ত্রিকোণমিতিক অনুপাত

প্রশ্নমালা VI A

1. প্রমাণ কর যে,

(a) $(\tan\theta + \sec\theta)^2 = \dfrac{1+\sin\theta}{1-\sin\theta}$

প্রমাণ : L.H.S. $= (\tan\theta + \sec\theta)^2$

$$= \left\{\frac{\sin\theta}{\cos\theta} + \frac{1}{\cos\theta}\right\}^2 = \left\{\frac{\sin\theta + 1}{\cos\theta}\right\}^2$$

$$= \frac{(1+\sin\theta)^2}{\cos^2\theta} = \frac{(1+\sin\theta)^2}{1-\sin^2\theta}$$

$$= \frac{(1+\sin\theta)^2}{(1-\sin\theta)(1+\sin\theta)} = \frac{1+\sin\theta}{1-\sin\theta} = \text{R.H.S.}$$

1(b) $\dfrac{\sec\theta\cdot\operatorname{cosec}\theta - 2}{\sec\theta\cdot\operatorname{cosec}\theta + 2} = \left(\dfrac{1-\tan\theta}{1+\tan\theta}\right)^2$

L.H.S.$= \dfrac{\sec\theta\cdot\operatorname{cosec}\theta - 2}{\sec\theta\cdot\operatorname{cosec}\theta + 2}$

$$= \frac{\frac{1}{\cos\theta}\frac{1}{\sin\theta} - 2}{\frac{1}{\cos\theta}\frac{1}{\sin\theta} + 2} = \frac{1-2\sin\theta\cos\theta}{1+2\sin\theta\cos\theta}$$

$$= \frac{\sin^2\theta + \cos^2\theta - 2\sin\theta\cos\theta}{\sin^2\theta + \cos^2\theta + 2\sin\theta\cos\theta}$$

$$= \frac{(\sin\theta - \cos\theta)^2}{(\sin\theta + \cos\theta)^2} = \frac{\cos^2\theta(\frac{\sin\theta}{\cos\theta} - 1)^2}{\cos^2\theta(\frac{\sin\theta}{\cos\theta} + 1)^2}$$

$$= \frac{(\tan\theta - 1)^2}{(\tan\theta + 1)^2} = \frac{(1-\tan\theta)^2}{(1+\tan\theta)^2} = \left(\frac{1-\tan\theta}{1+\tan\theta}\right)^2$$

= R.H.S. (Proved)

1(c) $1 - 4\sin^2\theta\cos^2\theta = \sin^4\theta(1-\cot^2\theta)^2$

L.H.S. $= 1 - 4\sin^2\theta\cos^2\theta$

$= (\sin^2\theta + \cos^2\theta)^2 - 4\sin^2\theta\cos^2\theta$

$= \sin^4\theta + \cos^4\theta + 2\sin^2\theta\cos^2\theta - 4\sin^2\theta\cos^2\theta$

$= (\sin^2\theta)^2 + (\cos^2\theta)^2 - 2(\sin^2\theta)(\cos^2\theta)$

$= (\sin^2\theta - \cos^2\theta)^2 = \{\sin^2\theta(1 - \dfrac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta})^2\}$

$= \sin^4(1-\cot^2\theta)^2 =$ R.H.S. (Proved)

1(d) $(\sin\theta + \sec\theta)^2 + (\cos\theta + \operatorname{cosec}\theta)^2 = (1 + \sec\theta\operatorname{cosec}\theta)^2$

L.H.S.$= (\sin\theta + \sec\theta)^2 + (\cos\theta + \operatorname{cosec}\theta)^2$

$$= \sin^2\theta\left(1 + \frac{\sec\theta}{\sin\theta}\right)^2 + \cos^2\theta\left(1 + \frac{\operatorname{cosec}\theta}{\cos\theta}\right)^2$$

$= (1 + \sec\theta\operatorname{cosec}\theta)^2(\sin^2\theta + \cos^2\theta)$

$= (1 + \sec\theta\operatorname{cosec}\theta)^2 .1$

$= (1 + \sec\theta\operatorname{cosec}\theta)^2 =$ R.H.S. (Proved)

1(e) $\sqrt{\dfrac{1+\cos\theta}{1-\cos\theta}} = \operatorname{cosec}\theta + \cot\theta$

