ABC ত্রিভুজে প্রমাণ কর যে,

1. (a) $\dfrac{a-b}{a+b} = \tan\dfrac{A-B}{2}\tan\dfrac{C}{2}$

[চ.'০৩; য.'০৯; রা.'১০]

প্রমাণ : **L.H.S.** $= \dfrac{a-b}{a+b} = \dfrac{2R\sin A - 2R\sin B}{2R\sin A + 2R\sin B}$

$= \dfrac{\sin A - \sin B}{\sin A + \sin B} = \dfrac{2\sin\frac{1}{2}(A-B)\cos\frac{1}{2}(A+B)}{2\sin\frac{1}{2}(A+B)\cos\frac{1}{2}(A-B)}$

$= \tan\dfrac{A-B}{2}\cot\dfrac{A+B}{2} = \tan\dfrac{A-B}{2}\cot(\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{C}{2})$

$= \tan\dfrac{A-B}{2}\tan\dfrac{C}{2} =$ R.H.S. (Proved)

1(b) $\cos\dfrac{B-C}{2} = \dfrac{b+c}{a}\sin\dfrac{A}{2}$ [য.'১০; ঢা.'১২]

প্রমাণ : **R.H.S.** $= \dfrac{b+c}{a}\sin\dfrac{A}{2}$

$= \dfrac{2R\sin B + 2R\sin C}{2R\sin A}\sin\dfrac{A}{2}$

$= \dfrac{\sin B + \sin C}{\sin A}\sin\dfrac{A}{2}$

$= \dfrac{2\sin\frac{B+C}{2}\cos\frac{B-C}{2}}{2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}}\sin\dfrac{A}{2}$

$= \dfrac{\sin(\frac{\pi}{2}-\frac{A}{2})\cos\frac{B-C}{2}}{\cos\frac{A}{2}}$

$= \dfrac{\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B-C}{2}}{\cos\frac{A}{2}} = \cos\dfrac{B-C}{2} =$ L.H.S.

2.(a) $a^2(\cos^2 B - \cos^2 C) + b^2(\cos^2 C - \cos^2 A) + c^2(\cos^2 A - \cos^2 B) = 0$

[রা. '০৭, য. '০৭,'১২]

প্রমাণ : **L.H.S.** $= a^2(\cos^2B - \cos^2C) + b^2(\cos^2C - \cos^2A) + c^2(\cos^2A - \cos^2B)$

$= 4R^2\sin^2 A(\cos^2 B - \cos^2 C) + 4R^2\sin^2 B(\cos^2 C - \cos^2 A) + 4R^2\sin^2 C(\cos^2 A - \cos^2 B)$

$= 4R^2(\sin^2A\cos^2B - \sin^2A\cos^2C + \sin^2B\cos^2C - \cos^2A\sin^2B + \sin^2C\cos^2A - \cos^2B\sin^2C)$

$= 4R^2\{\sin^2A(1-\sin^2B) - \sin^2A(1-\sin^2C) + \sin^2B(1-\sin^2C) - \sin^2B(1-\sin^2A) + \sin^2C(1-\sin^2A) - \sin^2C(1-\sin^2B)\}$

$= 4R^2(\sin^2A - \sin^2A\sin^2B - \sin^2A + \sin^2A\sin^2C + \sin^2B - \sin^2B\sin^2C - \sin^2B + \sin^2B\sin^2A + \sin^2C - \sin^2C\sin^2A - \sin^2C + \sin^2C\sin^2B)$

$= 4R^2 \times 0 = 0 =$ R.H.S. (proved)

2(b) $(b+c)\cos A + (c+a)\cos B + (a+b)\cos C = a+b+c$ [ব.'০৫ ; সি.'০৩,'০৭; রা.'১৪]

প্রমাণ : **L.H.S.** $= (b+c)\cos A + (c+a)\cos B + (a+b)\cos C$

$= b\cos A + c\cos A + c\cos B + a\cos B + a\cos C + b\cos C$

$= (c\cos B + b\cos C) + (c\cos A + a\cos C) + (b\cos A + a\cos B) = a+b+c =$ R.H.S.

[নোট : $a = c\cos B + b\cos C$]

2(c) $a^2(\sin^2B - \sin^2C) + b^2(\sin^2C - \sin^2A) + c^2(\sin^2A - \sin^2B) = 0$ [ঢা.'০০, য.'০৪]

প্রমাণ : L.H.S. $= a^2(\sin^2B - \sin^2C) + b^2(\sin^2C - \sin^2A) + c^2(\sin^2A - \sin^2B)$

$= (2R\sin A)^2(\sin^2B - \sin^2C) + (2R\sin B)^2(\sin^2C - \sin^2A) + (2R\sin C)^2(\sin^2A - \sin^2B)$

$= 4R^2\{\sin^2A\sin^2B - \sin^2A\sin^2C + \sin^2B\sin^2C - \sin^2B\sin^2A + \sin^2C\sin^2A - \sin^2C\sin^2B\}$

$= 4R^2 \times 0 = 0 =$ R.H.S. (Proved)

3. (a) $a(\cos C - \cos B) = 2(b-c)\cos^2\dfrac{A}{2}$

[য.'০৪; রা.'০৯; দি.'১০; ঢা.'১১; সি.'১২]

প্রমাণ : **L.H.S.** $= a(\cos C - \cos B)$

$= a\cos C - a\cos B$
$= (b - c\cos A) - (c - b\cos A)$
$= b - c + (b - c)\cos A$
$= (b-c)(1+\cos A) = (b-c).2\cos^2\frac{A}{2}$
$= 2(b-c)\cos^2\frac{A}{2} = \text{R.H.S.}$

3(b) $a(\cos B + \cos C) = 2(b+c)\sin^2\frac{A}{2}$

[য.'০০; ব.'০৪; ঢা.'০৮; চ. '০৯; সি.'১৪]

প্রমাণ : L.H.S. $= a(\cos B + \cos C)$
$= a\cos B + a\cos C$
$= c - b\cos A + b - c\cos A$
$= b + c - (b+c)\cos A = (b+c)\{1 - \cos A\}$
$= (b+c)\,2.\sin^2\frac{A}{2}$
$= 2(b+c)\sin^2\frac{A}{2} = \text{R.H.S.}$

3(c) $b^2\sin 2C + c^2\sin 2B = 4\Delta$

প্রমাণ : L.H.S.$= b^2\sin 2C + c^2\sin 2B$
$= b^2.2\sin C\cos C + c^2.2\sin B\cos B$
$= 2b^2\frac{c}{2R}\cos C + 2c^2.\frac{b}{2R}\cos B$
$= \frac{bc}{R}(b\cos C + c\cos B) = \frac{bc}{R}a$
$= \frac{abc}{R} = 4\Delta = \text{R.H.S.}$

3(d) $a^3\cos(B-C) + b^3\cos(C-A) + c^3\cos(A-B) = 3abc$ **[ব.'০৩]**

প্রমাণ : $a^3\cos(B-C)$
$= a(a^2\cos B\cos C + a^2\sin B\sin C)$
$= a(a\cos B.\,a\cos C + a\sin B.\,a\sin C)$
$= a\{(c - b\cos A)(b - c\cos A) + b\sin A.c\sin A\}$
$= a\{bc - b^2\cos A - c^2\cos A + bc\cos^2 A$
$+ bc\sin^2 A\}$
$= a\{bc - (b^2+c^2)\cos A + bc\}$
$= 2abc - a(b^2+c^2)\cos A.$

অনুরূপভাবে আমরা পাই,

$b^3\cos(C-A) = 2abc - b(c^2+a^2)\cos B$ এবং
$c^3\cos(A-B) = 2abc - c(a^2+b^2)\cos C$

এখন, L.H.S.$= a^3\cos(B-C) + b^3\cos(C-A)$
$+ c^3\cos(A-B)$
$= 6abc - a(b^2+c^2)\cos A - b(c^2+a^2)$
$\cos B - c(a^2+b^2)\cos C$
$= 6abc - ab^2\cos A - c^2a\cos A - bc^2\cos B -$
$a^2b\cos B - ca^2\cos C - b^2c\cos C$
$= 6abc - bc(c\cos B + b\cos C) - ab(a\cos B +$
$b\cos A) - ca(c\cos A + a\cos C)$
$= 6abc - bc.a - ab.c - ca.b$
$= 6abc - 3abc = 3abc = \text{R.H.S.}$ (Proved)

4.(a) $a^3\sin(B-C) + b^3\sin(C-A) + c^3\sin(A-B) = 0$

প্রমাণ : $a^3\sin(B-C) = a^2.a\sin(B-C)$
$= a^2.2R\sin A\sin(B-C)$
$= 2Ra^2\sin\{\pi - (B+C)\}\sin(B-C)$
$= 2R\,a^2\sin(B+C)\sin(B-C)$
$= 2R.4R^2\sin^2 A(\sin^2 B - \sin^2 C)$
$= 8R^3\sin^2 A(\sin^2 B\ \sin^2 C)$

অনুরূপভাবে আমরা পাই ,

$b^3\sin(C-A) = 8R^3\sin^2 B(\sin^2 C - \sin^2 A)$ ও
$c^3\sin(A-B) = 8R^3\sin^2 C(\sin^2 A - \sin^2 B).$

এখন ; L.H.S.$= a^3\sin(B-C) + b^3\sin(C-A)$
$+ c^3\sin(A-B)$
$= 8R^3(\sin^2 A\sin^2 B - \sin^2 A\sin^2 B + \sin^2 B\sin^2 C$
$- \sin^2 A\sin^2 B + \sin^2 C\sin^2 A - \sin^2 B\sin^2 C)$
$= 8R^3 \times 0 = 0 = \text{R.H.S}$ (Proved).

