বিন্যাস ও সমাবেশ

প্রশ্নমালা V A

1. সমাধান :

(a) দেওয়া আছে, ${}^{n-1}P_3 : {}^{n+1}P_3 = 5:12 \Rightarrow \dfrac{(n-1)!}{(n-1-3)!} : \dfrac{(n+1)!}{(n+1-3)!} = 5:12$ [রা.'০৫]

$$\Rightarrow \frac{(n-1)!}{(n-4)!} \times \frac{(n-2)!}{(n+1)!} = \frac{5}{12} \Rightarrow \frac{(n-1)!}{(n-4)!} \times \frac{(n-2).(n-3).(n-4)!}{(n+1)n(n-1)!} = \frac{5}{12}$$

$$\Rightarrow \frac{(n-2).(n-3)}{(n+1)n} = \frac{5}{12} \Rightarrow 12(n^2-5n+6) = 5(n^2+n) \Rightarrow 12n^2 - 5n^2 - 60n - 5n + 72 = 0$$

$$\Rightarrow 7n^2 - 65n + 72 = 0 \Rightarrow 7n^2 - 56n - 9n + 72 = 0 \Rightarrow 7n(n-8) - 9(n-8) = 0$$

$\Rightarrow (n-8)(7n-9) = 0 \Rightarrow n = 8, \dfrac{9}{7}$. কিন্তু n ভগ্নাংশ হতে পারেনা । $\therefore n = 8$

(b) দেওয়া আছে, $4 \times {}^{n}P_3 = 5 \times {}^{n-1}P_3 \Rightarrow 4.\dfrac{n!}{(n-3)!} = 5\dfrac{(n-1)!}{(n-1-3)!}$ [কু.'০৫]

$$\Rightarrow 4.\frac{n.(n-1)!}{(n-3).(n-4)!} = 5\frac{(n-1)!}{(n-4)!} \Rightarrow 4.\frac{n}{n-3} = 5 \Rightarrow 5n - 15 = 4n \quad \therefore n = 15 \text{ (Ans.)}$$

(c) সাধারণ সূত্র ব্যবহার না করে n- সংখ্যক বিভিন্ন বস্তু থেকে প্রত্যেকবার যেকোন 3টিকে নিয়ে বিন্যাস সংখ্যা নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ n সংখ্যক বিভিন্ন জিনিস থেকে প্রতিবার 3টি জিনিস নিয়ে 3টি শূন্যস্থান যত রকম ভাবে পূরণ করা যায় তাই হবে n সংখ্যক বিভিন্ন জিনিস থেকে প্রতিবার 3টি জিনিস নিয়ে গঠিত বিন্যাস সংখ্যার সমান ।

n সংখ্যক জিনিসের যেকোন একটিকে বসিয়ে প্রথম শূন্যস্থানটি n সংখ্যক উপায়ে পূরণ করা যায়। প্রথম শূন্যস্থানটি n প্রকারের যেকোন এক উপায়ে পূরণ করার পর দ্বিতীয় শূন্য স্থানটি অবশিষ্ট $(n-1)$ সংখ্যক জিনিস দ্বারা $(n-1)$ সংখ্যক উপায়ে পূরণ করা যায় । যেহেতু প্রথম শূন্য স্থানটি পূরণকরার প্রত্যেক উপায়ের সঙ্গে দ্বিতীয় স্থান পূরণের $(n-1)$ সংখ্যক সংযোগ করা যায়, সুতরাং প্রথম দুইটি শূন্য স্থান একত্রে $n(n-1)$ সংখ্যক উপায়ে পূরণ করা যাবে। অর্থাৎ ${}^{n}P_{2} = n(n-1)$.

n সংখ্যক জিনিসের যেকোন দুইটি দ্বারা প্রথম ও দ্বিতীয় শূন্য স্থান পূরণ করার পর তৃতীয় শূন্য স্থানটি অবশিষ্ট $(n-2)$ সংখ্যক জিনিস দ্বারা $(n-2)$ সংখ্যক উপায়ে পূরণ করা যায়। সুতরাং , প্রথম তিনটি স্থান একত্রে মোট $n(n-1)(n-2)$ সংখ্যক উপায়ে পূরণ করা যায় । অর্থাৎ ${}^{n}P_{3} = n(n-1)(n-2)$.

2 'COURAGE' শব্দটির বর্ণগুলো নিয়ে কতগুলো বিন্যাস তৈরি করা করা যায়, যাদের প্রথমে একটি স্বরবর্ণ থাকবে?

সমাধান ঃ 'COURAGE' শব্দটিতে মোট 7টি বিভিন্ন অক্ষর আছে যাদের 4টি স্বরবর্ণ । প্রথম স্থানটি এই 4টি ভিন্ন স্বরবর্ণে যেকোনো একটি দ্বারা ${}^{4}P_1 = 4$ প্রকারে পূরণ করা যায় এবং অবশিষ্ট $(7-1)$ অর্থাৎ , 6টি স্থান বাকি 6টি ভিন্ন অক্ষর দ্বারা $6! = 720$ প্রকারে পূরণ করা যায়। সুতরাং নির্ণেয় বিন্যাস সংখ্যা $= 4 \times 720 = 2880$

3. (a) সাধারণ সূত্র ব্যবহার না করে (p + q) সংখ্যক জিনিসের p সংখ্যক জিনিস এক জাতীয় এবং বাকীগুলো সব ভিন্ন হলে, এদের সবগুলোকে নিয়ে বিন্যাস সংখ্যা নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ মনে করি , নির্ণেয় বিন্যাস সংখ্যা x । এই x সংখ্যক বিন্যাসের যেকোন একটির অন্তর্গত p সংখ্যক এক জাতীয় জিনিসের স্থলে p সংখ্যক ভিন্ন ভিন্ন জিনিস বসানো হলে অন্যদের স্থান পরিবর্তন না করে কেবল তাদের

সাজানো পরিবর্তন করে মোট p! সংখ্যক নতুন বিন্যাস পাওয়া যায় । সুতরাং , x সংখ্যক বিন্যাসের জন্য মোট $x \times$ p! সংখ্যক বিন্যাস হবে।

উপর্যুক্ত প্রক্রিয়ার পর দেখা যায় জিনিসগুলো সবই এখন ভিন্ন ভিন্ন এবং (p + q) সংখ্যক ভিন্ন ভিন্ন জিনিসের সবগুলো নিয়ে গঠিত বিন্যাস সংখ্যা (p + q)!. $\therefore \quad x \times p! = (p+q)! \Rightarrow x = \dfrac{(p+q)!}{p!}$

(b) 10 টি বর্ণের কিছু সংখ্যক একজাতীয় এবং বাকীগুলো ভিন্ন ভিন্ন । যদি তাদের সবগুলোকে একত্রে নিয়ে 30240টি শব্দ গঠন করা যায়, তবে কতগুলো বর্ণ এক জাতীয়।

সমাধান ঃ মনে করি, 10টি বর্ণের r সংখ্যক একজাতীয় ।

$\therefore$ এ 10টি বর্ণের সবগুলোকে একত্রে নিয়ে শব্দ গঠন করা যায় $\dfrac{10!}{r!}$ টি।

প্রশ্নমতে, $\dfrac{10!}{r!} = 30240 \Rightarrow r! = \dfrac{10!}{30240} = \dfrac{3628800}{30240} = 120 = 5! \quad \therefore r = 5$ (Ans.)

4 (a) প্রমাণ কর যে, 'AMERICA' শব্দটির বর্ণগুলো একত্রে নিয়ে বিন্যাস সংখ্যা ' CANADA ' শব্দটির বর্ণগুলো একত্রে নিয়ে বিন্যাস সংখ্যার 21 গুণ । [চ.'০৩]

প্রমাণ ঃ 'AMERICA ' শব্দটিতে মোট 7টি বর্ণ আছে যাদের 2 টি A .

$\therefore$ 'AMERICA ' শব্দটির বর্ণগুলো একত্রে নিয়ে বিন্যাস সংখ্যা $= \dfrac{7!}{2!} = 2520 = 21 \times 120$

' CANADA ' শব্দটিতে 3টি A সহ মোট 6টি বর্ণ আছে ।

$\therefore$ ' CANADA ' শব্দটির বর্ণগুলো একত্রে নিয়ে বিন্যাস সংখ্যা $= \dfrac{6!}{3!} = 120$

$\therefore$ 'AMERICA' শব্দটির বর্ণগুলো একত্রে নিয়ে বিন্যাস সংখ্যা 'CANADA' শব্দটির বর্ণগুলো একত্রে নিয়ে বিন্যাস সংখ্যার 21 গুণ ।

4. (b) দেখাও যে, ' AMERICA ' শব্দটি বর্ণগুলো একত্রে নিয়ে যত প্রকারে সাজানো যায় 'CALCUTTA ' শব্দটির বর্ণগুলো একত্রে নিয়ে তার দ্বিগুণ উপায়ে সাজানো যায়। [ঢা.'০৪; রা.'১৩]

প্রমাণ ঃ ' AMERICA ' শব্দটিতে মোট 7টি বর্ণ আছে যাদের 2টি A .

$\therefore$ ' AMERICA ' শব্দটির বর্ণগুলো একত্রে নিয়ে সাজানো সংখ্যা $= \dfrac{7!}{2!} = 2520.$

' CALCUTTA ' শব্দটিতে মোট 8টি বর্ণ আছে যাদের 2টি C , 2টি A এবং 2টি T .

$\therefore$ ' CALCUTTA ' শব্দটির বর্ণগুলো একত্রে নিয়ে সাজানো সংখ্যা $= \dfrac{8!}{2!2!2!} = 5040 = 2 \times 2520$

$\therefore$ ' AMERICA ' শব্দটির বর্ণগুলো একত্রে নিয়ে যত প্রকারে সাজানো যায় ' CALCUTTA' শব্দটির বর্ণগুলো একত্রে নিয়ে তার দ্বিগুণ উপায়ে সাজানো যায় ।

5 (a) ' ARRANGE' শব্দটির অক্ষরগুলো কত প্রকারে সাজানো যায়, যাতে R দুইটি পাশাপাশি থাকবে না ?

সমাধান ঃ 'ARRANGE' শব্দটিতে মোট 7টি বর্ণ আছে যাদের 2টি A এবং 2টি R .

$\therefore$ সবগুলো বর্ণ একত্রে নিয়ে মোট সাজানো সংখ্যা $= \dfrac{7!}{2! \times 2!} = 1260$

2টি R কে একটি একক বর্ণ মনে করলে মোট বর্ণের সংখ্যা হবে $(7-2+1)$ অর্থাৎ, 6টি যাদের 2টি A .

∴ 2টি R কে পাশাপাশি রেখে মোট সাজানো সংখ্যা = $\frac{6!}{2!} = 360$

∴ R দুইটি পাশাপাশি না রেখে মোট সাজানো সংখ্যা = সবগুলো বর্ণ একত্রে নিয়ে মোট সাজানো সংখ্যা – R দুইটি পাশাপাশি রেখে মোট সাজানো সংখ্যা = 1260 – 360 = 900

5 (b) 'ENGINEERING' শব্দটির সব কয়টি বর্ণকে কত প্রকারে সাজানো যায় তা নির্ণয় কর। তাদের কতগুলোতে তিনটি E একত্রে থাকবে এবং কতগুলোতে এরা প্রথমে থাকবে। [ব.'০২; রা.'০৩; কু.'০৩]

সমাধান ঃ ১ম অংশ ঃ 'ENGINEERING' শব্দটিতে মোট 11টি বর্ণ আছে ; যার মধ্যে 3টি E, 3টি N, 2টি G এবং 2টি I.

∴ সব কয়টি বর্ণকে একত্রে নিয়ে মোট সাজানো সংখ্যা = $\frac{11!}{3!.3!.2!.2!} = \frac{39916800}{6.6.2.2} = 277200$ (Ans.)

২য় অংশ ঃ যেহেতু E তিনটি একত্রে থাকে; অতএব তাদেরকে একটি একক বর্ণ মনে করলে মোট বর্ণগুলো হবে (EEE), N, G, I, N, R, I, N, G. এই 9টি বর্ণের 3টি N, 2টি G এবং 2টি I.

∴ E তিনটি একত্রে রেখে মোট সাজানো সংখ্যা = $\frac{9!}{3!.2!.2!} = \frac{362880}{6.2.2} = 15120$

৩য় অংশ : 3 টি E প্রথমে রেখে অবশিষ্ট বর্ণের সংখ্যা হবে (11–3) অর্থাৎ, 8টি ; যাদের 3টি N, 2টি G ও 2টি I

∴ E তিনটি প্রথমে রেখে মোট সাজানো সংখ্যা = $\frac{8!}{3!.2!.2!} = \frac{40320}{6.2.2} = 1680$ (Ans.)

