ত্রিকোণমিতি ফাংশনের লেখচিত্র

প্রশ্নমালা VI B

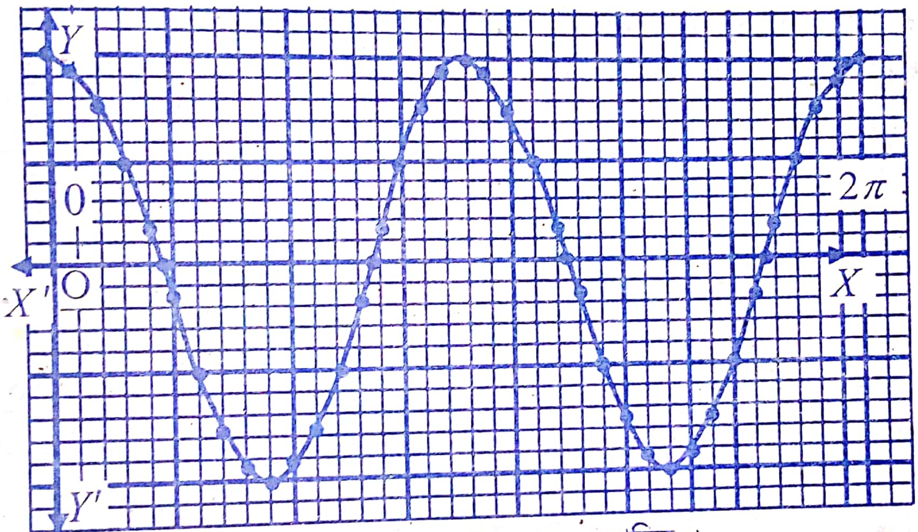
নিম্নের ফাংশনগুলোর লেখচিত্র অঙ্কন কর ঃ

1\. (a) $y = \cos 2x$, যখন $0 \le x \le 2\pi$ [ঢা.'১০,'১৪; চ.'০৯,'১৩]

সমাধান ঃ নিচের তালিকায় $x \in [0 , 2\pi]$ এর জন্য $y = \cos 2x$ এর প্রতিরূপী মান নির্ণয় করি ঃ

x	0	$\frac{\pi}{18}$	$2.\frac{\pi}{18}$	$3.\frac{\pi}{18}$	$4.\frac{\pi}{18}$	$4.5\times\frac{\pi}{18}$	$5.\frac{\pi}{18}$	$6.\frac{\pi}{18}$
y = cos2x	1	0.94	0·77	0·5	0·17	0	−0·17	−0·5
x	$7.\frac{\pi}{18}$	$8.\frac{\pi}{18}$	$9.\frac{\pi}{18}$	$12.\frac{\pi}{18}$	$17.\frac{\pi}{18}$	$22.\frac{\pi}{18}$	$28.\frac{\pi}{18}$	$36.\frac{\pi}{18}$
y = cos2x	−0·77	−0.93	−1.	−0·5	0.94	−0·17	0.94	1

একটি ছক কাগজে স্থানাঙ্কের অক্ষরেখা X′OX ও YOY′ আঁকি ।



$y = \cos 2x$ এর লেখচিত্র ।

স্কেল নির্ধারণ ঃ x-অক্ষ বরাবর ছোট বর্গক্ষেত্রের এক বাহু $= \frac{\pi^c}{18}$ এবং y- অক্ষ বরাবর ছোট বর্গক্ষেত্রের 10 বাহু =1

এখন নির্ধারিত স্কেল অনুযায়ী তালিকাভুক্ত বিন্দুগুলো ছক কাগজে স্থাপন করি । স্থাপিত বিন্দুগুলো মুক্ত হস্তে বক্রাকারে যোগ করে প্রদত্ত সীমা অনুযায়ী $y = \cos 2x$ এর লেখ অঙ্কন করা হল ।

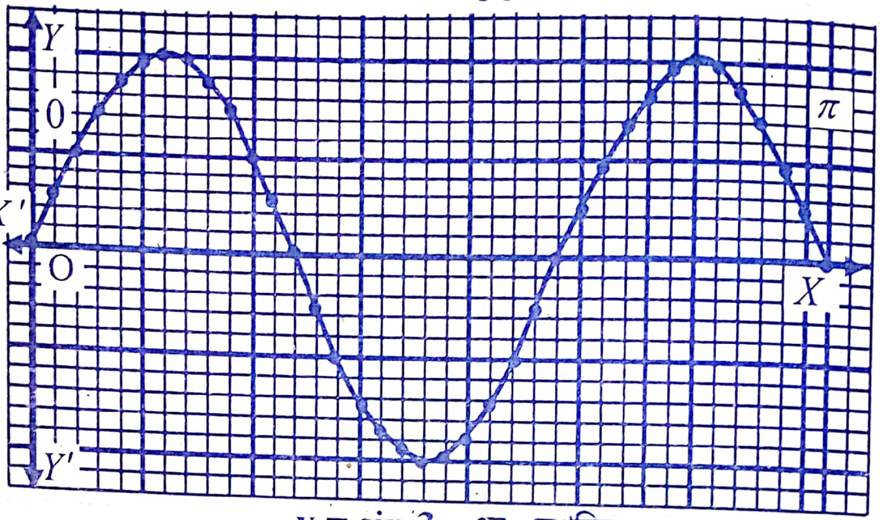
(b) $y = \sin 3x$, যখন $0 \le x \le \pi$ [কু. '০৯,'১২; রা.'১৪; দি.'১৩]

সমাধান ঃ নিচের তালিকায় $x \in [0 , \pi]$ এর জন্য $y = \sin 3x$ এর প্রতিরূপী মান নির্ণয় করি ঃ

x	0	$\frac{\pi}{36}$	$2.\frac{\pi}{36}$	$3.\frac{\pi}{36}$	$4.\frac{\pi}{36}$	$5.\frac{\pi}{36}$	$6.\frac{\pi}{36}$	$7.\frac{\pi}{36}$
y = sin3x	0	0·26	0.5	0·71	0·87	0·97	1	0·97
x	$8.\frac{\pi}{36}$	$9.\frac{\pi}{36}$	$10.\frac{\pi}{36}$	$12.\frac{\pi}{36}$	$17.\frac{\pi}{36}$	$22.\frac{\pi}{36}$	$28.\frac{\pi}{36}$	$36.\frac{\pi}{36}$
y = sin3x	0·87	0.71	0.5	0	−0.97	−0·5	0.87	0

একটি ছক কাগজে স্থানাঙ্কের অক্ষরেখা X′OX ও YOY′ আঁকি ।

স্কেল নির্ধারণ ঃ x-অক্ষ বরাবর ছোট বর্গক্ষেত্রের এক বাহু $= \frac{\pi^c}{36}$ এবং y- অক্ষ বরাবর ছোট বর্গক্ষেত্রের 10 বাহু = 1



y = sin 3x এর লেখচিত্র

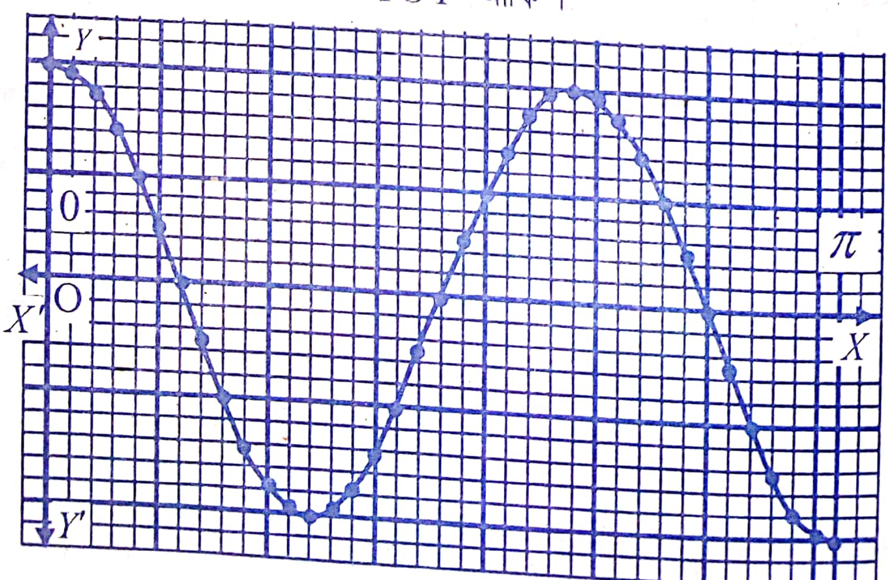
এখন নির্ধারিত স্কেল অনুযায়ী তালিকাভুক্ত বিন্দুগুলো ছক কাগজে স্থাপন করি । স্থাপিত বিন্দুগুলো মুক্ত হস্তে বক্রাকারে যোগ করে প্রদত্ত সীমা অনুযায়ী y = sin 3x এর লেখ অঙ্কন করা হল ।

1. (c) $y = \cos 3x$, যখন $0 \le x \le \pi$ [চ.'০১,'০৪; ঢা.'০৩; য.'০৫]

সমাধান ঃ নিচের তালিকায় $x \in [0, \pi]$ এর জন্য y = cos 3x এর প্রতিরূপী মান নির্ণয় করি ঃ

x	0	$\frac{\pi}{36}$	$2.\frac{\pi}{36}$	$3.\frac{\pi}{36}$	$4.\frac{\pi}{36}$	$5.\frac{\pi}{36}$	$6.\frac{\pi}{36}$	$7.\frac{\pi}{36}$
y = cos3x	1	0·97	0.87	0·71	0·5	0·26	0	−0·26
x	$8.\frac{\pi}{36}$	$9.\frac{\pi}{36}$	$10.\frac{\pi}{36}$	$12.\frac{\pi}{36}$	$17.\frac{\pi}{36}$	$22.\frac{\pi}{36}$	$28.\frac{\pi}{36}$	$36.\frac{\pi}{36}$
y = cos3x	−0·5	−0.71	−0.87	−1	−0.26	−0·5	0.5	−1

একটি ছক কাগজে স্থানাঙ্কের অক্ষরেখা X′OX ও YOY′ আঁকি ।



y = cos 3x এর লেখচিত্র

স্কেল নির্ধারণ ঃ x-অক্ষ বরাবর ছোট বর্গক্ষেত্রের এক বাহু $= \frac{\pi^c}{36}$ এবং y- অক্ষ বরাবর ছোট বর্গক্ষেত্রের 10 বাহু = 1

এখন নির্ধারিত স্কেল অনুযায়ী তালিকাভুক্ত বিন্দুগুলো ছক কাগজে স্থাপন করি। স্থাপিত বিন্দুগুলো মুক্ত হস্তে বক্রাকারে যোগ করে প্রদত্ত সীমা অনুযায়ী $y = \cos 3x$ এর লেখ অঙ্কন করা হল।