4. (b) $(b^2-c^2)\cot A + (c^2-a^2)\cot B + (a^2-b^2)\cot C = 0$

প্রমাণ : $(b^2-c^2)\cot A$
$= (b^2-c^2)\frac{R}{abc}(b^2+c^2-a^2)$
$= \frac{R}{abc}\{(b^2-c^2)(b^2+c^2) - a^2(b^2-c^2)\}$
$= \frac{R}{abc}\{b^4 - c^4 - a^2(b^2-c^2)\}$

অনুরূপভাবে আমরা পাই ,

$(c^2 - a^2)\cot B = \frac{R}{abc}\{c^4 - a^4 - b^2(c^2 - a^2)\},$

$(a^2 - b^2)\cot C = \frac{R}{abc}\{a^4 - b^4 - c^2(a^2 - b^2)\}$

L.H.S. $= (b^2 - c^2)\cot A + (c^2 - a^2)\cot B + (a^2 - b^2)\cot C$

$= \frac{R}{abc}\{b^4 - c^4 + c^4 - a^4 + a^4 - b^4 - (a^2b^2 - c^2a^2 + b^2c^2 - a^2b^2 + c^2a^2 - b^2c^2)\}$

$= \frac{R}{abc} \times 0 = 0 =$ R.H.S. (Proved)

4(c) $(a - b)^2 \cos^2\frac{C}{2} + (a + b)^2 \sin^2\frac{C}{2} = c^2$

[কু.'০৯]

প্রমাণ: L.H.S. $= (a-b)^2\cos^2\frac{C}{2} + (a + b)^2 \sin^2\frac{C}{2}$

$= (a - b)^2 \frac{1}{2}(1 + \cos C) + (a + b)^2 \frac{1}{2}(1 - \cos C)$

$= \frac{1}{2}[\{(a - b)^2 + (a + b)^2\} - \{(a + b)^2 - (a - b)^2\}\cos C]$

$= \frac{1}{2}.\{2(a^2 + b^2) - 4ab\cos C\}$

$= a^2 + b^2 - 2ab\cos C = c^2 =$ R.H.S. (Proved)

5. (a) $(s - a)\tan\frac{A}{2} = (s - b)\tan\frac{B}{2} = (s - c)\cot\frac{C}{2}$

প্রমাণ : $(s - a)\tan\frac{A}{2}$

$= (s - a)\frac{\sqrt{(s-b)(s-c)}}{\sqrt{s(s-a)}}$

$= \frac{\sqrt{s-a}\sqrt{s-a}\sqrt{(s-b)(s-c)}}{\sqrt{s(s-a)}}$

$= \frac{\sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)}}{\sqrt{s}}$

$(s - b)\tan\frac{B}{2} = (s - b)\frac{\sqrt{(s-c)(s-a)}}{\sqrt{s(s-b)}}$

$= \frac{\sqrt{s-b}\sqrt{s-b}\sqrt{(s-c)(s-a)}}{\sqrt{s(s-b)}}$

$= \frac{\sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)}}{\sqrt{s}}$

$(s - c)\tan\frac{C}{2} = (s - c)\frac{\sqrt{(s-a)(s-b)}}{\sqrt{s(s-c)}}$

$= \frac{\sqrt{s-c}\sqrt{s-c}\sqrt{(s-a)(s-b)}}{\sqrt{s(s-c)}}$

$= \frac{\sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)}}{\sqrt{s}}$

$\therefore (s-a)\tan\frac{A}{2} = (s - b)\tan\frac{B}{2} = (s - c)\cot\frac{C}{2}$

5(b) $\sin A + \sin B + \sin C = \frac{s}{R}$

প্রমাণ : L.H.S. $= \sin A + \sin B + \sin C$

$= \frac{a}{2R} + \frac{b}{2R} + \frac{c}{2R} = \frac{a+b+c}{2R}$

$= \frac{2s}{2R} = \frac{s}{R} =$ R.H.S. (Proved)

5(c) $a\sin(\frac{A}{2} + B) = (b + c)\sin\frac{A}{2}$

[কু.'০৩; সি.'০৯,'১১; ঢা.'১০; চ.'১১]

প্রমাণ : R.H.S. $= (b + c)\sin\frac{A}{2}$

$= (2R\sin B + 2R\sin C)\sin\frac{A}{2}$

$= 2R(\sin B + \sin C)\sin\frac{A}{2}$

$= 2R\, 2.\sin\frac{1}{2}(B + C)\cos\frac{1}{2}(B - C)\sin\frac{A}{2}$

$= 4R\sin(\frac{\pi}{2} - \frac{A}{2})\sin(\frac{\pi}{2} + \frac{B-C}{2})\sin\frac{A}{2}$

$= 2R.2\cos\frac{A}{2}\sin\frac{A}{2}\sin\frac{\pi+B-C}{2}$

$= 2R\sin A\sin\frac{A+B+C+B-C}{2}$

$= a\sin(\frac{A}{2} + B) =$ R.H.S. (Proved)

6.(a) $a\sin B\sin C + b\sin C\sin A + c\sin A\sin B = \dfrac{3\Delta}{R}$

প্রমাণ : L.H.S. $= a\sin B\sin C + b\sin C\sin A + c\sin A\sin B$

$= a.\dfrac{b}{2R}\cdot\dfrac{c}{2R} + b\dfrac{c}{2R}\dfrac{a}{2R} + c\dfrac{a}{2R}\dfrac{b}{2R}$

$= \dfrac{abc}{4R^2} + \dfrac{abc}{4R^2} + \dfrac{abc}{4R^2} = \dfrac{3abc}{4R^2}$

$= \dfrac{abc}{4R}.\dfrac{3}{R} = \Delta.\dfrac{3}{R} = \dfrac{3\Delta}{R}$ = R.H.S. (Proved)

6(b) $\dfrac{1}{a}\sin A + \dfrac{1}{b}\sin B + \dfrac{1}{c}\sin C = \dfrac{6\Delta}{abc}$ [প্র.ভ.প. '৯৫]

প্রমাণ : L.H.S. $= \dfrac{1}{a}\sin A + \dfrac{1}{b}\sin B + \dfrac{1}{c}\sin C$

$= \dfrac{1}{2R} + \dfrac{1}{2R} + \dfrac{1}{2R} = \dfrac{3}{2R}$

$= \dfrac{3}{2}.\dfrac{1}{R} = \dfrac{3}{2}.\dfrac{4\Delta}{abc} = \dfrac{6\Delta}{abc}$ = R.H.S. (Proved)

7.(a) $\dfrac{\cos B\cos C}{bc} + \dfrac{\cos C\cos A}{ca} + \dfrac{\cos A\cos B}{ab} = \dfrac{1}{4R^2}$

L.H.S. $= \dfrac{\cos B\cos C}{bc} + \dfrac{\cos C\cos A}{ca} + \dfrac{\cos A\cos B}{ab}$

$= \dfrac{a\cos B\cos C + b\cos C\cos A + c\cos A\cos B}{abc}$

$= \dfrac{1}{abc}\{2R\sin A\cos B\cos C + 2R\sin B\cos C\cos A + 2R\sin C\cos A\cos B\}$

$= \dfrac{2R}{abc}\{(\sin A\cos B + \sin B\cos A)\cos C + \sin C\cos A\cos B\}$

$= \dfrac{2R}{abc}\{\sin(A+B)\cos C + \cos A\cos B\sin C\}$

$= \dfrac{2R}{abc}\{\sin(\pi - C)\cos C + \cos A\cos B\sin C\}$

$= \dfrac{2R}{abc}[\sin C\sin\{\pi - (A+B)\} + \cos A\cos B\sin C]$

$= \dfrac{2R}{abc}\sin C\{-\cos(A+B) + \cos A\cos B\}$

$= \dfrac{2R}{abc}\sin C(-\cos A\cos B + \sin A\sin B + \cos A\cos B)$

$= \dfrac{2R}{abc}\sin A\sin B\sin C = \dfrac{2R}{abc}\dfrac{a}{2R}.\dfrac{b}{2R}.\dfrac{c}{2R}$

$= \dfrac{1}{4R^2}$ = R.H.S. (Proved)

7(b) $\dfrac{b^2-c^2}{a^2}\sin 2A + \dfrac{c^2-a^2}{b^2}\sin 2B + \dfrac{a^2-b^2}{c^2}\sin 2C = 0$