L.H.S.$= \sqrt{\dfrac{1+\cos\theta}{1-\cos\theta}}$

$$= \frac{\sqrt{1+\cos\theta}}{\sqrt{1-\cos\theta}} = \frac{\sqrt{1+\cos\theta}\sqrt{1+\cos\theta}}{\sqrt{1-\cos\theta}\sqrt{1+\cos\theta}}$$

$$= \frac{1+\cos\theta}{\sqrt{1-\cos^2\theta}} = \frac{1+\cos\theta}{\sqrt{\sin^2\theta}} = \frac{1+\cos\theta}{\sin\theta}$$

$$= \frac{1}{\sin\theta} + \frac{\cos\theta}{\sin\theta} = \operatorname{cosec}\theta + \cot\theta$$

= R.H.S. (proved)

1(f) $\sin^2\theta(1+\cot^2\theta) + \cos^2\theta(1+\tan^2\theta) = 2$

L.H.S.$= \sin^2\theta(1+\cot^2\theta) + \cos^2\theta(1+\tan^2\theta)$

$= \sin^2\theta + \sin^2\theta\cot^2\theta + \cos^2\theta + \cos^2\theta\tan^2\theta$

$$= (\sin^2\theta + \cos^2\theta) + \sin^2\theta\,\frac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta} + \cos^2\theta\,.\,\frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}$$

$= 1 + \cos^2\theta + \sin^2\theta = 1 + 1 = 2 =$ R.H.S.

1(g) $\dfrac{1+2\sin\theta\cos\theta}{(\sin\theta+\cos\theta)(\cot\theta+\tan\theta)} = \sin\theta\cos\theta(\sin\theta+\cos\theta)$

L.H.S.= $\dfrac{1+2\sin\theta\cos\theta}{(\sin\theta+\cos\theta)(\cot\theta+\tan\theta)}$

$= \dfrac{\sin^2\theta+\cos^2\theta+2\sin\theta\cos\theta}{(\sin\theta+\cos\theta)(\frac{\cos\theta}{\sin\theta}+\frac{\sin\theta}{\cos\theta})}$

$= \dfrac{(\sin\theta+\cos\theta)^2}{(\sin\theta+\cos\theta)(\frac{\cos^2\theta+\sin^2\theta}{\sin\theta\cos\theta})}$

$= \dfrac{\sin\theta\cos\theta(\sin\theta+\cos\theta)}{\cos^2\theta+\sin^2\theta}$

$= \sin\theta\cos\theta(\sin\theta+\cos\theta)$ = R.H.S.

1.(h) $3(\sin\theta+\cos\theta)-2(\sin^3\theta+\cos^3\theta) = (\sin\theta+\cos\theta)^3$

L.H.S. $= 3(\sin\theta+\cos\theta)-2(\sin^3\theta+\cos^3\theta)$

$= 3(\sin\theta+\cos\theta)-2(\sin\theta+\cos\theta)(\sin^2\theta+\cos^2\theta-\sin\theta\cos\theta)$

$= (\sin\theta+\cos\theta)\{3-2(1-\sin\theta\cos\theta)\}$

$= (\sin\theta+\cos\theta)(1+2\sin\theta\cos\theta)$

$=(\sin\theta+\cos\theta)(\sin^2\theta+\cos^2\theta+2\sin\theta\cos\theta)$

$= (\sin\theta+\cos\theta)(\sin\theta+\cos\theta)^2$

$= (\sin\theta+\cos\theta)^3$ = L.H.S. (Proved)

1(i) $1+\tan\theta+\sec\theta = \dfrac{2}{1+\cot\theta-\operatorname{cosec}\theta}$

L.H.S.= $1+\tan\theta+\sec\theta$

$= 1+\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}+\dfrac{1}{\cos\theta} = \dfrac{\cos\theta+\sin\theta+1}{\cos\theta}$

$= \dfrac{(\cos\theta+\sin\theta+1)(\cos\theta+\sin\theta-1)}{\cos\theta(\cos\theta+\sin\theta-1)}$

$= \dfrac{(\cos\theta+\sin\theta)^2-1}{\cos\theta(\cos\theta+\sin\theta-1)}$

$= \dfrac{\cos^2\theta+\sin^2\theta+2\sin\theta\cos\theta-1}{\cos\theta(\cos\theta+\sin\theta-1)}$