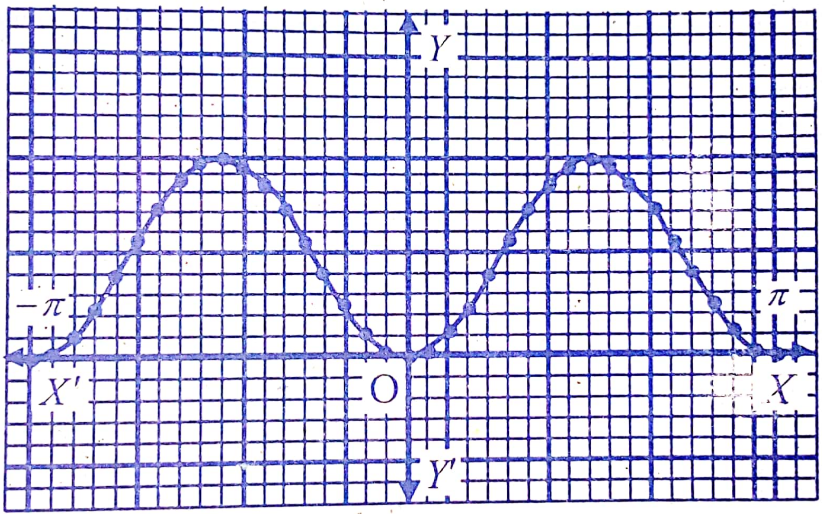
1. (d) $y = \sin^2 x$, যখন $-\pi \le x \le \pi$ [ব.'০১;সি.'১,'১০; ঢা.'০৪; কু.'১৩; চ.'১৩]

সমাধান ঃ নিচের তালিকায় $x \in [-\pi, \pi]$ এর জন্য $y = \sin^2 x$ এর প্রতিরূপী মান নির্ণয় করি ঃ

x	0	$\pm\frac{\pi}{18}$	$\pm 2.\frac{\pi}{18}$	$\pm 3.\frac{\pi}{18}$	$\pm 4.\frac{\pi}{18}$	$\pm 5.\frac{\pi}{18}$	$\pm 6.\frac{\pi}{18}$
$y = \sin^2 x$	0	0·03	0·117	0·25	0·41	0·59	0·75
x	$\pm 7.\frac{\pi}{18}$	$\pm 8.\frac{\pi}{18}$	$\pm 9.\frac{\pi}{18}$	$\pm 12.\frac{\pi}{18}$	$\pm 14.\frac{\pi}{18}$	$\pm 16.\frac{\pi}{18}$	$\pm 18.\frac{\pi}{18}$
$y = \sin^2 x$	0·88	0.97	1	0.75	0.41	0·117	0

একটি ছক কাগজে স্থানাঙ্কের অক্ষরেখা $X'OX$ ও YOY' আঁকি।

স্কেল নির্ধারণ ঃ x-অক্ষ বরাবর ছোট বর্গক্ষেত্রের এক বাহু $= \frac{\pi^c}{18}$ এবং y- অক্ষ বরাবর ছোট বর্গক্ষেত্রের 10 বাহু =1



$y = \sin^2 x$ এর লেখচিত্র

এখন নির্ধারিত স্কেল অনুযায়ী তালিকাভুক্ত বিন্দুগুলো ছক কাগজে স্থাপন করি। স্থাপিত বিন্দুগুলো মুক্ত হস্তে বক্রাকারে যোগ করে প্রদত্ত সীমা অনুযায়ী $y = \sin^2 x$ এর লেখ অঙ্কন করা হল।

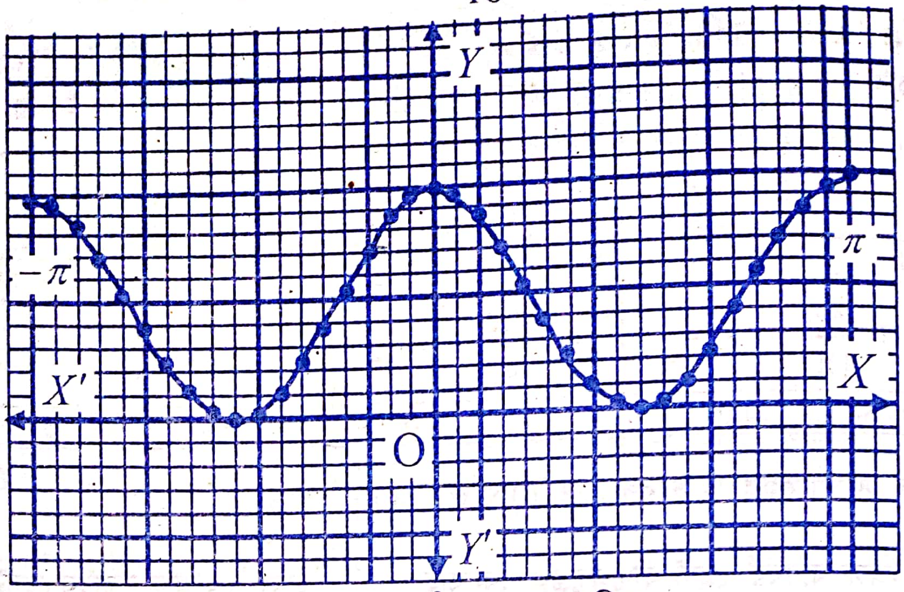
(e) $y = \cos^2 x$, যখন $-\pi \le x \le \pi$ [রা.'০৩, '০৬,'০৯; ব.'০৫; চ.'০৫,'১১; য.'০৯,'১৩; ব.,দি.'১৩]

সমাধান ঃ নিচের তালিকায় $x \in [-\pi, \pi]$ এর জন্য $y = \cos^2 x$ এর প্রতিরূপী মান নির্ণয় করি ঃ

x	0	$\pm\frac{\pi}{18}$	$\pm 2.\frac{\pi}{18}$	$\pm 3.\frac{\pi}{18}$	$\pm 4.\frac{\pi}{18}$	$\pm 5.\frac{\pi}{18}$	$\pm 6.\frac{\pi}{18}$
$y = \cos^2 x$	1	0·97	0.88	0·75	0·59	0·41	0·25
x	$\pm 7.\frac{\pi}{18}$	$\pm 8.\frac{\pi}{18}$	$\pm 9.\frac{\pi}{18}$	$\pm 10\frac{\pi}{18}$	$\pm 12.\frac{\pi}{18}$	$\pm 15.\frac{\pi}{18}$	$\pm 18.\frac{\pi}{18}$
$y = \cos^2 x$	0·12	0·03	0	0·97	0·25	0·75	1

একটি ছক কাগজে স্থানাংকের অক্ষরেখা $X'OX$ ও YOY' আঁকি।

স্কেল নির্ধারণ ঃ x-অক্ষ বরাবর ছোট বর্গক্ষেত্রের এক বাহু $= \frac{\pi^c}{18}$ এবং y- অক্ষ বরাবর ছোট বর্গক্ষেত্রের 10 বাহু = 1



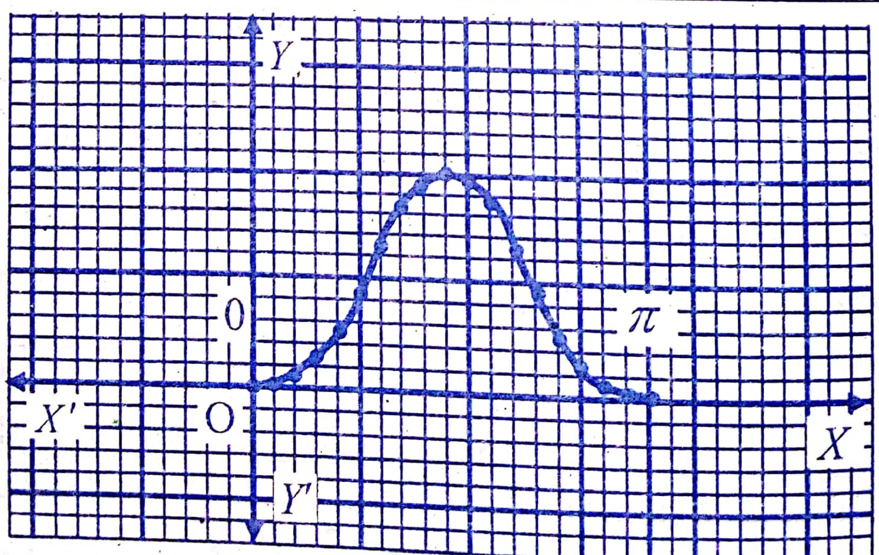
$y = \cos^2 x$ এর লেখচিত্র

এখন নির্ধারিত স্কেল অনুযায়ী তালিকাভুক্ত বিন্দুগুলো ছক কাগজে স্থাপন করি। স্থাপিত বিন্দুগুলো মুক্ত হস্তে বক্রাকারে যোগ করে প্রদত্ত সীমা অনুযায়ী $y = \cos^2 \mathbf{x}$ এর লেখ অঙ্কন করা হল।

1. (f) $y = \sin^3 x$, যখন $0 \le x \le \pi$ [য.'০০; চ.'০২]

সমাধান ঃ নিচের তালিকায় $x \in [0, \pi]$ এর জন্য $y = \sin^3 x$ এর প্রতিরূপী মান নির্ণয় করি ঃ

x	0	$\frac{\pi}{18}$	$2.\frac{\pi}{18}$	$3.\frac{\pi}{18}$	$4.\frac{\pi}{18}$	$5.\frac{\pi}{18}$	$6.\frac{\pi}{18}$
$y = \sin^3 x$	0	0·005	0·04	0·13	0·27	0·45	0·65
x	$7.\frac{\pi}{18}$	$8.\frac{\pi}{18}$	$9.\frac{\pi}{18}$	$12.\frac{\pi}{18}$	$14.\frac{\pi}{18}$	$16.\frac{\pi}{18}$	$18.\frac{\pi}{18}$
$y = \sin^3 x$	0·83	0.96	1	0.65	0.27	0·04	0



$y = \cos^2 x$ এর লেখচিত্র

একটি ছক কাগজে স্থানাঙ্কের অক্ষরেখা X'OX ও YOY' আঁকি।

স্কেল নির্ধারণ ঃ x-অক্ষ বরাবর ছোট বর্গক্ষেত্রের এক বাহু $= \frac{\pi^c}{18}$ এবং y- অক্ষ বরাবর ছোট বর্গক্ষেত্রের 10 বাহু = 1

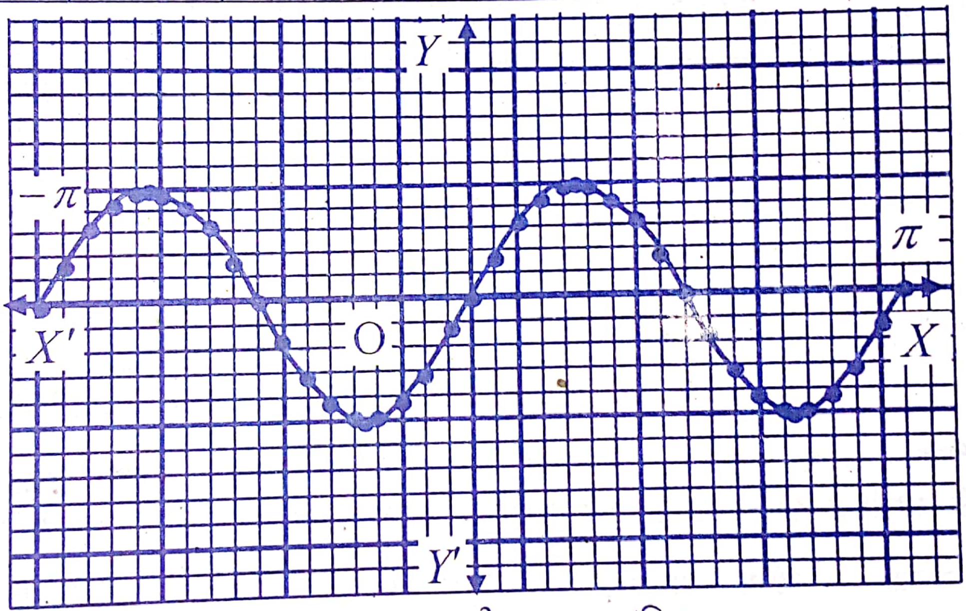
এখন নির্ধরিত স্কেল অনুযায়ী তালিকাভুক্ত বিন্দুগুলো ছক কাগজে স্থাপন করি। স্থাপিত বিন্দুগুলো মুক্ত হস্তে বক্রাকারে যোগ করে প্রদত্ত সীমা অনুযায়ী $y = \sin^3 x$ এর লেখ অঙ্কন করা হল।