প্রমাণ : $\dfrac{b^2-c^2}{a^2}\sin 2A$

$= \dfrac{4R^2(\sin^2 B - \sin^2 C)}{4R^2\sin^2 A}\cdot 2\sin A\cos A$

$= 2\cos A\dfrac{\sin(B+C)\sin(B-C)}{\sin A}$

$= 2\cos A\dfrac{\sin(\pi - A)\sin(B-C)}{\sin A}$

$= \dfrac{2\cos\{\pi-(B+C)\}\sin A\sin(B-C)}{\sin A}$

$= -2\cos(B+C)\sin(B-C)$

$= -(\sin 2B - \sin 2C) = \sin 2C - \sin 2B$

অনুরূপভাবে আমরা পাই ,

$\dfrac{c^2-a^2}{b^2}\sin 2B = \sin 2A - \sin 2C$,

$\dfrac{a^2-b^2}{c^2}\sin 2C = \sin 2B - \sin 2A$

এখন , L.H.S. $= \dfrac{b^2-c^2}{a^2}\sin 2A + \dfrac{c^2-a^2}{b^2}\sin 2B + \dfrac{a^2-b^2}{c^2}\sin 2C$

$= \sin 2C - \sin 2B + \sin 2A - \sin 2C + \sin 2B - \sin 2A$

$= 0$ = R.H.S. (Proved)

8. (a) $a^4 + b^4 + c^4 = 2c^2(a^2 + b^2)$ হলে দেখাও যে, $C = 45^\circ$ অথবা 135° [য.'০৬,'১১; চ.'১৪ ; রা.'১০,'১৪; ঢা.'০৬,'১১,'১৪ ; কু.'০৬,'০৮]

প্রমাণ ঃ দেওয়া আছে ,

$a^4 + b^4 + c^4 = 2c^2(a^2 + b^2)$

$\Rightarrow a^4 + b^4 + c^4 - 2c^2a^2 - 2b^2c^2 = 0$

$\Rightarrow (a^2)^2 + (b^2)^2 + (-c^2)^2 + 2a^2.b^2 + 2b^2(-c^2) + 2(-c^2)a^2 = 2a^2b^2$

$\Rightarrow (a^2 + b^2 - c^2)^2 = 2a^2b^2$

$\Rightarrow a^2 + b^2 - c^2 = \pm\sqrt{2}\,ab$

$\Rightarrow 2ab\cos C = \pm\sqrt{2}\,ab \Rightarrow \cos C = \pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

$\cos C = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ হলে , $\cos C = \cos 45^\circ \therefore C = 45^\circ$

$\cos C = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ হলে , $\cos C = -\cos 45^\circ$

$\Rightarrow \cos C = \cos(180^\circ - 45^\circ) = \cos 135^\circ$

$\therefore C = 135^\circ$

$\therefore C = 45^\circ$ অথবা , 135° (Showed)

8(b) $c^4 - 2(a^2+b^2)c^2 + a^4 + a^2b^2 + b^4 = 0$ হলে দেখাও যে, $C = 60^\circ$ অথবা 120°

সমাধান ঃ দেওয়া আছে ,

$c^4 - 2(a^2 + b^2)c^2 + a^4 + a^2b^2 + b^4 = 0$

$\Rightarrow c^4 - 2a^2c^2 - 2b^2c^2 + a^4 + a^2b^2 + b^4 = 0$

$\Rightarrow (a^2)^2 + (b^2)^2 + (-c^2)^2 + 2a^2b^2 - 2a^2c^2 - 2b^2c^2 = a^2b^2$

$\Rightarrow (a^2 + b^2 - c^2)^2 = 4a^2b^2 . \dfrac{1}{4}$

$\Rightarrow \left(\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}\right)^2 = \dfrac{1}{4}$

$\Rightarrow \cos^2 C = \dfrac{1}{4} \Rightarrow \cos C = \pm\dfrac{1}{2}$

$\therefore \cos C = \dfrac{1}{2} = \cos 60^\circ \Rightarrow C = 60^\circ$

অথবা , $\cos C = -\dfrac{1}{2} = \cos 120^\circ \Rightarrow C = 120^\circ$

$\therefore C = 60^\circ$ অথবা , 120°

9.(a) কোন ত্রিভুজের বাহুগুলো 13, 14 এবং 15 হলে, ত্রিভুজটির ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

[ব.'০২; চ.'০৫; য.'০৭; ঢা.'০৯]

সমাধান : মনে করি , $a = 13$, $b = 14$, $c = 15$.

$\therefore$ অর্ধপরিসীমা $s = \dfrac{1}{2}(a + b + c)$

$= \dfrac{1}{2}(13 + 14 + 15) = \dfrac{1}{2} \times 42 = 21$

$\therefore$ ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল $= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

$= \sqrt{21(21-13)(21-14)(21-15)}$

$= \sqrt{21.8.7.6} = \sqrt{7056} = 84$ (Ans.)

9(b) কোন ত্রিভুজের বাহুগুলো $\dfrac{y}{z} + \dfrac{z}{x}, \dfrac{z}{x} + \dfrac{x}{y}$ এবং $\dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{z}$ হলে,ত্রিভুজটির ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। [সি.বো.০৭]

সমাধান ঃ মনে করি, $a = \dfrac{y}{z} + \dfrac{z}{x}$, $b = \dfrac{z}{x} + \dfrac{x}{y}$ এবং $c = \dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{z}$

$\therefore$ অর্ধপরিসীমা $s = \dfrac{1}{2}(a + b + c)$

$= \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{y}{z} + \dfrac{z}{x} + \dfrac{z}{x} + \dfrac{x}{y} + \dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{z}\right)$

$= \dfrac{1}{2}.2\left(\dfrac{y}{z} + \dfrac{z}{x} + \dfrac{x}{y}\right) = \dfrac{y}{z} + \dfrac{z}{x} + \dfrac{x}{y}$

$s - a = \dfrac{y}{z} + \dfrac{z}{x} + \dfrac{x}{y} - \dfrac{y}{z} - \dfrac{z}{x} = \dfrac{x}{y}$

$s - b = \dfrac{y}{z} + \dfrac{z}{x} + \dfrac{x}{y} - \dfrac{z}{x} - \dfrac{x}{y} = \dfrac{y}{z}$

$s - c = \dfrac{y}{z} + \dfrac{z}{x} + \dfrac{x}{y} - \dfrac{x}{y} - \dfrac{y}{z} = \dfrac{z}{x}$

$\therefore$ ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল $= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

$= \sqrt{\left(\dfrac{y}{z} + \dfrac{z}{x} + \dfrac{x}{y}\right)\dfrac{x}{y}\dfrac{y}{z}\dfrac{z}{x}}$

$$= \sqrt{\left(\frac{y}{z}+\frac{z}{x}+\frac{x}{y}\right)} \text{ (Ans.)}$$

9. (c) $(a+b+c)(b+c-a) = 3bc$ হলে, A কোণের মান নির্ণয় কর। [চ.'০০; য.'০৫,'০৮; রা.'০৭,'১১,'১৩; ঢা.'০৮ ; সি.'১০; দি.'১১,'১৪]

সমাধান ঃ দেওয়া আছে ,

$(a+b+c)(b+c-a) = 3bc$

$\Rightarrow (b+c)^2 - a^2 = 3bc$

$\Rightarrow b^2 + 2bc + c^2 - a^2 = 3bc$

$\Rightarrow b^2 + c^2 - a^2 = bc \Rightarrow 2\,bc\cos A = bc$

$\Rightarrow \cos A = \frac{1}{2} = \cos 60° \therefore A = 60°$ (Ans.)

9(d) ΔABC -এ যদি $A = 60°$ হয়, তবে দেখাও যে, $b+c = 2a\cos\frac{B-C}{2}$

[ঢা.,সি '১০; ব.'০৯; রা.'০৯,'১৪]

প্রমাণ ঃ $b + c = 2R(\sin B + \sin C)$

$= 2R.2\sin\frac{1}{2}(B+C)\cos\frac{1}{2}(B-C)$

$= 4R\sin\frac{1}{2}(120°)\cos\frac{1}{2}(B-C)$

$[\because A = 60°,\ \therefore B + C = 120°]$

$= 4R\cos 60°\cos\frac{1}{2}(B-C)$

$= 2.2R\cos A\cos\frac{1}{2}(B-C)$

$= 2\,a\cos\frac{1}{2}(B-C) =$ R.H.S.

(e) ΔABC -এ $C = 60°$ হলে দেখাও যে , $\frac{1}{a+c} + \frac{1}{b+c} = \frac{3}{a+b+c}$

প্রমাণ ঃ দেওয়া আছে, $C = 60°$

$\therefore \cos C = \cos 60°$

$\Rightarrow \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab} = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow a^2 + b^2 - c^2 = ab$

$\Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca =$

$2c^2 + 3ab + 2bc + 2ca$

$\Rightarrow (a+b+c)^2 + c^2 + bc + ca =$

$3c^2 + 3ab + 3bc + 3ca$

$\Rightarrow (a+b+c)^2 + c(a+b+c) =$

$3\{c^2 + bc + ab + ca)$

$\Rightarrow (a+b+c)(a+b+c+c) =$

$3\{c(c+b) + a(b+c)\}$

$\Rightarrow (a+b+c)(a+c+b+c) =$

$3(a+c)(b+c)$

$\Rightarrow \frac{(b+c)+(a+c)}{(b+c)(a+c)} = \frac{3}{a+b+c}$

$\therefore \frac{1}{a+c} + \frac{1}{b+c} = \frac{3}{a+b+c}$

10.(a) কোন ত্রিভুজের বাহুগুলো সমান্তর প্রগমন ভুক্ত হলে দেখাও যে, $\cot\frac{A}{2}$, $\cot\frac{B}{2}$ ও $\cot\frac{C}{2}$ সমান্তর প্রগমন ভুক্ত।