$= \dfrac{1+2\sin\theta\cos\theta-1}{\cos\theta(\sin\theta+\cos\theta-1)}$

$= \dfrac{2\sin\theta\cos\theta}{\cos\theta(\sin\theta+\cos\theta-1)}$

$= \dfrac{2}{\frac{1}{\sin\theta}(\sin\theta+\cos\theta-1)}$

$= \dfrac{2}{1+\cot\theta-\operatorname{cosec}\theta}$ = R.H.S. (Proved)

2. (a) $a\cos\theta - b\sin\theta = c$ হলে দেখাও যে, $a\sin\theta+b\cos\theta = \pm\sqrt{a^2+b^2-c^2}$

প্রমাণ ঃ দেওয়া আছে , $a\cos\theta - b\sin\theta = c$

$\Rightarrow a^2\cos^2\theta+b^2\sin^2\theta-2ab\sin\theta\cos\theta = c^2$

$\Rightarrow a^2(1-\sin^2\theta)+b^2(1-\cos^2\theta)-2ab\sin\theta\cos\theta = c^2$

$\Rightarrow a^2-a^2\sin^2\theta+b^2-b^2\cos^2\theta-2ab\sin\theta\cos\theta = c^2$

$\Rightarrow -\{(a\sin\theta)^2+(b\cos)^2\theta+2.a\sin\theta.b\cos\theta\} = c^2-a^2-b^2$

$\Rightarrow (a\sin\theta+b\cos\theta)^2 = a^2+b^2-c^2$

$\therefore a\sin\theta+b\cos\theta = \pm\sqrt{a^2+b^2-c^2}$

2(b) $\sin\theta+\operatorname{cosec}\theta = 2$ হলে প্রমাণ কর যে, $\sin^n\theta+\operatorname{cosec}^n\theta = 2$

প্রমাণ ঃ দেওয়া আছে , $\sin\theta+\operatorname{cosec}\theta = 2$

$\Rightarrow \sin\theta+\dfrac{1}{\sin\theta} = 2 \Rightarrow \sin^2\theta-2\sin\theta+1=0$

$\Rightarrow (\sin\theta-1)^2 = 0 \Rightarrow \sin\theta-1=0 \therefore \sin\theta=1$

এখন , L.H.S.= $\sin^n\theta+\operatorname{cosec}^n\theta$

$= \sin^n\theta+\dfrac{1}{\sin^n\theta} = 1^n+\dfrac{1}{1^n}$

$= 1+1 = 2$ = R.H.S. (Proved)

2(c) $x\sin^3\theta+y\cos^3\theta = \sin\theta\cos\theta$ এবং $x\sin\theta-y\cos\theta = 0$ হলে দেখাও যে, $x^2+y^2=1$

প্রমাণ ঃ দেওয়া আছে ,

$x\sin^3\theta+y\cos^3\theta = \sin\theta\cos\theta$ ......(1) এবং

$x\sin\theta-y\cos\theta = 0 \Rightarrow x\sin\theta = y\cos\theta$

$\therefore x = y\dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}$ ....(2)

(1) এ $x = y\dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}$ বসিয়ে পাই

$y\dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}.\sin^3\theta + y\cos^3\theta = \sin\theta\cos\theta$

$\Rightarrow y\sin^2\theta\cos\theta + y\cos^3\theta = \sin\theta\cos\theta$

$\Rightarrow y\cos\theta(\sin^2\theta + \cos^2\theta) = \sin\theta\cos\theta$

$\Rightarrow y\cos\theta.1 = \sin\theta\cos\theta$

$\therefore y = \sin\theta$

(2) হতে পাই , $x = \sin\theta . \dfrac{\cos\theta}{\sin\theta} = \cos\theta$.

এখন , $x^2 + y^2 = \cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$

$\therefore x^2 + y^2 = 1$ (Showed)

2. (d) $k\tan\theta = \tan k\theta$ হলে দেখাও যে,

$$\frac{\sin^2 k\theta}{\sin^2\theta} = \frac{k^2}{1+(k^2-1)\sin^2\theta}$$

প্রমাণ ঃ দেওয়া আছে , $k\tan\theta = \tan k\theta$

$\Rightarrow k\dfrac{1}{\cot\theta} = \dfrac{1}{\cot k\theta} \Rightarrow k\cot k\theta = \cot\theta$

$\Rightarrow k^2(\cot^2 k\theta) = \cot^2\theta$

$\Rightarrow k^2(\operatorname{cosec}^2 k\theta - 1) = \operatorname{cosec}^2\theta - 1$

