১২; রা.,চ. '১৩]

সমাধান ঃ ধরি, বৃত্তটির সমীকরণ,
$x^2+y^2+2gx+2fy+c=0 \cdots (1)$
(1) বৃত্তটির কেন্দ্র y-অক্ষের উপর অবস্থিত।
$\therefore g=0$
বৃত্তটি মূলবিন্দু (0, 0) ও (p, q) বিন্দুগামী।
$\therefore 0+0+c=0 \Rightarrow c=0$ এবং
$p^2+q^2+2qf+0=0$
$\Rightarrow f=-\frac{p^2+q^2}{2q}$
(1) এ g , f ও c এর মান বসিয়ে পাই,
$x^2+y^2+2(-\frac{p^2+q^2}{2q})y=0$
$\therefore q(x^2+y^2)=(p^2+q^2)y$ (Ans.)

7. **(c) (3, 0) ও (7, 0) বিন্দুগামী এবং y-অক্ষকে স্পর্শ করে এরূপ বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর।**
[রা.'০২, '০৬; ব.'০২,'১১]

সমাধানঃ খলিফার নিয়মানুসারে ধরি (3 , 0) ও (7, 0) বিন্দুগামী বৃত্তের সমীকরণ ,
$(x-3)(x-7)+(y-0)(y-0)+$
$k\{(x-3)(0-0)-(y-0)(3-7)\}=0$
$\Rightarrow x^2-10x+21+y^2+k(4y)=0$
$\Rightarrow x^2+y^2-10x+4ky+21=0 \cdots (1)$
(1) বৃত্তটির কেন্দ্র $(5,-2k)$ এবং ব্যাসার্ধ
$=\sqrt{5^2+(-2k)^2-21}=\sqrt{4+4k^2}$
(1) বৃত্তটি y-অক্ষকে স্পর্শ করে ।
$\therefore \sqrt{4+4k^2}=|5|$
$\Rightarrow 4+4k^2=25 \Rightarrow 4k^2=21$
$\Rightarrow k=\pm\frac{\sqrt{21}}{2}$
k এর মান (1) এ বসিয়ে পই,
$x^2+y^2-10x+4(\pm\frac{\sqrt{21}}{2})y+21=0$
$\therefore x^2+y^2-10x\pm 2\sqrt{21}y+21=0$

বিকল্প পদ্ধাতি ঃ ধরি , y-অক্ষকে স্পর্শ করে এরূপ বৃত্তের সমীকরণ $(x-h)^2+(y-k)^2=h^2$
$\Rightarrow x^2+y^2-2hx-2ky+k^2=0 \cdots (1)$
(1) বৃত্তটি (3 , 0) ও (7, 0) বিন্দুগামী ।
$\therefore 9-6h+k^2=0 \cdots\cdots (2)$ এবং
$49-14h+k^2=0 \cdots\cdots (3)$
$(2)-(3) \Rightarrow -40+8h=0 \Rightarrow h=5$

(2) এ $h = 5$ বসিয়ে পাই, $9 - 30 + k^2 = 0$

$\Rightarrow k^2 = 21 \Rightarrow k = \pm\sqrt{21}$

(1) এ h ও k এর মান বসিয়ে পাই,

$x^2 + y^2 - 10x \pm 2\sqrt{21}y + 21 = 0$

7. (d) (1,1) ও (2,2) বিন্দু দুইটি দিয়ে অতিক্রমকারী বৃত্তের ব্যাসার্ধ 1; বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর এবং দেখাও যে, এরূপ দুইটি বৃত্ত পাওয়া যাবে। [য.'০৩]

সমাধান: খলিফার নিয়মানুসারে ধরি, (1 , 1) ও (2, 2) বিন্দুগামী বৃত্তের সমীকরণ ,

$(x-1)(x-2) + (y-1)(y-2) + k\{(x-1)(1-2) - (y-1)(1-2)\} = 0$

$\Rightarrow x^2 - 3x + 2 + y^2 - 3y + 2 + k(-x + 1 + y - 1) = 0$

$\Rightarrow x^2 + y^2 + (-3-k)x + (-3 + k)y + 4 = 0 \cdots (1)$

(1) বৃত্তটির কেন্দ্র $(\frac{k+3}{2}, \frac{3-k}{2})$ এবং

ব্যাসার্ধ $= \sqrt{(\frac{k+3}{2})^2 + (\frac{3-k}{2})^2 - 4}$

$= \sqrt{\frac{k^2 + 6k + 9 + k^2 - 6k + 9 - 16}{4}}$

$= \sqrt{\frac{2(k^2+1)}{4}} = \sqrt{\frac{k^2+1}{2}}$

প্রশ্নমতে, $\sqrt{\frac{k^2+1}{2}} = 1 \Rightarrow k^2 + 1 = 2$

$\Rightarrow k^2 = 1 \Rightarrow k = \pm 1$

$\therefore$ নির্ণেয় বৃত্তের সমীকরণ,

$x^2 + y^2 - 4x - 2y + 4 = 0$, যখন $k = 1$ এবং

$x^2 + y^2 - 2x - 4y + 4 = 0$, যখন $k = -1$

8. (a) এরূপ বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর যা মূলবিন্দু থেকে 2 একক দূরে x-অক্ষকে দুইটি বিন্দুতে ছেদ করে এবং যার ব্যাসার্ধ 5 একক। [য.'০৫; ব.'১১]

সমাধান : নির্ণেয় বৃত্তটি মূলবিন্দু থেকে 2 একক দূরে x-অক্ষকে দুইটি বিন্দুতে ছেদ করে বলে তা (2 , 0) ও (−2 , 0) দিয়ে অতিক্রম করে।

খলিফার নিয়মানুসারে ধরি, (2, 0) ও (−2, 0) বিন্দুগামী বৃত্তের সমীকরণ ,

$(x-2)(x+2) + (y-0)(y-0) + k\{(x-2)(0-0) - (y-0)(2+2)\} = 0$

$\Rightarrow x^2 - 4 + y^2 + k(-4y) = 0$

$\Rightarrow x^2 + y^2 - 4ky - 4 = 0 \cdots (1)$

(1) বৃত্তটির কেন্দ্র (0, 2k) এবং

ব্যাসার্ধ $= \sqrt{0^2 + (2k)^2 + 4} = \sqrt{4k^2 + 4}$

প্রশ্নমতে, $\sqrt{4k^2 + 4} = 5 \Rightarrow 4k^2 + 4 = 25$

$\Rightarrow 4k^2 = 21 \Rightarrow k = \pm\frac{\sqrt{21}}{2}$

k এর মান (1) এ বসিয়ে পই,

$x^2 + y^2 - 4(\pm\frac{\sqrt{21}}{2})y - 4 = 0$

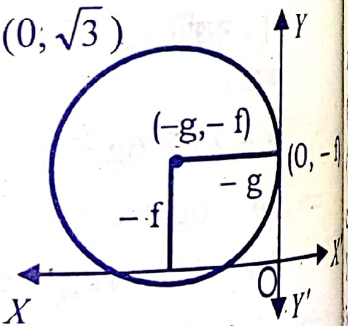
$\therefore x^2 + y^2 \pm 2\sqrt{21}y - 4 = 0$ (Ans.)

8. (b) এরূপ বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর যা y-অক্ষকে $(0, \sqrt{3})$ বিন্দুতে স্পর্শ করে এবং (− 1, 0) বিন্দু দিয়ে অতিক্রম করে। বৃত্তটির কেন্দ্র ও ব্যাসার্ধ নির্ণয় কর। [ঢা.'০৬; য.'১০]

সমাধান ঃ ধরি, বৃত্তের সমীকরণ,

$x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0 \cdots (1)$

(1) বৃত্তটি y-অক্ষকে $(0, \sqrt{3})$ বিন্দুতে স্পর্শ করে।



$\therefore f^2 = c$ এবং

$-f = \sqrt{3}$

$\Rightarrow f = -\sqrt{3}$

$\therefore c = (-\sqrt{3})^2 = 3$

আবার, (1) বৃত্তটি(− 1, 0) বিন্দুগামী।

$\therefore 1 + 0 - 2g + 0 + c = 0$

$\Rightarrow 1 - 2g + 3 = 0 \Rightarrow g = 2$

$\therefore$ নির্ণেয় বৃত্তের সমীকরণ,

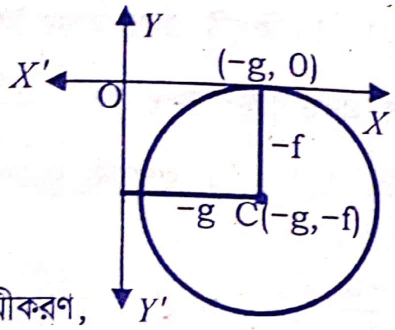
$x^2 + y^2 + 4x - 2\sqrt{3}y + 3 = 0$

২য় অংশ ঃ বৃত্তটির কেন্দ্র $(-g, -f) = (-2, \sqrt{3})$

এবং ব্যাসার্ধ $\sqrt{g^2 + f^2 - c} = \sqrt{4 + 3 - 3} = 2$

8. (c) এরূপ বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর যা x-অক্ষকে (2, 0) বিন্দুতে স্পর্শ করে এবং (3, − 1) বিন্দু দিয়ে অতিক্রম করে।[কু.'০৮; সি.'১১; ঢা.'১২; প্র.ভ.প. '৯৯]