প্রমাণ ঃ দেওয়া আছে , ABC ত্রিভুজের বাহু a , b , c সমান্তর শ্রেণীভুক্ত ।

$\therefore a - b = b - c$

$\Rightarrow (s-b) - (s-a) = (s-c) - (s-b)$

$\Rightarrow s(s-b) - s(s-a) = s(s-c) - s(s-b)$

$\Rightarrow \frac{s(s-b)}{\Delta} - \frac{s(s-a)}{\Delta} = \frac{s(s-c)}{\Delta} - \frac{s(s-b)}{\Delta}$

$\Rightarrow \cot\frac{B}{2} - \cot\frac{A}{2} = \cot\frac{C}{2} - \cot\frac{B}{2}$

$\Rightarrow \cot\frac{A}{2} - \cot\frac{B}{2} = \cot\frac{B}{2} - \cot\frac{C}{2}$

$\therefore \cot\frac{A}{2}, \cot\frac{B}{2}$ ও $\cot\frac{C}{2}$ সমান্তর শ্রেণীভুক্ত।

10(b) a^2 , b^2 ও c^2 সমান্তর প্রগমন ভুক্ত হলে প্রমাণ কর যে, cot A , cot B ও cot C সমান্তর প্রগমন ভুক্ত ।

প্রমাণ ঃ a^2, b^2 ও c^2 সমান্তরাল শ্রেণীভুক্ত বলে ,

$a^2 - b^2 = b^2 - c^2 \Rightarrow 2a^2 - 2b^2 = 2b^2 - 2c^2$

$\Rightarrow 2b^2 - 2a^2 = 2c^2 - 2b^2$

$\Rightarrow b^2 + c^2 - a^2 - c^2 - a^2 + b^2$

$$= c^2 + a^2 - b^2 - a^2 - b^2 + c^2$$

$$\Rightarrow \frac{R}{abc}\{(b^2+c^2-a^2) - (c^2+a^2-b^2)\}$$

$$= \frac{R}{abc}\{(c^2+a^2-b^2) - (a^2+b^2-c^2)\}$$

$$\Rightarrow \frac{R(b^2+c^2-a^2)}{abc} - \frac{R(c^2+a^2-b^2)}{abc}$$

$$= \frac{R(c^2+a^2-b^2)}{abc} - \frac{R(a^2+b^2-c^2)}{abc}$$

$$\Rightarrow \cot A - \cot B = \cot B - \cot C$$

$\therefore \cot A$, $\cot B$ ও $\cot C$ সমান্তরা শ্রেণীভুক্ত ।

10(c) কোন ত্রিভুজের বাহুগুলো m , n , $\sqrt{m^2+mn+n^2}$ হলে , বৃহত্তম কোণটি নির্ণয় কর ।

সমাধান ঃ m , n এবং $\sqrt{m^2+mn+n^2}$ একটি ত্রিভুজের বাহু বলে , প্রত্যেকেই ধনাত্মক এবং m ও n এর যেকোন ধনাত্মক মানের জন্য ,

$$\sqrt{m^2+mn+n^2} > m \text{ বা }, n$$

$\therefore \sqrt{m^2+mn+n^2}$ বৃহত্তম বাহু।বৃহত্তম কোণ A হলে,

$$\cos A = \frac{m^2+n^2-(\sqrt{m^2+mn+n^2})^2}{2mn}$$

$$= \frac{m^2+n^2-m^2-mn-n^2}{2mn}$$

$$= -\frac{1}{2} = \cos 120° \quad \therefore A = 120°$$

$\therefore$ বৃহত্তম কোণ $120°$.

10.(d) কোন ত্রিভুজের বাহুগুলো $2x+3$, x^2+3x+3 , x^2+2x হলে , বৃহত্তম কোণটি নির্ণয় কর ।

সমাধান ঃ $2x+3$, x^2+3x+3 এবং x^2+2x একটি ত্রিভুজের বাহু বলে , প্রত্যেকেই ধনাত্মক ।

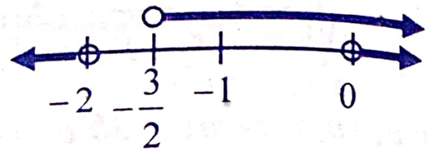
$$\therefore \quad 2x+3>0 \Rightarrow x > -\frac{3}{2},$$

$$x^2+3x+3>0 \Rightarrow (x+\frac{3}{2})^2+3-\frac{9}{4}>0$$

$\Rightarrow (x+\frac{3}{2})^2+\frac{3}{4}>0$; যা x -এর সকল বাস্তব মানের জন্য সত্য এবং

$$x^2+2x>0 \Rightarrow x(x+2)>0$$

$\therefore \quad x>0$ অথবা $x<-2$



$\therefore x>0$ - এর সকল বাস্তব মানের জন্য $2x+3$, x^2+3x+3 ও x^2+2x প্রত্যেকেই ধনাত্মক এবং $x^2+3x+3>2x+3$, $x^2+3x+3>x^2+2x$.
$\therefore x^2+3x+3$ বৃহত্তম বাহু । বৃহত্তম কোণ A হলে,

$$(x^2+3x+3)^2 = (2x+3)^2+(x^2+2x)^2 - 2(2x+3)(x^2+2x)\cos A$$

$$\Rightarrow x^4+9x^2+9+6x^3+18x+6x^2 = 4x^2+9+12x+x^4+4x^2+4x^3 - 2(2x^3+7x^2+6x)\cos A$$

$$\Rightarrow 2x^3+7x^2+6x = -2(2x^3+7x^2+6x)\cos A$$

$$\Rightarrow \cos A = -\frac{1}{2} = \cos 120° \quad \therefore A = 120°$$

10(e) যদি কোন ত্রিভুজের যে কোন দুইটি কোণের কোসাইন তাদের বিপরীত বাহুর সথে ব্যস্ত ভেদে অন্বিত হয়, তবে দেখাও যে, ত্রিভুজটি সমদ্বিবাহু অথবা সমকোণী।

প্রমাণ ঃ মনে করি , ΔABC -এ ,

$$\frac{\cos A}{\cos B} = \frac{b}{a} \Rightarrow \frac{\cos A}{\cos B} = \frac{2R\sin B}{2R\sin A}$$

$\Rightarrow \cos A\sin A = \cos B \sin B$

$\Rightarrow 2\sin A\cos A = 2\sin B\cos B$

$\Rightarrow \sin 2A = \sin 2B$

$\Rightarrow \sin 2A - \sin 2B = 0$

$\Rightarrow 2\sin(A-B)\cos(A+B) = 0$

$\Rightarrow \sin(A-B)\cos(A+B) = 0$

$\therefore \quad \sin(A-B) = 0 \Rightarrow \sin(A-B) = \sin 0$

$\therefore \quad A-B=0 \Rightarrow A=B$

অথবা , $\cos(A+B) = 0$

$\Rightarrow \cos(A+B) = \cos 90° \Rightarrow A+B = 90°$

$\therefore \quad C = 90°$

অতএব , ত্রিভুজটি সমবাহু অথবা সমকোণী ।

10(f) দেখাও যে, কোন ত্রিভুজের বাহুর দৈর্ঘ্য 3 , 5 ও 7 হলে ত্রিভুজটি একটি স্থূলকোণী ত্রিভুজ ; স্থূলকোণটির মান নির্ণয় কর। [চ.,কু. '১০; দি. '১২]

প্রমাণ ঃ এখানে , বৃহত্তম বাহু = 7.

$\therefore$ বৃহত্তম কোণটি A হলে আমরা পাই ,

$$\cos A = \frac{3^2+5^2-7^2}{2.3.5} = \frac{9+25-49}{30}$$

$$= \frac{34-49}{30} = \frac{-15}{30} = -\frac{1}{2} = \cos 120°$$

$\therefore A = 120°$, যা স্থূলকোণ।

অতএব, ত্রিভুজটি একটি স্থূলকোণী এবং স্থূলকোণটির মান $120°$.