$\Rightarrow k^2\operatorname{cosec}^2 k\theta = \operatorname{cosec}^2\theta + k^2 - 1$

$\Rightarrow k^2\dfrac{1}{\sin^2 k\theta} = \dfrac{1}{\sin^2\theta} + k^2 - 1 = \dfrac{1+(k^2-1)\sin^2\theta}{\sin^2\theta}$

$\Rightarrow \dfrac{k^2}{1+(k^2-1)\sin^2\theta} = \dfrac{\sin^2 k\theta}{\sin^2\theta}$

$\therefore \dfrac{\sin^2 k\theta}{\sin^2\theta} = \dfrac{k^2}{1+(k^2-1)\sin^2\theta}$ (Proved)

2(e) $3\sec^4\theta + 8 = 10\sec^2\theta$ হলে , $\tan\theta$ এর মান নির্ণয় কর।

প্রমাণ ঃ দেওয়া আছে , $3\sec^4\theta + 8 = 10\sec^2\theta$

$\Rightarrow 3\sec^4\theta - 10\sec^2\theta + 8 = 0$

$\Rightarrow 3\sec^4\theta - 6\sec^2\theta - 4\sec^2\theta + 8 = 0$

$\Rightarrow 3\sec^2\theta(\sec^2\theta - 2) - 4(\sec^2\theta - 2) = 0$

$\Rightarrow (\sec^2\theta - 2)(3\sec^2\theta - 4) = 0 \Rightarrow \sec^2\theta = 2$

$\Rightarrow 1 + \tan^2\theta = 2 \Rightarrow \tan^2\theta = 1 \quad \therefore \tan\theta = \pm 1$

অথবা , $\sec^2\theta = \dfrac{4}{3} \Rightarrow 1 + \tan^2\theta = \dfrac{4}{3}$

$\Rightarrow \tan^2\theta = \dfrac{4}{3} - 1 = \dfrac{1}{3} \quad \therefore \tan\theta = \pm\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

$\therefore \tan\theta = \pm 1 , \pm\dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

2(f) $(a^2 - b^2)\sin\theta + 2ab\cos\theta = a^2 + b^2$ এবং θ সূক্ষ্ম ও ধনাত্মক কোণ হলে, $\tan\theta$ এবং $\operatorname{cosec}\theta$ এর মান নির্ণয় কর।

প্রমাণ ঃ $(a^2 - b^2)\sin\theta + 2ab\cos\theta = a^2 + b^2$

$\Rightarrow (a^2 - b^2)\tan\theta + 2ab = (a^2 + b^2)\sec\theta$

$\Rightarrow (a^2 - b^2)^2\tan^2\theta + 2.(a^2 - b^2)\tan\theta.2ab + 4a^2b^2 = (a^2 + b^2)^2\sec^2\theta$ [উভয় পক্ষকে বর্গ করে]

$\Rightarrow (a^2 - b^2)^2\tan^2\theta + 2.(a^2 - b^2)\tan\theta.2ab + 4a^2b^2 = (a^2 + b^2)^2(1 + \tan^2\theta)$

$\Rightarrow (a^2 - b^2)^2\tan^2\theta + 4ab(a^2 - b^2)\tan\theta + 4a^2b^2 = (a^2 + 2ab + b^2) + (a^2 + b^2)^2\tan^2\theta$

$\Rightarrow \{(a^2 - b^2)^2 - (a^2 + b^2)^2\}\tan^2\theta + 4ab(a^2 - b^2)\tan\theta + 4a^2b^2 - a^4 - 2a^2b^2 - b^4 = 0$

$\Rightarrow -4a^2b^2\tan^2\theta + 4ab(a^2 - b^2)\tan\theta - (a^4 - 2a^2b^2 + b^4) = 0$

$\Rightarrow 4a^2b^2\tan^2\theta - 4ab(a^2 - b^2)\tan\theta + (a^2 - b^2)^2 = 0$

$\Rightarrow \{2ab\tan\theta - (a^2 - b^2)\}^2 = 0$

$\Rightarrow 2ab\tan\theta - (a^2 - b^2) = 0$

$\Rightarrow 2ab\tan\theta = a^2 - b^2$

$\therefore \tan\theta = \dfrac{a^2 - b^2}{2ab}$ (Ans.)