1. (g) $y = \sin x \cos x$, যখন $-\pi \le x \le \pi$

সমাধান ঃ $y = \sin x \cos x \Rightarrow y = \frac{1}{2}\sin 2x$

নিচের তালিকায় $x \in [-\pi, \pi]$ এর জন্য $y = \frac{1}{2}\sin 2x$ এর প্রতিরূপী মান নির্ণয় করি :

x	0	$\pm\frac{\pi}{18}$	$\pm 2.\frac{\pi}{18}$	$\pm 3.\frac{\pi}{18}$	$\pm 4.\frac{\pi}{18}$	$\pm\frac{\pi}{4}$	$\pm 5.\frac{\pi}{18}$
$y = \frac{1}{2}\sin 2x$	0	$\pm 0\cdot 17$	± 0.32	$\pm 0\cdot 43$	$\pm 0\cdot 49$	$\pm 0\cdot 5$	± 0.49
x	$\pm 6.\frac{\pi}{18}$	$\pm 7\frac{\pi}{18}$	$\pm 8.\frac{\pi}{18}$	$\pm 9.\frac{\pi}{18}$	$\pm 14.\frac{\pi}{18}$	$\pm 15.\frac{\pi}{18}$	$\pm 18.\frac{\pi}{18}$
$y = \frac{1}{2}\sin 2x$	$\pm 0\cdot 43$	± 0.32	± 0.17	0	∓ 0.49	$\mp 0\cdot 43$	0



$y = \cos^2 x$ এর লেখচিত্র

একটি ছক কাগজে স্থানাঙ্কের অক্ষরেখা $X'OX$ ও YOY' আঁকি।

স্কেল নির্ধারণ ঃ x-অক্ষ বরাবর ছোট বর্গক্ষেত্রের এক বাহু $= \frac{\pi^c}{18}$ এবং y- অক্ষ বরাবর ছোট বর্গক্ষেত্রের 10 বাহু $= 1$

এখন নির্ধরিত স্কেল অনুযায়ী তালিকাভুক্ত বিন্দুগুলো ছক কাগজে স্থাপন করি। স্থাপিত বিন্দুগুলো মুক্ত হস্তে বক্রাকারে যোগ করে প্রদত্ত সীমা অনুযায়ী $y = \sin x \cos x$ এর লেখ অঙ্কন করা হল।

2. লেখচিত্রের সাহায্যে সমাধান কর ঃ

(a) $\sin x - \cos x = 0$, $0 \le x \le \frac{\pi}{2}$ [কু. '০৯; রা.'১৩; চ.'১২; য.'১৪; ব.'০৯; সি.'০৯; ঢা.'১২,'১৪; মা.'১৪]

সমাধান ঃ দেওয়া আছে , $\sin x - \cos x = 0 \Rightarrow \sin x = \cos x$

মনে করি , $y = \sin x = \cos x$ $\therefore y = \sin x$ এবং $y = \cos x$

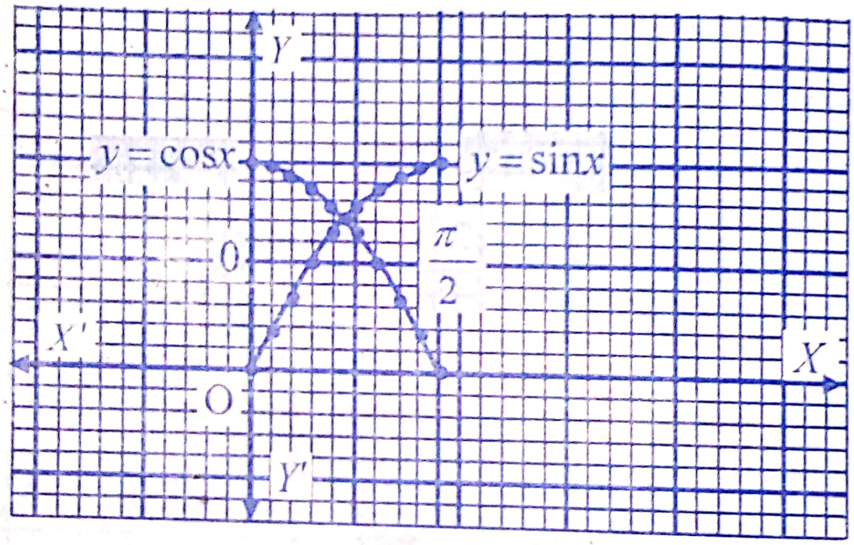
নিচের তালিকায় $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ এর জন্য $y = \sin x$ ও $y = \cos x$ এর প্রতিরূপী মান নির্ণয় করি :

x	0	$\frac{\pi}{18}$	$2.\frac{\pi}{18}$	$3.\frac{\pi}{18}$	$4.\frac{\pi}{18}$	$\frac{\pi}{4}$	$5.\frac{\pi}{18}$
y = sinx	0	0·17	0·34	0·5	0.64	0.71	0.77
y = cosx	1	0·98	0·94	0.87	0.77	0.71	0.64

x	$6.\frac{\pi}{18}$	$7.\frac{\pi}{18}$	$8.\frac{\pi}{18}$	$9.\frac{\pi}{18}$
y = sinx	0.87	0·94	0·98	1
y = cosx	0·5	0·34	0·17	0

একটি ছক কাগজে স্থানাঙ্কের অক্ষরেখা X′OX ও YOY′ আঁকি ।

স্কেল নির্ধারণ : x-অক্ষ বরাবর ছোট বর্গক্ষেত্রের এক বাহু $= \frac{\pi^c}{18}$ এবং y- অক্ষ বরাবর ছোট বর্গক্ষেত্রের 10 বাহু = 1



এখন নির্ধারিত স্কেল অনুযায়ী তালিকাভুক্ত বিন্দুগুলো ছক কাগজে স্থাপন করে y = sinx ও y = cosx ফাংশনদ্বয়ের লেখচিত্র দুইটি অঙ্কন করি। লেখচিত্র থেকে দেখা যাচ্ছে যে , প্রদত্ত সীমার মধ্যে ছেদ বিন্দুর ভুজ হচ্ছে $\frac{\pi}{4}$. সুতরাং , নির্ণেয় সমাধান , $x = \frac{\pi}{4}$.

2. (b) $2\sin^2 x = \cos 2x \;,\; -\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{3\pi}{2}$ [য.'০৩,'০৮,'১২]

সমাধান : মনে করি , $y = 2\sin^2 x = \cos 2x \quad \therefore y = 2\sin^2 x$ এবং $y = \cos 2x$

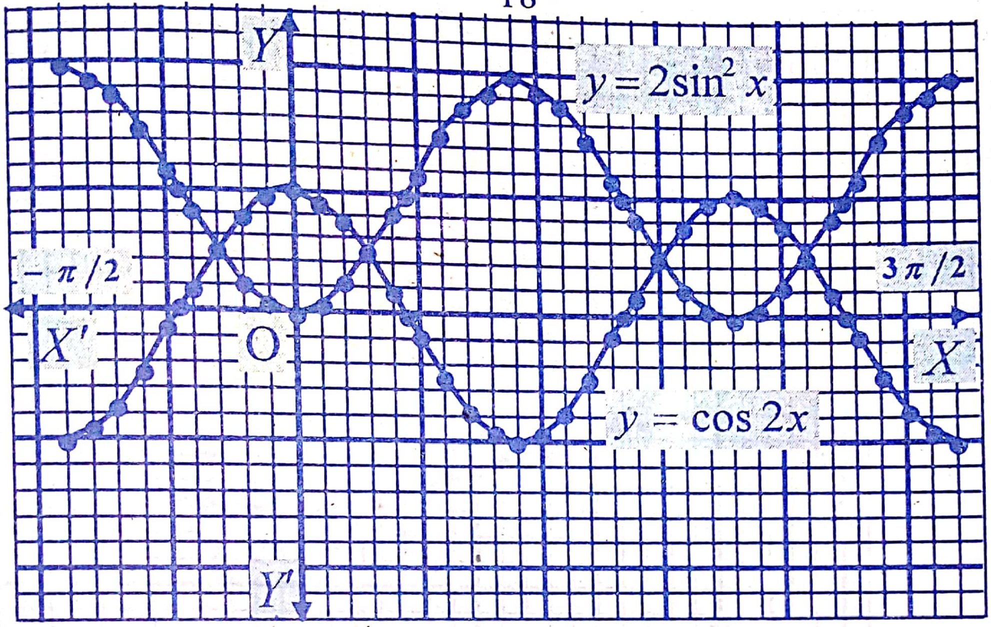
নিচের তালিকায় $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$ এর জন্য $y = 2\sin^2 x$ ও $y = \cos 2x$ এর প্রতিরূপী মান নির্ণয় করি।

x	0	$\pm\frac{\pi}{18}$	$\pm 2.\frac{\pi}{18}$	$\pm 3.\frac{\pi}{18}$	$\pm 4.\frac{\pi}{18}$	$\pm.\frac{\pi}{4}$	$\pm 5.\frac{\pi}{18}$
$y = 2\sin^2 x$	0	0·06	0·23	0·5	0.83	1	1.17
y = cos2x	1	0·94	0·77	0.5	0.17	0	–0·17

x	$\pm 6.\frac{\pi}{18}$	$\pm 7.\frac{\pi}{18}$	$\pm 8.\frac{\pi}{18}$	$\pm 9.\frac{\pi}{18}$	$15.\frac{\pi}{18}$	$21.\frac{\pi}{18}$	$27.\frac{\pi}{18}$
$y = 2\sin^2 x$	1.5	1·77	1·94	2	0·5	0.5	2
$y = \cos 2x$	–0·5	-0·77	0·94	–1	0.5	0.5	-1

একটি ছক কাগজে স্থানাঙ্কের অক্ষরেখা $X'OX$ ও YOY' আঁকি ।

স্কেল নির্ধারণ ঃ x-অক্ষ বরাবর ছোট বর্গক্ষেত্রের এক বাহু = $\frac{\pi^c}{18}$ এবং y- অক্ষ বরাবর ছোট বর্গক্ষেত্রের 5 বাহু = 1 .