সমাধান ঃ



ধরি, বৃত্তের সমীকরণ,

$x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0 \cdots (1)$

(1) বৃত্তটি x-অক্ষকে (2, 0) বিন্দুতে স্পর্শ করে।

$\therefore\ g^2 = c$ এবং $-g = 2 \Rightarrow g = -2$

$\therefore\ c = (2)^2 = 4$

আবার, (1) বৃত্তটি $(3, -1)$ বিন্দু দিয়ে অতিক্রম করে।

$\therefore\ 9 + 1 + 6g - 2f + c = 0$

$\Rightarrow 10 - 12 - 2f + 4 = 0$

[c ও g এর মান বসিয়ে।]

$\Rightarrow 2f = 2 \Rightarrow f = 1$

$\therefore$ নির্ণেয় বৃত্তের সমীকরণ,

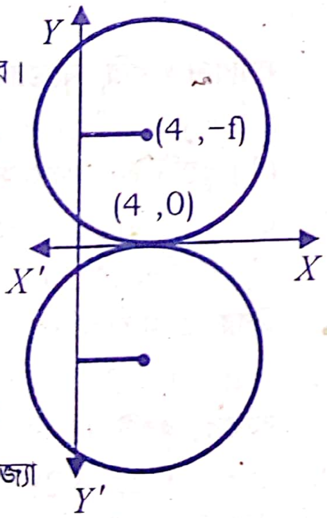
$x^2 + y^2 - 4x + 2y + 4 = 0$ (Ans.)

9. (a) এরূপ বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর যা x-অক্ষকে (4, 0) বিন্দুতে স্পর্শ করে এবং y-অক্ষ থেকে 6 একক দীর্ঘ একটি জ্যা কর্তন করে। [ঢা.,রা.,য.,চ'০৯; সি. '১২; কু.'১০,'১২; য.'১১; রা.'১২]

সমাধান ঃ ধরি, বৃত্তের সমীকরণ,

$x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0 \cdots (1)$

(1) বৃত্তটি x-অক্ষকে (4, 0) বিন্দুতে স্পর্শ করে।



$\therefore\ c = g^2 \cdots (2)$ এবং

$16 + 8g + c = 0$

$\Rightarrow 16 + 8g + g^2 = 0$

$\Rightarrow (g + 4)^2 = 0$

$\Rightarrow g = -4$

$\therefore\ (2) \Rightarrow c = g^2 = 16.$

আবার, (1) বৃত্তটি y-অক্ষ থেকে 6 একক দীর্ঘ একটি জ্যা কর্তন করে।

$\therefore\ 2\sqrt{f^2 - c} = 6 \Rightarrow \sqrt{f^2 - 16} = 3$

$\Rightarrow f^2 - 16 = 9 \Rightarrow f^2 = 25 \Rightarrow f = \pm 5$

$\therefore$ নির্ণেয় বৃত্তের সমীকরণ,

$x^2 + y^2 - 8x \pm 10y + 16 = 0$ (Ans.)

9. (b) (– 4 , 3) ও (12 , – 1) বিন্দু দুইটির সংযোগ রেখাকে ব্যাস ধরে অঙ্কিত বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর। বৃত্তটি দ্বারা y-অক্ষের ছেদাংশের দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর। [রা.'০০; ব.'০৪; কু.'০৮; দি.'১০]

সমাধান ঃ (– 4 , 3) ও (12 , – 1) বিন্দু দুইটির সংযোগ রেখাকে ব্যাস ধরে অঙ্কিত বৃত্তের সমীকরণ,

$(x + 4)(x - 12) + (y - 3)(y + 1) = 0$

$\Rightarrow x^2 - 8x - 48 + y^2 - 2y - 3 = 0$

$\Rightarrow x^2 + y^2 - 8x - 2y - 51 = 0$ (Ans.)

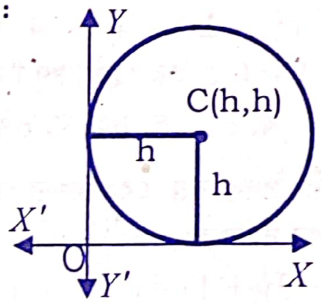
২য় অংশ ঃ $x^2 + y^2 - 8x - 2y - 51 = 0$ কে $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ এর সঙ্গে তুলনা করে পাই, $g = -4$, $f = -1$ এবং $c = -51$

$\therefore$ y-অক্ষের ছেদাংশের দৈর্ঘ্য $= 2\sqrt{f^2 - c}$

$= 2\sqrt{1^2 - (-51)} = 2\sqrt{52} = 4\sqrt{13}$

10. এরূপ বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর যা উভয় অক্ষকে স্পর্শ করে এবং (1, 8) বিন্দু দিয়ে অতিক্রম করে। [চ. '০৭; য.'০৩ ; মা.বো.'০৬; সি.'০৯; কু.'১২]

সমাধান :



ধরি, বৃত্তটির সমীকরণ

$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2 \cdots (1)$

(1) বৃত্তটি উভয় অক্ষকে স্পর্শ করে।

$\therefore\ k = h$ এবং $r = |h|$

$\therefore$ (1) হতে পাই,

$(x - h)^2 + (y - h)^2 = |h|^2$

$\Rightarrow x^2 - 2hx + h^2 + y^2 - 2hy + h^2 = h^2$

$\Rightarrow x^2 + y^2 - 2hx - 2hy + h^2 = 0 \cdots (2)$

যা (1, 8) বিন্দু দিয়ে অতিক্রম করে।

$\therefore\ 1 + 64 - 2h - 16h + h^2 = 0$

$\Rightarrow h^2 - 18h + 65 = 0$

$\Rightarrow (h - 5)(h - 13) = 0 \ \therefore h = 5, 13$

$\therefore$ নির্ণেয় বৃত্তের সমীকরণ,

$x^2 + y^2 - 10x - 10y + 25 = 0$ এবং

$x^2 + y^2 - 26x - 26y + 169 = 0$

11. (a) একটি বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর যার কেন্দ্র (6 , 0) এবং যা $x^2 + y^2 - 4x = 0$ বৃত্ত ও $x = 3$ রেখার ছেদবিন্দু দিয়ে যায়। [ঢা.'০৭; রা.'০৭,'১৪; ব. '০৮,'১২; চ.'০৮; মা.'০৯,'১৪; য.'১৩; দি.'১৪]

সমাধান ঃ ধরি, প্রদত্ত বৃত্ত ও রেখার ছেদবিন্দু দিয়ে যায় এরূপ বৃত্তের সমীকরণ

$x^2 + y^2 - 4x + k(x - 3) = 0$

$\Rightarrow x^2 + y^2 + (-4 + k)x - 3k = 0 \cdots (1)$

(1) বৃত্তের কেন্দ্র $(-\frac{k-4}{2}, 0)$.

প্রশ্নমতে , বৃত্তের কেন্দ্র (6 , 0).

$\therefore -\frac{k-4}{2} = 6 \Rightarrow k - 4 = -12 \;\therefore k = -8$

$\therefore$ নির্ণেয় বৃত্তের সমীকরণ,

$x^2 + y^2 + (-4 - 8)x - 3.(-8) = 0$

$\therefore x^2 + y^2 - 12x + 24 = 0$ (Ans.)

11 (b) একটি বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর যা মূলবিন্দু এবং $x^2 + y^2 - 2x - 4y - 4 = 0$ বৃত্ত ও $2x + 3y + 1 = 0$ রেখার ছেদ বিন্দু দিয়ে যায়। [য.'০২; সি.'০২; ব.'০৭; চ.'১১]

সমাধান : ধরি, প্রদত্ত বৃত্ত এবং রেখার ছেদবিন্দু দিয়ে যায় এরূপ বৃত্তের সমীকরণ, $x^2 + y^2 - 2x - 4y - 4 + k(2x + 3y + 1) = 0 \cdots \cdots (1)$

(1) বৃত্তটি মূলবিন্দু (0, 0) দিয়ে অতিক্রম করে।

$\therefore -4 + k = 0 \Rightarrow k = 4$

(1) এ k এর মান বসিয়ে পাই,

$x^2 + y^2 - 2x - 4y - 4 + 8x + 12y + 4 = 0$

$\Rightarrow x^2 + y^2 + 6x + 8y = 0$ (Ans.)

12. (a) দেখাও যে, A(1 , 1) বিন্দুটি $x^2 + y^2 + 4x + 6y - 12 = 0$ বৃত্তের উপর অবস্থিত । A বিন্দুগামী ব্যাসের অপর প্রান্তবিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর। [ঢা.'১০; য.'০৭; কু.,রা.,'০৯;দি.'১২;ব.'১৩; চ.'১৪]

প্রমাণ : ধরি, $f(x,y) \equiv x^2 + y^2 + 4x + 6y - 12 = 0$

$\therefore f(1, 1) = 1^2 + 1^2 + 4.1 + 6.1 - 12$
$= 1 + 1 + 4 + 6 - 12 = 0$

$\therefore$ A(1 , 1) বিন্দুটি প্রদত্ত বৃত্তের উপর অবস্থিত।

২য় অংশ: প্রদত্ত বৃত্তের কেন্দ্র$= (-\frac{4}{2}, -\frac{6}{2}) = (-2, -3)$

ধরি, A(1 , 1) বিন্দুগামী ব্যাসের অপর প্রান্তবিন্দু B(α , β).