11.(a) ΔABC -এ যদি $A = 75°$, $B = 45°$ হয় , তবে দেখাও যে , $c : b = \sqrt{3} : \sqrt{2}$ [ব.'০৭]

প্রমাণ ঃ দেওয়া আছে, ΔABC –এ $A = 75^0, B = 45^0$

$\therefore C = 180^0 - (75^0 + 45^0) = 180^0 - 120^0 = 60^0$

ত্রিভুজের সাইন সূত্র হতে পাই, $\dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C}$

$$\Rightarrow \frac{b}{\sin 45^0} = \frac{c}{\sin 60^0} \Rightarrow \frac{b}{\frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{c}{\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

$$\therefore c : a = \frac{\sqrt{3}}{2} : \frac{1}{\sqrt{2}} = \sqrt{3} : \sqrt{2}$$

11. (b) ΔABC- এ যদি $A = 45°$, $B = 75°$ হয় , তবে দেখাও যে , $a + \sqrt{2}\, c = 2b.$

প্রমাণ ঃ দেওয়া আছে, ΔABC –এ $A = 45^0, B = 75^0$

$\therefore C = 180^0 - (45^0 + 75^0) = 180^0 - 120^0 = 60^0$

ত্রিভুজের সাইন সূত্র হতে পাই,

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

$$\Rightarrow \frac{a}{\sin 45^0} = \frac{b}{\sin 75^0} = \frac{c}{\sin 60^0}$$

এখন, $\sin 75° = \sin(45° + 30°)$

$= \sin 45° \cos 30° + \cos 45° \sin 30°$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} . \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}} . \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$$

$$\therefore \frac{a}{\frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{b}{\frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}} = \frac{c}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = k \text{ (ধরি)}$$

$$a = \frac{k}{\sqrt{2}}, b = \frac{k(1+\sqrt{3})}{2\sqrt{2}}, c = \frac{\sqrt{3}}{2}k$$

এখন, $a + \sqrt{2}c = \dfrac{k}{\sqrt{2}} + \sqrt{2}.\dfrac{\sqrt{3}}{2}k = \dfrac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{2}}k$

$$= 2.\frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}k = 2b$$

$\therefore a + \sqrt{2}c = 2b$

11(c) $a = 2b$ এবং $A = 3B$ হলে, ত্রিভুজের কোণত্রয় নির্ণয় কর। [কু. '০৯,'১২ ; প্র.ভ.প'০৩]

সমাধান ঃ দেওয়া আছে, $a = 2b \cdots\cdots(1)$

এবং $A = 3B \cdots\cdots\cdots(2)$

(1) হতে পাই , $2R \sin A = 2 .2R \sin B$

$\Rightarrow \sin A = 2\sin B \Rightarrow \sin 3B = 2\sin B$; (2) দ্বারা।

$\Rightarrow 3\sin B - 4\sin^3 B = 2\sin B$

$\Rightarrow 4\sin^3 B - \sin B = 0 \Rightarrow \sin B(4\sin^2 B - 1) = 0$

$\Rightarrow \sin B(2\sin B + 1)(2\sin B - 1) = 0$

$\sin B = 0$ হলে , $B = 0$

$2 \sin B + 1 = 0$ হলে , $\sin B = -\dfrac{1}{2}$

$\therefore B = 150°$ এবং $A = 3B = 450°$

কিন্তু ABC ত্রিভুজের জন্য, $B = 0$ এবং $A = 450°$ সম্ভব নয় ।

$\therefore \sin B \neq 0$ এবং $\sin B \neq -1/2$.

$\therefore \sin B = \dfrac{1}{2} = \sin 30° \Rightarrow B = 30°$

$\therefore A = 3B = 3 \times 30° = 90°$ এবং

$C = 180° - (90° + 30°)$

$= 180° - 120° = 60°$

$\therefore$ ত্রিভুজের কোণ তিনটি $30°, 60°, 90°$

12. (a) ΔABC - এ, $a = 2$, $b = \sqrt{3} + 1$ এবং $C = 60°$ হলে ত্রিভুজটির অপর বহু ও কোণদ্বয় নির্ণয় কর। [প্র.ভ.প'০২]

সমাধান ঃ দেওয়া আছে, ΔABC –এ $a = 2, b = \sqrt{3} + 1$ এবং $C = 60^0$. ত্রিভুজের সাইন সূত্র হতে পাই,

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$$

$$= 2^2 + (\sqrt{3}+1)^2 - 2.2.(\sqrt{3}+1)\cos 60^0$$

$$= 4 + 3 + 2\sqrt{3} + 1 - 4(\sqrt{3}+1)/2$$

$$= 8 + 2\sqrt{3} - 2\sqrt{3} - 2 = 6 \quad \therefore c = \sqrt{6}$$

ত্রিভুজের সাইন সূত্র হতে পাই, $\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C}$

$$\Rightarrow \frac{2}{\sin A}=\frac{\sqrt{3}+1}{\sin B}=\frac{\sqrt{6}}{\sin 60^0}$$

$$\Rightarrow \frac{2}{\sin A}=\frac{\sqrt{3}+1}{\sin B}=\frac{\sqrt{3}\sqrt{2}}{\sqrt{3}/2}=2\sqrt{2}$$

$$\therefore \sin A=\frac{2}{2\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}=\sin 45^0 \Rightarrow A=45^0$$

$$\sin B=\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}=\sin 75^0 \Rightarrow B=75^0$$

$\therefore$ ত্রিভুজটির অপর বাহু $c=\sqrt{6}$ এবং কোণদ্বয় $A=45^0$ ও $B=75^0$

12(b) Δ ABC- এ, A = 45°, C = 105° এবং $c=\sqrt{3}+1$ হলে ত্রিভুজটির অপর কোণ ও বহুদ্বয় নির্ণয় কর।

সমাধানঃ দেওয়া আছে, ΔABC –এ $A=45^0$, $C=105^0$ এবং $c=\sqrt{3}+1$.

$\therefore B=180^0-(45^0+105^0)=180^0-150^0=30^0$

ত্রিভুজের সাইন সূত্র হতে পাই, $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$

$$\Rightarrow \frac{a}{\sin 45^0}=\frac{b}{\sin 30^0}=\frac{\sqrt{3}+1}{\sin 105^0}$$

এখন, $\sin 105°=\sin(60°+45°)$
$=\sin 60°\cos 45°+\cos 60°\sin 45°$
$=\frac{\sqrt{3}}{2}.\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{2}.\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$

$$\therefore \frac{a}{\frac{1}{\sqrt{2}}}=\frac{b}{\frac{1}{2}}=\frac{\sqrt{3}+1}{\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}} \Rightarrow \sqrt{2}a=2b=2\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow a=2, b=\sqrt{2}$$

$\therefore$ ত্রিভুজটির অপর কোণ 30^0 এবং বাহুদ্বয় 2 ও $\sqrt{2}$

12(c) Δ ABC-এ, B = 30°, C = 45° ও $a=(\sqrt{3}+1)$ সেমি. দেখাও যে, ABC ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল $\frac{1}{2}(\sqrt{3}+1)$ বর্গ সেমি.।

প্রমাণ ঃ দেওয়া আছে, ΔABC –এ $B=30^0, C=45^0$ এবং $a=(\sqrt{3}+1)$ সে.মি.

$\therefore A=180^0-(30^0+45^0)=180^0-75^0=105^0$

ত্রিভুজের সাইন সূত্র হতে পাই, $\frac{a}{\sin A}=\frac{c}{\sin C}$

$$\Rightarrow \frac{a}{\sin 105^0}=\frac{c}{\sin 45^0}$$

এখন, $\sin 105°=\sin(60°+45°)$
$=\sin 60°\cos 45°+\cos 60°\sin 45°$
$=\frac{\sqrt{3}}{2}.\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{2}.\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$

$$\therefore \frac{\sqrt{3}+1}{\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}}=\frac{c}{\frac{1}{\sqrt{2}}} \Rightarrow 2\sqrt{2}=\sqrt{2}c \Rightarrow c=2$$

$\therefore$ ABC ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল $=\frac{1}{2}ac\sin B$ বর্গ একক

$=\frac{1}{2}(\sqrt{3}+1)\times 2\sin 30^0$ বর্গ সে.মি.

$=\frac{1}{2}(\sqrt{3}+1)\times 2\times\frac{1}{2}$ বর্গ সে.মি.

$=\frac{1}{2}(\sqrt{3}+1)$ বর্গ সে.মি.

সম্ভাব্য ধাপসহ প্রশ্ন:

ABC ত্রিভুজে প্রমাণ কর যে,

13(a) $(b-c)\sin A+(c-a)\sin B+(a-b)\sin C=0$

প্রমাণ : L.H.S. $=(b-c)\sin A+(c-a)\sin B+(a-b)\sin C$
$=(2R\sin B-2R\sin C)\sin A+(2R\sin C-2R\sin A)\sin B+(2R\sin A-2R\sin B)\sin C$ (১)
$=2R(\sin A\sin B-\sin A\sin C+\sin B\sin C-\sin A\sin B+\sin A\sin C-\sin B\sin C)$ (১)
$=2R\times 0=0=$ R.H.S. (Proved)

13(b) $a(\sin B-\sin C)+b(\sin C-\sin A)+c(\sin A-\sin B)=0$

প্রমাণ : L.H.S. $=a(\sin B-\sin C)+b(\sin C-\sin A)+c(\sin A-\sin B)$
$=2R\sin A(\sin B-\sin C)+2R\sin B(\sin C-\sin A)+2R\sin C(\sin A-\sin C)$ (১)
$=2R(\sin A\sin B-\sin A\sin C+\sin B\sin C$

$-\sin A\sin B+\sin A\sin C-\sin B\sin C)$
$=2R\times 0=0=$ R.H.S. (Proved) (১)

14.(a) $(b^2-c^2)\sin^2A+(c^2-a^2)\sin^2B+(a^2-b^2)\sin^2C=0$

প্রমাণ : L.H.S.$=(b^2-c^2)\sin^2A+(c^2-a^2)\sin^2B+(a^2-b^2)\sin^2C$
$=(4R^2\sin^2B-4R^2\sin^2C)\sin^2A+(4R^2\sin^2C-4R^2\sin^2A)\sin^2B+(4R^2\sin^2A-4R^2\sin^2B)\sin^2C$ (১)
$=4R^2(\sin^2A\sin^2B-\sin^2C\sin^2A+\sin^2B\sin^2C-\sin^2A\sin^2B+\sin^2C\sin^2A-\sin^2B\sin^2C)$
$=4R^2\times 0=0=$ R.H.S. (Proved) (১)