এখন নির্ধারিত স্কেল অনুযায়ী তালিকাভুক্ত বিন্দুগুলো ছক কাগজে স্থাপন করে $y = 2\sin^2 x$ ও $y = \cos 2x$ ফাংশনদ্বয়ের লেখচিত্র দুইটি অঙ্কন করি। লেখচিত্র থেকে দেখা যাচ্ছে যে , প্রদত্ত সীমার মধ্যে ছেদ বিন্দুর ভূজসমূহ হচ্ছে $-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}$. সুতরাং, নির্ণেয় সমাধান , $x = -\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}$

2. (c) $5 \sin x + 2 \cos x = 5$, $0 \le x \le \frac{3\pi}{2}$ **[য.'০৪; চ.'১০; রা.,ব.'১৪]**

সমাধান ঃ দেওয়া আছে , $5 \sin x + 2 \cos x = 5 \Rightarrow 2\cos x = 5(1 - \sin x)$

মনে করি , $y = 5(1 - \sin x) = 2\cos x$ $\quad \therefore y = 5(1 - \sin x)$ এবং $y = 2\cos x$

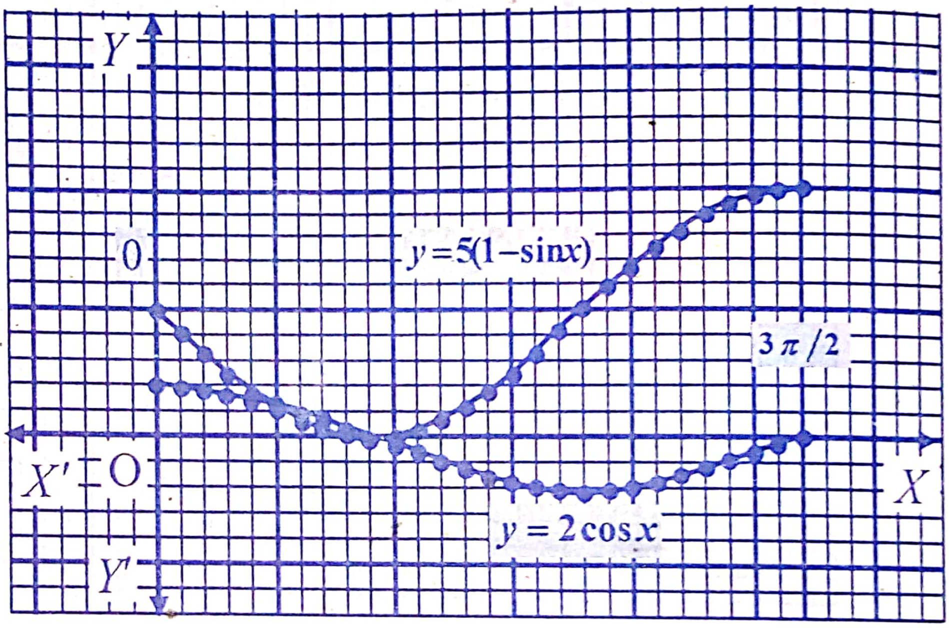
সমাধান ঃ নিচের তালিকায় $x \in [0 , \frac{3\pi}{2}]$ এর জন্য , $y = 2\sin^2 x$ ও $y = \cos 2x$ এর প্রতিরূপী মান নির্ণয় করি ঃ

x	0	$\frac{\pi}{18}$	$2.\frac{\pi}{18}$	$3.\frac{\pi}{18}$	$4.\frac{\pi}{18}$	$5.\frac{\pi}{18}$	$6.\frac{\pi}{18}$
$y = 5(1 - \sin x)$	5	4·13	3·29	2·5	1.79	1.17	0.67
$y = 2\cos x$	2	1·97	1·88	1.73	1.53	1·29	1
x	$7.\frac{\pi}{18}$	$8.\frac{\pi}{18}$	$9.\frac{\pi}{18}$	$11.\frac{\pi}{18}$	$15.\frac{\pi}{18}$	$19.\frac{\pi}{18}$	$20.\frac{\pi}{18}$
$y = 5(1 - \sin x)$	0·3	0·08	0	0.3	2·5	5.89	6.7
$y = 2\cos x$	·68	0·35	0	–0.68	-1.73	–1.97	–1.88

x	$21.\frac{\pi}{18}$	$22.\frac{\pi}{18}$	$23.\frac{\pi}{18}$	$24.\frac{\pi}{18}$	$25.\frac{\pi}{18}$	$26.\frac{\pi}{18}$	$27.\frac{\pi}{18}$
$y = 5(1 - \sin x)$	$7 \cdot 5$	$8 \cdot 2$	8.83	9.93	$9 \cdot 7$	9.9	10
$y = 2\cos x$	$- \cdot 73$	$1 \cdot 53$	−1.29	−1	-0.68	−0.35	0

একটি ছক কাগজে স্থানাঙ্কের অক্ষরেখা $X'OX$ ও YOY' আঁকি।

স্কেল নির্ধারণ ঃ x-অক্ষ বরাবর ছোট বর্গক্ষেত্রের এক বাহু $= \frac{\pi^c}{18}$ এবং y- অক্ষ বরাবর ছোট বর্গক্ষেত্রের 1 বাহু = 1



এখন নির্ধারিত স্কেল অনুযায়ী তালিকাভুক্ত বিন্দুগুলো ছক কাগজে স্থাপন করে $y = 5(1 - \sin x)$ ও $y = 2\cos x$. ফাংশনদ্বয়ের লেখচিত্র দুইটি অঙ্কন করি। লেখচিত্র থেকে দেখা যাচ্ছে যে, প্রদত্ত সীমার মধ্যে ছেদ বিন্দুর ভূজসমূহ হচ্ছে $46.4° = \frac{2 \cdot 32}{9}\pi, 90° = \frac{\pi}{2}$. সুতরাং, নির্ণেয় সমাধান, $x = 46.4° = \frac{2 \cdot 32}{9}\pi, 90° = \frac{\pi}{2}$

2. (d) $x - \tan x = 0$, $0 \le x \le \frac{\pi}{2}$

[রা.'০৪,'০৯; ব.'০৪,'১১,'১৩.'০৫,'১০,'১২; কু. '০৭,'১০; দি.'১০,'১২; চ.'১১; ঢা.'১১; য.'১২

সমাধান ঃ দেওয়া আছে, $x - \tan x = 0 \Rightarrow x = \tan x$

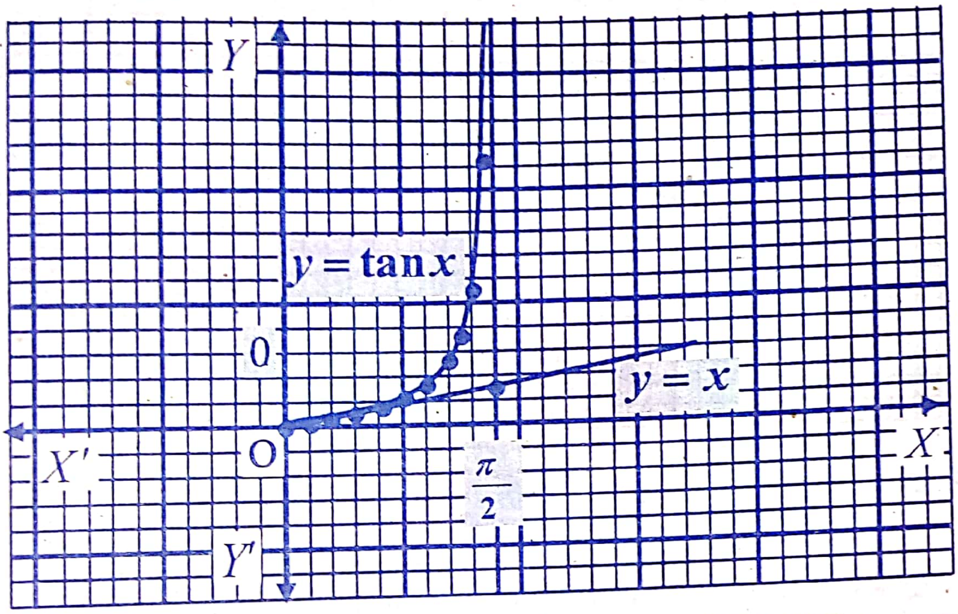
মনে করি, $y = x = \tan x$ $\therefore y = x$ এবং $y = \tan x$

নিচের তালিকায় $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ এর জন্য $y = x$ ও $y = \tan x$ এর প্রতিরূপী মান নির্ণয় করি ঃ

x	0	$\frac{\pi}{18}$	$2.\frac{\pi}{18}$	$3.\frac{\pi}{18}$	$4.\frac{\pi}{18}$	$5.\frac{\pi}{18}$	$6.\frac{\pi}{18}$
$y = \tan x$	0	0.18	$0 \cdot 36$	$0 \cdot 58$	$0 \cdot 84$	$1 \cdot 19$	$1 \cdot 73$
x	$7\frac{\pi}{18}$	$7 \cdot 5 \times \frac{\pi}{18}$	$8.\frac{\pi}{18}$	$8 \cdot 5 \times \frac{\pi}{18}$	$9.\frac{\pi}{18}$		
$y = \tan x$	$2 \cdot 75$	$3 \cdot 73$	$5 \cdot 67$	11.43	অসংজ্ঞায়িত		

একটি ছক কাগজে স্থানাঙ্কের অক্ষরেখা $X'OX$ ও YOY' আঁকি।

স্কেল নির্ধারণ ঃ x-অক্ষ বরাবর ছোট বর্গক্ষেত্রের এক বাহু $= \frac{\pi^c}{18}$ এবং y- অক্ষ বরাবর ছোট বর্গক্ষেত্রের 1 বাহু = 1



এখন নির্ধারিত স্কেল অনুযায়ী তালিকাভুক্ত বিন্দুগুলো ছক কাগজে স্থাপন করে y = x ও y = tanx ফাংশনদ্বয়ের লেখচিত্র দুইটি অঙ্কন করি। লেখচিত্র থেকে দেখা যাচ্ছে যে , প্রদত্ত সীমার মধ্যে ছেদ বিন্দুর ভূজ হচ্ছে 0. সুতরাং , নির্ণেয় সমাধান , $x = 0$

[চ.'০২]