$\therefore \frac{1+\alpha}{2} = -2 \Rightarrow 1 + \alpha = -4 \Rightarrow \alpha = -5$

এবং $\frac{1+\beta}{2} = -3 \Rightarrow 1 + \beta = -6 \Rightarrow \beta = -7$

$\therefore$ ব্যাসের অপর প্রামন্তবিন্দুর স্থানাঙ্ক (− 5 , −7)

12 (b) $x^2 + y^2 - 8x + 6y + 21 = 0$ বৃত্তের বর্ধিত যে ব্যাসটি (2 , 5) বিন্দু দিয়ে অতিক্রম করে তার সমীকরণ নির্ণয় কর। [কু.'০১]

সমাধান : প্রদত্ত বৃত্ত $x^2 + y^2 - 8x + 6y + 21 = 0$ এর কেন্দ্রের স্থানাঙ্ক $= (-\frac{-8}{2}, -\frac{6}{2}) = (4, -3)$

(2, 5) বিন্দু ও কেন্দ্র (4 , −3) দিয়ে অতিক্রম করে এরূপ ব্যাসের সমীকরণ, $\frac{x-2}{2-4} = \frac{y-5}{5+3}$

$\Rightarrow 8x - 16 = -2y + 10 \Rightarrow 8x + 2y = 26$

$\therefore 4x + y = 13$ (Ans.)

12 (c) (1,1) বিন্দুগামী একটি বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর যা x-অক্ষকে স্পর্শ করে এবং যার কেন্দ্র $x + y = 3$ রেখার উপর প্রথম চতুর্ভাগে অবস্থিত। [কু.'০৮]

সমাধান ঃ ধরি, বৃত্তের সমীকরণ

$x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0 \cdots (1)$

(1) বৃত্তটি x-অক্ষকে স্পর্শ করে।

$\therefore c = g^2 \cdots (2)$

(1) বৃত্তটির কেন্দ্র (− g , −f), $x + y = 3$ রেখার উপর প্রথম চতুর্ভাগে অবস্থিত।

$\therefore -g - f = 3 \Rightarrow f = -g - 3 \cdots \cdots (3)$

আবার, বৃত্তটি (1, 1) বিন্দুগামী ।

$\therefore 1 + 1 + 2g + 2f + c = 0$

$\Rightarrow 2 + 2g + 2(-g - 3) + g^2 = 0$ [(2) ও (3) দ্বারা]

$\Rightarrow 2 + 2g - 2g - 6 + g^2 = 0$

$\Rightarrow g^2 = 4 \Rightarrow g = -2$

[প্রথম চতুর্ভাগে g ও f ঋণাত্মক ।]

এখন (2) হতে পাই, $c = (-2)^2 = 4$ এবং

(3) হতে পাই, $f = 2 - 3 = -1$
নির্ণেয় বৃত্তের সমীকরণ,
$\therefore x^2 + y^2 - 4x - 2y + 4 = 0$

12 (d) $\frac{1}{2}\sqrt{10}$ **ব্যাসার্ধবিশিষ্ট একটি বৃত্ত (1,1) বিন্দু দিয়ে অতিক্রম করে এবং বৃত্তটির কেন্দ্র $y = 3x-7$ রেখার উপর অবস্থিত। বৃত্তটির সমীকরণ নির্ণয় কর।**
[সি. '০৮; রা. ০৮; কু. '০৭; য. '০৬; চ.'০৯; ঢা.'১১]

সমাধান: ধরি, $\frac{1}{2}\sqrt{10}$ ব্যাসার্ধবিশিষ্ট বৃত্তের সমীকরণ

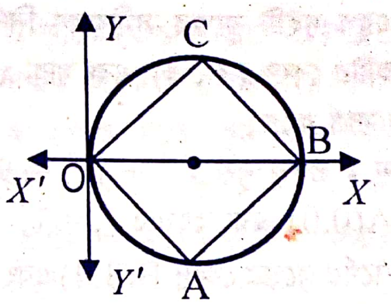
$(x - h)^2 + (y - k)^2 = (\frac{1}{2}\sqrt{10})^2 = \frac{5}{2}$

$\Rightarrow 2(x^2 - 2hx + h^2 + y^2 - 2ky + k^2) = 5 \cdots (1)$
$y = 3x - 7$ রেখার উপর (1) বৃত্তের কেন্দ্র (h, k) অবস্থিত।

$\therefore k = 3h - 7 \cdots (2)$
(1) বৃত্ত (1, 1) বিন্দু দিয়ে অতিক্রম করে।
$\therefore 2(1 - 2h + h^2 + 1 - 2k + k^2) = 5$
$\Rightarrow 2h^2 + 2k^2 - 4h - 4k = 1$
$\Rightarrow 2h^2 + 2(3h - 7)^2 - 4h - 4(3h - 7) = 1$ [(2) দ্বারা]
$\Rightarrow 2h^2 + 2(9h^2 - 42h + 49) - 4h - 12h + 28 - 1 = 0$
$\Rightarrow 2h^2 + 18h^2 - 84h + 98 - 4h - 12h + 28 - 1 = 0$
$\Rightarrow 20h^2 - 100h + 125 = 0$
$\Rightarrow 4h^2 - 20h + 25 = 0 \Rightarrow (2h - 5)^2 = 0$
$\Rightarrow h = \frac{5}{2}$: (2) হতে পাই, $k = 3\frac{5}{2} - 7 = \frac{1}{2}$
(1) এ h ও k এর মান বসিয়ে পাই,
$2x^2 - 4.\frac{5}{2}x + 2.\frac{25}{4} + 2y^2 - 4\frac{1}{2}y + 2.\frac{1}{4} = 5$
$\Rightarrow 8x^2 - 40x + 50 + 8y^2 - 8y + 2 = 20$
$\Rightarrow 8x^2 + 8y^2 - 40x - 8y + 32 = 0$
$\therefore x^2 + y^2 - 5x - y + 4 = 0$ (Ans.)

13. (a) **$4\sqrt{2}$ বাহুবিশিষ্ট বর্গের একটি শীর্ষ মূলবিন্দুতে অবস্থিত এবং এর বিপরীত শীর্ষটি x-অক্ষের উপর অবস্থিত। ঐ বর্গের কর্ণকে ব্যাস ধরে অঙ্কিত বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর।** [য.'০৪]

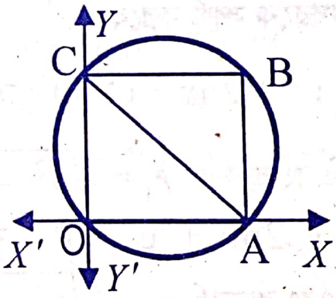
সমাধান :



ধরি, OABC বর্গের একটি শীর্ষ মূলবিন্দু O(0,0) এবং x-অক্ষের উপর এর বিপরীত শীর্ষ B অবস্থিত।
OAB সমকোণী ত্রিভুজে,
$OB^2 = OA^2 + AB^2 = (4\sqrt{2})^2 + (4\sqrt{2})^2$
[$\because$ বর্গের বাহুর দৈর্ঘ্য $= 4\sqrt{2}$]
$= 32 + 32 = 64$
$\therefore OB = \pm 8 =$ B বিন্দুর ভুজ।
$\therefore$ B বিন্দুর স্থানাঙ্ক $(\pm 8, 0)$
OB কে ব্যাস ধরে অঙ্কিত নির্ণেয় বৃত্তের সমীকরণ
$(x - 0)(x \pm 8) + (y - 0)(y - 0) = 0$
$\Rightarrow x^2 \pm 8x + y^2 = 0$
$\therefore x^2 + y^2 \pm 8x = 0$ (Ans.)