14 (b) $a\sin(B-C)+b\sin(C-A)+c\sin(A-B)=0$ **[কু.'০০]**

প্রমাণ : L.H.S. $=a\sin(B-C)+b\sin(C-A)+c\sin(A-B)$
$=2R\sin A(\sin B\cos C-\cos B\sin C)+2R\sin B(\sin C\cos A-\sin A\cos C)+2R\sin C(\sin A\cos B-\sin B\cos A)$ (১) + (১)
$=2R(\sin A\sin B\cos C-\sin A\cos B\sin C+\cos A\sin B\sin C-\sin A\sin B\cos C+\sin A\cos B\sin C-\cos A\sin B\sin C)$
$=2R\times 0=0=$ R.H.S. (Proved) (১)

15. (a) $\dfrac{a^2\sin(B-C)}{\sin A}+\dfrac{b^2\sin(C-A)}{\sin B}+\dfrac{c^2\sin(A-B)}{\sin C}=0$

প্রমাণ : $\dfrac{a^2\sin(B-C)}{\sin A}$
$=\dfrac{(2R\sin A)^2\sin(B-C)}{\sin A}$ (১)
$=4R^2\sin A\sin(B-C)$
$=4R^2\sin\{\pi-(B+C)\}\sin(B-C)$
$=4R^2\sin(B+C)\sin(B-C)$ (১)
$=4R^2(\sin^2B-\sin^2C)$

অনুরূপভাবে আমরা পাই ,

$\dfrac{b^2\sin(C-A)}{\sin B}=4R^2(\sin^2C-\sin^2A)$ এবং

$\dfrac{c^2\sin(A-B)}{\sin C}=4R^2(\sin^2A-\sin^2B)$ (১)

এখন , L.H.S.$=\dfrac{a^2\sin(B-C)}{\sin A}+\dfrac{b^2\sin(C-A)}{\sin B}+\dfrac{c^2\sin(A-B)}{\sin C}$
$=4R^2(\sin^2B-\sin^2C+\sin^2C-\sin^2A+\sin^2A-\sin^2B)$
$=4R^2\times 0=0=$ R.H.S. (Proved) (১)

15(b) $a\sin\dfrac{A}{2}\sin\dfrac{B-C}{2}+b\sin\dfrac{B}{2}\sin\dfrac{C-A}{2}+c\sin\dfrac{C}{2}\sin\dfrac{A-B}{2}=0$ **[রা.'০৩]**

প্রমাণ : $a\sin\dfrac{A}{2}\sin\dfrac{B-C}{2}$
$=2R\sin A\sin\dfrac{1}{2}A\sin\dfrac{B-C}{2}$ (১)
$=2R\sin A\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{B+C}{2}\right)\sin\dfrac{B-C}{2}$
$=2R\sin A\cos\dfrac{B+C}{2}\sin\dfrac{B-C}{2}$ (১)
$=R\sin A(\sin B-\sin C)$ (১)

অনুরূপভাবে আমরা পাই ,

$b\sin\dfrac{B}{2}\sin\dfrac{C-A}{2}=R\sin B(\sin C-\sin A)$ এবং

$c\sin\dfrac{C}{2}\sin\dfrac{A-B}{2}=R\sin C(\sin A-\sin B)$ (১)

এখন , L.H.S.$=a\sin\dfrac{A}{2}\sin\dfrac{B-C}{2}+b\sin\dfrac{B}{2}\sin\dfrac{C-A}{2}+c\sin\dfrac{C}{2}\sin\dfrac{A-B}{2}$
$=R(\sin A\sin B-\sin C\sin A+\sin B\sin C-\sin A\sin B+\sin C\sin A-\sin B\sin C)$
$=R\times 0=0$ (১)

16(a) $\dfrac{2\cot A + \cot B + \cot C}{\cot A - \cot B + 2\cot C} = \dfrac{b^2 + c^2}{2b^2 - c^2}$

প্রমাণ : $2\cot A + \cot B + \cot C$

$= 2\dfrac{R}{abc}(b^2 + c^2 - a^2) + \dfrac{R}{abc}(c^2 + a^2 - b^2) + \dfrac{R}{abc}(a^2 + b^2 - c^2)$ (১)

$= \dfrac{R}{abc}(2b^2 + 2c^2 - 2a^2 + c^2 + a^2 - b^2 + a^2 + b^2 - c^2)$

$= \dfrac{R}{abc}(2b^2 + 2c^2) = \dfrac{2R}{abc}(b^2 + c^2)$

এবং $\cot A - \cot B + 2\cot C = \dfrac{R}{abc}\{b^2 + c^2 - a^2 - (c^2 + a^2 - b^2) + 2(a^2 + b^2 - c^2)\}$

$= \dfrac{R}{abc}(b^2 + c^2 - a^2 - c^2 - a^2 + b^2 + 2a^2 + 2b^2 - 2c^2)$

$= \dfrac{R}{abc}(4b^2 - 2c^2) = \dfrac{2R}{abc}(2b^2 - c^2)$

এখন , L.H.S. $= \dfrac{2\cot A + \cot B + \cot C}{\cot A - \cot B + 2\cot C}$

$= \dfrac{\frac{2R}{abc}(b^2 + c^2)}{\frac{2R}{abc}(2b^2 - c^2)} = \dfrac{b^2 + c^2}{2b^2 - c^2} =$ R.H.S. (১)

16(b) $4\Delta(\cot A + \cot B + \cot C) = a^2 + b^2 + c^2$

প্রমাণ :L.H.S.= $4\Delta(\cot A + \cot B + \cot C)$

$= 4\Delta\dfrac{R}{abc}(b^2 + c^2 - a^2 + c^2 + a^2 - b^2 + a^2 + b^2 - c^2)$ (১)

$= 4.\dfrac{abc}{4R}\,\dfrac{R}{abc}(a^2 + b^2 + c^2)$

$= a^2 + b^2 + c^2 =$ R.H.S (Proved) (১)

17(a)$(a\ \ b+c)(\tan\dfrac{A}{2} + \tan\dfrac{B}{2}) = 2c\cot\dfrac{C}{2}$

প্রমাণ :L.H.S.= $(a + b + c)(\tan\dfrac{A}{2} + \tan\dfrac{B}{2})$

$= (a + b + c)\left(\dfrac{(s-b)(s-c)}{\Delta} + \dfrac{(s-c)(s-a)}{\Delta}\right)$ (১)

$= (s - c).(a + b + c)\dfrac{2s - b - a}{\Delta}$

$= (s - c).2s\,\dfrac{a + b + c - b - a}{\Delta} = 2c.\dfrac{s(s-c)}{\Delta}$

$= 2c\cot\dfrac{C}{2} =$ R.H.S. (Proved) (১)

(b) $(b + c - a)\tan\dfrac{A}{2} = (c + a - b)\tan\dfrac{B}{2} = (a + b - c)\tan\dfrac{C}{2}$

প্রমাণ : L.H.S. $= (b + c - a)\tan\dfrac{A}{2}$

$= (a + b + c - 2a)\dfrac{(s-b)(s-c)}{\Delta}$ (১)

$= (2s - 2a)\dfrac{(s-b)(s-c)}{\Delta}$

$= \dfrac{2(s-a)(s-b)(s-c)}{\Delta}$

M.H.S. $= (c + a - b)\tan\dfrac{B}{2}$

$= (2s - 2b)\dfrac{(s-c)(s-a)}{\Delta}$

$= \dfrac{2(s-a)(s-b)(s-c)}{\Delta}$

R.H.S. $= (a + b - c)\tan\dfrac{C}{2}$

$= (2s - 2c)\dfrac{(s-a)(s-b)}{\Delta}$

$= \dfrac{2(s-a)(s-b)(s-c)}{\Delta}$

$\therefore$ L.H.S. = M.H.S. = R.H.S. (Proved) (১)

18(a) $\dfrac{1}{a}\cos^2\dfrac{A}{2} + \dfrac{1}{b}\cos^2\dfrac{B}{2} + \dfrac{1}{c}\cos^2\dfrac{C}{2} = \dfrac{s^2}{abc}$ [প্র.ভ.প. '০০]

L.H.S. $= \frac{1}{a}\cos^2\frac{A}{2} + \frac{1}{b}\cos^2\frac{B}{2} + \frac{1}{c}\cos^2\frac{C}{2}$

$= \frac{1}{a}\frac{s(s-a)}{bc} + \frac{1}{b}\frac{s(s-b)}{ca} + \frac{1}{c}\frac{s(s-c)}{ab}$ (১)

$= \frac{s(s-a)+s(s-b)+s(s-c)}{abc}$

$= \frac{3s^2 - s(a+b+c)}{abc} = \frac{3s^2 - s.2s}{abc}$

$= \frac{s^2}{abc} =$ R.H.S. (১)

18(b) $\frac{a^2-b^2}{2}\cdot\frac{\sin A\sin B}{\sin(A-B)} = \Delta$

প্রমাণ : $\frac{a^2-b^2}{2}\cdot\frac{\sin A\sin B}{\sin(A-B)}$

$= \frac{4R^2(\sin^2 A - \sin^2 B)}{2}\cdot\frac{\sin A\sin B}{\sin(A-B)}$ (১)