2. (e) $2x = \tan x$, $-\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}$

সমাধান ঃ মনে করি , $y = 2x = \tan x$ $\therefore y = 2x$ এবং $y = \tan x$

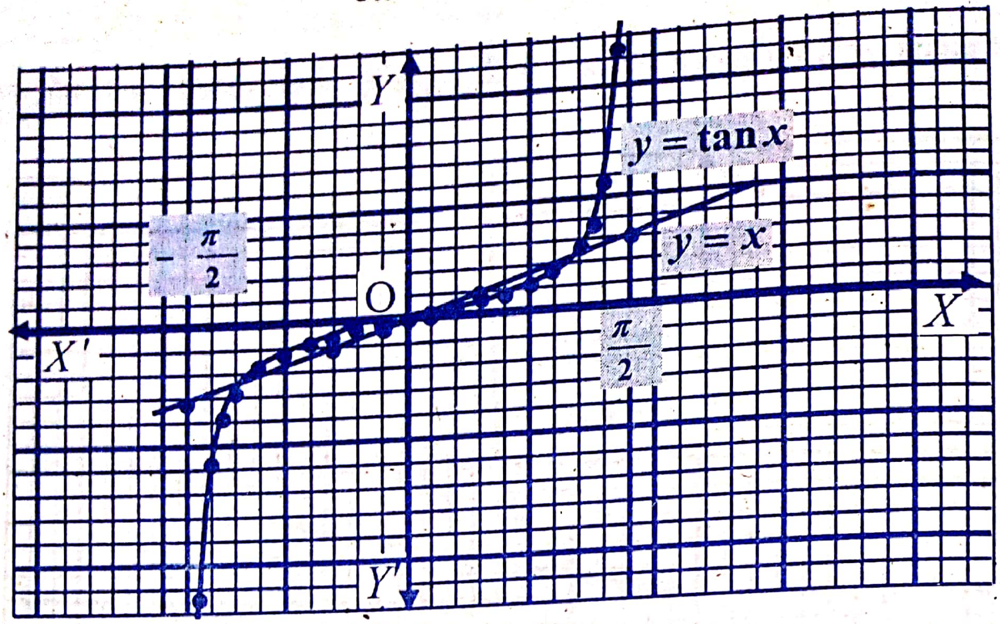
নিচের তালিকায় $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ এর জন্য y = 2x ও y = tanx এর প্রতিরূপী মান নির্ণয় করি ঃ

x	0	$\pm\frac{\pi}{18}$	$\pm 2.\frac{\pi}{18}$	$\pm 3.\frac{\pi}{18}$	$\pm 4.\frac{\pi}{18}$	$\pm 5.\frac{\pi}{18}$	$\pm 6.\frac{\pi}{18}$
y = tanx	0	± 0.18	± 0·36	± 0·58	± 0·84	± 1·19	± 1·73
x	$\pm 7\frac{\pi}{18}$	$\pm 7\cdot 5\times\frac{\pi}{18}$	$\pm 8.\frac{\pi}{18}$	$\pm 8\cdot 5\times\frac{\pi}{18}$	$\pm 9.\frac{\pi}{18}$		
y = tanx	± 2·75	± 3·73	± 5·67	± 11.43	অসংজ্ঞায়িত		

একটি ছক কাগজে স্থানাঙ্কের অক্ষরেখা X'OX ও YOY' আঁকি ।

স্কেল নির্ধারণ ঃ x-অক্ষ বরাবর ছোট বর্গক্ষেত্রের এক বাহু $= \frac{\pi^c}{18}$ এবং y- অক্ষ বরাবর ছোট বর্গক্ষেত্রের 1 বাহু = 1 স্থাপন করে y = 2x ও y = tanx

এখন নির্ধারিত স্কেল অনুযায়ী তালিকাভুক্ত বিন্দুগুলো ছক কাগজে ফাংশনদ্বয়ের লেখচিত্র দুইটি অঙ্কন করি।



লেখচিত্র থেকে দেখা যাচ্ছে যে , প্রদত্ত সীমার মধ্যে ছেদ বিন্দুর ভূজসমূহ হচ্ছে $0\ , -66° = -\frac{11\pi}{30}$, $66° = \frac{11\pi}{30}$. সুতরাং, নির্ণেয় সমাধান, $x = 0\ , -\frac{11\pi}{30}\ ,\ \frac{11\pi}{30}$

2. (f) $\cot x - \tan x = 2,\ \ 0 \le x \le \pi$ [য. '০৫ ; চ. '০২; সি. '০৩, '১১ ; ঢা. '০৬; রা. '১০, '১২; কু. '১৪]

সমাধান ঃ দেওয়া আছে , $\cot x - \tan x = 2 \Rightarrow \frac{\cos x}{\sin x} - \frac{\sin x}{\cos x} = 2 \Rightarrow \cos^2 x - \sin^2 x = 2\sin x \cos x$

$\Rightarrow \cos 2x = \sin 2x$

মনে করি , $y = \sin 2x = \cos 2x \quad \therefore y = \sin 2x\ ,\ y = \cos 2x$

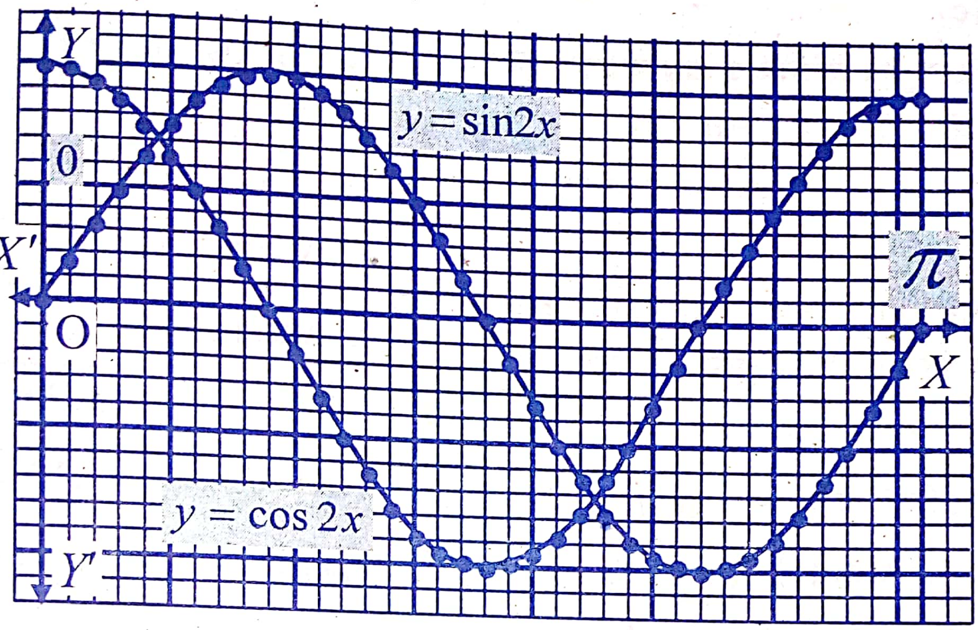
নিচের তালিকায় $x \in [0\ , \pi]$ এর জন্য $y = \sin 2x$ ও $y = \cos 2x$ এর প্রতিরূপী মান নির্ণয় করি ঃ

x	0	$\frac{\pi}{36}$	$2.\frac{\pi}{36}$	$3.\frac{\pi}{36}$	$4.\frac{\pi}{36}$	$5.\frac{\pi}{36}$	$6.\frac{\pi}{36}$
y = sin2x	0	0·17	0.34	0.5	0·64	0·77	0.87
y = cos2x	1	0·98	0.94	0.87	0·77	0·64	0.5
x	$7.\frac{\pi}{36}$	$8.\frac{\pi}{36}$	$9.\frac{\pi}{36}$	$10.\frac{\pi}{36}$	$24.\frac{\pi}{36}$	$32.\frac{\pi}{36}$	$36.\frac{\pi}{36}$
y = sin2x	0.94	0·98	1	0·98	– 0.87	– 0.64	0
y = cos2x	0.34	0·17	0	– 0·17	– 0.5	0.77	1

একটি ছক কাগজে স্থানাংকের অক্ষরেখা X´OX ও YOY´ আঁকি ।

স্কেল নির্ধারণ ঃ x-অক্ষ বরাবর ছোট বর্গক্ষেত্রের এক বাহু $= \frac{\pi^c}{36}$ এবং y- অক্ষ বরাবর ছোট বর্গক্ষেত্রের 10 বাহু = 1

এখন নির্ধারিত স্কেল অনুযায়ী তালিকাভুক্ত বিন্দুগুলো ছক কাগজে স্থাপন করে $y = \sin 2x$ ও $y = \cos 2x$ ফাংশনদ্বয়ের লেখচিত্র দুইটি অঙ্কন করি। লেখচিত্র থেকে দেখা যাচ্ছে যে, প্রদত্ত সীমার মধ্যে ছেদ বিন্দুর ভূজসমূহ হচ্ছে $\frac{\pi}{8}, \frac{5\pi}{8}$. সুতরাং, নির্ণেয় সমাধান, $x = \frac{\pi}{8}, \frac{5\pi}{8}$.



ভর্তি পরীক্ষার MCQ (অতিরিক্ত) ঃ

1. $\sin(4x+1)$ এর পর্যায় কত? [RU 06-07;BUET 00-01]

Sol^n.: $4x = 2\pi \Rightarrow x = \frac{\pi}{2}$ $\therefore$ পর্যায়কাল $= \frac{\pi}{2}$

নিয়ম ঃ $\sin x, \cos x, \sec x, \mathrm{cosec}\, x$ এর পর্যায় $= 2\pi$ এবং $\tan x, \cot x$ এর পর্যায় $= \pi$.

2. $\sqrt{3}\sin\theta + \cos\theta$ এর সর্বোচ্চ মান– [SU 08-09]

Sol^n.: সর্বোচ্চ মান $= \sqrt{1+3} = 2$

বি.দ্র.ঃ $a\cos x + b\sin x$

$$= \sqrt{a^2+b^2}\sin(x + \tan^{-1}\frac{b}{a})$$

$a\cos\theta + b\sin\theta$ সর্বোচ্চ হবে যদি $\sin(x+\tan^{-1}\frac{b}{a})$ সর্বোচ্চ হয় অর্থাৎ $\sin(x+\tan^{-1}\frac{b}{a}) = 1$ হয়।

$\therefore$ $x = 90^0 - \tan^{-1}\frac{b}{a}$ এর জন্য $a\cos x + b\sin x$ এর সর্বোচ্চ মান $= \sqrt{a^2+b^2}$

3. $f(x) = 1 + \sqrt{\sin^2 x + 1}$ ফাংশনের সর্বোচ্চ মান হবে– [CU 07-08]

Sol^n.: সর্বোচ্চ মান $= 1 + \sqrt{(\pm 1)^2 + 1} = 1 + \sqrt{2}$

4. $f(x) = 2\cos|x|$ এর সীমা – [RU 03-04]

Sol^n.: $\cos|x|$ এর বিস্তার $= [-1,1]$

$\therefore$ $-2 \le f(x) \le 2$

5. $\cos^2 x$ $(x \in \mathbb{R})$ এর বৃহত্তম এবং ক্ষুদ্রতম মান হচ্ছে– [CU 03-04]

Sol^n.: বৃহত্তম এবং ক্ষুদ্রতম মান যথাক্রমে 1 ও 0.

6. $\sin 2x - \cos x$ এর সর্বনিম্ন মান – [IU 07-08]

Sol^n.: $x = -45^0$ এর জন্য প্রদত্ত রাশির সর্বনিম্ন মান পাওয়া যায় $-\sqrt{3}$.