13. (b) **b বাহুবিশিষ্ট OABC একটি বর্গ। OA ও OC কে অক্ষ ধরে দেখাও যে, বর্গটির পরিবৃত্তের সমীকরণ হবে $x^2 + y^2 = b(x + y)$.**
[ঢা.'০৫; রা.'১০; ব.'১৩]

প্রমাণ ঃ



B বাহুবিশিষ্ট OABC বর্গের x ও y- অক্ষ বরাবর যথাক্রমে OA ও OC অবস্থিত হলে A ও C এর স্থানাঙ্ক যথাক্রমে (b,0) ও (0 ,b).
বর্গের কর্ণ AC কে ব্যাস ধরে অঙ্কিত পরিবৃত্তের সমীকরণ $(x-b)(x-0) + (y-0)(y-b) = 0$
$\Rightarrow x^2 - bx + y^2 - by = 0$
$\therefore x^2 + y^2 = b(x + y)$ (Provsd)

14 (a) এরূপ দুইটি বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর যাদের প্রত্যেকটির কেন্দ্র (3 , 4) এবং যারা $x^2 + y^2 = 9$ বৃত্তকে স্পর্শ করে। **[য.'১০]**

সমাধান ঃ প্রদত্ত বৃত্ত $x^2 + y^2 = 9 \cdots$ (i) এর কেন্দ্র $A(0,0)$ এবং ব্যাসার্ধ $r_1 = 3$

ধরি, নির্ণেয় বৃত্তের কেন্দ্র $B(3,4)$এবং ব্যাসাধ r_2

বৃত্তদ্বয় পস্পরকে বহিঃস্থভাবে স্পর্শ করলে,

$\therefore\ r_1 + r_2 = AB \Rightarrow 3 + r_2 = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$

$\Rightarrow r_2 = 2$

আবার, বৃত্তদ্বয় পস্পরকে বহিঃস্থভাবে স্পর্শ করলে,

$r_2 - r_1 = AB \Rightarrow r_2 - 3 = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$

$\therefore\ r_2 = 8$

$\therefore$ নির্ণেয় বৃত্ত দুইটির সমীকরণ,

$(x-3)^2 + (y-4)^2 = 2^2$

$\Rightarrow x^2 + y^2 - 6x - 8y + 9 + 16 - 4 = 0$

$\therefore\ x^2 + y^2 - 6x - 8y + 21 = 0$ এবং

$(x-3)^2 + (y-4)^2 = 8^2$

$\Rightarrow x^2 + y^2 - 6x - 8y + 9 + 16 - 64 = 0$

$\therefore\ x^2 + y^2 - 6x - 8y - 39 = 0$

14. (b) $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} = \frac{1}{c}$ **হলে দেখাও যে, $x^2 + y^2 + 2ax + c = 0$ ও $x^2 + y^2 + 2by + c = 0$ বৃত্ত দুইটি পরস্পরকে স্পর্শ করবে।** **[মা.'০৭]**

প্রমাণ : $x^2 + y^2 + 2ax + c = 0$ বৃত্তের কেন্দ্র

$A(-a, 0)$ এবং ব্যাসার্ধ $r_1 = \sqrt{a^2 - c}$

$x^2 + y^2 + 2by + c = 0$ বৃত্তের কেন্দ্র $B(0, -b)$ এবং ব্যাসার্ধ $r_2 = \sqrt{b^2 - c}$

বৃত্ত দুইটি পরস্পরকে স্পর্শ করলে,

$AB = |r_1 \pm r_2|$

$\Rightarrow \sqrt{a^2 + b^2} = |\sqrt{a^2 - c} \pm \sqrt{b^2 - c}|$

$\Rightarrow a^2 + b^2 = a^2 - c + b^2 - c \pm 2\sqrt{(a^2 - c)(b^2 - c)}$ [বর্গ করে।]

$\therefore\ 2c = \pm 2\sqrt{(a^2 - c)(b^2 - c)}$

$\Rightarrow c^2 = (a^2 - c)(b^2 - c)$ [বর্গ করে।]

$\Rightarrow c^2 = a^2b^2 - b^2c - a^2c + c^2$

$\Rightarrow b^2c + a^2c = a^2b^2 \Rightarrow \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} = \frac{1}{c}$

$\therefore\ \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} = \frac{1}{c}$ হলে, প্রদত্ত রেখা দুইটি স্পর্শ করবে।

15. $x = a(\cos\theta - 1)$ এবং $y = a(\sin\theta + 1)$ হলে , বৃত্তের কার্তেসীয় সমীকরণ, ব্যাসার্ধ ও কেন্দ্রের স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

সমাধান: $x = a(\cos\theta - 1) = a\cos\theta - a$

$\Rightarrow a\cos\theta = x - a$

আবার, $y = a(\sin\theta + 1) = a\sin\theta + a$

$\Rightarrow a\sin\theta = y - a$

এখন, $a^2\cos^2\theta + a^2\sin^2\theta = (x-a)^2 + (y-a)^2$

$\therefore\ (x - a)^2 + (y - a)^2$, যা বৃত্তটির কার্তেসীয় সমীকরণ। বৃত্তটির ব্যাসার্ধ a এবং কেন্দ্র $(a, -a)$.

16. প্রদত্ত শর্ত সিদ্ধ করে এরূপ বৃত্তের পোলার সমীকরণ নির্ণয় কর:

সমাধান: (a) $(4, 30^0)$ কেন্দ্র ও 5 ব্যাসার্ধ বিশিষ্ট বৃত্তের পোলার সমীকরণ,

$5^2 = r^2 + 4^2 - 2r.4\cos(\theta - 30^0)$

$\Rightarrow 25 = r^2 + 16 - 8r\cos(\theta - \frac{\pi}{6})$

$\therefore\ r^2 - 8r\cos(\theta - \frac{\pi}{6}) - 9 = 0$

(b) মনে করি, বৃত্তের ব্যাসার্ধ a. তাহলে বৃত্তের পোলার সমীকরণ, $a^2 = r^2 + 3^2 - 2r.3\cos(\theta - 0^0)$

$\Rightarrow a^2 = r^2 + 9 - 6r\cos(\theta \cdots \cdots (1)$

(1) বৃত্তটি পোল $(0, 0^0)$ বিন্দুগামী বলে,

$a^2 = 0^2 + 9 - 6.0.\cos 0^0$

$\Rightarrow a^2 = 9 \Rightarrow a = 3.$

$\therefore$ নির্ণেয় সমীকরণ, $9 = r^2 + 9 - 6r\cos\theta$

$\Rightarrow r^2 = 6r\cos\theta \Rightarrow r = 6\cos\theta$

(c) মনে করি, বৃত্তের ব্যাসার্ধ p. তাহলে বৃত্তের পোলার সমীকরণ,

$p^2 = r^2 + r_1^2 - 2r r_1\cos(\theta - \theta_1) \cdots (1)$

(1) বৃত্তটি পোল $(0, 0^0)$, $(a, 0^0)$, $(b, 90^0)$ বিন্দুগামী।

$\therefore\ p^2 = 0^2 + r_1^2 - 2.0.r_1\cos(0^0 - \theta_1)$

$\Rightarrow p^2 = r_1^{\,2} \Rightarrow p = r_1 \cdots \cdots (2)$

$p^2 = a^2 + r_1^{\,2} - 2.a.r_1 \cos(0^0 - \theta_1)$

$\Rightarrow a^2 = 2a r_1 \cos\theta_1, \ [\because p = r_1]$

$\Rightarrow a = 2 r_1 \cos\theta_1 \cdots \cdots (3)$

এবং $p^2 = b^2 + r_1^{\,2} - 2.b.r_1 \cos(90^0 - \theta_1)$

$\Rightarrow b^2 = 2b r_1 \sin\theta_1, \ [\because p = r_1]$

$\Rightarrow b = 2 r_1 \sin\theta_1$

(1) হতে পাই, $r_1^{\,2} = r^2 + r_1^{\,2}$

$-2r r_1 (\cos\theta\cos\theta_1 + \sin\theta\sin\theta_1)$

$r^2 = r(\cos\theta . 2r_1\cos\theta_1 + \sin\theta . 2r_1\sin\theta_1)$

$\therefore r = a\cos\theta + b\sin\theta$

17. বৃত্তটির কেন্দ্র ও ব্যাসার্ধ নির্ণয় কর:

(a) **সমাধান:** প্রদত্ত বৃত্তের সমীকরণ $r^2 - 4\sqrt{3}\,r\cos\theta - 4r\sin\theta + 15 = 0$ কে পোলার স্থানাঙ্কে বৃত্তের সাধারণ সমীকরণ $r^2 + 2r(g\cos\theta + f\sin\theta) + c = 0$ এর সাথে তুলনা করে পাই,

$g = -2\sqrt{3}, f = -2, c = 15.$

$\therefore \sqrt{g^2 + f^2} = \sqrt{12+4} = 4, \tan^{-1}\dfrac{-f}{-g} =$

$\tan^{-1}\dfrac{2}{2\sqrt{3}} = \tan^{-1}\dfrac{1}{\sqrt{3}} = \dfrac{\pi}{6}$

$\therefore$ নির্ণেয় কেন্দ্র $(4, \dfrac{\pi}{6})$ এবং

ব্যাসার্ধ $= \sqrt{g^2 + f^2 - c} = \sqrt{12+4-15} = 1$

(b) $r = 2a\cos\theta \Rightarrow r^2 - 2ra\cos\theta = 0$ কে পোলার স্থানাঙ্কে বৃত্তের সাধারণ সমীকরণ $r^2 + 2r(g\cos\theta + f\sin\theta) + c = 0$ এর সাথে তুলনা করে পাই, $g = -a, f = 0, c = 0.$

$\therefore \sqrt{g^2 + f^2} = \sqrt{a^2 + 0} = a,$

$\tan^{-1}\dfrac{-f}{-g} = \tan^{-1}\dfrac{0}{a} = \tan^{-1}0 = 0^0$

$\therefore$ নির্ণেয় কেন্দ্র $(a, 0^0)$ এবং

ব্যাসার্ধ $= \sqrt{a^2 + 0^2 - 0} = a$

18. (a) একটি বৃত্তের কেন্দ্র x-অক্ষের উপর, যা মূলবিন্দু থেকে ধনাত্মক দিকে 7 একক দূরে অবস্থিত। বৃত্তটির ব্যাসার্ধ 4 একক হলে, বৃত্তটির পোলার সমীকরণ নির্ণয় কর।

সমাধান: প্রশ্নমতে নির্ণেয় বৃত্তটির কেন্দ্র (7, 0) এবং ব্যাসার্ধ = 4.