6. (a) 'PARALLEL' শব্দটির বর্ণগুলোর সবগুলো একত্রে নিয়ে যত প্রকারে সাজানো যায় তা নির্ণয় কর এবং স্বরবর্ণগুলোকে পৃথক না রেখে বর্ণগুলো কত প্রকারে সাজানো যায় তাও নির্ণয় কর।

[য.'০৬; ব.'০৭; সি.'০৮,'১১; চ.'০৮,'১২; দি.'০৯; রা.'১১; ঢা.'১৩]

সমাধান ঃ ১ম অংশ ঃ 'PARALLEL' শব্দটিতে 2টি A এবং 3টি L সহ মোট 8টি বর্ণ আছে।

∴ সবগুলো বর্ণ একত্রে নিয়ে মোট সাজানো সংখ্যা = $\frac{8!}{2!.3!} = \frac{40320}{2.6} = 3360$

২য় অংশ ঃ স্বরবর্ণ 3টি পৃথক না হলে, তাদেরকে একটি একক বর্ণ ধরতে হবে এবং ফলে বর্ণগুলো হবে (AAE), P, R, L, L, L.

∴ 3টি L সহ এই 6টি বর্ণকে $\frac{6!}{3!} = 120$ উপায়ে এবং 2টি A সহ 3টি স্বরবর্ণকে নিজেদের মধ্যে $\frac{3!}{2!} = 3$ উপায়ে সাজানো যায়।

∴ স্বরবর্ণগুলোকে পৃথক না রেখে বর্ণগুলোর মোট সাজানো সংখ্যা = 120 × 3 = 360. (Ans.)

(b) স্বরবর্ণগুলোকে একত্রে না রেখে 'TRIANGLE' শব্দটির বর্ণগুলো কত সংখ্যক উপায়ে সাজানো যায় তা নির্ণয় কর?

[ঢা.'০৫; চ.'০৭; মা.বো.'০৯,'১৩; ব.'১০]

সমাধান ঃ 'TRIANGLE' শব্দটিতে মোট 8টি ভিন্ন বর্ণ আছে যাদের 3টি স্বরবর্ণ।

∴ সবগুলো বর্ণ একত্রে নিয়ে মোট সাজানো সংখ্যা = 8! = 40320

3টি স্বরবর্ণকে একটি একক বর্ণ মনে করলে পৃথক বর্ণগুলো হবে (IAE), T, R, N, G এবং L. এই 6টি ভিন্ন বর্ণকে 6! প্রকারে এবং 3টি ভিন্ন স্বরবর্ণকে নিজেদের মধ্যে 3! প্রকারে সাজানো যায়।

∴ স্বরবর্ণগুলোকে একত্রে রেখে মোট সাজানো সংখ্যা = 6! × 3! = 720 × 6 = 4320

$\therefore$ স্বরবর্ণগুলোকে একত্রে না রেখে মোট সাজানো সংখ্যা = সবগুলো বর্ণ একত্রে নিয়ে মোট সাজানো সংখ্যা – স্বরবর্ণগুলোকে একত্রে রেখে মোট সাজানো সংখ্যা = $40320 - 4320 = 36000$

(c) স্বরবর্ণগুলোকে (i) কোন সময়ই পৃথক না রেখে এবং (ii) একত্রে না রেখে ' DAUGHTER' শব্দটির বর্ণগুলো কত সংখ্যক উপায়ে সাজানো যায় তা নির্ণয় কর। [চ.'১০]

সমাধান ঃ (i) ' DAUGHTER ' শব্দটিতে মোট 8টি ভিন্ন বর্ণ আছে যাদের 3টি স্বরবর্ণ ।

$\therefore$ সবগুলো বর্ণ একত্রে নিয়ে মোট সাজানো সংখ্যা = $8! = 40320$

3টি স্বরবর্ণকে একটি একক বর্ণ মনে করলে পৃথক বর্ণগুলো হবে (AUE), D, G, H, T এবং R . এই 6টি ভিন্ন বর্ণকে $6!$ প্রকারে এবং 3টি ভিন্ন স্বরবর্ণকে নিজেদের মধ্যে $3!$ প্রকারে সাজানো যায় ।

$\therefore$ স্বরবর্ণগুলোকে কোন সময়ই পৃথক না রেখে মোট সাজানো সংখ্যা = $6! \times 3! = 720 \times 6 = 4320$

(ii) স্বরবর্ণগুলোকে একত্রে না রেখে মোট সাজানো সংখ্যা = সবগুলো বর্ণ একত্রে নিয়ে মোট সাজানো সংখ্যা – স্বরবর্ণগুলোকে কোন সময়ই পৃথক না রেখে মোট সাজানো সংখ্যা = $40320 - 4320 = 36000$

(d) 'DIGITAL' শব্দটির বর্ণগুলোর সবগুলো একত্রে নিয়ে কত প্রকারে সাজানো যায় তা নির্ণয় কর এবং এদের কতগুলিতে স্বরবর্ণ গুলো একত্রে থাকবে? [য. '১০]

সমাধান ঃ ' DIGITAL ' শব্দটিতে 2টি I সহ মোট 7টি বর্ণ আছে ।

$\therefore$ সবগুলো বর্ণ একত্রে নিয়ে মোট সাজানো সংখ্যা $= \dfrac{7!}{2!} = 2520$ (Ans.)

3টি স্বরবর্ণ I, I ও A কে একটি একক বর্ণ মনে করলে পৃথক বর্ণগুলো হবে (I I A), D, G, T এবং L . এই 5টি ভিন্ন বর্ণকে $5!$ প্রকারে এবং 3টি স্বরবর্ণকে নিজেদের মধ্যে $\dfrac{3!}{2!} = 3$ প্রকারে সাজানো যায় ।

$\therefore$ স্বরবর্ণগুলোকে একত্রে রেখে মোট সাজানো সংখ্যা = $5! \times 3 = 120 \times 3 = 360$ (Ans.)

7. 9 টি বলের 7টি বল লাল, 2টি সাদা (i) এদের উপর কোন বিধি–নিষেধ আরোপ না করে এবং (ii) সাদা বল দুইটি পাশাপাশি না রেখে বলগুলোকে কত প্রকারে এক সারিতে সাজানো যায়, তা নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ এখানে 9 টি বলের মধ্যে 7টি লাল এবং 2টি সাদা।

(i) এদের উপর কোন বিধি–নিষেধ আরোপ না করে নির্ণেয় সাজানো সংখ্যা $= \dfrac{9!}{7! \times 2!} = 36$

(ii) সাদা বল দুইটি একটি একক বল মনে করলে মোট বলের সংখ্যা হবে $(9 - 2 + 1)$ অর্থাৎ, 8টি যাদের মধ্যে 7টি লাল । অতএব, সাদা বল দুইটি পাশাপাশি রেখে মোট সাজানো সংখ্যা $= \dfrac{8!}{7!!} = 8$

$\therefore$ সাদা বল দুইটি পাশাপাশি না রেখে মোট সাজানো সংখ্যা = $36 - 8 = 28$

8. (a) স্বরবর্ণগুলোর স্থান পরিবর্তন না করে ' PERMUTATION ' শব্দটির বর্ণগুলো কত উপায়ে পুনর্বিন্যাস করা যায়? [ব.'০০, ০৫ ; চ.'০০, ০৪; ঢা.'০৯; দি.'১৩]

সমাধান ঃ ' PERMUTATION ' শব্দটিতে মোট 11টি বর্ণ আছে যাদের 5টি স্বরবর্ণ।

5 টি স্বরবর্ণের স্থান পরিবর্তন না করে 2টি T সহ অবশিষ্ট $(11 - 5)$ বা, 6টি ব্যঞ্জন বর্ণকে $\dfrac{6!}{2!} = \dfrac{720}{2} = 360$ উপায়ে সাজানো যায় ।

$\therefore$ নির্ণেয় পুনর্বিন্যাস করার উপায় = $360 - 1 = 359$ (Ans.)

(b) স্বরবর্ণগুলোর (i) ক্রম পরিবর্তন না করে (ii) স্থান পরিবর্তন না করে এবং (iii) স্বরবর্ণের ও ব্যঞ্জনবর্ণের আপেক্ষিক অবস্থান পরিবর্তন না করে **'DIRECTOR'** শব্দটি কত প্রকারে পুনরায় সাজানো যায় তা নির্ণয় কর।

সমাধান : (i) 'DIRECTOR' শব্দটিতে মোট 8টি বর্ণ আছে যাদের 3টি স্বরবর্ণ । ক্রম পরিবর্তন না করায় স্বরবর্ণ 3টি (I , E , O) পরস্পরের মধ্যে আগেরটি পরে ও পরেরটি আগে আসতে পারে না । তাই তারা 3টি এক জাতীয় বর্ণের ন্যায় অবস্থান করে । তাহলে, 8 টি বর্ণের মধ্যে 3টি স্বরবর্ণ এক জাতীয় এবং 2টি R অন্য এক জাতীয় ।

$\therefore$ স্বরবর্ণগুলোর ক্রম পরিবর্তন না করে মোট সাজানো সংখ্যা $= \dfrac{8!}{3! \times 2!} = 3360$

'DIRECTOR' শব্দটি নিজেই একটি সাজানো সংখ্যা।

$\therefore$ নির্ণেয় পুনরায় সাজানো সংখ্যা $= 3360 - 1 = 3359$

(ii) স্বরবর্ণ 3টির স্থান নির্দিষ্ট রেখে 2টি R সহ 5টি ব্যঞ্জন বর্ণকে $\dfrac{5!}{2!} = 60$ রকমে সাজানো যায়।

$\therefore$ স্বরবর্ণগুলোর স্থান পরিবর্তন না করে নির্ণেয় পুনরায় সাজানো সংখ্যা $= 60 - 1 = 59$

(iii) এক্ষেত্রে , স্বরবর্ণ 3টি নির্দিষ্ট 3টি (২য় , ৪র্থ এবং ৭ম) স্থানে নিজেরা $3! = 6$ প্রকারে বিন্যস্ত হয় এবং ব্যঞ্জন বর্ণ 5টি নির্দিষ্ট 5টি (১ম , ৩য় , ৫ম , ৬ষ্ঠ এবং ৮ম) স্থানে নিজেরা $\dfrac{5!}{2!} = 60$ প্রকারে বিন্যস্ত হয়।

$\therefore$ স্বরবর্ণের ও ব্যঞ্জনবর্ণের আপেক্ষিক অবস্থান পরিবর্তন না করে নির্ণেয় সাজানো সংখ্যা $= 6 \times 60 - 1 = 359$

9. (a) 'MILLENNIUM ' শব্দটির সব কয়টি বর্ণকে কত প্রকারে সাজানো যায় তা নির্ণয় কর। তাদের কতগুলোতে প্রথমে ও শেষে M থাকবে? [সি.,০৬, '১২; প্র.ভ.প.'০৪]

সমাধান ঃ১ম অংশঃ 'MILLENNIUM' শব্দটিতে মোট 10টি বর্ণ আছে যাদের 2টি I, 2টি M, 2টি L ও 2টি N

$\therefore$ এ শব্দটির বর্ণগুলো একত্রে নিয়ে সাজানো যায় $\dfrac{10!}{2! \times 2! \times 2! \times 2!} = 226800$ উপায়ে।

২য় অংশ ঃ প্রথম ও শেষ স্থান দুইটি ' L ' দ্বারা নিদিষ্ট করে 2টি M এবং 2টি N সহ অবশিষ্ট $(10 - 2)$ অর্থাৎ , 8টি বর্ণকে 8টি স্থানে $\dfrac{8!}{2! \times 2! \times 2!} = 5040$ উপায়ে সাজানো যায় ।

$\therefore$ নির্ণেয় সাজানো সংখ্যা 226800 ও 5040.

(b) 'IMMEDIATE' শব্দটির সব কয়টি বর্ণকে কত প্রকারে সাজানো যায় তা নির্ণয় কর। কতগুলোর প্রথমে T এবং শেষে A থাকবে ?

সমাধান ঃ ১ম অংশ ঃ ' IMMEDIATE ' শব্দটিতে মোট 9টি বর্ণ আছে যাদের 2টি I, 2টি M এবং 2টি E.

$\therefore$ এ শব্দটির বর্ণগুলো একত্রে নিয়ে সাজানো যায় $= \dfrac{9!}{2! \times 2! \times 2!} = 45360$ উপায়ে।

২য় অংশ ঃ প্রথম স্থানটি ' T ' এবং শেষ স্থানটি ' A ' দ্বারা নিদিষ্ট করে অবশিষ্ট $(9 - 2)$ বা , 7টি বর্ণকে (যাদের 2টি I, 2টি M এবং 2টি E) 7টি স্থানে $\dfrac{7!}{2! \times 2! \times 2!} = 630$ উপায়ে সাজানো যায় ।

(c) 'DAUGHTER' শব্দটির বর্ণগুলো মোট কত রকমে সাজানো যাবে ? কতগুলো D দ্বারা শুরু হবে? কতগুলোর প্রথমে D এবং শেষে R থাকবে? [ব.'০৩]

কতগুলোর প্রথমে D থাকবে কিন্তু শেষে R থাকবে না ? কতগুলোর প্রথমে D এবং শেষে R থাকবে না ?

সমাধান ঃ ১ম অংশ ঃ ' DAUGHTER' শব্দটির 8 টি ভিন্ন বর্ণ আছে ।

$\therefore$ নির্ণেয় বিন্যাস সংখ্যা = $8! = 40320$

২য় অংশ ঃ প্রথম স্থানটি ' D ' দ্বারা নির্দিষ্ট করে অবশিষ্ট $(8-1)$ অর্থাৎ, 7টি বর্ণকে 7! উপায়ে সাজানো যায় ।

$\therefore$ নির্ণেয় বিন্যাস সংখ্যা $= 7! = 5040$ (Ans.)