বহুনির্বাচনি প্রশ্ন:

1. Sol^n : জ্যামিতিক কোণ ধনাত্মক এবং 360^0 এর ছোট হয়। $\therefore$ Ans. (b)

2. Sol^n : $\frac{\text{বৃত্তের পরিধি}}{2r} = \pi$ $\therefore$ Ans. (c)

3. **Sol^n :** $\sec\theta = \frac{OB}{OP}$ $\therefore$ Ans. (a)

4. **Sol^n :** $\tan^2\theta = \sec^2\theta - 1$
$\therefore$ Ans. (c)

5. **Sol^n :** $\cot\theta$ এর ডোমেন ও রেঞ্জ যথাক্রমে $\mathbb{R} - \{n\pi, n\in\mathbb{Z}\}, \mathbb{R}$ $\therefore$ Ans.(d)

6. **Sol^n :** $\sin\theta$ ও $\cos\theta$ এর মান সবসময় -1 থেকে $+1$ $\therefore$ Ans. (c)

7. **Sol^n :** কোণ $90°$ থেকে বেড়ে $180°$ হলে $\cos\theta$ এর মান 0 থেকে কমে -1 হবে। $\therefore$ Ans. A

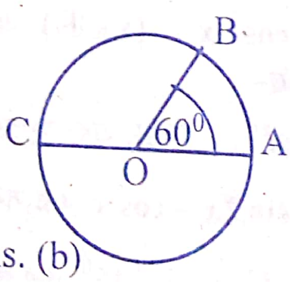
8. **Sol^n :** সর্বোচ্চ মান $= 1+\sqrt{(\pm1)^2+1}$
$= 1+\sqrt{2}$ $\therefore$ Ans. (c)

9. **Sol^n :** ABC বৃত্তকলার ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2}r^2\theta$
$= \frac{1}{2}\times 6^2 \times \frac{\pi}{6} = 3\pi$ $\therefore$ Ans.(c)

10. **Sol^n :** $-1 \le \cos|x| \le 1$
$\Rightarrow -3 \le 3\cos|x| \le 3$
$\Rightarrow -3 \le f(x) \le 3$ $\therefore$ Ans.(b)

11. **Sol^n :** সব তথ্যই সত্য। $\therefore$ Ans. (d)

12. **Sol^n :** $AC = 10$ cm
$\therefore OA = 5$ cm
চাপ $AB = r\theta$
$= 5\times\frac{\pi}{3} = \frac{5\pi}{3}$ $\therefore$ Ans. (b)

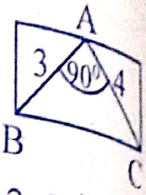


13. **Sol^n :** $x = 0$ এর জন্য $y = \sin 2x = 0$
এবং $x = \frac{\pi}{2}$ এর জন্য $y = \sin\pi = 0$.
তাছাড়া, $0 < x < \frac{\pi}{2}$ এর জন্য y এর মান ধনাত্মক। $\therefore$ Ans. (b)

14. **Sol^n :** সব তথ্যই সত্য। $\therefore$ Ans. (d)

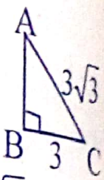
15. **Sol^n :** $4x = \pi \Rightarrow x = \frac{\pi}{4}$
$\therefore \tan 4x$ পর্যায় $= \frac{\pi}{4}$ $\therefore$ Ans. (d)

16. **Sol^n :** ABC সমকোণী ত্রিভুজের অতিভুজ,
$BC = \sqrt{3^2+4^2} = 5$



$\therefore$ ΔABC পরিব্যাসার্ধ $= \frac{5}{2} = 2\cdot5$
$\therefore$ Ans. (c)

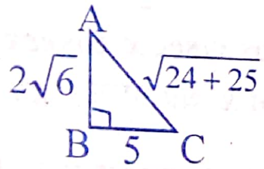
17. **Sol^n :** $AB = \sqrt{(3\sqrt{3})^2 - 3^2}$
$AB = \sqrt{27-9} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$



ΔABC এর ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2}(3\times3\sqrt{2})$
$= \frac{9}{\sqrt{2}}$ $\therefore$ Ans. (c)

18. **Sol^n :** $\cot\left(\frac{4\pi - 2\theta}{2}\right)$
$= \cot(2\pi - \theta) = -\cot\theta$ $\therefore$ Ans. (d)

19. **Sol^n :**



$\cot\theta = -\frac{5}{2\sqrt{6}}$ এবং $\sin\theta$ ধনাত্মক বলে
$\sec\theta = -\frac{7}{5}$ $\therefore$ Ans. (a)

20. **Sol^n :** নির্ণেয় কোণ $= \frac{|60h - 11m|}{2}$ ডিগ্রি
$= \frac{|60\times8 - 11\times15|}{2}$ ডিগ্রি
$= \frac{|480-165|}{2}$ ডিগ্রি $= 157.5^0$
$\therefore$ Ans. (d)

21. **Sol^n :** $\frac{\pi}{2}<\theta<\pi$ এর জন্য $\cos\theta$ ঋণাত্মক। $\cos\theta=-\sqrt{1-\sin^2\theta}$

$=-\sqrt{1-\frac{9}{25}}=-\frac{4}{5}$ $\therefore$ Ans. (d)

22. **Sol^n :** x =0 এর জন্য, $\cos^2(\frac{\pi}{2}+x)=0$

$\therefore$ Ans. (d)

23. **Sol^n :** চাকাটির পরিধি 50π = 157 সেমি., গতিবেগ 157×10 সে.মি./সে. = 15.7 মি./সে. $\therefore$ Ans. (d)

24. **Sol^n :** চাপ BE এর দৈর্ঘ্য = $r\theta$

$=\frac{AB}{2}\times\frac{\pi}{6}=\frac{6}{2}\times\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}$ $\therefore$ Ans. (a)

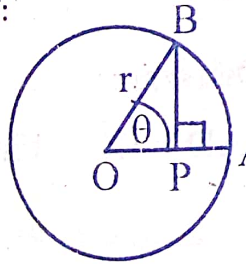
25. **Sol^n :** AOB বৃত্তকলার ক্ষেত্রফল $=\frac{1}{2}r^2\theta$

$=\frac{1}{2}(12^2\times\frac{\pi}{6})=12\pi$ $\therefore$ Ans. (c)

26. **Sol^n :** θ কোণ 0^0 থেকে বেড়ে 90^0 হলে $\sin 0^0=0, \sin 90^0=1$ $\therefore$ Ans. (d)

সৃজনশীল প্রশ্ন:

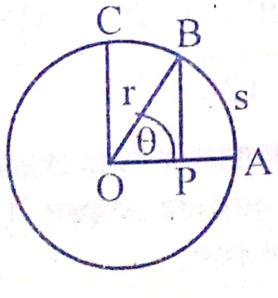
1. চিত্র:



এবং $f(x)=\sin\theta-\cos\theta$

(a) প্রমাণ কর যে, বৃত্তকলা AOB এর ক্ষেত্রফল $=\frac{r^2\theta}{2}$

প্রমাণ :



প্রমাণ : $OA\perp OC$ টানি।

$\therefore \frac{\text{বৃত্তকলা AOB এর ক্ষেত্রফল}}{\text{বৃত্তকলা AOC এর ক্ষেত্রফল}}=\frac{\angle AOB \text{ এর পরিমাপ}}{\angle AOC \text{ এর পরিমাপ}}$

$\Rightarrow$ বৃত্তকলা AOB এর ক্ষেত্রফল $=\frac{\theta}{\pi/2}\times$ বৃত্তকলা AOC এর ক্ষেত্রফল

$=\frac{2\theta}{\pi}\times\frac{1}{4}\times$ বৃত্তের ক্ষেত্রফল

$=\frac{\theta}{2\pi}\times\pi r^2=\frac{r^2\theta}{2}$

(b) লেখচিত্রের সাহায্যে f(x) = 0, $0\le\theta\le\frac{\pi}{2}$ এর সমাধান কর।

সমাধান: প্রশ্নমালা VI B এর 2(a) দ্রষ্টব্য।

(c) $\theta=60^0$, r = 5 cm হলে ABP ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

সমাধান: দেওয়া আছে, $\theta=60^0=\frac{\pi}{3}$,

OB = r = 5 সে.মি.

OPB সমকোণী ত্রিভুজ হতে পাই, BP = OB

$\sin 60^0=5\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{5\sqrt{3}}{2}$ সে.মি. এবং

$OP=OB\cos 60^0=5\times\frac{1}{2}=\frac{5}{2}$ সে.মি.।

ABP ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল = বৃত্তকলা AOB এর ক্ষেত্রফল − ত্রিভুজ OBP এর ক্ষেত্রফল

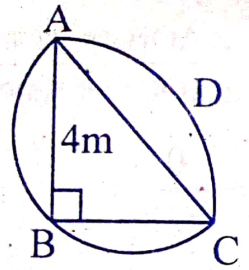
$=\frac{r^2\theta}{2}-\frac{1}{2}(OP\times BP)$

$=\frac{1}{2}\times5^2\times\frac{\pi}{3}-\frac{1}{2}(\frac{5\sqrt{3}}{2}\times\frac{5}{2})$

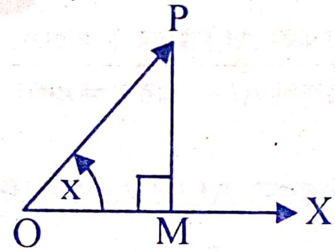
$=\frac{25\pi}{6}-\frac{25\sqrt{3}}{8}$

$=\frac{25(4\pi-3\sqrt{3})}{24}$ বর্গ সে.মি.।

2. চিত্র-১:



চিত্র -২:



চিত্রে –১ এ, ABDC একটি বৃত্তকলা।

(a) ADC এর দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

সমাধান: চিত্রে, AB = BC 4 মিটার বলে ADC একটি বৃত্তাংশ।

∴ বৃত্তাংশ ADC এর দৈর্ঘ্য $= AB \times \angle ABC$

$= 4 \times \frac{\pi}{2} = 2\pi$ মিটার ।

(b) ABCD সম্পূর্ণ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

সমাধান: $AC = \sqrt{4^2 + 4^2} = 4\sqrt{2}$ মিটার ।

∴ ABC অর্ধবৃত্তের ব্যাসার্ধ $= \frac{AC}{2} = 2\sqrt{2}$ মিটার

∴ ABCD সম্পূর্ণ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল = ABC অর্ধবৃত্তের ক্ষেত্রফল + (ABCD বৃত্তকলার ক্ষেত্রফল – ABC ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল)

$= \frac{1}{2}\pi \times (2\sqrt{2})^2 + (\frac{1}{2} \times 4^2 \times \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} \times 4 \times 4)$

$= 4\pi + (4\pi - 8) = 8(\pi - 1)$ বর্গ মিটার ।

(c) চিত্র -২ অনুযায়ী, $\frac{PM}{OP}$ দ্বারা যে ত্রিকোণমিতিক অনুপাত প্রকাশ করে তার লেখচিত্র অঙ্কন কর, যখন $-\pi \le x \le \pi$

সমাধান: চিত্র -২ অনুযায়ী, $\frac{PM}{OP} = \sin x$. অতপর প্রশ্নমালা VI B এর উদাহরণ -1 দ্রষ্টব্য।

3. $f(\theta) = k \tan\theta - \tan k\theta$ এবং $g(x) = \cos x$

(a) একটি বৃত্তের ব্যাসার্ধ 30 সে.মি. এবং একটি বৃত্তচাপ কেন্দ্রে $60°$ উৎপন্ন করলে বৃত্তকলার ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

সমাধান : মনে করি, বৃত্তের ব্যাসার্ধ $r = 30$ সে.মি. বৃত্তচাপের দৈর্ঘ্য s এবং বৃত্তচাপ দ্বারা কেন্দ্রে উৎপন্ন কোণ $\theta = 60° = \frac{60 \times \pi}{180} = \frac{\pi}{3}$