$\therefore$ বৃত্তটির পোলার সমীকরণ,

$4^2 = r^2 + 7^2 - 2r.7\cos(\theta - 0)$

$\Rightarrow 16 = r^2 + 49 - 14r\cos\theta$

$\therefore r^2 - 14r\cos\theta + 33 = 0$ (Ans.)

(b) একটি বৃত্তের কেন্দ্র y-অক্ষের উপর, যা মূলবিন্দু থেকে ধনাত্মক দিকে 8 একক দূরে অবস্থিত। বৃত্তটির ব্যাসার্ধ 5 একক হলে, বৃত্তটির পোলার সমীকরণ নির্ণয় কর।

সমাধান: প্রশ্নমতে নির্ণেয় বৃত্তটির কেন্দ্র $(8, \dfrac{\pi}{2})$ এবং ব্যাসার্ধ = 5.

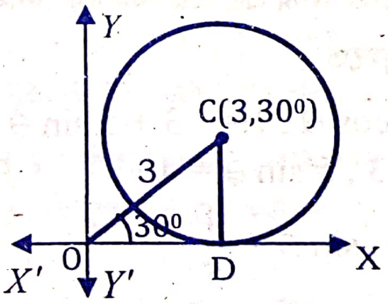
$\therefore$ বৃত্তটির পোলার সমীকরণ,

$5^2 = r^2 + 8^2 - 2r.8\cos(\theta - \dfrac{\pi}{2})$

$\Rightarrow 25 = r^2 + 64 - 16r\cos(\dfrac{\pi}{2} - \theta)$

$\therefore r^2 - 16r\sin\theta + 39 = 0.$

(c) একটি বৃত্তের কেন্দ্র $(3, 30^0)$ এবং বৃত্তটি x-অক্ষকে স্পর্শ করে; বৃত্তটির পোলার সমীকরণ নির্ণয় কর।



সমাধান: প্রশ্নমতে নির্ণেয় বৃত্তটির কেন্দ্র $(3, 30^0)$ এবং ব্যাসার্ধ $= CD = 3\sin 30^0 = \dfrac{3}{2}$

$\therefore$ বৃত্তটির পোলার সমীকরণ,

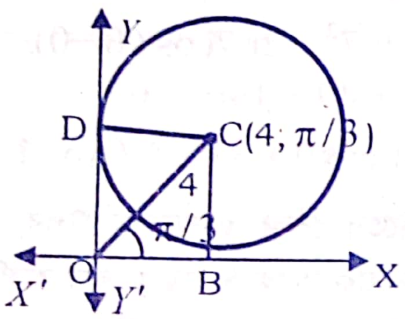
$\left(\dfrac{3}{2}\right)^2 = r^2 + 3^2 - 2r.3\cos(\theta - 30^0)$

$\Rightarrow \frac{9}{4} = r^2 + 9 - 6r\cos(\theta - 30^0)$

$\Rightarrow 9 = 4r^2 + 36 - 24r\cos(\theta - 30^0)$

$\therefore\ 4r^2 - 24r\cos(\theta - 30^0) + 27 = 0$

(d) একটি বৃত্তের কেন্দ্র $(4, \frac{\pi}{3})$ এবং বৃত্তটি y-অক্ষকে স্পর্শ করে; বৃত্তটির পোলার সমীকরণ নির্ণয় কর।



সমাধান: প্রশ্নমতে নির্ণেয় বৃত্তটির কেন্দ্র $(4, \frac{\pi}{3})$ এবং

ব্যাসার্ধ $= OB = 4\cos\frac{\pi}{3} = 4.\frac{1}{2} = 2$

$\therefore$ বৃত্তটির পোলার সমীকরণ,

$(2)^2 = r^2 + 4^2 - 2r.4\cos(\theta - \frac{\pi}{3})$

$\Rightarrow 4 = r^2 + 16 - 8r\cos(\theta - \frac{\pi}{3})$

$\therefore\ r^2 - 8r\cos(\theta - \frac{\pi}{3}) + 12 = 0$

19. যদি বৃত্তের উপরস্থ (4,1) বিন্দুটি $(1 + 5\cos\theta, -3 + 5\sin\theta)$ দ্বারা প্রকাশিত হয়, তবে এ বিন্দুগামী ব্যাসের অপর প্রান্তের স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

সমাধান : প্রশ্নমতে,

$4 = 1 + 5\cos\theta,\ 1 = -3 + 5\sin\theta$

$\Rightarrow 5\cos\theta = 3,\ 5\sin\theta = 4$

$\Rightarrow \cos\theta = \frac{3}{5},\ \sin\theta = \frac{4}{5}$

আমরা জানি, প্রদত্ত বিন্দুগামী ব্যাসের অপর প্রান্তের জন্য θ এর মান $180°$ বৃদ্ধি পায়।

$\therefore$ অপর প্রান্তের জন্য,

$\cos(180° + \theta) = -\cos\theta = -\frac{3}{5}$ এবং

$\sin(180° + \theta) = -\sin\theta = -\frac{4}{5}$

$\therefore$ (4, 1) বিন্দুগামী ব্যাসের অপর প্রান্তের স্থানাঙ্ক

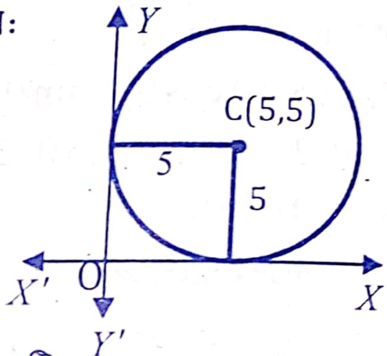
$(1 + 5\times(-\frac{3}{5}),\ -3 + 5\times(-\frac{4}{5}))$

$= (1 - 3,\ -3 - 4) = (-2, -7)$ (Ans.)

সম্ভাব্য ধাপসহ সমস্যা:

20. এরূপ বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর যা প্রত্যেক অক্ষরেখাকে মূলবিন্দু থেকে ধনাত্মক দিকে 5 একক দূরত্বে স্পর্শ করে।

সমাধান:



নির্ণেয় বৃত্তটি প্রত্যেক অক্ষরেখাকে মূলবিন্দু থেকে ধনাত্মক দিকে 5 একক দূরত্বে স্পর্শ করে।

$\therefore$ বৃত্তটির কেন্দ্র (5, 5)

এবং ব্যাসার্ধ $= |5| = 5.$ (১)

$\therefore$ বৃত্তটির সমীকরণ $(x-5)^2 + (y-5)^2 = 5^2$ (১)

$\Rightarrow x^2 - 10x + 25 + y^2 - 10y + 25 = 25$

$\therefore\ x^2 + y^2 - 10x - 10y + 25 = 0$ (Ans.)

21. দেখাও যে, $x^2 + y^2 - 4x + 6y + 8 = 0$ এবং $x^2 + y^2 - 10x - 6y + 14 = 0$ বৃত্ত দুইটি পরস্পরকে (3, – 1) বিন্দুতে স্পর্শ করে।

প্রমাণ : $x^2 + y^2 - 4x + 6y + 8 = 0$ বৃত্তের কেন্দ্র $C_1(2,-3)$ এবং ব্যাসার্ধ $r_1 = \sqrt{4+9-8} = \sqrt{5}$ (১)

$x^2 + y^2 - 10x - 6y + 14 = 0$ বৃত্তের কেন্দ্র $C_2(5, 3)$ এবং ব্যাসার্ধ $r_2 = \sqrt{25+9-14} = \sqrt{20}$

$= 2\sqrt{5}$

ধরি, প্রদত্ত বিন্দু P(3 , −1).

এখন $C_1P = \sqrt{(2-3)^2 + (-3+1)^2} = \sqrt{5} = r_1$ (১)

এবং $C_2P = \sqrt{(5-3)^2 + (3+1)^2} = \sqrt{20}$

$= 2\sqrt{5} = r_2$

$C_1C_2 = \sqrt{(2-5)^2 + (-3-3)^2} = \sqrt{9+36}$

$= \sqrt{45} = 3\sqrt{5} = \sqrt{5} + 2\sqrt{5} = C_1P + C_2P$

∴ বৃত্তের কেন্দ্র দুইটি এবং (3, –1) বিন্দু একই সরলরেখায় অবস্থিত। (১)

অতএব, প্রদত্ত বৃত্ত দুইটি পরস্পরকে (3, –1) বিন্দুতে স্পর্শ করে। (প্রমাণিত) (১)

22. দেখাও যে, $x^2 + y^2 - 6x + 6y - 18 = 0$ ও $x^2 + y^2 - 2y = 0$ বৃত্ত দুইটি পরস্পরকে অন্তঃস্থভাবে স্পর্শ করে।

প্রমাণ : $x^2 + y^2 - 6x + 6y - 18 = 0$ বৃত্তের কেন্দ্র $A(3, -3)$ এবং ব্যাসার্ধ $r_1 = \sqrt{9+9+18} = 6$ (১)

$x^2 + y^2 - 2y = 0$ বৃত্তের কেন্দ্র $A(0, 1)$ এবং ব্যাসার্ধ $r_2 = \sqrt{0+1+0} = 1$

এখন, $AB = \sqrt{(3-0)^2 + (-3-1)^2} = 5$ (১)

এবং $r_1 - r_2 = 6 - 1 = 5 = AB$

∴ বৃত্ত দুইটি পরস্পরকে অন্তঃস্থভাবে স্পর্শ করে। (১)

23. (a) বৃত্তের পোলার সমীকরণ নির্ণয় কর যার কেন্দ্র $(6, \frac{\pi}{4})$ এবং ব্যাসার্ধ 5 :

সমাধান : $(6, \frac{\pi}{4})$ কেন্দ্র ও 5 ব্যাসার্ধ বিশিষ্ট বৃত্তের পোলার সমীকরণ,

$5^2 = r^2 + 6^2 - 2r.6\cos(\theta - \frac{\pi}{4})$ (১)

$\Rightarrow 25 = r^2 + 36 - 12r(\cos\theta\cos\frac{\pi}{4} + \sin\theta\sin\frac{\pi}{4})$ (১)

$\Rightarrow r^2 + 11 - 12r(\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\theta + \frac{1}{\sqrt{2}}\sin\theta) = 0$

$\Rightarrow r^2 - 6\sqrt{2}\, r(\cos\theta + \sin\theta) + 11 = 0$ (১)

(b) বৃত্তের পোলার সমীকরণ নির্ণয় কর যার কেন্দ্র $(3, \frac{3\pi}{2})$ ও ব্যাসাধ 2.