এখন , $\operatorname{cosec}\theta = \sqrt{1 - \cot^2\theta}$

[$\because \theta$ ধনাত্মক সূক্ষ্ম কোণ ।]

$= \sqrt{1 - \left(\dfrac{2ab}{a^2 - b^2}\right)^2} = \sqrt{\dfrac{(a^2 - b^2)^2 + 4a^2b^2}{(a^2 - b^2)^2}}$

$= \sqrt{\dfrac{(a^2 + b^2)^2}{(a^2 - b^2)^2}} = \dfrac{a^2 + b^2}{a^2 - b^2}$ (Ans.)

2(g) $\cot A + \cot B + \cot C = 0$ হলে প্রমাণ কর যে , $(\Sigma \tan A)^2 = \Sigma \tan^2 A$

প্রমাণ ঃ দেওয়া আছে , $\cot A + \cot B + \cot C = 0$

$\Rightarrow \dfrac{1}{\tan A} + \dfrac{1}{\tan B} + \dfrac{1}{\tan C} = 0$

$\Rightarrow \dfrac{\tan B\tan C+\tan C\tan A+\tan A\tan B}{\tan A\tan B\tan C}=0$

$\Rightarrow \tan A\tan B+\tan B\tan C+\tan C\tan A=0$

$\Rightarrow 2(\tan A\tan B+\tan B\tan C+\tan C\tan A)=0$

$\Rightarrow \tan^2A+\tan^2B+\tan^2C+2(\tan A\tan B+\tan B\tan C+\tan C\tan A)=\tan^2A+\tan^2B+\tan^2C$

$\Rightarrow (\tan A+\tan B+\tan C)^2=\tan^2A+\tan^2B+\tan^2C$

$\therefore \left(\sum \tan A\right)^2=\sum \tan^2 A$ (Showed)

2(h) $\cos\theta+\sec\theta=\dfrac{5}{2}$ **হলে প্রমাণ কর যে ,**

$\cos^n\theta+\sec^n\theta=2^n+2^{-n}$ **[চ.,দি.'১৫]**

প্রমাণ ঃ দেওয়া আছে , $\cos\theta+\sec\theta=\dfrac{5}{2}$

$\Rightarrow \cos\theta+\dfrac{1}{\cos\theta}=\dfrac{5}{2}$

$\Rightarrow \cos^2\theta+1=\dfrac{5}{2}\cos\theta$

$\Rightarrow 2\cos^2\theta+2=5\cos\theta$

$\Rightarrow 2\cos\theta-5\cos\theta+2=0$

$\Rightarrow 2\cos^2\theta-4\cos\theta-\cos\theta+2=0$

$\Rightarrow 2\cos\theta(\cos\theta-2)-1(\cos\theta-2)=0$

$\Rightarrow (\cos\theta-2)(2\cos\theta-1)=0$

$\therefore \cos\theta-2=0$ অথবা , $2\cos\theta-1=0$

কিন্তু $\cos\theta-2\neq 0$ $[\because -1\le\cos\theta\le 1]$

$\therefore 2\cos\theta-1=0\Rightarrow \cos\theta=\dfrac{1}{2}\ \therefore \sec\theta=2$

এখন, L.H.S. $=\cos^n\theta+\sec^n\theta$

$=\left(\dfrac{1}{2}\right)^n+(2)^n=2^n+2^{-n}=$ R.H.S.

$\therefore$ L.H.S. = R.H.S. (প্রমাণিত)

2(i) $a_1\sin\theta+b_1\cos\theta+c_1=0$ **এবং** $a_2\sin\theta+b_2\cos\theta+c_2=0$ **সমীকরণদ্বয় হতে** θ **অপসারণ কর।**

সমাধান ঃ দেওয়া আছে, $a_1\sin\theta+b_1\cos\theta+c_1=0$

$a_2\sin\theta+b_2\cos\theta+c_2=0$

বজ্রগুণন প্রণালীর সাহায্যে পাই,

$\dfrac{\sin\theta}{b_1c_2-b_2c_1}=\dfrac{\cos\theta}{a_2c_1-a_1c_2}=\dfrac{1}{a_1b_2-a_2b_1}$

$\therefore \sin\theta=\dfrac{b_1c_2-b_2c_1}{a_1b_2-a_2b_1}$, $\cos\theta=\dfrac{a_2c_1-a_1c_2}{a_1b_2-a_2b_1}$