আমরা জানি, বৃত্তকলার ক্ষেত্রফল

$= \frac{r^2\theta}{2} = \frac{30^2}{2} \times \frac{\pi}{3} = \frac{900 \times 3 \cdot 1416}{6}$

$= 471 \cdot 24$ বর্গ সে.মি. (প্রায়)।

(b) $f(\theta) = 0$ হলে দেখাও যে,

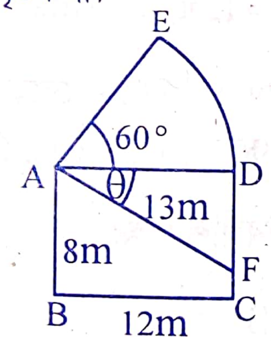
$$\frac{\sin^2 k\theta}{\sin^2\theta} = \frac{k^2}{1 + (k^2 - 1)\sin^2\theta}$$

সমাধান : প্রশ্নমালা VI A এর 2(d) দ্রষ্টব্য।

(c) $y = g(x)$, $-\pi \le x \le \pi$ ফাংশনের লেখচিত্র অঙ্কন কর ।

সমাধান : প্রশ্নমালা VI B এর উদাহরণ-2 দ্রষ্টব্য।

4. চিত্রে, ABCD একটি আয়তক্ষেত্র এবং ADE একটি বৃত্তকলা।



(a) DE বৃত্তচাপের দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

সমাধান: এখানে, $r = AE = AD = BC = 12m$

$\theta_1 = 60^0 = \frac{\pi}{3}$

∴ DE বৃত্তচাপের দৈর্ঘ্য $= r\theta_1 = 12 \times \frac{\pi}{3} = 4\pi$ m

(b) AEDF সীমাবদ্ধ এলাকার ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

এখানে, $DF = \sqrt{AF^2 - AD^2}$

$= \sqrt{13^2 - 12^2} = 5m.$

AEDF সীমাবদ্ধ এলাকার ক্ষেত্রফল

= AED বৃত্তকলার ক্ষেত্রফল + ADF ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল

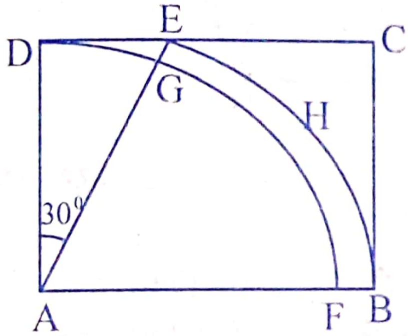
$= \frac{1}{2} \times \frac{12^2 \times 60\pi}{180} + (\frac{1}{2} \times 12 \times 5)$

$= 105.4$ বর্গ একক।

(c) $\frac{DE}{AF}$ অনুপাতটি θ কোণের যে ত্রিকোণমিতিক অনুপাত নির্দেশ করে তার লেখচিত্র অঙ্কন কর; যেখানে $-2\pi \le \theta \le 2\pi$.

সমাধান: চিত্র -২ অনুযায়ী, $\frac{DF}{AF} = \sin\theta$. অতপর প্রশ্নমালা VI B এর উদাহরণ -1 দ্রষ্টব্য।

5. চিত্রে, ABCD একটি আয়তক্ষেত্র যার বাহুর দৈর্ঘ্য AB = 12m, BC = $6\sqrt{3}$ m. ADGF এবং ABHE দুইটি বৃত্তকলা।



(a) DG বৃত্তচাপের দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

সমাধান : এখানে, ব্যাসার্ধ $r = AD = BC = 6\sqrt{3}$ m

$\theta = 30^0 = \frac{\pi}{6}$

$\therefore$ DG বৃত্তচাপের দৈর্ঘ্য $= r\theta = 6\sqrt{3} \times \frac{\pi}{6}$

$= \sqrt{3}\pi$ m

(b) GEBF সীমাবদ্ধ এলাকার ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

সমাধান : এখানে, $\angle BAE = 90^0 - 30^0 = 60^0$

$= \frac{\pi}{3}$

$AF = AD = 6\sqrt{3}$ m, AB = 12m

$\therefore$ ABHE বৃত্তকলার ক্ষেত্রফল

$= \frac{1}{2}(AB^2 \times \angle BAE) = \frac{1}{2}(12^2 \times \frac{\pi}{3})$

$= 24\pi$ বর্গ মি.

AGF বৃত্তকলার ক্ষেত্রফল

$= \frac{1}{2}(AF^2 \times \angle GAF) = \frac{1}{2}\{(6\sqrt{3})^2 \times \frac{\pi}{3}\}$

$= 18\pi$ বর্গ মি.

$\therefore$ GEBF সীমাবদ্ধ এলাকার ক্ষেত্রফল

$= 24\pi - 18\pi = 6\pi$ বর্গ মি.।

(c) EC = 6m হলে, BHEC সীমাবদ্ধ এলাকার ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

সমাধান : ABCE একটি ট্রাপিজিয়াম যার সমান্তরাল বাহু দুইটি AB = 12m, EC = 6m এবং এদের মধ্যবর্তী দূরত্ব BC = $6\sqrt{3}$ m.

$\therefore$ ABCE ট্রাপিজিয়ামের ক্ষেত্রফল

$= \frac{1}{2}(AB + EC) \times BC$

$= \frac{1}{2}(12 + 6) \times 6\sqrt{3} = 54\sqrt{3}$ বর্গ একক

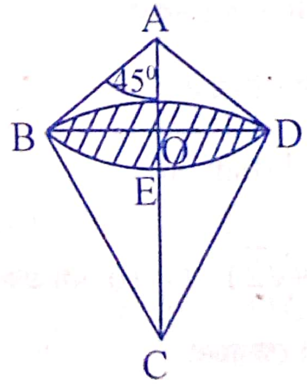
ABHE বৃত্তকলার ক্ষেত্রফল $= 24\pi$ বর্গ মি.

$\therefore$ BHEC সীমাবদ্ধ এলাকার ক্ষেত্রফল

$= 54\sqrt{3} - 24\pi = 93.53 - 75.4$

$= 18.13$ বর্গ মি. (প্রায়)

6. চিত্রে, ABCD একটি ঘুড়ি। BO = 4 cm, BC = 8 cm, ABED ও BCD দুইটি বৃত্তকলা।



(a) $\tan\theta + \sec\theta = x$ হলে, প্রমাণ কর যে,

$\sin\theta = \frac{x^2 - 1}{x^2 - 1}$.

প্রমাণ : প্রশ্নমালা VI B এর 8(d) দ্রষ্টব্য।

(b) দেখাও যে, $AB = 4\sqrt{2}$ এবং এর সাহায্যে BED বৃত্তচাপের দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

সমাধান: ABCD ঘুড়ির কর্ণদ্বয় AC ও BD পরস্পরকে সমকোণে ছেদ করে। ABO একটি সমকোণী ত্রিভুজ।

$\therefore \sin 45^0 = \frac{OB}{AB} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{4}{AB}$

$\Rightarrow AB = 4\sqrt{2}$

এখন, $\angle BAD = 2\times 45^0 = 90^0 = \frac{\pi}{2}$

$\therefore$ BED বৃত্তচাপের দৈর্ঘ্য $= AB \times \angle BAD$

$= 4\sqrt{2}\times \frac{\pi}{2} = 2\sqrt{2}\pi$ একক।

(c) রেখাংশ দ্বারা চিহ্নিত এলাকার ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

সমাধান: এখানে, ABCD একটি ঘুড়ি বলে, $AB = AD = 4\sqrt{2}$, $BC = CD = 8$

BOC সমকোণী ত্রিভুজে,

$\sin BCO = \frac{OB}{OC} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2} = \sin 30^0$

$\Rightarrow \angle BCO = 30^0 \therefore \angle BCD = 60^0 = \frac{\pi}{3}$

ABED বৃত্তকলার ক্ষেত্রফল

$= \frac{1}{2}(AB^2\times \angle BAD) = \frac{1}{2}\{(4\sqrt{2})^2\times \frac{\pi}{2}\}$

$= 32\times \frac{\pi}{4} = 8\pi$ বর্গ একক

ABD ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল

$= \frac{1}{2}(AB\times AD)\sin 90^0$

$= \frac{1}{2}(4\sqrt{2}\times 4\sqrt{2})\times 1 = 16$ বর্গ একক

BCD বৃত্তকলার ক্ষেত্রফল

$= \frac{1}{2}(BC^2\times \angle BCD) = \frac{1}{2}(8^2\times \frac{\pi}{3})$

$= \frac{32\pi}{3}$ বর্গ একক

BCD বৃত্তকলার ক্ষেত্রফল

$= \frac{1}{2}(BC\times CD)\sin 60^0$

$= \frac{1}{2}(8\times 8)\times \frac{\sqrt{3}}{2} = 16\sqrt{3}$ বর্গ একক।

$\therefore$ রেখাংশ দ্বারা চিহ্নিত এলাকার ক্ষেত্রফল

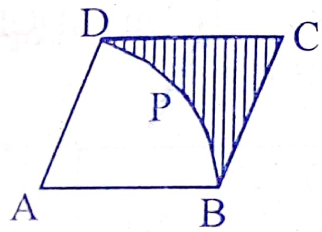
$= (8\pi - 16) + (\frac{32\pi}{3} - 16\sqrt{3})$

$= 25.13 - 16 + 33.51 - 27.71$

$= 58.64 - 43.71$

$= 14.93$ বর্গ একক।

7. 2 সে.মি. বাহুবিশিষ্ট ABCD রম্বসের সূক্ষ্মকোণ $A = 60^0$। ABPD একটি বৃত্তকলা।



(a) $\sin\theta + \operatorname{cosec}\theta = 2$ হলে প্রমাণ কর যে, $\sin^n\theta + \operatorname{cosec}^n\theta = 2$

প্রমাণ: প্রশ্নমালা 2(b) দ্রষ্টব্য।

(b) বৃত্তাংশ BPD এর দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

সমাধান: এখানে, ABPD বৃত্তকলার BPD বৃত্তাংশ দ্বারা কেন্দ্রে উৎপন্ন কোণ $\theta = \angle BAD = 60^0 = \frac{\pi}{3}$,

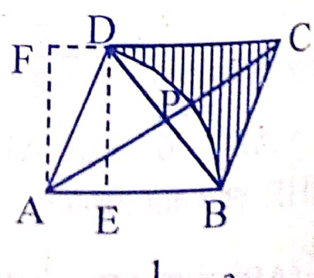
বৃত্তের ব্যাসার্ধ, r = রম্বসের বাহুর দৈর্ঘ্য = 2 সে.মি.