$= \frac{2R^2\sin(A+B)\sin(A-B)\sin A\sin B}{\sin(A-B)}$

$= 2R^2\sin(\pi - C)\sin A\sin B$

$= 2R^2\sin A\sin B\sin C$ (১)

$= 2R^2.\frac{a}{2R}.\frac{b}{2R}.\frac{c}{2R}$ (১)

$= \frac{abc}{4R} = \Delta =$ R.H.S.(Proved) (১)

19. (a) $\frac{b^2-c^2}{\cos B+\cos C} + \frac{c^2-a^2}{\cos C+\cos A} + \frac{a^2-b^2}{\cos A+\cos B} = 0$

প্রমাণ : $\frac{b^2-c^2}{\cos B+\cos C} = \frac{4R^2(\sin^2 B - \sin^2 C)}{\cos B+\cos C}$ (১)

$= \frac{4R^2(\cos^2 C - \cos^2 B)}{\cos B+\cos C}$ (১)

$= \frac{4R^2(\cos C+\cos B)(\cos C-\cos B)}{\cos B+\cos C}$

$= 4R^2(\cos C - \cos B)$

অনুরূপভাবে আমরা পাই,

$\frac{c^2-a^2}{\cos C+\cos A} = 4R^2(\cos A - \cos C)$ এবং

$\frac{a^2-b^2}{\cos A+\cos B} = 4R^2(\cos B - \cos A)$ (১)

এখন, L.H.S. $= \frac{b^2-c^2}{\cos B+\cos C} + \frac{c^2-a^2}{\cos C+\cos A} + \frac{a^2-b^2}{\cos A+\cos B}$

$= 4R^2\{\cos C - \cos B + \cos A - \cos C + \cos B - \cos A\}$

$= 4R^2\times 0 = 0 =$ R.H.S. (Proved) (১)

19(b) $\frac{b-c}{a}\cos^2\frac{A}{2} + \frac{c-a}{b}\cos^2\frac{B}{2} + \frac{a-b}{c}\cos^2\frac{C}{2} = 0$

প্রমাণ : L.H.S. $= \frac{b-c}{a}\cos^2\frac{A}{2} + \frac{c-a}{b}\cos^2\frac{B}{2} + \frac{a-b}{c}\cos^2\frac{C}{2}$

$= \frac{b-c}{a}\times\frac{s(s-a)}{bc} + \frac{c-a}{b}\times\frac{s(s-b)}{ca} + \frac{a-b}{c}\times\frac{s(s-c)}{ab}$ (১)

$= \frac{s}{abc}\{(b-c)(s-a) + (c-a)(s-b) + (a-b)(s-c)\}$

$= \frac{s}{abc}\{s(b-c+c-a+a-b) + (-ab+ca-bc+ab-ca+bc)\}$

$= \frac{s}{abc}\{s\times 0 + 0\} = 0 =$ R.H.S.(Proved) (১)

20(a) ΔABC -তে $\frac{b+c}{11} = \frac{c+a}{12} = \frac{a+b}{13}$ হলে

প্রমাণ কর যে, $\frac{\cos A}{7} = \frac{\cos B}{19} = \frac{\cos C}{25}$

প্রমাণ : দেওয়া আছে,

$\frac{b+c}{11} = \frac{c+a}{12} = \frac{a+b}{13} = \frac{b+c+c+a+a+b}{11+12+13}$ (১)

$$\Rightarrow \frac{b+c}{11}=\frac{c+a}{12}=\frac{a+b}{13}=\frac{2(a+b+c)}{36}$$

$$\Rightarrow \frac{b+c}{11}=\frac{c+a}{12}=\frac{a+b}{13}=\frac{a+b+c}{18}$$

$$\therefore \frac{a+b+c}{18}=\frac{b+c}{11}=\frac{a+b+c-b-c}{18-11}=\frac{a}{7},$$

$$\frac{a+b+c}{18}=\frac{c+a}{12}=\frac{a+b+c-c-a}{18-12}=\frac{b}{6}$$ এবং

$$\frac{a+b+c}{18}=\frac{a+b}{13}=\frac{a+b+c-a-b}{18-13}=\frac{c}{5}$$ (১)

$$\therefore \frac{a}{7}=\frac{b}{6}=\frac{c}{5}=k \text{ (say)}$$

$\Rightarrow a = 7k, b = 6k, c = 5k$

এখন ,

$$\cos A = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$$ (১)

$$=\frac{36k^2+25k^2-49k^2}{2.6k.5k}=\frac{61-49}{60}=\frac{12}{60}=\frac{1}{5}$$

$$\cos B = \frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}=\frac{25k^2+49k^2-36k^2}{2.5k.7k}$$

$$=\frac{74-36}{70}=\frac{38}{70}=\frac{19}{35}$$

$$\cos C = \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\frac{49k^2+36k^2-25k^2}{2.7k.6k}$$

$$=\frac{85-25}{84}=\frac{60}{84}=\frac{5}{7}$$

$$\therefore \cos A : \cos B : \cos C = \frac{1}{5}:\frac{19}{35}:\frac{5}{7} = 7 : 19 : 25$$

$$\therefore \frac{\cos A}{7}=\frac{\cos B}{19}=\frac{\cos C}{25}$$ (Showed) (১)

20. (b) ΔABC- এ , $a = 6$, $b = 3\sqrt{3}$ এবং $A = 90°$ হলে B কোণের মান নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ দেওয়া আছে,

ΔABC -এ $a = 6, b = 3\sqrt{3}$ ও $A = 90^0$

ত্রিভুজের সাইন সূত্র হতে পাই, $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}$ (১)

$$\Rightarrow \frac{6}{\sin 90^0}=\frac{3\sqrt{3}}{\sin B} \Rightarrow \frac{6}{1}=\frac{3\sqrt{3}}{\sin B}$$

$$\Rightarrow \sin B = \frac{3\sqrt{3}}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}=\sin 60^0 \therefore B = 60^0$$ (১)

21. $\frac{\cos x+\cos y+\cos z}{\cos(x+y+z)}=\frac{\sin x+\sin y+\sin z}{\sin(x+y+z)}=p$ হলে প্রমাণ কর যে,

$\cos(x+y)+\cos(y+z)+\cos(z+x)=p$

প্রমাণ : $\cos(x+y)=\cos(x+y+z-z)$

$=\cos(x+y+z)\sin z-\sin(x+y+z)\cos z$

অনুরূপভাবে,

$\cos(y+z)=\cos(x+y+z)\sin x-\sin(x+y+z)\cos z$

$\cos(z+x)=\cos(x+y+z)\sin y-\sin(x+y+z)\cos y$

$\therefore$ $\cos(x+y)+\cos(y+z)+\cos(z+x)=$

$(\sin x+\sin y+\sin z)\cos(x+y+z)-$

$(\cos x+\cos y+\cos z)\sin(x+y+z)$

$=p\cos^2(x+y+z)+p\sin^2(x+y+z)$

$\therefore$ $\cos(x+y)+\cos(y+z)+\cos(z+x)=p$

22. ΔABC- এ, প্রমাণ কর যে $P = \sin A+\sin B+\sin C$ সর্বোচ্চ হবে যদি $A = B = C$.

প্রমাণ : $P = \sin A+\sin B+\sin C$

$=\sin A+\sin B+\sin(\pi-A-B)$

$$=2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}+2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A+B}{2}$$

$$=2\sin\frac{A+B}{2}\{\cos\frac{A-B}{2}+\sin\frac{A+B}{2}\}$$

$$=2\sin\frac{A+B}{2}.2\cos\frac{A}{4}\cos\frac{B}{4}$$

$$=4\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A}{4}\cos\frac{B}{4}$$

P সর্বোচ্চ হবে যদি, $A = B$ হয়।

$\therefore$ $P=2\sin A(1+\cos A)$

$=2\sin A(1+\cos A)$

ধরি, $f(x)=2\sin x(1+\cos x)$

$\therefore f'(x)=2\cos x(1+\cos x)+2\sin x(-\sin x)$

$=2\{\cos x+\cos^2 x-\sin^2 x\}$

$=2\{\cos x+2\cos^2 x-1\}$

$= 2\{2\cos^2 x + 2\cos x - \cos x - 1\}$
$= 2\{2\cos x(\cos x + 1) - 1(\cos x + 1)\}$
$= 2(2\cos x - 1)(\cos x + 1)$

$f'(x) = 0$ হলে, $\cos x = \frac{1}{2}$ অথবা $\cos x = -1$

$\cos x = \frac{1}{2}$ হলে, $x = \frac{\pi}{3}$

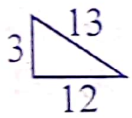
$\therefore \ A = B = \frac{\pi}{3} = C$, $[A + B + C = \pi]$

ভর্তি পরীক্ষার MCQ প্রশ্ন উত্তরসহ ঃ

1.(a) $\tan\theta = \frac{5}{12}$ এবং θ সূক্ষ্মকোণ হলে $\sin\theta + \sec(-\theta)$ এর মান– [DU 08-09]

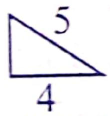
(b) যদি $\cos A = \frac{4}{5}$ হয়, তবে $\frac{1 + \tan^2 A}{1 - \tan^2 A}$ এর মান– [BUET 06-07]