এখন, $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$

$\Rightarrow \left(\dfrac{b_1c_2-b_2c_1}{a_1b_2-a_2b_1}\right)^2+\left(\dfrac{a_2c_1-a_1c_2}{a_1b_2-a_2b_1}\right)^2=1$

$\Rightarrow (b_1c_2-b_2c_1)^2+(a_2c_1-a_1c_2)^2=a_1b_2-a_2b_1$

(j) $\tan\theta+\sec\theta=x$ **হলে, প্রমাণ কর যে,** $\sin\theta=\dfrac{x^2-1}{x^2+1}$ **[রা.'১৫]**

প্রমাণ: $\tan\theta+\sec\theta=x\Rightarrow \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}+\dfrac{1}{\cos\theta}=x$

$\Rightarrow \dfrac{1+\sin\theta}{\cos\theta}=x\Rightarrow \dfrac{(1+\sin\theta)^2}{\cos^2\theta}=x^2$

$\Rightarrow \dfrac{(1+\sin\theta)^2}{1-\sin^2\theta}=x^2\Rightarrow \dfrac{(1+\sin\theta)^2}{(1-\sin\theta)(1+\sin\theta)}=x^2$

$\Rightarrow \dfrac{1+\sin\theta}{1-\sin\theta}=\dfrac{x^2}{1}$

$\Rightarrow \dfrac{1+\sin\theta-1+\sin\theta}{1+\sin\theta+1-\sin\theta}=\dfrac{x^2-1}{x^2+1}$

$\Rightarrow \dfrac{2\sin\theta}{2}=\dfrac{x^2-1}{x^2+1}\ \therefore \sin\theta=\dfrac{x^2-1}{x^2+1}$

(k) $\sin^2A+\sin^4A=1$ **হলে, প্রমাণ কর যে** $\tan^4A-\tan^2A=1$ **[য.'১৫]**

প্রমাণ: দেওয়া আছে, $\sin^2A+\sin^4A=1$

$\Rightarrow \sin^4A=1-\sin^2A=\cos^2A$

L.H.S. $=\tan^4A-\tan^2A$

$=\dfrac{\sin^4A}{\cos^4A}-\dfrac{\sin^2A}{\cos^2A}$

$=\dfrac{\sin^4A-\sin^2A\cos^2A}{\cos^4A}$

$=\dfrac{\cos^2A-\sin^2A\cos^2A}{\cos^4A}$

$=\dfrac{\cos^2A(1-\sin^2A)}{\cos^4A}=\dfrac{\cos^2A.\cos^2A}{\cos^4A}$

$= 1 = R.H.S$

(l) $\cos\theta = \frac{4}{5}$ হলে, $\frac{1-\tan^2\theta}{1+\tan^2\theta}$ এর মান নির্ণয় কর। [মা'১৫]

সমাধান: $\cos\theta = \frac{4}{5} \Rightarrow \sec\theta = \frac{5}{4}$

$\Rightarrow \sec^2\theta = \frac{25}{16} \Rightarrow 1 + \tan^2\theta = \frac{25}{16}$

$\Rightarrow \tan^2\theta = \frac{25}{16} - 1 = \frac{25-16}{16} = \frac{9}{16}$

$\Rightarrow \frac{1}{\tan^2\theta} = \frac{16}{9} \Rightarrow \frac{1-\tan^2\theta}{1+\tan^2\theta} = \frac{16-9}{16+9}$

$\Rightarrow \frac{1-\tan^2\theta}{1+\tan^2\theta} = \frac{7}{25}$ (Ans.)

(m) $\tan\theta + \sin\theta = m$ এবং $\tan\theta - \sin\theta = n$ হলে, প্রমাণ কর যে, $m^2 - n^2 = 4\sqrt{mn}$ [কু.,চ.'১৫]