$\therefore$ বৃত্তাংশ BPD এর দৈর্ঘ্য $= r\theta = 2\times \frac{\pi}{3}$

$= 2\cdot 1$ সে. মি. (প্রায়)।

(c) BPDC ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

সমাধান:



ABPD ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2}\theta r^2$

$= \frac{1}{2} \times \frac{\pi}{3} \times 2^2 = \frac{1}{2} \times \frac{\pi}{3} \times 2^2$

$= 2 \cdot 1$ বর্গ সে.মি. (প্রায়)

$DE \perp AB$ ও $AF \perp CD$ অঙ্কন করি যা AB কে F বিন্দুতে ও CD এর বর্ধিতাংশকে F বিন্দুতে ছেদ করে।

ΔABD এ, $\angle A = 60^0$ (সূক্ষ্মকোণ)

$\therefore BD^2 = AB^2 + AD^2 - 2.\ AB.AE$

$= AB^2 + AD^2 - 2.\ AB.AD \cos A$

$= 2^2 + 2^2 - 2 \times 2 \times 2 \times \cos 60^0$

$= 8 - 8 \times \frac{1}{2} = 4$

$\therefore BD = 2$ সে.মি.।

আবার, $\Delta\ ACD$, $\angle ADC = 120^0$ (স্থূলকোণ)

$\therefore AC^2 = AD^2 + DC^2 + 2\,CD \times DF$

$= AD^2 + DC^2 + 2\,CD \times AD \cos ADF$

$= AD^2 + DC^2 + 2\,CD \times AD \cos 60^0$

$= 2^2 + 2^2 + 2 \times 2 \times 2 \times (\frac{1}{2}) = 12$

$\therefore AC = 2\sqrt{3}$

এখন, ABCD রম্বসের ক্ষেত্রফল

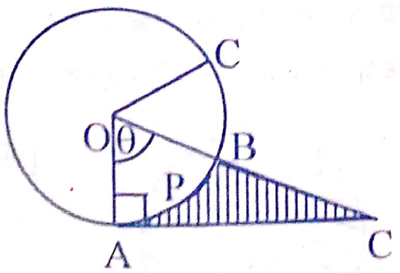
$= \frac{1}{2}(AC \times BD)$

$= \frac{1}{2}(2\sqrt{3} \times 2) = 2\sqrt{3}$ বর্গ সে.মি.।

$\therefore$ BPDC ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল = ABCD রম্বসের ক্ষেত্রফল − ABPD ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল

$= 2\sqrt{3} - \frac{2\pi}{3} = 1 \cdot 37$ বর্গ সে.মি. (প্রায়)।

8.



O কেন্দ্র বিশিষ্ট বৃত্তের ব্যাসার্ধ 5 সে.মি.। বৃত্তাংশ APB এর দৈর্ঘ্য 6 সে.মি.।

(a) প্রমাণ কর যে,

$$(\tan\theta + \sec\theta)^2 = \frac{1+\sin\theta}{1-\sin\theta}$$

প্রমাণ: 1(a) দ্রষ্টব্য।

(b) OC ঘড়ির সেকেন্ডের কাঁটা হলে 5 সেকেন্ডে C বিন্দু কতটুকু বৃত্তাকার পথ অতিক্রম করবে?

সমাধান: ঘড়ির সেকেন্ডের কাঁটা

60 সেকেন্ডে 360^0 কোণ উৎপন্ন করে

$\therefore$ 5 সেকেন্ডে 30^0 কোণ উৎপন্ন করে।

এখানে, উৎপন্ন কোণ $\theta = 30^0 = \frac{\pi}{6}$ রেডিয়ান,

$r = OC = 5$ সে. মি.। ধরি, সেকেন্ডের কাঁটাটির C বিন্দু s সে.মি. বৃত্তাকার পথ অতিক্রম করবে।

$\therefore s = r\theta = 5 \times \frac{\pi}{6} = 5 \times \frac{3 \cdot 1416}{6} = 2 \cdot 618$

$\therefore$ নির্ণেয় বৃত্তাকার পথ $= 2 \cdot 618$ সে. মি.।

(c) APBC ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

সমাধান: এখানে, $r = 5$ সে.মে. এবং

বৃত্তাংশ APB এর দৈর্ঘ্য = 6 সে.মি.

$\therefore r\theta = 6 \Rightarrow 5\theta = 6 \Rightarrow \theta = \frac{6}{5}$

$\therefore$ OAB বৃত্তকলার ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2}\theta r^2$

$= \frac{1}{2} \times \frac{6}{5} \times 5^2 = 15$ বর্গ সে.মি.।

এখন, AOC সমকোণী ত্রিভুজে,

$\tan\theta = \frac{AC}{OA} \Rightarrow AC = OA \tan\frac{6}{5}$

$\Rightarrow AC = 5 \times 2 \cdot 57 = 12 \cdot 85$ সে.মি.।

$\therefore$ AOC ত্রিভুজে ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2}(AC \times OA)$

$= \frac{1}{2}(12 \cdot 85 \times 5) = 32 \cdot 13$ বর্গ সে.মি.।

$\therefore$ APBC ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল $= 32 \cdot 13 - 15$

$= 17 \cdot 13$ বর্গ সে.মি.।

9. একটি দোলক ঘড়ির নিচে ঝুলানো দোলকটির সর্বনিম্ন বিন্দুটি $y = 2\cos 2x$ সম্পর্ক মেনে চলে এবং প্রতিদিন সকাল 6 টা 45 মিনিটে এতে এলাম বাজে।

(a) প্রমাণ কর যে,

$$\sec^4\theta + \tan^4\theta = 1 + 2\sec^2\theta\tan^2\theta$$

প্রমাণ: আমরা জানি, $\sec^2\theta - \tan^2 = 1$

$\Rightarrow (\sec^2\theta - \tan^2)^2 = 1$

$\Rightarrow (\sec^2\theta)^2 + (\tan^2)^2 - 2\sec^2\theta\tan^2\theta = 1$

$\Rightarrow \sec^4\theta + \tan^4 = 1 + 2\sec^2\theta\tan^2\theta$

(b) এলাম বাজার মুহূর্ত্বে ঘড়ির ঘণ্টার কাঁটা ও মিনিটের কাঁটার মধ্যবর্তী কোণ বৃত্তীয় পদ্ধতিতে নির্ণয় কর।

সমাধান: আমরা জানি,

বৃত্তাকার ঘড়ি কেন্দ্রে 360^0 কোণ উৎপন্ন করে।

প্রতি মিনিটে মিনিটের কাঁটার কৌণিক সরণ $\frac{360^0}{60} = 6^0$.

$\therefore$ 45 মিনিটে মিনিটের কাঁটার কৌণিক সরণ $= 45\times 6^0 = 270^0$

$\therefore$ মিনিটে কাঁটা 360^0 কোণ উৎপন্ন করলে ঘণ্টার কাঁটা $30°$ কোণ উৎপন্ন করে

$\therefore$ মিনিটে কাঁটা 270^0 কোণ উৎপন্ন করলে ঘণ্টার কাঁটা $\frac{30}{360}\times 270 = 22.5°$ কোণ উৎপন্ন করে

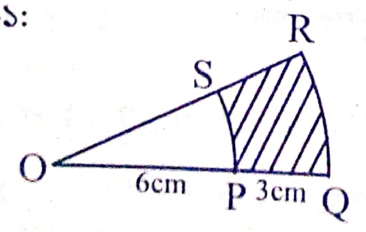
6 টা 45 মিনিটে ঘণ্টার কাঁটার কৌণিক সরণ $= 6\times 30^0 + 22.5^0 = 202.5^0$

$\therefore$ 6 টা 45 মিনিটে ঘণ্টা ও মিনিটের কাঁটার মধ্যবর্তী কোণ $= 270^0 - 202.5^0 = 67.5^0 = \frac{67.5\pi}{180}$

(c) $-\frac{\pi}{2} \le \theta \le \pi$ ব্যবধিতে দোলকের গতির সম্পর্কটি লেখচিত্রে দেখাও।

সমাধান: নিজে চেষ্টা কর।

10. দৃশ্যকল্প-১:



দৃশ্যকল্প-২: $y = \cos x, \; -\pi < \theta < \pi$

(a) $(\tan\theta + \sec\theta)^2$ কে $\sin\theta$ এর মাধ্যমে প্রকাশ কর।

সমাধান: $(\tan\theta + \sec\theta)^2$

$$= \left(\frac{\sin\theta}{\cos\theta} + \frac{1}{\cos\theta}\right)^2 = \frac{(\sin\theta + 1)^2}{\cos^2\theta}$$

$$= \frac{(\sin\theta+1)^2}{1-\sin^2\theta} = \frac{(\sin\theta+1)^2}{(1-\sin\theta)(1-\sin\theta)}$$

$$= \frac{(\sin\theta+1)^2}{1-\sin^2\theta} = \frac{(\sin\theta+1)^2}{(1-\sin\theta)(1-\sin\theta)}$$

$$= \frac{1+\sin\theta}{1-\sin\theta}$$

(b) দৃশ্যকল্প-১ এ OPS বৃত্তকলার ক্ষেত্রফল 12 বর্গ একক হলে রেখাংশ দ্বারা চিহ্নিত এলাকার ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

সমাধান: এখানে, $OP = OS = 6$ cm

ধরি, $\angle SOP = \theta$.

OPS বৃত্তকলার ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2}(OP^2)\theta$

$= \frac{1}{2}(6^2)\theta = 18\theta$

প্রশ্নমতে, $18\theta = 12 \Rightarrow \theta = \frac{2}{3}$

$\therefore$ OQR বৃত্তকলার ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2}(OQ^2)\theta$

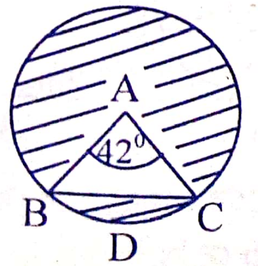
$= \frac{1}{2}(9^2)\frac{2}{3} = 27$ বর্গ একক

$\therefore$ রেখাংশ দ্বারা চিহ্নিত এলাকার ক্ষেত্রফল $= 27 - 12 = 15$ বর্গ একক

(c) দৃশ্যকল্প-২ এর লেখচিত্র অঙ্কন কর।

সমাধান: প্রশ্নমালা VI B এর উদাহরণ-2 দ্রষ্টব্য।

11. [ঢা.বো. ২০১৭]



ক) বৃত্তকলা ABC এর ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। ২

সমাধান: এখানে, $r = 6cm, \theta = 42^0 = \frac{42\pi}{180}$

$\therefore$ বৃত্তকলা ABC এর ক্ষেত্রফল $= \frac{6^2 \times 42\pi}{180 \times 2}$

$= \frac{21\pi}{5} = 13.19$ sq. cm

খ) ABDC এর পরিসীমা নির্ণয় কর। ৪

সমাধান: বৃত্তাংশ BC এর দৈর্ঘ্য $= \frac{6 \times 42\pi}{180}$

$= \frac{7\pi}{5}$cm.

$\therefore$ ABDC এর পরিসীমা $= 6 + 6 + \frac{7\pi}{5}$

$= 16.4$ cm.

গ) ছায়াঘেরা অংশের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

ABDC বৃত্তকলার ক্ষেত্রফল $= \pi \times 6^2$

$= 36\pi$ বর্গ সে.মি.

ABC ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2} \times 6 \times 6 \times \sin 42^0$

$= 12.04$ বর্গ সে.মি. (প্রায়)

$\therefore$ ছায়াঘেরা অংশের ক্ষেত্রফল

$= 36\pi - 12.04 = 101.06$ বর্গ সে.মি. (প্রায়)