৩য় অংশ ঃ প্রথম স্থানটি ' D ' এবং শেষ স্থানটি ' R ' দ্বারা নিদিষ্ট করে অবশিষ্ট $(8-2)$ বা , 6টি বর্ণকে 6! উপায়ে সাজানো যায় ।

$\therefore$ নির্ণেয় সাজানো সংখ্যা $= 6! = 720$ (Ans.)

৪র্থ অংশ ঃ প্রথমে D থাকবে কিন্তু শেষে R থাকবে না এমন সাজানো সংখ্যা = প্রথমে D থাকে এমন সাজানো সংখ্যা – প্রথমে D এবং শেষে R থাকে এমন সাজানো সংখ্যা $= 5040 - 720 = 4320$

বিকল্প পদ্ধতি ঃ যেহেতু প্রথম স্থানটি D দ্বারা পূরণ করতে হয় এবং শেষের স্থানটি R দ্বারা পূরণ করা যায় না, অতএব শেষের স্থানটি $(8-2)$ বা, 6টি বর্ণ দ্বারা $^6P_1$ ভাবে পূরণ করা যায় ।

আবার , মাঝের $(8-2)$ বা, 6টি স্থান অবশিষ্ট 6টি বর্ণ দ্বারা 6! উপায়ে পূরণ করা যায় ।

$\therefore$ নির্ণেয় সাজানো সংখ্যা $= {}^6P_1 \times 6! = 6 \times 720 = 4320$

৫ম অংশ ঃ নির্ণেয় সাজানো সংখ্যা = সবগুলো বর্ণ একত্রে নিয়ে মোট সাজানো সংখ্যা – প্রথমে ' D ' নিয়ে সাজানো সংখ্যা – শেষে ' R ' নিয়ে সাজানো সংখ্যা + প্রথমে ' D ' এবং শেষে ' R ' নিয়ে সাজানো সংখ্যা
$= 8! - 7! - 7! + 6! = 40320 - 2.5040 + 720 = 41040 - 10080 = 30960$

10. (a)' POSTAGE' শব্দটির সব কয়টি বর্ণকে কত প্রকারে সাজানো যেতে পারে যাতে স্বরবর্ণগুলো জোড় স্থান দখল করবে? কতগুলোতে ব্যঞ্জনবর্ণগুলো একত্রে থাকবে? [কু.'১৪]

সমাধান ঃ ১ম অংশ ঃ ' POSTAGE' শব্দটিতে মোট 7টি বর্ণ আছে যাদের 3টি ভিন্ন স্বরবর্ণ এবং 4টি ভিন্ন ব্যঞ্জনবর্ণ। এখানে 7টি স্থানের মধ্যে 3টি জোড় স্থান (২য়, ৪র্থ এবং ৬ষ্ঠ) 3টি ভিন্ন স্বরবর্ণ দ্বারা 3! উপায়ে এবং 4টি বিজোড় স্থান (১ম , ৩য় , ৫ম এবং ৭ম) 4টি ভিন্ন ব্যঞ্জনবর্ণ দ্বারা 4! উপায়ে পূরণ করা যাবে।

$\therefore$ স্বরবর্ণগুলো জোড় স্থানে রেখে নির্ণেয় সাজানো সংখ্যা $= 3! \times 4! = 6 \times 24 = 144$

২য় অংশ ঃ 4টি ব্যঞ্জনবর্ণকে একটি একক বর্ণ মনে করলে ভিন্ন বর্ণ হবে (PSTG), O, A, E । এই 4টি বর্ণকে 4! প্রকারে এবং 4টি ভিন্ন ব্যঞ্জনবর্ণকে নিজেদের মধ্যে 4! প্রকারে সাজানো যাবে ।

$\therefore$ ব্যঞ্জনবর্ণগুলোকে একত্রে রেখে মোট সাজানো সংখ্যা $= 4! \times 4! = 24 \times 24 = 576$

(b) স্বরবর্ণগুলোকে কেবল (i) জোড় স্থানে (ii) বিজোড় স্থানে রেখে 'ARTICLE' শব্দটির অক্ষরগুলোকে কত প্রকারে সাজানো যায় তা নির্ণয় কর। [ঢা. '১০]

সমাধান ঃ (i) 'ARTICLE' শব্দটিতে মোট 7টি বর্ণ আছে যাদের 3টি ভিন্ন স্বরবর্ণ এবং 4টি ভিন্ন ব্যঞ্জনবর্ণ। এখানে 7টি স্থানের মধ্যে 3টি জোড় স্থান (২য় , ৪র্থ এবং ৬ষ্ঠ) 3টি ভিন্ন স্বরবর্ণ দ্বারা 3! উপায়ে এবং অবশিষ্ট 4টি স্থান 4টি ভিন্ন ব্যঞ্জনবর্ণ দ্বারা 4! উপায়ে পূরণ করা যাবে।

$\therefore$ স্বরবর্ণগুলোকে কেবল জোড় স্থানে রেখে নির্ণেয় সাজানো সংখ্যা $= 3! \times 4! = 6 \times 24 = 144$

(ii) 7টি স্থানের মধ্যে 4টি বিজোড় স্থান (১ম , ৩য় , ৫ম এবং ৭ম) এর 3টি স্থান 3টি ভিন্ন স্বরবর্ণ দ্বারা $^4P_3$ উপায়ে এবং অবশিষ্ট 4টি স্থান 4টি ভিন্ন ব্যঞ্জনবর্ণ দ্বারা 4! উপায়ে পূরণ করা যাবে।

$\therefore$ স্বরবর্ণগুলোকে কেবল বিজোড় স্থানে রেখে নির্ণেয় সাজানো সংখ্যা $= {}^4P_3 \times 4! = 24 \times 24 = 576$

10. (c) 'ALLAHABAD' শব্দটির সব কয়টি বর্ণকে কত প্রকারে সাজানো যায় তা নির্ণয় কর। এদের কতগুলোতে A চারটি একত্রে থাকবে ? এদের কতগুলোতে স্বরবর্ণগুলো জোড় স্থান দখল করবে?

সমাধান ঃ ১ম অংশ ঃ 'ALLAHABAD' শব্দটিতে মোট 9টি বর্ণের মধ্যে 4টি A এবং 2টি L আছে।

$\therefore$ সবগুলো বর্ণ একত্রে নিয়ে মোট সাজানো সংখ্যা $= \dfrac{9!}{4! \times 2!} = 7560$

২য় অংশ ঃ A চারটিকে একটি একক বর্ণ মনে করলে ভিন্ন বর্ণ হবে (AAAA), L, L, H, B এবং D. 2টি L সহ এ 6টি বর্ণকে $\dfrac{6!}{2!} = 360$ উপায়ে এবং A চারটিকে নিজেদের মধ্যে $\dfrac{4!}{4!} = 1$ উপায়ে সাজানো যাবে।

$\therefore$ A চারটি একত্রে নিয়ে নির্ণেয় সাজানো সংখ্যা $= 360 \times 1 = 360$

৩য় অংশ ঃ 4টি স্থানের মধ্যে 4টি জোড় স্থান 4টি স্বরবর্ণ অর্থাৎ 4টি A দ্বারা $\dfrac{4!}{4!} = 1$ উপায়ে এবং 5টি বিজোড় স্থান 2টি L সহ 5টি ব্যঞ্জনবর্ণ দ্বারা $\dfrac{5!}{2!} = 60$ উপায়ে সাজানো যাবে।

$\therefore$ স্বরবর্ণগুলো জোড় স্থানে রেখে নির্ণেয় সাজানো সংখ্যা $= 1 \times 60 = 60$

11 (a) দেখাও যে, দুইখানা বিশেষ পুস্তক একত্রে না রেখে n সংখ্যক বিভিন্ন পুস্তক যত রকমে সাজানো যায় তার সংখ্যা $(n-2)(n-1)!$

সমাধান ঃ n সংখ্যক বিভিন্ন পুস্তকের সবগুলো একত্রে নিয়ে সাজানো সংখ্যা $= n!$

দুইখানা বিশেষ পুস্তককে একটি একক পুস্তক মনে করলে সাজানোর জন্য $(n-1)$ সংখ্যক পুস্তক পাই। এই $(n-1)$ সংখ্যক পুস্তক একত্রে $(n-1)!$ প্রকারে এবং বিশেষ পুস্তক দুইটিকে নিজেদের মধ্যে $2! = 2$ প্রকারে সাজানো যায়।

$\therefore$ দুইখানা বিশেষ পুস্তক একত্রে রেখে সাজানো সংখ্যা $= (n-1)! \times 2 = 2(n-1)!$

$\therefore$ দুইখানা বিশেষ পুস্তক একত্রে না রেখে নির্ণেয় সাজানো সংখ্যা $= n! - 2(n-1)! = n.(n-1)! - 2(n-1)!$
$= (n-2).(n-1)!$

(b) n সংখ্যক বিভিন্ন জিনসকে কত রকমে এক সারিতে সাজানো যায়, যাতে বিশেষ দুইটি জিনিস সারির প্রথমে বা শেষে না থাকে?

সমাধান ঃ বিশেষ জিনিস দুইটি সারির প্রথমে বা শেষে না থাকলে অবশিষ্ট $(n-2)$ সংখ্যক বিভিন্ন জিনিস দ্বারা প্রথম ও শেষ স্থান দুইটি ${}^{n-2}P_2$ উপায়ে পূরণ করা যায় এবং অবশিষ্ট $(n-2)$ সংখ্যক বিভিন্ন জিনিস দ্বারা মধ্যের $(n-2)$ সংখ্যক স্থান $(n-2)!$ উপায়ে পূরণ করা যায়।

$\therefore$ নির্ণেয় সাজানো সংখ্যা $= {}^{n-2}P_2 \times (n-2)! = (n-2)(n-3).(n-2)!$

(c) n সংখ্যক বিভিন্ন জিনিসের r সংখ্যক একবারে নিয়ে কত রকমে এক সারিতে সাজানো যায়, যাতে বিশেষ দুইটি জিনিস অন্তর্ভুক্ত থাকে কিন্তু তারা সারির প্রথমে বা শেষে থাকে না?

সমাধান ঃ বিশেষ জিনিস দুইটি সারির প্রথমে বা শেষে না থাকলে অবশিষ্ট $(n-2)$ সংখ্যক বিভিন্ন জিনিস দ্বারা প্রথম ও শেষ স্থান দুইটি ${}^{n-2}P_2$ উপায়ে পূরণ করা যায়। মাঝের $(r-2)$ সংখ্যক স্থান বিশেষ জিনিস দুইটি দ্বারা ${}^{r-2}P_2$ উপায়ে পূরণ করা যায়। অবশিষ্ট $(n-4)$ বিভিন্ন জিনিস দ্বারা $(r-4)$ সংখ্যক স্থান ${}^{n-4}P_{r-4}$ উপায়ে পূরণ করা যায়।

$\therefore$ নির্ণেয় সাজানো সংখ্যা $= {}^{n-2}P_2 \times {}^{r-2}P_2 \times {}^{n-4}P_{r-4} = (n-2)(n-3)(r-2)(r-3)\dfrac{(n-4)!}{(n-4-r+4)!}$

$$= \frac{(n-2)!}{(n-r)!}(r-2)(r-3)$$

12. (a) 'SECOND ' শব্দটির বর্ণগুলো থেকে একটি স্বরবর্ণ ও দুইটি ব্যঞ্জন বর্ণ নিয়ে কতগুলো শব্দ গঠন করা যেতে পারে, যখন স্বরবর্ণ সর্বদা মধ্যম স্থান দখল করে? [ব.'০৩]

সমাধান ঃ ' SECOND ' শব্দটিতে মোট 6টি বর্ণ আছে যাদের 2টি স্বরবর্ণ এবং 3টি ব্যঞ্জন বর্ণ। মধ্যম স্থানটি দুইটি ভিন্ন স্বরবর্ণ দ্বারা $^2P_1 = 2$ উপায়ে এবং প্রান্ত স্থান 2টি 4টি ভিন্ন ব্যঞ্জন বর্ণ দ্বারা $^4P_2 = 12$ উপায়ে পূরণ করা যেতে পারে।

∴ নির্ণেয় শব্দের সংখ্যা $= 2 \times 12 = 24$ (Ans.)

(b) 7টি বিভিন্ন ব্যঞ্জনবর্ণ এবং 3টি বিভিন্ন স্বরবর্ণ থেকে দুইটি ব্যঞ্জনবর্ণ ও একটি স্বরবর্ণ নিয়ে কতগুলো শব্দ গঠন করা যায়, যাতে স্বরবর্ণটি ব্যঞ্জনবর্ণের মাঝখানে থাকবে?