প্রমাণ: $R.H.S. = 4\sqrt{mn}$

$= 4\sqrt{(\tan\theta + \sin\theta)(\tan\theta - \sin\theta)}$

$= 4\sqrt{\tan^2\theta - \sin^2\theta}$

$= 4\sqrt{\tan^2\theta(1-\cos^2\theta)}$

$= 4\sqrt{\tan^2\theta\sin^2\theta} = 4\tan\theta\sin\theta$

$= (\tan\theta + \sin\theta)^2 - (\tan\theta - \sin\theta)^2$

$= m^2 - n^2 = L.H.S.$

3. (a) একটি ত্রিভুজের কোণগুলি সমান্তর প্রগমন শ্রেণিভুক্ত। এর বৃহত্তম ও ক্ষুদ্রতম কোণ দুইটিকে যথাক্রমে রেডিয়ান ও ডিগ্রীতে প্রকাশ করলে এদের অনুপাত হয় π : 90; কোণগুলির পরিমাপকে রেডিয়ানে নির্ণয় কর। [কু'১৫]

সমাধান: ধরি, কোণত্রয় $a - r$, a ও $a + r$ রেডিয়ান।

$\therefore a - r + a + a + r = \pi \Rightarrow 3a = \pi \Rightarrow a = \frac{\pi}{3}$

এখন, $(a - r)$ রেডিয়ান $= \frac{180(a-r)}{\pi}$ ডিগ্রি

প্রশ্নমতে, $a + r : \frac{180(a-r)}{\pi} = \pi : 90$

$\Rightarrow \frac{(a+r)\pi}{180(a-r)} = \frac{\pi}{90} \Rightarrow \frac{a+r}{2(a-r)} = 1$

$\Rightarrow 2a - 2r = a + r \Rightarrow 3r = a = \frac{\pi}{3} \Rightarrow r = \frac{\pi}{9}$

$\therefore$ কোণত্রয়, $a - r = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{9} = \frac{2\pi}{9}$ রেডিয়ান, $a = \frac{\pi}{3}$ রেডিয়ান ও $a + r = \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{9} = \frac{4\pi}{9}$ রেডিয়ান।

(b) একটি বৃত্তচাপ 30 সে.মি. ব্যাসার্ধবিশিষ্ট একটি বৃত্তের কেন্দ্রে 60^0 কোণ উৎপন্ন করে। বৃত্তচাপটির দৈর্ঘ্য এবং চাপটির উপর দণ্ডায়মান বৃত্তকলার ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। [য.'১৫]

সমাধান : মনে করি, বৃত্তের ব্যাসার্ধ $r = 30$ সে.মি., বৃত্তচাপের দৈর্ঘ্য s এবং বৃত্তচাপ দ্বারা কেন্দ্রে উৎপন্ন কোণ $\theta = 60° = \frac{60 \times \pi}{180} = \frac{\pi}{3}$

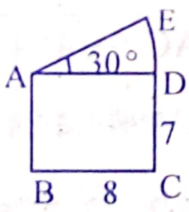
আমরা জানি, বৃত্তচাপের দৈর্ঘ্য $s = r\theta = 30 \times \frac{\pi}{3}$

$= 10 \times 3.1416 = 31.42$ সে.মি. (প্রায়)

এবং বৃত্তকলার ক্ষেত্রফল $\frac{r^2\theta}{2} = \frac{30^2}{2} \times \frac{3.1416}{3}$

$= 471.24$ বর্গ সে.মি. (প্রায়)।

4. সমাধান :



$DE = s = r\theta = 8 \times \frac{30\pi}{180}$

$= 4.189$ মিটার (প্রায়)।

ABCDE সম্পূর্ণ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল

= ABCD আয়তক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল +

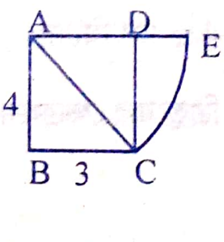
ADE বৃত্তকলার ক্ষেত্রফল $= 8 \times 7 + \frac{r^2\theta}{2}$

$= 56 + \frac{8^2}{2} \times \frac{30\pi}{180}$

$= 56 + 16.755 = 72.755$ বর্গ মিটার (প্রায়)।

5. সমাধানঃ এখানে $AD = BC = 3$ মিটার।

$DC = AB = 4$ মিটার।



$\therefore \tan CAD = \frac{DC}{AD} = \frac{4}{3}$

$= \tan(0{\cdot}927)$

ধরি, $\theta = \angle CAD = 0{\cdot}927$ রেডিয়ান।

$r = AC = \sqrt{4^2+3^2} = 5$ মিটার।

বৃত্তাংশ CE এর দৈর্ঘ্য $= r\theta = 5 \times 0{\cdot}927$

$= 4{\cdot}635$ মিটার (প্রায়)