সমাধান : $(3, \frac{3\pi}{2})$ কেন্দ্র ' বিশিষ্ট বৃত্তের পোলার সমীকরণ,

$2^2 = r^2 + 3^2 - 2r.3\cos(\theta - \frac{3\pi}{2})$ (১)

$\Rightarrow 4 = r^2 + 9 - 6r\cos(\frac{3\pi}{2} - \theta)$

$\Rightarrow r^2 + 5 + 6r\cos\theta = 0$ (১)

24. দেখাও যে, $r = a\cos\theta$ একটি বৃত্ত যার কেন্দ্র $(\frac{a}{2}, 0)$ ও ব্যাসার্ধ $\frac{a}{2}$.

প্রমাণ : $r = a\cos\theta \Rightarrow r^2 = ar\cos\theta$

$\Rightarrow x^2 + y^2 = ax$ (১)

$[\because r^2 = x^2 + y^2,\ x = r\cos\theta]$

$\Rightarrow x^2 - ax + a^2 + y^2 = a^2$

$\Rightarrow (x - a)^2 + y^2 = a^2$; যা বৃত্তের সমীকরণ। বৃত্তের কেন্দ্র (a, 0) এবং ব্যাসার্ধ = a. (১)

25. এরূপ বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর যা $x^2 + y^2 - 6x + 8y = 0$ বৃত্তের সাথে এককেন্দ্রিক এবং (3, – 1) বিন্দু দিয়ে অতিক্রম করে। [সি.'০১]

সমাধান : $x^2 + y^2 - 6x + 8y = 0$ বৃত্তের কেন্দ্রের স্থানাঙ্ক = (3, – 4), যা নির্ণেয় বৃত্তের কেন্দ্র। (১)

এখন নির্ণেয় বৃত্তের ব্যাসার্ধ = কেন্দ্র (3, – 4) হতে (3, – 1) বিন্দুর দূরত্ব = $|-4 + 1| = 3$ (১)

∴ নির্ণেয় বৃত্তের সমীকরণ,

$(x - 3)^2 + (y + 4)^2 = 3^2$ (১)

$\Rightarrow x^2 - 6x + 9 + y^2 + 8y + 16 = 9$

∴ $x^2 + y^2 - 6x + 8y + 16 = 0$ (Ans.)

26. $x + 2 = 0$ রেখার উপর কেন্দ্রবিশিষ্ট একটি বৃত্ত (– 7, 1) ও (– 1, 3) বিন্দু দুইটি দিয়ে অতিক্রম করে। বৃত্তটির সমীকরণ নির্ণয় কর।[চ.'০৭;মা.'০৫]

সমাধান : খলিফার নিয়মানুসারে ধরি (–7, 1) ও (–1, 3) বিন্দুগামী বৃত্তের সমীকরণ,

$(x + 7)(x + 1) + (y - 1)(y - 3) + k\{(x + 7)(1-3) - (y - 1)(-7 + 1)\} = 0$ (১)

$\Rightarrow x^2 + 8x + 7 + y^2 - 4y + 3 + k(-2x - 14 + 6y - 6) = 0$

$\Rightarrow x^2 + y^2 + (8 - 2k)x + (-4 + 6k)y + 10 - 20k = 0 \cdots\cdots (1)$

(1) বৃত্তটির কেন্দ্র $\left(-\frac{8-2k}{2}, -\frac{-4+6k}{2}\right) =$ $(k-4, 2-3k)$, $x + 2 = 0$ রেখার উপর অবস্থিত। (১)

∴ $k-4+2=0 \Rightarrow k=2$ (১)

k এর মান (1) এ বসিয়ে পই,

$x^2 + y^2 + (8-4)x + (-4+12)y + 10 - 40 = 0$

∴ $x^2+y^2+4x+8y-30=0$ (Ans.) (১)

27. $x + 2y + 3 = 0$ রেখার উপর কেন্দ্রবিশিষ্ট একটি বৃত্ত $(-1, -1)$ ও $(3, 2)$ বিন্দু দুইটি দিয়ে অতিক্রম করে। বৃত্তটির সমীকরণ নির্ণয় কর।

[কু.'১৩; সি.'১০]

সমাধান ঃ খলিফার নিয়মানুসারে ধরি $(-1, -1)$ ও $(3, 2)$ বিন্দুগামী বৃত্তের সমীকরণ ,

$(x+1)(x-3)+(y+1)(y-2)+$
$k\{(x+1)(-1-2)-(y+1)(-1-3)\}=0$ (১)

$\Rightarrow x^2-2x-3+y^2-y-2+$
$k(-3x-3+4y+4)=0$

$\Rightarrow x^2+y^2+(-2-3k)x+(-1+4k)y$
$-5+k=0 \cdots\cdots (1)$

(1) বৃত্তটির কেন্দ্র $\left(\frac{2+3k}{2}, \frac{1-4k}{2}\right)$,

$x+2y+3=0$ রেখার উপর অবস্থিত। (১)

∴ $\frac{2+3k}{2} + 2 . \frac{1-4k}{2} + 3 = 0$ (১)

$\Rightarrow 2+3k+2-8k+6=0$

$\Rightarrow -5k=-10 \Rightarrow k=2$

k এর মান (1) এ বসিয়ে পই,

$x^2+y^2+(-2-6)x+(-1+8)y-5+2=0$

∴ $x^2+y^2-8x+7y-3=0$ (Ans.) (১)

28. y-অক্ষের উপর কেন্দ্রবিশিষ্ট একটি বৃত্ত $(3, 0)$ ও $(-4, 1)$ বিন্দু দুইটি দিয়ে অতিক্রম করে। বৃত্তটির সমীকরণ নির্ণয় কর। **[চ.'০৫]**

সমাধান : ধরি, বৃত্তটির সমীকরণ,

$x^2+y^2+2gx+2fy+c=0 \cdots (1)$

(1) বৃত্তটির কেন্দ্র y-অক্ষের উপর অবস্থিত।

∴ $g=0$ (১)

বৃত্তটি $(3, 0)$ ও $(-4, 1)$ বিন্দুগামী।

∴ $9+0+c=0 \Rightarrow c=-9$ এবং

$16+1+2f+c=0$

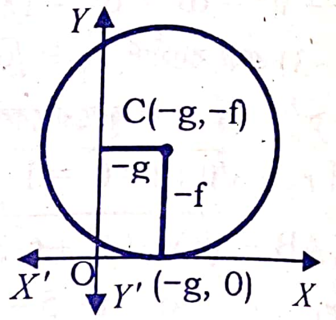
$\Rightarrow 17+2f-9=0 \Rightarrow 2f=-8 \Rightarrow f=-4$ (১)

(1) এ g , f ও c এর মান বসিয়ে পাই,

$x^2+y^2-8y-9=0$ (১)

29. এরূপ বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর যা x-অক্ষকে $(2, 0)$ বিন্দুতে স্পর্শ করে এবং $(-1, 9)$ বিন্দু দিয়ে অতিক্রম করে। **[য.'০০; চ.'০৩]**

সমাধানঃ



ধরি, বৃত্তের সমীকরণ,

$x^2+y^2+2gx+2fy+c=0 \cdots (1)$

(1) বৃত্তটি x-অক্ষকে $(2, 0)$ বিন্দুতে স্পর্শ করে।

∴ $g^2=c$ এবং (১)

$-g=2 \Rightarrow g=-2$ (১)

∴ $c=(2)^2=4$

আবার, (1) বৃত্তটি

$(-1, 9)$ বিন্দু দিয়ে অতিক্রম করে।

∴ $1+81-2g+18f+c=0$ (১)

$\Rightarrow 82+4+18f+4=0$

[c ও g এর মান বসিয়ে।]

$\Rightarrow 18f=-90 \Rightarrow f=-5$

∴ নির্ণেয় বৃত্তের সমীকরণ,

$x^2+y^2-4x-10y+4=0$ (Ans.) (১)