সমাধান ঃ মধ্যম স্থানটি 3টি বিভিন্ন স্বরবর্ণ দ্বারা $^3P_1 = 3$ উপায়ে এবং প্রান্ত স্থান 2টি, 7টি বিভিন্ন ব্যঞ্জন বর্ণ দ্বারা $^7P_2 = 42$ উপায়ে পূরণ করা যাবে। ∴ নির্ণেয় শব্দের সংখ্যা $= 3 \times 42 = 126$

(c) যদি ' CAMBRIDGE ' শব্দটির বর্ণগুলো থেকে কেবল 5টি বর্ণ নিয়ে শব্দ গঠন করা হয় তবে কতগুলোতে প্রদত্ত শব্দটির সব কয়টি স্বরবর্ণ বর্তমান থাকবে? [চ.'০৪; কু.'০৭]

সমাধান ঃ 'CAMBRIDGE' শব্দটিতে মোট 9টি ভিন্ন বর্ণ আছে যাদের 3টি স্বরবর্ণ এবং 6টি ব্যঞ্জন বর্ণ।

5টি স্থান 3টি ভিন্ন স্বরবর্ণ দ্বারা $^5P_3 = 60$ উপায়ে পূরণ করা যাবে। অবশিষ্ট (5 – 3) অর্থাৎ, 2টি স্থান 6টি ভিন্ন ব্যঞ্জন বর্ণ দ্বারা $^6P_2 = 30$ উপায়ে পূরণ করা যাবে।

∴ নির্ণেয় শব্দ গঠন করার উপায় সংখ্যা $= 60 \times 30 = 1800$

বিকল্প পদ্ধতি ঃ প্রদত্ত শব্দটিতে মোট 9টি ভিন্ন বর্ণ আছে যাদের 3টি স্বরবর্ণ এবং 6টি ব্যঞ্জন বর্ণ।

6টি ব্যঞ্জন বর্ণ হতে 2টি ব্যঞ্জন বর্ণ $^6C_2$ উপায়ে বেছে নেওয়া যায়। 3 টি স্বরবর্ণ এবং 2টি ব্যঞ্জন বর্ণ 5! প্রকারে বিন্যস্ত হয়।

∴ নির্ণেয় শব্দ গঠন করার উপায় সংখ্যা $= {}^6C_2 \times 5! = 15 \times 120 = 1800$ (Ans.)

12. (d) 'EQUATION' শব্দটির বর্ণগুলো হতে প্রত্যেকবার 4টি বর্ণ নিয়ে বিভিন্ন শব্দ গঠন করা হল, এদের কতগুলোতে Q বর্তমান থাকবে কিন্তু N থাকবে না? [য.'০৮]

সমাধান ঃ 'EQUATION' শব্দটিতে 8 টি ভিন্ন বর্ণ আছে। 4টি বর্ণ নিয়ে গঠিত শব্দে 4টি স্থানে Q বর্তমান থাকবে $^4P_1 = 4$ উপায়ে। অবশিষ্ট (4 – 1) অর্থাৎ 3টি স্থান 6টি বর্ণ E, U, A, T, I এবং O দ্বারা পূরণ করা যাবে $^6P_3 = 120$ উপায়ে।

∴ Q কে বর্তমান রেখে এবং N কে বর্তমান না রেখে শব্দ হঠন করা যাবে $4 \times 120 = 480$ টি।

বিকল্প পদ্ধতি ঃ Q কে বর্তমান রেখে এবং N কে বর্তমান না রেখে 4টি বর্ণ নিয়ে শব্দ গঠন করা হলে অন্য $(8-2) = 6$ টি বর্ণ হতে 3টি বর্ণ নিতে হবে এবং তা $^6C_3 = 20$ উপায়ে নেওয়া যায়। আবার, 4টি ভিন্ন বর্ণ দ্বারা শব্দ গঠন করা যায় $4! = 24$ টি।

∴ Q কে বর্তমান রেখে এবং N কে বর্তমান না রেখে শব্দ হঠন করা যায় $20 \times 24 = 480$ টি।

13. (a) 10 টি বস্তুর 5টি একবারে নিয়ে কতগুলো বিন্যাসের মধ্যে 2টি বিশেষ বস্তু সর্বদা অন্তর্ভুক্ত থাকবে? [কু.'১০]

সমাধান ঃ 5টি একবারে নিয়ে গঠিত বিন্যাসের 5টি স্থান 2টি বিশেষ বস্তু দ্বারা $^5P_2 = 20$ উপায়ে পূরণ করার পর অবশিষ্ট $(5-2)$ অর্থাৎ, 3টি স্থান বাকি $(10-2)$ অর্থাৎ, 8টি বস্তু দ্বারা $^8P_3 = 336$ উপায়ে পূরণ করা যাবে।

$\therefore$ নির্ণেয় বিন্যাস সংখ্যা $= 20 \times 336 = 6720$.

বিকল্প পদ্ধতি ঃ 2 টি বিশেষ বস্তুকে সর্বদা অন্তর্ভুক্ত রেখে অবশিষ্ট $(10-2)$ বা, 8টি বস্তু হতে 3টি বস্তু $^8C_3$ উপায়ে বেছে নেওয়া যাবে । আবার , 5 টি বস্তুকে $5!$ উপায়ে সাজানো যাবে ।

$\therefore$ নির্ণেয় বিন্যাস সংখ্যা $= {^8C_3} \times 5! = 56 \times 120 = 6720$

(b) ইংরেজি বর্ণমালার 26টি বর্ণ থেকে কতপ্রকারে 5টি বিভিন্ন বর্ণ সমন্বিত একটি শব্দ গঠন করা যায়, যাদের মধ্যে A এবং L অক্ষর দুইটি অবশ্যই থাকবে ?

সমাধান ঃ 5টি অক্ষর নিয়ে গঠিত শব্দে 5টি স্থান A এবং L অক্ষর দ্বারা $^5P_2 = 20$ উপায়ে পূরণ করার পর অবশিষ্ট $(5-2)$ অর্থাৎ, 3টি স্থান বাকি $(26-2)$ অর্থাৎ, 24টি অক্ষর দ্বারা $^{24}P_3 = 12144$ উপায়ে পূরণ করা যাবে।

$\therefore$ নির্ণেয় সংখ্যা $= 20 \times 12144 = 242880$

14 (a) একজন লোকের একটি সাদা, দুইটি লাল এবং তিনটি সবুজ পতাকা আছে। একটির উপর আরেকটি সাজানো চারটি পতাকা নিয়ে সে কতগুলো বিভিন্ন সংকেত তৈরী করতে পারবে ? [রা.'০২]

সমাধান ঃ মোট পতাকার সংখ্যা $= 1 + 2 + 3 = 6.$

6টি পতাকা হতে 4টি পতাকা নির্বাচন করে সে নিম্নরূপে সংকেত তৈরী করতে পারবে ঃ

সাদা পতাকা (1)	লাল পতাকা (2)	সবুজ পতাকা (3)	সংকেত তৈরীর উপায় সংখ্যা
1	2	1	$\frac{4!}{2!} = 12$
1	1	2	$\frac{4!}{2!} = 12$
1	0	3	$\frac{4!}{3!} = 4$
0	1	3	$\frac{4!}{3!} = 4$
0	2	2	$\frac{4!}{2!2!} = 6$

$\therefore$ সে সংকেত তৈরী করতে পারবে $(12 + 12 + 4 + 4 + 6)$ বা, 38 উপায়ে।

14 (b)একজন লোকের একটি সাদা , দুইটি লাল এবং তিনটি সবুজ পতাকা আছে। একটির উপর আরেকটি সাজানো পাঁচটি পতাকা নিয়ে সে কতগুলো বিভিন্ন সংকেত তৈরী করতে পারবে ? [কু.'০১; দি.'১০; প্র.ভ.প.'০৪]

সমাধান ঃ মোট পতাকার সংখ্যা $= 1 + 2 + 3 = 6.$

6টি পতাকা হতে 5টি পতাকা নির্বাচন করে সে নিম্নরূপে সংকেত তৈরী করতে পারবে ঃ

সাদা পতাকা (1)	লাল পতাকা (2)	সবুজ পতাকা (3)	সংকেত তৈরীর উপায় সংখ্যা
1	2	2	$\frac{5!}{2!2!} = 30$
1	1	3	$\frac{5!}{3!} = 20$

0	2	3	$\frac{5!}{2!3!} = 10$

$\therefore$ নির্ণেয় সংখ্যা $= 30 + 20 + 10 = 60$ (Ans.)

15. (a) দুইজন B.Sc. ক্লাসের ছাত্রকে পাশাপাশি না বসিয়ে 14 জন I.Sc. ক্লাসের ও 10 জন B.Sc. ক্লাসের ছাত্রকে কত রকমে একটি লাইনে সাজানো যায়, তা নির্ণয় কর। [য.'০৪]

সমাধান ঃ 14 জন I.Sc. ক্লাসের ছাত্রকে একটি লাইনে 14! রকমে সাজানো যায়। এই 14 জন I.Sc. ক্লাসের ছাত্রের মাঝখানে $(14 - 1) = 13$ টি ফাঁকা স্থান পাওয়া যায়। এ ছাড়া লাইনের দুই প্রান্তে আরও দুইটি ফাঁকা স্থান পাওয়া যায়। সুতরাং, $(13 + 2) = 15$ টি ফাঁকা স্থানে 10 জন B.Sc. ক্লাসের ছাত্রকে $^{15}P_{10}$ রকমে সাজানো যায়।

$\therefore$ নির্ণেয় সাজানো সংখ্যা $= 14! \times {}^{15}P_{10}$

15 (b) দুইটি যোগবোধক চিহ্ন পাশাপাশি না রেখে p-সংখ্যক যোগবোধক চিহ্ন ও q-সংখ্যক বিয়োগবোধক চিহ্ন $(p < q)$ কত প্রকারে এক সারিতে সাজানো যায়, তা নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ p-সংখ্যক যোগবোধক চিহ্ন একজাতীয় এবং q-সংখ্যক বিয়োগবোধক চিহ্ন একজাতীয়। q-সংখ্যক বিয়োগবোধক চিহ্নকে এক সারিতে $\frac{q!}{q!} = 1$ রকমে সাজানো যায়।এই q-সংখ্যক বিয়োগবোধক চিহ্নের মাঝখানে $(q - 1)$ টি ফাঁকা স্থান পাওয়া যায়। এ ছাড়া সারির দুই প্রান্তে আরও দুইটি ফাঁকা স্থান পাওয়া যায়। সুতরাং, $\{(q - 1) + 2\} = (q + 1)$ টি ফাঁকা স্থানে p-সংখ্যক যোগবোধক চিহ্নকে $\frac{^{q+1}P_p}{p!} = \frac{(q+1)!}{p! \times (q+1-p)!}$ রকমে সাজানো যায়।

$\therefore$ নির্ণেয় সাজানো সংখ্যা $= 1 \times \frac{(q+1)!}{p! \times (q+1-p)!} = \frac{(q+1)!}{p! \times (q-p+1)!}$

16 (a) 3, 4, 5, 6, 7, 8 অঙ্কগুলোর একটিকেও পুনরাবৃত্তি না করে 5000 এবং 6000 মধ্যবর্তী কতগুলো সংখ্যা গঠন করা যেতে পারে? [ব.'১৩]

সমাধান ঃ 5000 এবং 6000 মধ্যবর্তী সংখ্যাগুলো অবশ্যই 4 অঙ্কের হতে হবে এবং প্রথম অঙ্কটি 5 দ্বারা আরম্ভ হতে হবে। এখানে 6টি বিভিন্ন অঙ্ক আছে। প্রথম স্থানটি 5 দ্বারা নির্দিষ্ট করে অবশিষ্ট $(4 - 1) = 3$টি স্থান বাকি $(6 - 1) = 5$টি অঙ্ক দ্বারা পূরণ করা যাবে $^5P_3$ উপায়ে। $\therefore$ নির্ণেয় মোট সংখ্যা $= {}^5P_3 = 60$

(b) প্রত্যেক অঙ্ককে প্রত্যেক সংখ্যায় একবার মাত্র ব্যবহার করে 5, 6, 7, 8, 0 অঙ্কগুলো দ্বারা পাঁচ অঙ্ক বিশিষ্ট এবং 4 দ্বারা বিভাজ্য কতগুলো সংখ্যা গঠন করা যেতে পারে?