ত্রিভুজ ক্ষেত্র ACD এর ক্ষেত্রফল

$= \frac{1}{2}(AD \times CD) = \frac{1}{2}(3\times 4) = 6$ বর্গ মিটার।

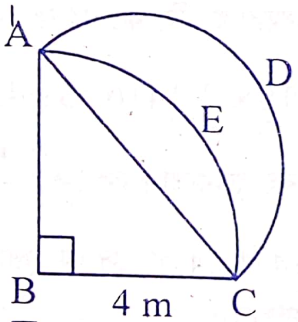
ACE বৃত্তকলার ক্ষেত্রফল $= \frac{r^2\theta}{2} = \frac{25 \times 0\cdot927}{2}$

$= 11{\cdot}5875$ বর্গ মিটার।

$\therefore$ CDE ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল $= (11{\cdot}5875 - 6)$

$= 5{\cdot}5875$ বর্গ মিটার (প্রায়)।

6. সমাধানঃ AECB একটি বৃত্তকলা বলে
AB = BC = 4 মিটার।



$\therefore$ $AC = \sqrt{4^2+4^2} = 4\sqrt{2}$ মিটার

ADC অর্ধবৃত্তের ব্যাসার্ধ $r = \frac{1}{2} \times 4\sqrt{2}$

$= 2\sqrt{2}$ মিটার

$\therefore$ ADC অর্ধবৃত্তের ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2}\pi r^2 = \frac{1}{2}\pi \times 8$

$= 4\pi$ বর্গ মিটার।

বৃত্তাংশ AEC এর দৈর্ঘ্য $= r\theta = 4 \times \frac{\pi}{2}$

$= 2 \times 3{\cdot}1416 = 6{\cdot}2832$ মিটার।

AECB বৃত্তকলার ক্ষেত্রফল $= \frac{r^2\theta}{2} = \frac{4^2}{2} \times \frac{\pi}{2}$

$= 4\pi$ বর্গ মিটার।

ABC ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2} \times a^2 = \frac{1}{2} \times 4^2$

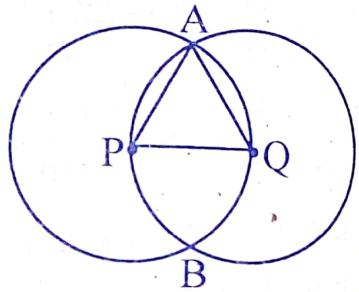
$= 8$ বর্গ মিটার।

$\therefore$ AECD ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল = ADC অর্ধবৃত্তের ক্ষেত্রফল − AEC ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল

= ADC অর্ধবৃত্তের ক্ষেত্রফল − (AECB বৃত্তকলার ক্ষেত্রফল − ABC ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল)

$= 4\pi - 4\pi + 8 = 8$ বর্গ মিটার

7. সমাধান ঃ A, P ; P,Q ; A,Q যোগ করি। তাহলে APQ একটি সমবাহু ত্রিভুজ।



APQ ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল $= \frac{\sqrt{3}}{4}(1)^2 = \frac{\sqrt{3}}{4}$ বর্গ একক।

APQ বৃত্তকলার ক্ষেত্রফল $= \frac{r^2\theta}{2} = \frac{1^2}{2} \times \frac{60\pi}{180} = \frac{\pi}{6}$ বর্গ একক।

$\therefore$ APBQ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল =

$4\left(\frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{4}\right) + 2.\frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{2\pi}{3} - \sqrt{3} + \frac{\sqrt{3}}{2}$

$= \frac{2\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{4\pi - 3\sqrt{3}}{6}$ বর্গ একক।

ভর্তি পরীক্ষার MCQ প্রশ্ন উত্তরসহ ঃ

1. $\frac{3\pi}{8}$ রেডিয়ান কোণের ষাটমূলক পদ্ধতিতে মান কত? **[CU 07-08]**

Sol

Sol".: $\frac{3\pi}{8}$ রেডিয়ান $= \frac{3 \times 180^0}{8} = 67^\circ 30'$

ক্যালকুলেটরের সাহায্যে,

3 × 1 8 0 ÷ 8 = 67.5 °''' $67^\circ 30'$

2. $50^0 37' 30'' =$ কত রেডিয়ান ? **[CU 05-06]**

Sol".: $50^0 37' 30'' = \frac{50.625 \times \pi}{180} = \frac{9\pi}{32}$