[MCQ এর জন্য,

$\frac{(x-2)^2+(y-0)^2}{y} = \frac{(-1-2)^2+(9-0)^2}{9}$]

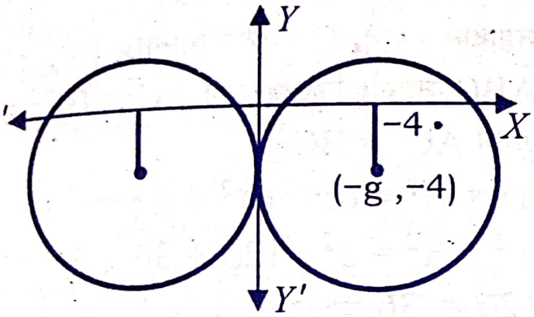
30. এরূপ বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর যা মূলবিন্দু থেকে −4 একক দূরত্বে y-অক্ষকে স্পর্শ করে এবং x-অক্ষ থেকে 6 একক দীর্ঘ একটি জ্যা কর্তন করে।

[চ.'০৬;দি.'১০; ঢা.'১৩]

সমাধান ঃ ধরি, বৃত্তের সমীকরণ,

$x^2+y^2+2gx+2fy+c=0 \cdots (1)$

(1) বৃত্তটি মূলবিন্দু থেকে – 4 একক দূরত্বে y-অক্ষকে স্পর্শ করে অর্থাৎ $(0, -4)$ বিন্দুগামী।



$\therefore\ c = f^2 \cdots (2)$ এবং (১)

$16 - 8f + c = 0$ (১)

$\Rightarrow 16 - 8f + f^2 = 0$ [(2) দ্বারা]

$\Rightarrow (f-4)^2 = 0 \Rightarrow f = 4$

$\therefore$ (2) হতে পাই, $c = f^2 = 4^2 = 16$

আবার, (1) বৃত্তটি x-অক্ষ থেকে 6 একক দীর্ঘ একটি জ্যা কর্তন করে।

$\therefore\ 2\sqrt{g^2 - c} = 6$ (১)

$\Rightarrow \sqrt{g^2 - 16} = 3$

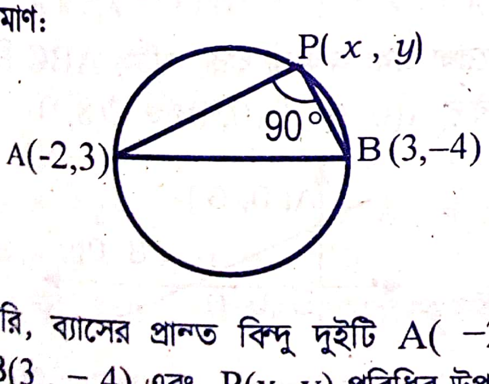
$\Rightarrow g^2 - 16 = 9 \Rightarrow g^2 = 25 \Rightarrow g = \pm 5$

$\therefore$ নির্ণেয় বৃত্তের সমীকরণ,

$x^2 + y^2 \pm 10x + 8y + 16 = 0$ (Ans.) (১)

31. প্রমাণ কর যে, $(-2, 3)$ ও $(3, -4)$ বিন্দু দুইটির সংযোগ রেখাকে ব্যাস ধরে অঙ্কিত বৃত্তের সমীকরণ $(x+2)(x-3) + (y-3)(y+4) = 0$

প্রমাণ: [ঢা.'০৩]



ধরি, ব্যাসের প্রান্ত বিন্দু দুইটি A(–2, 3) ও B(3 , – 4) এবং P(x, y) পরিধির উপর যেকোন একটি বিন্দু।

PA এবং PB যোগ করি। যেহেতু AB ব্যাস, $\angle APB$ একটি অর্ধবৃত্তস্থ কোণ। (১)

$\therefore\ \angle APB = 90°$

$\therefore$ (AP রেখার ঢাল) $\times$ (BP রেখার ঢাল) $= -1$ (১)

$\Rightarrow \dfrac{y-3}{x+2} \times \dfrac{y+4}{x-3} = -1$ (১)

$\Rightarrow (y-3)(y+4) = -(x+2)(x-3)$

$\therefore\ (x+2)(x-3) + (y-3)(y+4) = 0$

(Proved)

32. একটি বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর যার কেন্দ্র $(0, 3)$ এবং যা $x^2 + y^2 - 4y = 0$ বৃত্ত ও $y - 2 = 0$ রেখার ছেদ বিন্দু দিয়ে যায়। [চ.'০২]

সমাধান : ধরি, প্রদত্ত বৃত্ত ও রেখার ছেদবিন্দু দিয়ে যায় এরূপ বৃত্তের সমীকরণ,

$x^2 + y^2 - 4y + k(y-2) = 0$ (১)

$\Rightarrow x^2 + y^2 + (-4+k)y - 2k = 0 \cdots (1)$

(1) বৃত্তের কেন্দ্র $(0, -\dfrac{k-4}{2})$. (১)

প্রশ্নমতে , বৃত্তের কেন্দ্র $(0, 3)$.

$\therefore\ -\dfrac{k-4}{2} = 3 \Rightarrow k - 4 = -6\ \therefore k = -2$ (১)

$\therefore$ নির্ণেয় বৃত্তের সমীকরণ,

$x^2 + y^2 + (-4-2)y - 2.(-2) = 0$

$\therefore\ x^2 + y^2 - 6x + 4 = 0$ (Ans.) (১)

33. $x^2 + y^2 = b(5x - 12y)$ বৃত্তের বর্ধিত যে ব্যাসটি মূলবিন্দু দিয়ে অতিক্রম করে তার সমীকরণ নির্ণয় কর। [প্র.ভ.প.' ৮৯, '০৪]

সমাধান ঃ প্রদত্ত বৃত্ত $x^2 + y^2 = b(5x - 12y)$

$\Rightarrow x^2 + y^2 - 5bx + 12by = 0 \cdots (1)$

(1) বৃত্তের কেন্দ্র $(-\dfrac{-5b}{2}, -\dfrac{12b}{2}) = (\dfrac{5b}{2}, 6b)$ (১)

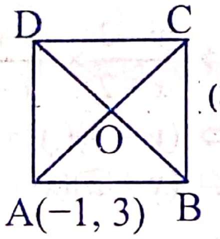
$\therefore$ (1) বৃত্তের বর্ধিত যে ব্যাসটি মূলবিন্দু দিয়ে অতিক্রম করে তার সমীকরণ $y = \dfrac{6b}{5b/2}x \Rightarrow y = \dfrac{12}{5}x$

$\therefore\ 12x + 5y = 0$ (Ans.) (১)

34. ABCD বর্গের পরিবৃত্তের সমীকরণ $x^2 + y^2 - 5x + 8y - 39 = 0$. A $(-1, 3)$ হলে B, C ও D এর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

সমাধান : ABCD বর্গের পরিবৃত্ত $x^2 + y^2 - 5x + 8y - 39 = 0$ এর কেন্দ্র $(\dfrac{5}{2}, -4)$ হবে ABCD বর্গের AC ও BD কর্ণদ্বয়ের ছেদবিন্দু O. (১) + (১)

ধরি, C এর স্থানাঙ্ক (α, β)



AC এর মধ্যবিন্দু $\left(\frac{5}{2}, -4\right)$। (১)

$\therefore \frac{\alpha - 1}{2} = \frac{5}{2}$

$\Rightarrow \alpha = 5 + 1 = 6$ (১)

এবং $\frac{\beta + 3}{2} = -4 \Rightarrow \beta = -8 - 3 = -11$

$\therefore$ C এর স্থানাঙ্ক $(6, -11)$.

AC এর ঢাল $= \frac{3 + 11}{-1 - 6} = -2$ (১)

ধরি, AB বাহুর ঢাল m এবং AB বাহু AC কর্ণের সাথে $45°$ কোণ উৎপন্ন করে।

$\therefore \frac{m + 2}{1 - 2m} = \tan 45° = 1$ (১)

$\Rightarrow m + 2 = 1 - 2m \Rightarrow 3m = -1 \Rightarrow m = -\frac{1}{3}$

$\therefore$ AB ও DC বাহুর ঢাল $\frac{1}{3}$.

$\therefore$ A(− 1, 3) বিন্দুগামী AB রেখার সমীকরণ

$y - 3 = -\frac{1}{3}(x + 1)$ (১)

$\Rightarrow 3y - 9 = -x - 1 \Rightarrow x + 3y - 8 = 0 \cdots (1)$

C(6 , − 11) বিন্দুগামী (1) এর উপর লম্ব BC এর সমীকরণ $3x - y = 18 + 11$ (১)

$\Rightarrow 3x - y - 29 = 0 \cdots \cdots (2)$

(1) ও (2) এর ছেদবিন্দু B এর স্থানাঙ্ক

$= \left(\frac{-87 - 8}{-1 - 9}, \frac{-24 + 29}{-1 - 9}\right) = \left(\frac{19}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ (১)

A(− 1, 3) বিন্দুগামী AB এর লম্ব AD এর সমীকরণ $3x - y = -3 - 3$

$\Rightarrow 3x - y + 6 = 0 \cdots (3)$

C(6 , − 11) বিন্দুগামী (3) এর উপর লম্ব CD এর সমীকরণ $x + 3y = 6 - 33 = -27$

$\Rightarrow x + 3y + 27 = 0 \cdots \cdots (4)$

(3) ও (4) এর ছেদবিন্দু D এর স্থানাঙ্ক

$= \left(\frac{-27 - 18}{9 + 1}, \frac{6 - 81}{9 + !}\right) = \left(-\frac{9}{2}, -\frac{15}{2}\right)$ (১)

35. ABC সমবাহু ত্রিভুজের দুইটি শীর্ষবিন্দু A(0 , 0) ও B(6 , 0) । ABC ত্রিভুজটির পরিবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর।

সমাধান : ধরি, C শীর্ষের স্থানাঙ্ক (α, β).