সমাধান ঃ এখানে শূন্যসহ মোট 5টি অঙ্ক আছে । সংখ্যার প্রথমে 0 থাকলে তা অর্থপূর্ণ সংখ্যা হবেনা। 4 দ্বারা বিভাজ্য সংখ্যাগুলোর শেষের অঙ্ক দুইটি দ্বারা গঠিত সংখ্যা 4 দ্বারা বিভাজ্য হবে। অতএব, 4 দ্বারা বিভাজ্য সংখ্যাগুলোর শেষের অঙ্ক দুইটি দ্বারা গঠিত সংখ্যা 08, 60, 80, 56, 68, 76 হবে।

শেষ দুইটি স্থান 08, 60 ও 80 এর যেকোনো একটি দ্বারা $^3P_1$ উপায়ে পূরণ করে অবশিষ্ট $(5 - 2) = 3$টি স্থান বাকি $(5 - 2) = 3$টি অঙ্ক দ্বারা 3! উপায়ে পূরণ করা যাবে।

আবার, শেষ দুইটি স্থান 56, 68 ও 76 এর যেকোনো একটি দ্বারা ${}^3P_1$ উপায়ে এবং 0 ব্যতীত অপর দুইটি অঙ্কের যেকোনো একটি দ্বারা প্রথম স্থানটি ${}^2P_1$ উপায়ে পূরণ করে অবশিষ্ট $(5-3)=2$টি স্থান 0 ও অপর একটি অঙ্ক দ্বারা 2! উপায়ে পূরণ করা যাবে।

$\therefore$ 4 দ্বারা বিভাজ্য মোট সংখ্যা $= {}^3P_1 \times 3! + {}^3P_1 \times {}^2P_1 \times 2! = 3\times 6 + 3\times 2\times 2 = 18+12 = 30$

17. (a) প্রতিটি অঙ্ক যতবার আছে এর বেশি সংখ্যকবার ব্যবহার না করে 3, 4, 5, 3, 4, 5, 6 এর বিজোড় অঙ্কগুলো সবসময় বিজোড় স্থানে রেখে সাত অঙ্ক বিশিষ্ট কতগুলো সংখ্যা গঠন করা যেতে পারে?

সমাধান ঃ সাত অঙ্ক বিশিষ্ট সংখ্যার 4টি বিজোড় স্থান ও 3টি জোড় স্থান থাকে। 3, 5, 3 ও 5 অঙ্কগুলো দ্বারা 4টি বিজোড় স্থান $\frac{4!}{2!\times 2!} = 6$ উপায়ে এবং 4, 4 ও 6 অঙ্কগুলো দ্বারা বাকি স্থান 3টি $\frac{3!}{2!} = 3$ উপায়ে পূরণ করা যাবে।

$\therefore$ নির্ণেয় মোট সংখ্যা $= 6\times 3 = 18$

(b) প্রত্যেক সংখ্যায় প্রতিটি অঙ্ক কেবল একবার ব্যবহার করে 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 অঙ্কগুলো দ্বারা কতগুলো সংখ্যা গঠন করা যায়, যাদের প্রথমে ও শেষে জোড় অঙ্ক থাকবে?

সমাধান ঃ এখানে 9টি বিভিন্ন অঙ্ক আছে যাদের 4টি জোড় অঙ্ক।

প্রথম ও শেষ স্থান দুইটি 4টি জোড় অঙ্কের যেকোন দুইটি দ্বারা ${}^4P_2$ উপায়ে এবং অবশিষ্ট $(9-2)=7$টি স্থান বাকি $(9-2)=7$টি অঙ্ক দ্বারা 7! উপায়ে পূরণ করা যাবে।

$\therefore$ প্রথমে ও শেষে জোড় অঙ্ক নিয়ে মোট সংখ্যা $= {}^4P_2 \times 7! = 12\times 5040 = 60480$

18. কোন সংখ্যায় কোন অঙ্কের পুনরাবৃত্তি না করে 0, 3, 5, 6, 8 অঙ্কগুলো দ্বারা 4000-এর চেয়ে বড় কতগুলো সংখ্যা গঠন করা যায়?

সমাধান ঃ প্রশ্নমতে সংখ্যাগুলো 4 অঙ্কের ও 5 অঙ্কের হবে।

4000-এর চেয়ে বড় 4 অঙ্ক দ্বারা গঠিত সংখ্যাগুলো 5, 6 কিংবা 8 দ্বারা আরম্ভ হবে।

$\therefore$ 4 অঙ্ক দ্বারা গঠিত মোট সংখ্যা $= {}^3P_1 \times {}^4P_3 = 3\times 24 = 72$

4000-এর চেয়ে বড় 5 অঙ্ক দ্বারা গঠিত সংখ্যাগুলো 3, 5, 6 কিংবা 8 দ্বারা আরম্ভ হবে।

$\therefore$ 5 অঙ্ক দ্বারা গঠিত মোট সংখ্যা $= {}^4P_1 \times {}^4P_4 = 4\times 24 = 96$

$\therefore$ নির্ণেয় মোট সংখ্যা $= 72+96 = 168$

19(a) 1,2,3, 4 অঙ্কগুলি যে কোন সংখ্যকবার ব্যবহার করে তিন অঙ্কের বেশি নয় এমন কতগুলি সংখ্যা তৈরী করা যায়?

সমাধান ঃ এখানে অঙ্ক 4টির প্রতিটি যে কোন সংখ্যকবার ব্যবহার করা যাবে।

$\therefore$ এক অঙ্ক বিশিষ্ট সংখ্যা গঠন করা যাবে 4 উপায়ে।

দুই অঙ্ক বিশিষ্ট সংখ্যার প্রতিটি স্থান (একক বা দশক) 4টি অঙ্ক দ্বারা 4 উপায়ে পূরণ করা যাবে। অতএব, দুই অঙ্ক বিশিষ্ট সংখ্যা গঠন করা যাবে $4\times 4 = 4^2$ উপায়ে।

অনুরূপভাবে, তিন ঙ্ক বিশিষ্ট সংখ্যা গঠন করা যাবে 4^3 উপায়ে।

$\therefore$ নির্ণেয় মোট সংখ্যা $=(4+4^2+4^3) = (4+16+64) = 84$

(b) 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 অঙ্কগুলো যেকোন সংখ্যকবার ব্যবহার করে 10000 এর ছোট কতগুলো বিজোড় সংখ্যা গঠন করা যায়?

সমাধান ঃ শূন্যসহ 8টি অঙ্কের প্রতিটি যে কোন সংখ্যকবার ব্যবহার করা যাবে। সংখ্যার শেষে 1, 3, 5 বা 7 থাকলে সংখ্যাগুলি বিজোড় হবে এবং প্রথমে 0 থাকলে তা অর্থপূর্ণ সংখ্যা হবেনা। তাই, শেষ স্থানটি (অর্থাৎ একক

স্থান) এ চারটি বিজোড় সংখ্যা দ্বারা 4 উপায়ে, বাম দিক হতে প্রথম স্থানটি 0 ব্যতীত বাকী 7টি অঙ্ক দ্বারা 7 উপায়ে এবং অন্যান্য স্থানগুলির প্রতিটি শূন্যসহ 8টি অঙ্ক দ্বারা 8 উপায়ে পূরণ করা যাবে।

এক অঙ্ক বিশিষ্ট বিজোড় সংখ্যা গঠন করা যাবে 4 উপায়ে।

∴ দুই অঙ্ক বিশিষ্ট বিজোড় সংখ্যা গঠন করা যাবে 7×4 অর্থাৎ 28 উপায়ে।

তিন অঙ্ক বিশিষ্ট বিজোড় সংখ্যা গঠন করা যাবে $7 \times 8 \times 4$ অর্থাৎ 224 উপায়ে।

চার অঙ্ক বিশিষ্ট বিজোড় সংখ্যা গঠন করা যাবে $7 \times 8 \times 8 \times 4$ অর্থাৎ 1792 উপায়ে।

∴ নির্ণেয় মোট সংখ্যা $= (4 + 28 + 224 + 1792) = 2048$

20. (a) একটি প্রফেসরের পদের জন্য 3 জন প্রার্থী 5 জন লোকের ভোটে একজন নির্বাচিত হবে। কত প্রকারে ভোট দেওয়া যেতে পারে? [য.'০৫; কু.'০৯; রা.'১০]

সমাধান ঃ প্রত্যেক ভোটার 3 জন প্রার্থীকে ভোট দিতে পারে 3 উপায়ে।

∴ 5 জন ভোটার 3 জন প্রার্থীকে ভোট দিতে পারে $3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 3^5 = 243$ উপায়ে।

∴ 243 প্রকারে ভোট দেওয়া যেতে পারে।

(b) তিনটি পুরস্কারের একটি সদাচারের জন্য, একটি ক্রীড়ার জন্য এবং একটি সাধারণ উন্নতির জন্য। 10 জন বালকের মধ্যে এগুলো কত রকমে বিতরণ করা যেতে পারে?

সমাধান ঃ প্রত্যেক পুরস্কার 10 জন বালকের মধ্যে 10 উপায়ে বিতরণ করা যায়।

∴ তিনটি পুরস্কার 10 জন বালকের মধ্যে বিতরণ করার মোট উপায় সংখ্যা $= 10 \times 10 \times 10 = 1000$

(c) $\{A, B, C\}$ সেটের প্রতিটি বর্ণকে প্রতিটি শব্দে অন্তত একবার ব্যবহার করে পাঁচ বর্ণের কতগুলি শব্দ গঠন করা যায় তাদের সংখ্যা নির্ণয় কর।

সমাধান : পাঁচ বর্ণের শব্দের প্রতিটি স্থান 3 উপায়ে পূরণ করা যায়।

∴ $\{A, B, C\}$ সেটের বর্ণগুলি ব্যবহার করে পাঁচ বর্ণের শব্দ গঠন করা যায় 3^5 সংখ্যক।

প্রদত্ত বর্ণ তিনটির যেকোনো একটি ব্যতিত অপর বর্ণ দুইটি ব্যবহার করে পাঁচ বর্ণের শব্দ গঠন করা যায় 2^5 সংখ্যক। সুতরাং, যেকোনো দুইটি বর্ণ ব্যবহার করে পাঁচ বর্ণের শব্দ গঠন করা যায় 3×2^5 সংখ্যক। কিন্তু এদের মধ্যে AAAAA, BBBBB ও CCCCC এর প্রত্যেকটি দুইবার করে অন্তর্ভুক্ত।

∴ নির্ণেয় সংখ্যা $= 3^5 - (3 \times 2^5 - 3) = 243 - 96 + 3 = 150.$

বিকল্প পদ্ধতি: পাঁচটি বর্ণ নিম্নরূপে নির্বাচন করা যায়:

(i) 3টি একজাতীয় ও অন্য দুইটি ভিন্ন (যেমন- 5টি বর্ণের ৩টি A, 1টি B ও 1টি C)।

(ii) 2টি একজাতীয়, 2টি অন্য একজাতীয় ও 1টি অপর বর্ণ (যেমন-5টি বর্ণের ২টি A, 2টি B ও 1টি C)

(i) এর ক্ষেত্রে পাঁচ বর্ণের শব্দ গঠন করা যায় ${}^3C_1 \times \frac{5!}{3!} = 60$ সংখ্যক।

(ii) এর ক্ষেত্রে পাঁচ বর্ণের শব্দ গঠন করা যায় ${}^3C_2 \times \frac{5!}{2!2!} = 90$ সংখ্যক।

∴ নির্ণেয় সংখ্যা $= 60 + 90 = 150$

21. (a) গণিতের 5 খানা, পদার্থবিজ্ঞানের 3 খানা ও রসায়নবিজ্ঞানের 2 খানা পুস্তককে একটি তাকে কত প্রকারে সাজানো যেতে পারে যাতে একই বিষয়ের পুস্তকগুলি একত্রে থাকে?

সমাধান ঃ যেহেতু একই বিষয়ের পুস্তকগুলো একত্রে থাকে, অতএব গণিতের 5 খানা পুস্তককে গণিতের একটি একক পুস্তক, পদার্থবিজ্ঞানের 3 খানা পুস্তককে পদার্থবিজ্ঞানের একটি একক পুস্তক এবং রসায়নবিজ্ঞানের 2 খানা পুস্তককে রসায়নবিজ্ঞানের একটি একক পুস্তক মনে করতে হবে।

∴ এই 3 বিষয়ের পুস্তক $3! = 6$ উপায়ে এবং গণিতের 5 খানা পুস্তককে নিজেদের মধ্যে $5! = 120$ উপায়ে, পদার্থবিজ্ঞানের 3 খানা পুস্তককে $3! = 6$ উপায়ে ও রসায়নবিজ্ঞানের 2 খানা পুস্তককে $2! = 2$ উপায়ে সাজানো যাবে।

∴ একই বিষয়ের পুস্তকগুলো একত্রে রেখে নির্ণেয় সাজানো সংখ্যা $= 6\times 120\times 6\times 2 = 8640$

(b) একটি তালার 4টি রিং এর প্রত্যেকটিতে 5টি করে অক্ষর মুদ্রিত আছে। প্রতিটি রিং এর একটি করে 4টি অক্ষরের একমাত্র বিন্যাসের জন্য তালাটি খোলা গেলে কতগুলি বিন্যাসের জন্য তালাটি খোলা যাবে না ?

সমাধান ঃ প্রতিটি বিন্যাসের প্রথম স্থানটি প্রথম রিং এর 5টি অক্ষর দ্বারা পূরণ করা যায় 5 উপায়ে।
প্রতিটি বিন্যাসের দ্বিতীয় স্থানটি দ্বিতীয় রিং এর 5টি অক্ষর দ্বারা পূরণ করা যায় 5 উপায়ে।
প্রতিটি বিন্যাসের তৃতীয় স্থানটি তৃতীয় রিং এর 5টি অক্ষর দ্বারা পূরণ করা যায় 5 উপায়ে।
প্রতিটি বিন্যাসের চতুর্থ স্থানটি চতুর্থ রিং এর 5টি অক্ষর দ্বারা পূরণ করা যায় 5 উপায়ে।

∴ চারটি রিং এর অক্ষরগুলি দ্বারা গঠিত বিন্যাসের সংখ্যা $= 5\times 5\times 5\times 5 = 25$

∴ যেসব বিন্যাসের জন্য তালাটি খোলা যাবেনা তাদের সংখ্যা $= 625 - 1 = 624$

22. (a) 8 জন মেয়ে বৃত্তাকারে নাচবে। কত প্রকারে পৃথক পৃথক ভাবে তারা বৃত্তাকারে দাঁড়াবে?

সমাধান ঃ 1 জন মেয়েকে নির্দিষ্ট করে অবশিষ্ট $(8-1)$ বা, 7 জন মেয়েকে $7!$ প্রকারে সাজানো যায়।

∴ $7! = 5040$ ভাবে তারা বৃত্তাকারে দাঁড়াতে পারবে।

(b) 8 টি ভিন্ন ধরনের মুক্তা কত রকমে একটি ব্যান্ডে লাগিয়ে একটি হার তৈরি করা যেতে পারে?

সমাধান ঃ 1টি মুক্তা নির্দিষ্ট করে অবশিষ্ট $(8-1)$ বা, 7 টি মুক্তাকে $7!$ প্রকারে একটি ব্যান্ডে লাগিয়ে একটি হার তৈরি করা যেতে পারে। কিন্তু হারটি একটি চক্র বিন্যাস যা উপর এবং নিচ থেকে অথবা উল্টিয়ে দেখা যায়।

∴ $\frac{7!}{2} = \frac{5040}{2} = 2520$ রকমে একটি হার তৈরি করা যেতে পারে।

22 (c) দুইজন কলা বিভাগের ছাত্রকে পাশাপাশি না বসিয়ে 8 জন বিজ্ঞান বিভাগের ছাত্র ও 7 জন কলা বিভাগের ছাত্রকে কত রকমে একটি গোল টেবিলের চারপাশে বসানো যায়, তা নির্ণয় কর। [বা.'১১; ঢা.'১২]

সমাধান ঃ 1 জন বিজ্ঞানের ছাত্রকে নির্দিষ্ট করে অবশিষ্ট $(8-1)$ বা, 7 জন বিজ্ঞানের ছাত্রকে একটি গোল টেবিলের চারপাশে $7!$ রকমে বসানো যায়। 8 জন বিজ্ঞান বিভাগের ছাত্রের মধ্যের 8 টি আসনে 7 জন কলা বিভাগের ছাত্রকে $^8P_7$ রকমে বসানো যায়। ∴ তাদেরকে $7!\times {^8P_7}$ রকমে বসানো যেতে পারে।

(d) 15 সদস্যের একটি কমিটিকে গোলটেবিলে 15টি আসনে কতভাবে বসানো যায়? প্রধান অতিথিকে মাঝের আসনে বসিয়ে তাদেরকে একটি লম্বা টেবিলে 15টি আসনে কতভাবে বসানো যায় তাও নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ 15 জন সদস্যের মধ্যে একজনকে একটি আসনে নির্দিষ্ট করে বাকি 14 জনকে গোল টেবিলের 14টি আসনে $14!$ উপায়ে বসানো যাবে। সুতরাং, নির্ণেয় সংখ্যা $= 14!$

আবার, একটি লম্বা টেবিলে প্রধান অতিথিকে মাঝের আসনে বসিয়ে বাকি 14 টি আসনে 14 জনকে $14!$ উপায়ে বসানো যাবে। সুতরাং, নির্ণেয় সংখ্যা $= 14!$

23 (a) প্রত্যেক অঙ্ককে প্রত্যেক সংখ্যায় একবার মাত্র ব্যবহার করে 0, 2, 4, 6, 8 অঙ্কগুলো দ্বারা 10000 এর চেয়ে বড় যতগুলো সংখ্যা গঠন করা যায় তাদের সমষ্টি নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ প্রত্যেক অঙ্ককে প্রত্যেক সংখ্যায় একবার মাত্র ব্যবহার করে 0, 2, 4, 6, 8 অঙ্কগুলো দ্বারা 10000 এর চেয়ে বড় সংখ্যা পাঁচ অঙ্ক বিশিষ্ট হবে।

পাঁচ স্থানের যেকোন একটি স্থান এ পাঁচটি অঙ্কের যেকোন একটি দ্বারা নির্দিষ্ট করে অবশিষ্ট চারটি স্থান বাকী চারটি অঙ্ক দ্বারা 4! উপায়ে পূরণ করা যায়। সুতরাং , প্রত্যেক অঙ্ক প্রত্যেক স্থানে (একক, দশক, শতক, হাজার বা ওযুত) 4! সংখ্যকবার পুনরাবৃত্ত হবে।

$\therefore$ পাঁচ অঙ্ক বিশিষ্ট সংখ্যার প্রত্যেক স্থানের অঙ্কগুলির সমষ্টি $= 4!\times(0+2+4+6+8) = 24\times20 = 480$

$\therefore$ প্রত্যেক অঙ্ককে প্রত্যেক সংখ্যায় একবার মাত্র ব্যবহার করে 0, 2 , 4 , 6 , 8 অঙ্কগুলো দ্বারা গঠিত পাঁচ অঙ্ক বিশিষ্ট সংখ্যার সমষ্টি $= 480\times1 + 480\times10 + 480\times100 + 480\times1000 + 480\times10000$

$= 480(1+10+100+1000+10000) = 480\times11111 = 5333280$

তবে এদের মধ্যে প্রথমে 0 থাকলে তা অর্থপূর্ণ সংখ্যা হবেনা এবং এরূপ সংখ্যার সমষ্টি = প্রত্যেক অঙ্ককে প্রত্যেক সংখ্যায় একবার মাত্র ব্যবহার করে 2 , 4 , 6 , 8 অঙ্কগুলো দ্বারা গঠিত চার অঙ্ক বিশিষ্ট সংখ্যার সমষ্টি $= 3!\times(0+2+4+6+8)\times1111 = 6\times20\times1111 = 133320$

$\therefore$ নির্ণেয় সমষ্টি $= 5333280 - 133320 = 5199960$

[বি.দ্র. : নির্ণেয় সমষ্টি $= (2+4+6+8)(4!\times11111 - 3!\times1111) = 5199960$]

23. (b) কোন অঙ্ক কোন সংখ্যায় একবারের বেশি ব্যবহার না করে 1, 2, 3, 4 অঙ্কগুলো দ্বারা যতগুলো সংখ্যা গঠন করা যায় তাদের সমষ্টি নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ এক অঙ্ক বিশিষ্ট সংখ্যার সমষ্টি $= 1+2+3+4 = 10$

দুই অঙ্ক বিশিষ্ট সংখ্যার একক বা দশক স্থান এ চারটি অঙ্কের যেকোন একটি দ্বারা নির্দিষ্ট করে অবশিষ্ট তিনটি অঙ্ক দ্বারা বাকী স্থানটি $^3P_1$ উপায়ে পূরণ করা যায়। সুতরাং , প্রত্যেক অঙ্ক একক ও দশক স্থানে $^3P_1$ সংখ্যকবার পুনরাবৃত্ত হয়।

$\therefore$ দুই অঙ্ক বিশিষ্ট সংখ্যার প্রত্যেক স্থানের (একক বা দশক) অঙ্কগুলির সমষ্টি $= {}^3P_1(1+2+3+4)$

$= 10\times{}^3P_1 = 30$

$\therefore$ দুই অঙ্ক বিশিষ্ট সংখ্যার সমষ্টি $= 10\times{}^3P_1\times10 + 10\times{}^3P_1\times1$ [যেমন $26 = 2\times10 + 6\times1$]

$= 10\times{}^3P_1(10+1) = 10\times{}^3P_1\times11 = 330$

অনুরূপভাবে, তিন অঙ্ক বিশিষ্ট সংখ্যার সমষ্টি $= 10\times{}^3P_2\times111 = 10\times6\times111 = 6660$

চার অঙ্ক বিশিষ্ট সংখ্যার সমষ্টি $= 10\times{}^3P_3\times1111 = 10\times6\times1111 = 66660$

$\therefore$ নির্ণেয় সমষ্টি $= 10 + 330 + 6660 + 66660 = 73660$

[বি.দ্র. : নির্ণেয় সমষ্টি $= (1+2+3+4)(1 + 11\times{}^3P_1 + 111\times{}^3P_2 + 1111\times{}^3P_3)$. যেকোন প্রতিটি অঙ্ক সর্বাধিক চারবার ব্যবহার করে 1 , 2 , 3 , 4অঙ্কগুলো দ্বারা যতগুলো সংখ্যা গঠন করা যায় তাদের সমষ্টি $= (1+2+3+4)(1 + 11\times4^1 + 111\times4^2 + 1111\times4^3)$

$= 10(1 + 44 + 1776 + 71104) = 729250$]

23 (c) প্রত্যেক সংখ্যায় 5 পাঁচবার এবং 4 চারবার ব্যবহার করে 9 অঙ্কের গঠিত ভিন্ন ভিন্ন সংখ্যার গড় নির্ণয় কর।

সমাধান: প্রত্যেক সংখ্যায় 5 পাঁচবার এবং 4 চারবার ব্যবহার করে 9 অঙ্কের $\frac{9!}{5!4!} = 126$ সংখ্যক সংখ্যা গঠিত হয়। যেকোন স্থান (একক, দশক,শতক ইত্যাদি) 5 দ্বারা নির্দিষ্ট করে অবশিষ্ট আটটি স্থান 4টি 5 ও 4টি 4 দ্বারা

$\frac{8!}{4!4!} = 70$ উপায়ে পূরণ করা যায় অর্থাৎ যেকোন স্থানে 70 বার 5 পুনরাবৃত্ত হয় । আবার, যেকোন স্থান 4 দ্বারা নির্দিষ্ট করে অবশিষ্ট আটটি স্থান 5টি 5 ও 3টি 4 দ্বারা $\frac{8!}{5!3!} = 56$ উপায়ে পূরণ করা যায় অর্থাৎ যেকোন স্থানে 56 বার 4 পুনরাবৃত্ত হয় ।

∴ নয় অঙ্ক বিশিষ্ট সংখ্যার প্রত্যেক স্থানের অঙ্কগুলির সমষ্টি $= 5\times 70 + 4\times 56 = 350 + 224 = 574$.

∴ প্রত্যেক সংখ্যায় 5 পাঁচবার এবং 4 চারবার ব্যবহার করে 9 অঙ্কের গঠিত সংখ্যার সমষ্টি $= 574 \times 111111111 = 63777777714$

∴ নির্ণেয় গড় $= 63777777714 \div 126 = 506172839$

সম্ভাব্য ধাপসহ সমস্যা:

24. 'EQUATION' শব্দটির সবগুলো অক্ষর ব্যবহার করে কতটি শব্দ গঠন করা যেতে পারে?

সমাধান ঃ 'EQUATION' শব্দটিতে মোট 8টি বিভিন্ন অক্ষর আছে । (১)

এই 8টি অক্ষর একত্রে ব্যবহার করে গঠিত বিভিন্ন শব্দের সংখ্যা $^8P_8 = 8! = 40320$ (১)

25. 'LAUGHTER' শব্দটির সব কয়টি বর্ণকে কত প্রকারে সাজানো যায় তা নির্ণয় কর। এদের কতগুলো L দ্বারা শুরু হবে?

সমাধান ঃ 'LAUGHTER' শব্দটিতে মোট 8টি বিভিন্ন অক্ষর আছে । এই 8টি অক্ষর একত্রে ব্যবহার করে গঠিত বিভিন্ন শব্দের সংখ্যা $^8P_8 = 8! = 40320$ (১) + (১)

প্রথম স্থানটি L দ্বারা নির্দিষ্ট করে অবশিষ্ট (৮ −1) অর্থাৎ, 7টি অক্ষরকে তাদের নিজেদের মধ্যে $7! = 5040$ উপায়ে সাজানো যায়। সুতরাং L দ্বারা শুরু হয় এরূপ সাজানো সংখ্যা = 5040 (১) + (১)

26. (a) নিচের শব্দগুলোর সবগুলো বর্ণ একবারে নিয়ে কত প্রকারে সাজানো যায় ঃ (i) committee (ii) infinitesimal (iii) proportion ?

সমাধান : (i) **'committee'** শব্দটিতে মোট 9টি অক্ষর আছে, যাদের মধ্যে 2টি m, 2টি t এবং 2টি e (১)

∴ নির্ণেয় সাজানো সংখ্যা $= \frac{9!}{2!\times 2!\times 2!}$ (১)

(ii) infinitesimal শব্দটিতে মোট 13টি অক্ষর আছে , যাদের মধ্যে 4টি i, 2টি n . (১)

∴ নির্ণেয় সাজানো সংখ্যা $= \frac{13!}{4!\times 2!}$ (১)

(iii) proportion শব্দটিতে মোট 10টি অক্ষর আছে , যাদের মধ্যে 2টি p, 2টি r, 3টি o. (১)

∴ নির্ণেয় সাজানো সংখ্যা $= \frac{10!}{2!\times 2!\times 3!}$ (১)

(b) একটি লাইব্রেরীতে একখানা পুস্তকের 8 কপি , দুইখানা পুস্তকের প্রত্যেকের 3 কপি , তিনখানা পুস্তকের প্রত্যেকের 5 কপি এবং দশখানা পুস্তকের 1 কপি করে আছে। সবগুলো একত্রে নিয়ে কত প্রকারে সাজানো যেতে পারে?