ABC সমবাহু ত্রিভুজ বলে $AC^2 = BC^2 = AB^2$ (১)

এখন $AC^2 = BC^2$

$\Rightarrow \alpha^2 + \beta^2 = (\alpha - 6)^2 + \beta^2$ (১)

$\Rightarrow \alpha^2 + \beta^2 = \alpha^2 - 12\alpha + 36 + \beta^2$

$\Rightarrow 12\alpha = 36 \Rightarrow \alpha = 3$

আবার, $AC^2 = AB^2 \Rightarrow \alpha^2 + \beta^2 = 6^2$

$\Rightarrow 9 + \beta^2 = 36 \Rightarrow \beta^2 = 27 \Rightarrow \beta = \pm 3\sqrt{3}$

$\therefore$ C শীর্ষের স্থানাঙ্ক $(3, \pm 3\sqrt{3})$.

ধরি, A(0,0) দিয়ে যায় এরূপ পরিবৃত্তের সমীকরণ $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy = 0 \cdots (1)$ (১)

(1) বৃত্ত B(6,0) এবং $C(3, \pm 3\sqrt{3})$ বিন্দুগামী।

$\therefore 36 + 12g = 0 \Rightarrow g = -3$ এবং (১)

$9 + 27 + 6g \pm 6\sqrt{3} f = 0$

$36 - 18 \pm 6\sqrt{3} f = 0 \Rightarrow \pm 6\sqrt{3} f = 18$

$\Rightarrow f = \pm\sqrt{3}$

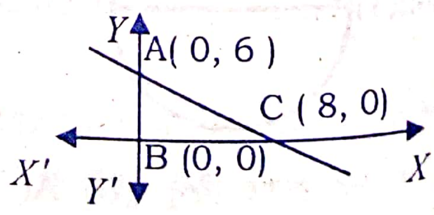
(1) এ g ও f এর মান বসিয়ে পাই,

$x^2 + y^2 - 6x \pm 2\sqrt{3} y = 0$ (Ans.) (১)

36. $3x + 4y = 24$ সরলরেখা এবং অক্ষ দুইটি দ্বারা গঠিত ত্রিভুজের পরিবৃত্ত ও অন্তঃবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর।

সমাধান : ধরি, $3x + 4y = 24 \Rightarrow \frac{x}{8} + \frac{y}{6} = 1$

সরলরেখা এবং অক্ষদ্বয় দ্বারা গঠিত ABC ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দু A(0, 6), B(0, 0) ও C(8, 0). (১)



পরিবৃত্ত : ABC ত্রিভুজে, $\angle ABC = 90°$ বলে, A ও C বিন্দুদ্বয় ত্রিভুজটির পরিবৃত্তের একটি ব্যাসের প্রান্তবিন্দু। (১)

$\therefore$ নির্ণেয় পরিবৃত্তের সমীকরণ,

$(x - 0)(x - 8) + (y - 6)(y - 0) = 0$ (১)

$\Rightarrow x^2 + y^2 - 8x - 6y = 0$ (Ans.)

অন্তঃবৃত্ত : এখানে, $a = BC = |0 - 8| = 8$, (১)

$b = AC = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10$,

$c = AB = |6 - 0| = 6$

$\delta_{ABC} = 0(0 - 0) - 6(0 - 8) = 48$ (১)

এবং $a + b + c = 8 + 10 + 6 = 24$

∴ অন্তঃবৃত্তের কেন্দ্রের স্থানাঙ্ক

$= \left(\frac{ax_1 + bx_2 + cx_3}{a+b+c}, \frac{ay_1 + by_2 + cy_3}{a+b+c}\right)$

$= \left(\frac{8\times0+10\times0+6\times8}{24}, \frac{8\times6+10\times0+6\times0}{24}\right)$

$= (2, 2)$ (১)

অন্তঃব্যাসার্ধ $= \frac{|\delta_{ABC}|}{a+b+c} = \frac{48}{24} = 2$ (১)

∴ নির্ণেয় অন্তঃবৃত্তের সমীকরণ,

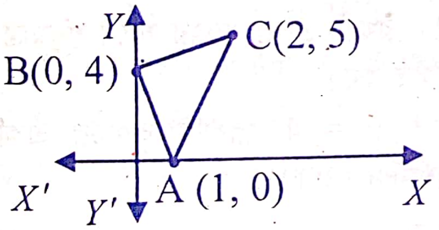
$(x-2)^2 + (y-2)^2 = 2^2$

$\Rightarrow x^2 - 4x + 4 + y^2 - 4y + 4 = 4$

$\therefore x^2 + y^2 - 4x - 4y + 4 = 0$ (Ans.) (১)

37. ABC ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দু তিনটি A(1, 0), B(0, 4) ও C(2, 5) । ABC ত্রিভুজটির পরিকেন্দ্র, ভরকেন্দ্র ও লম্বকেন্দ্র নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ



পরিকেন্দ্রঃ A(1, 0) ও B(0, 4) বিন্দুগামী বৃত্তের সমীকরণ $(x - 1)(x - 0) + (y - 0)(y - 4) = k\{(x - 1)(0 - 4) - (y - 0)(1 - 0)\}$ (১)

$\Rightarrow x^2 + y^2 - x - 4y = k(-4x + 4 - y)$, যা C(2, 5) বিন্দুগামী।

$\therefore 2^2 + 5^2 - 2 - 4\times5 = k(-4\times2 + 4\ 5)$ (১)

$\Rightarrow 4 + 25 - 2 - 20 = k(-8 + 4 - 5)$

$\Rightarrow -9k = 7 \Rightarrow k = -7/9$

∴ প্রদত্ত বিন্দুগামী ত্রিভুজের পরিবৃত্তের সমীকরণ

$x^2 + y^2 - x - 4y = -\frac{7}{9}(-4x + 4 - y)$

$\Rightarrow x^2 + y^2 - (1 + \frac{28}{9})x - (4 + \frac{7}{9})y + \frac{28}{9} = 0$

$\Rightarrow x^2 + y^2 - \frac{37}{9}x - \frac{43}{9}y + \frac{28}{9} = 0$ (১)

ত্রিভুজটির পরিকেন্দ্রের স্থানাঙ্ক $(\frac{37}{18}, \frac{43}{18})$ (১)

ভরকেন্দ্র : AB এর মধ্যবিন্দু $(\frac{1}{2}, 2)$ এবং C(2, 5) শীর্ষগামী মধ্যমার সমীকরণ, (১)

$(x - 2)(5 - 2) - (y - 5)(2 - \frac{1}{2}) = 0$ (১)

$\Rightarrow 3x - 6 - \frac{3}{2}y + \frac{15}{2} = 0$

$\Rightarrow 6x - 12 - 3y + 15 = 0$

$\Rightarrow 2x - y + 1 = 0 \cdots\cdots$ (i)

আবার, BC এর মধ্যবিন্দু $(1, \frac{9}{2})$ এবং A(1, 0). শীর্ষগামী মধ্যমার সমীকরণ,

$(x - 1)(0 - \frac{9}{2}) - (y - 0)(1 - 1) = 0$

$\Rightarrow x = 1$; (i) হতে পাই, $y = 2 + 1 = 3$

∴ ত্রিভুজটির ভরকেন্দ্র (1, 3). (১)

লম্বকেন্দ্র : AB বাহুর সমীকরণ

$(x - 1)(0 - 4) - (y - 0)(1 - 0) = 0$ (১)

$\Rightarrow -4x + 4 - y = 0 \Rightarrow 4x + y - 4 = 0$

∴ AB বাহুর উপর লম্ব এবং C(2 , 5) বিন্দুগামী রেখার সমীকরণ, $x - 4y = 2 - 20$ (১) +(১)

$\Rightarrow x = 4y - 18 \cdots\cdots$ (ii)

আবার, BC বাহুর সমীকরণ

$(x - 0)(4 - 5) - (y - 4)(0 - 2) = 0$

$\Rightarrow -x + 2y - 8 = 0 \Rightarrow x - 2y + 8 = 0$

∴ BC বাহুর উপর লম্ব এবং A(1 , 0) বিন্দুগামী রেখার সমীকরণ, $2x + y = 2$

$\Rightarrow 2(4y - 18) + y = 2$, [(ii) দ্বারা]

$\Rightarrow 8y - 36 + y = 2$

$\Rightarrow 9y = 38 \Rightarrow y = 38/9$

(ii) হতে পাই, $x = 4\times\frac{38}{9} - 18 = -\frac{10}{9}$

ত্রিভুজটির লম্বকেন্দ্র $(-\frac{10}{9}, \frac{38}{9})$ (১)