সমাধান ঃ মোট পুস্তকের সংখ্যা $= 8 + 2\times 3 + 3\times 5 + 10 = 8 + 6 + 15 + 10 = 39$ (১)

$\therefore$ নির্ণেয় সাজানো সংখ্যা $= \dfrac{39!}{8!\times 3!\times 3!\times 5!\times 5!\times 5!} = \dfrac{39!}{8!\times (3!)^2 \times (5!)^3}$ (১)

27. স্বরবর্ণগুলোকে পৃথক না রেখে 'INSURANCE' শব্দটি বর্ণগুলো একত্রে নিয়ে যত প্রকারে সাজানো যায় তা নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ 'INSURANCE' শব্দটিতে মোট 9টি বর্ণ আছে যাদের 4টি ভিন্ন স্বরবর্ণ । যেহেতু স্বরবর্ণ 4টি একত্রে থাকে, অতএব তাদেরকে একটি একক বর্ণ মনে করলে বর্ণগুলো হবে (IUAE), N, S, R, N, C . (১)

$\therefore$ 2টি N সহ এই 6টি বর্ণকে $\dfrac{6!}{2!.} = 360$ প্রকারে সাজানো যায় । আবার, 4 টি ভিন্ন স্বরবর্ণকে নিজেদের মধ্যে $4! = 24$ প্রকারে সাজানো যায় । (১) + (১)

$\therefore$ নির্ণেয় সাজানো সংখ্যা $= 360 \times 24 = 8640$ (১)

28. (a) 'CHITTAGONG' শব্দটির বর্ণগুলো কত রকম ভাবে বিন্যাস করা যায়, যখন স্বরবর্ণগুলো একত্রে থাকে। [চ.'০১]

সমাধান ঃ ' CHITTAGONG ' শব্দটিতে মোট 10টি বর্ণ আছে যাদের 3টি স্বরবর্ণ ।
যেহেতু স্বরবর্ণ তিনটি একত্রে থাকে, অতএব তাদেরকে 1টি বর্ণ মনে করে মোট বর্ণের সংখ্যা হবে $(10 - 3 + 1)$ অর্থাৎ, 8টি। (১)

2টি T ও 2টি G সহ এই 8টি বর্ণকে $\dfrac{8!}{2!.2!} = 10080$ প্রকারে এবং 3 টি ভিন্ন স্বরবর্ণকে নিজেদের মধ্যে $3! = 6$ প্রকারে সাজানো যায় । (১) + (১)

$\therefore$ স্বরবর্ণগুলো একত্রে নিয়ে বর্ণগুলোর মোট সাজানো সংখ্যা $= 10080 \times 6 = 60480$ (১)

(b) স্বরবর্ণগুলোকে পাশাপাশি রেখে 'TECHNOLOGY' শব্দটির বর্ণগুলো কত উপায়ে বিন্যাস করা যায়? [প্র.ভ.প.'০৫]

সমাধান ঃ 'TECHNOLOGY' শব্দটিতে মোট 10টি বর্ণ আছে যাদের 3টি স্বরবর্ণ ।
যেহেতু স্বরবর্ণ তিনটি একত্রে থাকে, অতএব তাদেরকে 1টি বর্ণ মনে করে মোট বর্ণের সংখ্যা হবে $(10 - 3 + 1)$ অর্থাৎ, 8টি । (১)

এই 8টি ভিন্ন বর্ণকে 8! উপায়ে এবং 2টি O সহ 3 টি স্বরবর্ণকে নিজেদের মধ্যে $\dfrac{3!}{2!} = 3$ উপায়ে বিন্যাস করা যায় । (১) + (১)

$\therefore$ স্বরবর্ণগুলোকে পাশাপাশি রেখে বর্ণগুলোর মোট বিন্যাস সংখ্যা $= 8! \times 3 = 120960$ (১)

29. 7টি সবুজ , 4টি নীল এবং 2টি লাল কাউন্টার এক সারিতে কত রকমে সাজানো যেতে পারে ? এদের কতগুলোতে লাল কাউন্টার দুইটি একত্রে থাকবে?

সমাধান: ১ম অংশ : এখানে মোট $(7+4+2)=13$টি কাউন্টারের মধ্যে 7টি সবুজ, 4টি নীল এবং 2টি লাল। (১)

$\therefore$ সবগুলো কাউন্টার একত্রে নিয়ে মোট সাজানো সংখ্যা $= \dfrac{13!}{7!\times 4!\times 2!} = 25740$ (১)

২য় অংশ ঃ লাল কাউন্টার দুইটিকে একটি একক কাউন্টার মনে করলে মোট কাউন্টার সংখ্যা হবে $(13 - 2 + 1)$ অর্থাৎ, 12টি যাদের মধ্যে 7টি সবুজ এবং 4টি নীল । (১)

$\therefore$ লাল কাউন্টার দুইটি একত্রে রেখে মোট সাজানো সংখ্যা $= \dfrac{12!}{7!\times 4!} = 3960$ (১)

30. 'IDENTITY' শব্দটির সব কয়টি বর্ণকে কত প্রকারে সাজানো যায় তা নির্ণয় কর। কতগুলোর প্রথমে I এবং শেষে I থাকবে ? কতগুলোতে I দুইটি এবং T দুইটি একত্রে থাকবে ?

সমাধান ঃ ১ম অংশ ঃ 'IDENTITY' শব্দটিতে মোট 8টি বর্ণ আছে যাদের 2টি I এবং 2টি T. (১)

∴ এ শব্দটির বর্ণগুলো একত্রে নিয়ে সাজানো যায় $= \dfrac{8!}{2! \times 2!!} = 10080$ প্রকারে। (১)

২য় অংশ ঃ প্রথম ও শেষ স্থান দুইট 'I' দ্বারা নিদিষ্ট করে 2টি T সহ অবশিষ্ট $(8-2)$ অর্থাৎ, 6টি বর্ণকে 6টি স্থানে $\dfrac{6!}{2!} = 360$ প্রকারে সাজানো যায় । (১)

৩য় অংশ ঃ I দুইটিকে একটি একক বর্ণ এবং T দুইটি একটি একক বর্ণ মনে করে মোট ভিন্ন বর্ণের সংখ্যা হবে $(8-2)$ অর্থাৎ, 6টি। সুতরাং, I দুইটি এবং T দুইটি একত্রে রেখে নির্ণেয় সাজানো সংখ্যা $= 6! = 720$ (১)

31. ব্যঞ্জনবর্ণগুলোকে বিজোড় স্থানে রেখে 'EQUATION' শব্দটির অক্ষরগুলোকে কত প্রকারে সাজানো যায় তা নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ 'EQUATION' শব্দটিতে মোট 8টি বর্ণ আছে যাদের 5টি ভিন্ন স্বরবর্ণ এবং 3টি ভিন্ন ব্যঞ্জনবর্ণ। (১)

এখানে 8টি স্থানের মধ্যে 4টি বিজোড় স্থান (১ম , ৩য় , ৫ম এবং ৭ম) এর 3টি স্থান 3টি ভিন্ন ব্যঞ্জনবর্ণ দ্বারা $^4P_3$ উপায়ে এবং অবশিষ্ট 5টি স্থান 5টি ভিন্ন স্বরবর্ণ দ্বারা 5! উপায়ে পূরণ করা যাবে। (১) + (১)

∴ ব্যঞ্জনবর্ণগুলোকে বিজোড় স্থানে রেখে নির্ণেয় সাজানো সংখ্যা $= {}^4P_3 \times 5! = 24 \times 120 = 2880$ (১)

32. (a) 6টি পরীক্ষার খাতাকে কত প্রকারে সাজানো যেতে পারে, যাতে সবচেয়ে ভাল ও সবচেয়ে খারাপ খাতা দুইটি একত্রে না থাকে?

সমাধান ঃ 6টি খাতা একত্রে $6! = 720$ প্রকারে সাজানো যায়। (১)

সবচেয়ে ভাল ও সবচেয়ে খারাপ খাতা দুইটিকে একটি একক খাতা মনে করে মোট খাতার সংখ্যা হবে $(6-2+1)$ অর্থাৎ 5 টি। এই 5টি খাতা একত্রে $5! = 120$ প্রকারে এবং সবচেয়ে ভাল ও সবচেয়ে খারাপ খাতা দুইটিকে নিজেদের মধ্যে $2! = 2$ প্রকারে সাজানো যায়। (১)

∴ সবচেয়ে ভাল ও সবচেয়ে খারাপ খাতা দুইটিকে একত্রে নিয়ে সাজানো সংখ্যা $= 120 \times 2 = 240$ (১)

∴ সবচেয়ে ভাল ও সবচেয়ে খারাপ খাতা দুইটি একত্রে না নিয়ে সাজানো সংখ্যা $= 720 - 240 = 480$ (১)

(b) আটটি বস্তুকে এক সারিতে কত প্রকারে সাজানো যেতে পারে , যাতে (i) দুইটি বিশেষ বস্তু একত্রে থাকে এবং (ii) দুইটি বিশেষ বস্তু একত্রে না থাকে?

সমাধান ঃ (i) দুইটি বিশেষ বস্তুকে একটি একক বস্তু মনে করলে সাজানোর জন্য $(8-2+1)$ অর্থাৎ, 7টি বস্তু পাই। এই 7টি বস্তু একত্রে 7! প্রকারে এবং বিশেষ বস্তু দুইটিকে নিজেদের মধ্যে $2! = 2$ প্রকারে সাজানো যায়। (১)

∴ দুইটি বিশেষ বস্তু একত্রে নিয়ে নির্ণেয় সাজানো সংখ্যা $= 7! \times 2 = 5040 \times 2 = 10080$ (১)

(ii) 8টি বস্তুকে এক সারিতে $8! = 40320$ প্রকারে সাজানো যায়। (১)

∴ দুইটি বিশেষ বস্তু একত্রে না নিয়ে নির্ণেয় সাজানো সংখ্যা $= 40320 - 10080 = 30240$ (১)

33. (a) 'PERMUTATIONS' শব্দটির বর্ণগুলো থেকে একটি স্বরবর্ণ ও দুইটি ব্যঞ্জন বর্ণ নিয়ে কতগুলো শব্দ গঠন করা যেতে পারে, যখন স্বরবর্ণ সর্বদা মধ্যম স্থান দখল করে?

সমাধান ঃ 'PERMUTATIONS' শব্দটিতে মোট 12টি বর্ণ আছে যাদের 5টি ভিন্ন স্বরবর্ণ এবং 2টি T সহ 7টি ব্যঞ্জন বর্ণ । মধ্যম স্থানটি 5টি ভিন্ন স্বরবর্ণ দ্বারা $^5P_1 = 5$ উপায়ে পূরণ করা যাবে। (১)

প্রান্ত স্থান 2টি 6টি ভিন্ন ব্যঞ্জন বর্ণ P, R, M, T, N ও S দ্বারা $^6P_2 = 30$ উপায়ে এবং 2টি T দ্বারা $\frac{2!}{2!} = 1$ উপায়ে পূরণ করা যাবে। (১)

অতএব, প্রান্ত স্থান 2টি ব্যঞ্জন বর্ণ দ্বারা $(30 + 1) = 31$ উপায়ে পূরণ করা যাবে। (১)

$\therefore$ নির্ণেয় শব্দের সংখ্যা $= 5 \times 31 = 155$ (Ans.) (১)

(b) একটি বালকের 11টি বিভিন্ন বস্তু আছে, যার মধ্যে 5টি কালো এবং 6টি সাদা। একটি কালো বস্তু মাঝখানে রেখে সে তিনটি বস্তু এক সারিতে কত প্রকারে সাজাতে পারে?

সমাধান ঃ সারির মাঝখানের স্থানটি 5টি বিভিন্ন কালো বস্তু দ্বারা $^5P_1 = 5$ উপায়ে এবং প্রান্ত স্থান 2টি অবশিষ্ট $(11 - 1) = 10$টি বিভিন্ন বস্তু দ্বারা $^{10}P_2 = 90$ উপায়ে পূরণ করা যাবে। (১)

$\therefore$ নির্ণেয় শব্দের সংখ্যা $= 5 \times 90 = 450$ (১)

(c) a, b, c, d, e, f অক্ষরগুলো থেকে তিনটি অক্ষর দ্বারা গঠিত বিন্যাসের সংখ্যা নির্ণয় কর, যেখানে প্রতিটি বিন্যাসে কমপক্ষে একটি স্বরবর্ণ বর্তমান থাকে।

সমাধান ঃ a, b, c, d, e, f অক্ষরগুলোর মধ্যে 2টি ভিন্ন স্বরবর্ণ এবং 4টি ভিন্ন ব্যঞ্জন বর্ণ। 6টি অক্ষরের যেকোনো 3টি নিয়ে গঠিত বিন্যাস সংখ্যা $= {}^6P_3$. (১)

এদের মধ্যে কেবল 3টি ব্যঞ্জন বর্ণ থাকবে এরূপ বিন্যাস সংখ্যা $= {}^4P_3$ (১)

$\therefore$ প্রতিটি বিন্যাসে কমপক্ষে একটি স্বরবর্ণ বর্তমান থাকবে এরূপ বিন্যাস সংখ্যা $= {}^6P_3 - {}^4P_3 = 120 - 24 = 96$. (১)

34. দুইজন মেয়েকে পাশাপাশি না রেখে x জন ছেলে ও y জন মেয়েকে ($x > y$) কত প্রকারে এক সারিতে সাজানো যায়, তা নির্ণয় কর। (১)

সমাধান ঃ x জন ছেলেকে এক সারিতে $x!$ প্রকারে সাজানো যায়। এই x জন ছেলের মাঝখানে $(x - 1)$ টি ফাঁকা স্থান পাওয়া যায়। এ ছাড়া সারির দুই প্রান্তে আরও দুইটি ফাঁকাস্থান পাওয়া যায়। (১) (১)

সুতরাং, $\{(x - 1) + 2\} = (x + 1)$ টি ফাঁকা স্থানে y জন মেয়েকে $^{x+1}P_y$ উপায়ে সাজানো যায়। (১)

$\therefore$ নির্ণেয় সাজানো সংখ্যা $= x! \times {}^{x+1}P_y$ (১)

35. (a) প্রত্যেক অঙ্ককে প্রত্যেক সংখ্যায় একবার মাত্র ব্যবহার করে 2, 3, 4, 5, 6, 7 অঙ্কগুলো দ্বারা ছয় অঙ্ক বিশিষ্ট কতগুলো সংখ্যা গঠন করা যেতে পারে? এদের কতগুলো 5 দ্বারা বিভাজ্য হবে না?

সমাধান ঃ এখানে 6টি বিভিন্ন অঙ্ক আছে। প্রত্যেক অঙ্ককে প্রত্যেক সংখ্যায় একবার মাত্র ব্যবহার করে 6টি অঙ্ক দ্বারা ছয় অঙ্কের গঠিত মোট সংখ্যা $= {}^6P_6 = 6! = 720$ (১)

শেষ স্থানটি 5টি অঙ্ক 2, 3, 4, 6 ও 7 এর যেকোনো একটি দ্বারা $^5P_1$ প্রকারে পূরণ করে অবশিষ্ট 5টি স্থানে বাকি 5টি অঙ্ককে 5! প্রকারে সাজানো যায়। (১) + (১)

$\therefore$ 5 দ্বারা বিভাজ্য নয় এরূপ মোট সংখ্যা $= {}^5P_1 \times 5! = 5 \times 120 = 600$ (১)

(b) প্রতিটি অঙ্ক যতবার আছে এর বেশি সংখ্যকবার ব্যবহার না করে 2, 2, 2, 3, 3, 4 অঙ্কগুলো দ্বারা ছয় অঙ্ক বিশিষ্ট কতগুলো সংখ্যা গঠন করা যেতে পারে? এদের কতগুলো 400000 অপেক্ষা বড় হবে? (১)

সমাধান ঃ ১ম অংশ ঃ এখানে 3টি 2 এবং 2টি 3 সহ মোট 6টি অঙ্ক আছে।

∴ ছয় অঙ্ক বিশিষ্ট মোট সংখ্যা $= \dfrac{6!}{3! \times 2!} = 60$

২য় অংশ ঃ 400000 অপেক্ষা বড় সংখ্যাগুলোর প্রথম অঙ্কটি 4 দ্বারা আরম্ভ হতে হবে।
প্রথম স্থানটি 4 দ্বারা নির্দিষ্ট করে অবশিষ্ট $(6-1) = 5$টি স্থান 3টি 2 এবং 2টি 3 সহ বাকি 5টি অঙ্ক দ্বারা পূরণ করা যাবে $\dfrac{5!}{3! \times 2!} = 10$ উপায়ে।

∴ নির্ণেয় মোট সংখ্যা $= 10$

36. (a) 1, 2, 3 অঙ্কগুলি যে কোন সংখ্যকবার ব্যবহার করে চার অঙ্কের বেশি নয় এমন কতগুলি সংখ্যা তৈরী করা যায়?

সমাধান ঃ এখানে অঙ্ক 3টির প্রতিটি যে কোনো সংখ্যকবার ব্যবহার করা যাবে।

∴ এক অঙ্ক বিশিষ্ট সংখ্যা গঠন করা যাবে 3 উপায়ে।

দুই অঙ্ক বিশিষ্ট সংখ্যার প্রতিটি স্থান (একক বা দশক) 3টি অঙ্ক দ্বারা 3 উপায়ে পূরণ করা যাবে। অতএব, দুই অঙ্ক বিশিষ্ট সংখ্যা গঠন করা যাবে $3 \times 3 = 3^2$ উপায়ে।

অনুরূপভাবে, তিন ঙ্ক বিশিষ্ট ও চার ঙ্ক বিশিষ্ট সংখ্যা গঠন করা যাবে যথাক্রমে 3^3 ও 3^4 উপায়ে।

∴ নির্ণেয় মোট সংখ্যা $= (3 + 3^2 + 3^3 + 3^4) = (3 + 9 + 27 + 81) = 120$

[দ্র. : 1, 2, 3, 4, 5 অঙ্কগুলি যে কোন সংখ্যকবার ব্যবহার করে চার অঙ্কের বেশি নয় এমন সংখ্যা গঠন করা যায় $\dfrac{5(5^4 - 1)}{5 - 1} = 780$ উপায়ে।]

(b) 0 , 1 , 2 , 3 , 4 , 5 , 6 , 7 অঙ্কগুলো যেকোন সংখ্যকবার ব্যবহার করে 10000 এর ছোট কতগুলো সংখ্যা গঠন করা যায়?

সমাধান ঃ শূন্যসহ 8টি অঙ্কের প্রতিটি যে কোনো সংখ্যকবার ব্যবহার করা যাবে। সংখ্যার প্রথমে 0 থাকলে তা অর্থপূর্ণ সংখ্যা হবেনা।

তাই, বাম দিক হতে সংখ্যার প্রথম স্থান 0 ব্যতীত বাকী 7টি অঙ্ক দ্বারা 7 উপায়ে এবং অন্যান্য স্থানগুলির প্রতিটি শূন্যসহ 8টি অঙ্ক দ্বারা 8 উপায়ে পূরণ করা যাবে।

∴ এক অঙ্ক বিশিষ্ট সংখ্যা গঠন করা যাবে 7 উপায়ে।
দুই অঙ্ক বিশিষ্ট সংখ্যা গঠন করা যাবে 7×8 অর্থাৎ 56 উপায়ে।
তিন অঙ্ক বিশিষ্ট সংখ্যা গঠন করা যাবে $7 \times 8 \times 8$ অর্থাৎ 448 উপায়ে।
চার অঙ্ক বিশিষ্ট সংখ্যা গঠন করা যাবে $7 \times 8 \times 8 \times 8$ অর্থাৎ 3584 উপায়ে।

∴ নির্ণেয় মোট সংখ্যা $= (7 + 56 + 448 + 3584) = 4095$

37. তিনটি ফুটবল খেলার ফলাফল কত উপায়ে হতে পারে?

সমাধান ঃ প্রথম খেলার ফলাফল কোনো বিশেষ দলের জন্য জয়, পরাজয় অথবা অমীমাংসিত অর্থাৎ 3 উপায়ে হতে পারে। অনুরূপ ২য় খেলার ফলাফল 3 উপায়ে এবং ৩য় খেলার ফলাফলও 3 উপায়ে হতে পারে।

∴ নির্ণেয় সংখ্যা $= 3 \times 3 \times 3 = 27$

38. (a) প্রত্যেক অঙ্ককে প্রত্যেক সংখ্যায় একবার মাত্র ব্যবহার করে 1, 3, 5, 7, 9 অঙ্কগুলো দ্বারা 10000 এর চেয়ে বড় যতগুলো সংখ্যা গঠন করা যায় তাদের সমষ্টি নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ প্রত্যেক অঙ্ককে প্রত্যেক সংখ্যায় একবার মাত্র ব্যবহার করে 1, 3, 5, 7, 9 অঙ্কগুলো দ্বারা 10000 এর চেয়ে বড় সংখ্যা পাঁচ অঙ্ক বিশিষ্ট হবে।

পাঁচ স্থানের যেকোনো একটি স্থান এ পাঁচটি অঙ্কের যেকোনো একটি দ্বারা নির্দিষ্ট করে অবশিষ্ট চারটি স্থান বাকী চারটি অঙ্ক দ্বারা 4! উপায়ে পূরণ করা যায়। সুতরাং, প্রত্যেক অঙ্ক প্রত্যেক স্থানে (একক, দশক, শতক, হাজার বা ওযুত) 4! সংখ্যকবার পুনরাবৃত্ত হবে। (১)

∴ পাঁচ অঙ্ক বিশিষ্ট সংখ্যার প্রত্যেক স্থানের অঙ্কগুলির সমষ্টি $= 4! \times (1+3+5+7+9)$

$= 24 \times 25 = 600$ (১)

∴ প্রত্যেক অঙ্ককে প্রত্যেক সংখ্যায় একবার মাত্র ব্যবহার করে 1, 3, 5, 7, 9 অঙ্কগুলো দ্বারা গঠিত পাঁচ অঙ্ক বিশিষ্ট সংখ্যার সমষ্টি $= 600 \times 1 + 600 \times 10 + 600 \times 100 + 600 \times 1000 + 600 \times 10000$ (১)

$= 600(1 + 10 + 100 + 1000 + 10000) = 600 \times 11111 = 6666600$ (Ans.)

[বি.দ্র. : নির্ণেয় সমষ্টি $= (5-1)! \times (1+3+5+7+9) \times 11111 = 24 \times 25 \times 11111 = 6666600$]

(b) কোনো অঙ্ক কোনো সংখ্যায় একবারের বেশি ব্যবহার না করে 1, 3, 5, 7, 9 অঙ্কগুলো দ্বারা যতগুলো সংখ্যা গঠন করা যায় তাদের সমষ্টি নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ এক অঙ্ক বিশিষ্ট সংখ্যার সমষ্টি $= 1+3+5+7+9 = 25$ (১)

দুই অঙ্ক বিশিষ্ট সংখ্যার একক বা দশক স্থান এ পাঁচটি অঙ্কের যেকোনো একটি দ্বারা নির্দিষ্ট করে অবশিষ্ট চারটি অঙ্ক দ্বারা বাকী স্থানটি $^4P_1$ উপায়ে পূরণ করা যায়। সুতরাং, প্রত্যেক অঙ্ক একক ও দশক স্থানে $^4P_1$ সংখ্যকবার পুনরাবৃত্ত হয়। (১)

∴ দুই অঙ্ক বিশিষ্ট সংখ্যার প্রত্যেক স্থানের (একক বা দশক) অঙ্কগুলির সমষ্টি $= {}^4P_1(1+3+5+7+9)$

$= 25 \times {}^4P_1 = 100$ (১)

∴ দুই অঙ্ক বিশিষ্ট সংখ্যার সমষ্টি $= 25 \times {}^4P_1 \times 10 + 25 \times {}^4P_1 \times 1$ [যেমন $26 = 2 \times 10 + 6 \times 1$]

$= 25 \times {}^4P_1\ (10+1) = 25 \times {}^4P_1 \times 11 = 1100$ (১)

অনুরূপভাবে, তিন অঙ্ক বিশিষ্ট সংখ্যার সমষ্টি $= 25 \times {}^4P_2 \times 111 = 25 \times 12 \times 111 = 33300$

চার অঙ্ক বিশিষ্ট সংখ্যার সমষ্টি $= 25 \times {}^4P_3 \times 1111 = 25 \times 24 \times 1111 = 666600$

পাঁচ অঙ্ক বিশিষ্ট সংখ্যার সমষ্টি $= 25 \times {}^4P_4 \times 11111 = 25 \times 24 \times 11111 = 6666600$

∴ নির্ণেয় সমষ্টি $= 25 + 1100 + 33300 + 666600 + 6666600 = 7367625$ (১)

[বি.দ্র. : নির্ণেয় সমষ্টি $= (1+3+5+7+9)(1 + 11 \times {}^4P_1 + 111 \times {}^4P_2 + 1111 \times {}^4P_3 + 11111 \times {}^4P_4)$]

প্রশ্নমালা VI B

1. (a) দেওয়া আছে, $^{2n}C_r = {}^{2n}C_{r+2} \Rightarrow r + r + 2 = 2n$ [$\because$ $^nC_x = {}^nC_y$ হলে, $x + y = n$]

$\Rightarrow 2r = 2(n-1)$ $\therefore r = n - 1$ (Ans.)

(b) দেওয়া আছে, $^nC_r : {}^nC_{r+1} : {}^nC_{r+2} = 1:2:3$

১ম এবং ২য় অনুপাত হতে আমরা পাই, $^nC_r : {}^nC_{r+1} = 1:2 \Rightarrow \frac{^nC_r}{^nC_{r+1}} \frac{1}{2} \Rightarrow 2\ {}^nC_r = {}^nC_{r+1}$