Sol^n.: (a) θ সূক্ষ্মকোণ বলে



$\sin\theta + \sec(-\theta) = \frac{5}{13} + \frac{13}{12} = \frac{229}{156}$

(b) $\tan A = \frac{3}{4}$ $\therefore$ $\frac{1 + \tan^2 A}{1 - \tan^2 A} = \frac{25}{7}$



(ক্যালকুলেটরের সাহায্যে)

2. $\cot A - \tan A$ সমান– [DU 08-09]

Sol^n.: $\cot A - \tan A = \frac{\cos^2\theta - \sin^2\theta}{\sin\theta\cos\theta}$

$= \frac{2\cos 2\theta}{2\sin\theta\cos\theta} = 2\cot 2\theta$

3.(a) $\cos^2 0^0 + \cos^2 10^0 + \cos^2 20^0 + \dots + \cos^2 90^0$ এর মান – [DU 08-09]

(b) $\cos^2 30^0 + \cos^2 60^0 + \cos^2 90^0 + \dots + \cos^2 180^0$ এর মান – [BUET 06-07]

Sol^n.: (a) এখানে পদ সংখ্যা $= \frac{90 - 0}{10} + 1 = 10$ অর্থাৎ 5 জোড়া পদ। Ans. 5

(b) এখানে পদ সংখ্যা $= \frac{180 - 30}{30} + 1 = 6$ অর্থাৎ 3 জোড়া পদ। Ans. 3

4. $\cos 75^0$ এর সঠিক মান –**[BUET, DU 07-08]**

A. $\frac{\sqrt{3} + 1}{2\sqrt{2}}$ **B.** $\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$ **C.** $\frac{-\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$ **D.** $\frac{\sqrt{3} - 1}{2\sqrt{2}}$

Sol^n.: ক্যালকুলেটরের সাহায্যে, $\cos 75^0 = 0.2588$
Option D = 0.2588 **Ans. D**

5. $\sin(780^0)\cos(390^0) - \sin(330^0)\cos(-300^0)$ এর মান–**[DU 02-03, 05-06;Jt U 05-06,08-09]**

Sol^n.: ক্যালকুলেটরের সাহায্যে রাশি মান = 1.

6. $\tan 54^0 - \tan 36^0$ এর মান– **[DU 03-04; BUET 03-04]**

Sol^n.: প্রদত্ত মান $= 2\tan(54^0 - 36^0)$

$= 2\tan 18^0$ [নিয়ম ঃ $A + B = 90^0$ হলে $\tan A - \tan B = 2\tan(A - B)$]

অথবা, ক্যালকুলেটরের সাহায্যে করতে হবে।

7. $\sin 65^0 + \cos 65^0$ সমান– **[DU 02-03; KU 06-07]**

প্রদত্ত মান $= \sqrt{2}\sin(65^0 + 45^0) = \sqrt{2}\sin 115^0$

$= \sqrt{2}\cos(65^0 - 45^0) = \sqrt{2}\cos 20^0$

নিয়ম ঃ $a\cos A + b\sin A$

$= \sqrt{a^2 + b^2}\sin(A + \tan^{-1}\frac{b}{a})$

$= \sqrt{a^2 + b^2}\cos(A - \tan^{-1}\frac{b}{a})$

8. $\tan 15^0$ এর মান– **[DU 00-01; CU 07-08]**

A. $2 + \sqrt{2}$ **B.** $2 - \sqrt{3}$
C. $2 + \sqrt{3}$ **D.** $3 + \sqrt{2}$

Sol^n.: ক্যালকুলেটরের সাহায্যে, $\tan 15^0 = 0.268$
Option B = 0.268 . Ans.B

9. $\frac{\sin 75^0 - \sin 15^0}{\sin 75^0 + \sin 15^0}$ এর মান–

[DU 99-00, 04-05]

Sol".: প্রদত্ত রাশি = $\dfrac{\cos 15^0 - \sin 15^0}{\cos 15^0 + \sin 15^0}$

$= \tan(45^0 - 15^0) = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$

নিয়ম : 1. $\dfrac{\cos A - \sin A}{\cos A + \sin A} = \tan(45^0 - A)$

2. $\dfrac{\cos A + \sin A}{\cos A - \sin A} = \tan(45^0 + A)$

অথবা, ক্যালকুলেটরের সাহায্যে প্রদত্ত রাশি = 0.57735

10. $\cot\dfrac{\pi}{20}\cot\dfrac{3\pi}{20}\cot\dfrac{5\pi}{20}\cot\dfrac{7\pi}{20}\cot\dfrac{9\pi}{20}$

[RU 07-08]

Sol".: ক্যালকুলেটরের সাহায্যে প্রদত্ত মান = 1

$\dfrac{\pi}{20} = \dfrac{180}{20} = 9$

[1] [÷] [tan] [Ans] [tan] [3] [Ans] [tan] [5] [Ans] [tan] [7] [Ans] [tan] [9] [Ans] [=]

11. $\dfrac{1 - \cos 2\theta + \sin 2\theta}{1 + \cos 2\theta + \sin 2\theta} = ?$

[CU 02-03, RU 07-08]

A. $\sec\theta$ B. $\sin\theta$ C. $\tan\theta$ D. $\cot\theta$

Sol".: $\theta = 30^0$ বসিয়ে প্রদত্ত রাশি = 0.5773

$\tan 30^0 = 0.5773$

Ans. D

12. n একটি পূর্ণ সংখ্যা হলে $\cos\{(2n+1)\pi + \pi/3\}$

[SU 06-070]

A. $-\dfrac{1}{2}$ B. 0 C. 1 D. কোনটিই নয়।

Sol".: n = 0 হলে প্রদত্ত রাশি $= \cos(\pi + \pi/3) = -\dfrac{1}{2}$

n = 1 হলে প্রদত্ত রাশি $= \cos(3\pi + \pi/3) = -\dfrac{1}{2}$

13.(a) $\tan 27^0 + \tan 18^0 + \tan 27^0 \tan 18^0$ এর মান–

[IU 05-06]

(b) $\tan 75^0 - \tan 30^0 - \tan 75^0 \tan 30^0$ এর মান–

[DU 03-04]

Sol".: (a) প্রদত্ত রাশি = $\tan(27^0 + 18^0) = 1$

b) প্রদত্ত রাশি = 1

অথবা, ক্যালকুলেটরের সাহায্যে প্রদত্ত রাশি = 1

নিয়ম : (a) $A + B = n\pi + \pi/4$ হলে,

$\tan A + \tan B + \tan A \tan B = 1$

(b) $A - B = \pi/4$ হলে,

$\tan A - \tan B - \tan A \tan B = 1$

অথবা, ক্যালকুলেটরের সাহায্যে প্রদত্ত রাশি = 1

14. $\sin A = \dfrac{1}{2}$ এবং $\tan B = \sqrt{3}$ হয় তবে, $\sin A \cos B + \cos A \sin B$ এর মান–**[KU 03-04]**

Sol".: $A = 30^0$, $B = 60^0$

∴ প্রদত্ত রাশি = $\sin(A + B) = \sin 90^0 = 1$

16. $A + B + C = \pi$ হলে $\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C$ এর মান– **[KU ; RU 07-08]**

a. $4\sin A \sin B \sin C$ b. $4\sin^2 A \sin^2 B \sin^2 C$

c. $1 - 4\sin A \sin B \sin C$ d. $4\sin A \sin B \sin C - 1$

Sol".: $A = B = C = 60^0$ ধরে প্রদত্ত রাশি = 2.598

Option গুলোতে $A = B = C = 60^0$ বসালে a = 2.598

17. $\tan A + \tan B + \tan C = \tan A \tan B \tan C$ হলে $A + B + C$ এর মান কত? **[EA 05-06]**

A. $\pi/2$ B. 0 C. π D. 2π

Sol".: Ans. π

18. $\sin^2(60^0 + A) + \sin^2 A + \sin^2(60^0 - A)$ এর মান -

Sol".: $A = 30^0$ ধরে,

[(] [sin] [9] [0] [)] [x^2] [+] [(] [sin] [3] [0] [)] [x^2] [+] [(] [sin] [3] [0] [)] [x^2] [=]

19. ABC ত্রিভুজে $\cos A + \cos C = \sin B$ হলে, $\angle C$ সমান – **[DU 04-05]**

A. 30° B. 60° C. 90° D. 45°

কৌশল : কোন ত্রিভুজের দুইটি কোণের cosine অনুপাতের যোগফল অপর কোণের sine এর সমান হলে ত্রিভুজটি সমকোণী এবং cosine এর সাথের কোণদ্বয়ের যেকোন একটি কোণ সমকোণ।

Sol".: Ans. C

20. ABC ত্রিভুজে $a = 8$, $b = 4, c = 6$ হলে $\angle A = ?$ [SU 08-09] A. $\sin^{-1}\frac{\sqrt{5}}{8}$ B. $2\sin^{-1}\frac{\sqrt{5}}{8}$ C. $\sin^{-1}\frac{4}{5}$ D. $2\sin^{-1}\frac{4}{5}$

$Sol^n.:$ $\cos A = \frac{4^2+6^2-8^2}{2.4.6} = -\frac{1}{4}$

$\therefore$ A= 104.48°

Option গুলোতে $D = 106.26^0 \approx 104.48^0$

21. ABC সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ যার a = 10 cm এবং b = c ত্রিভুজটির পরিলিখিত বৃত্তের ব্যাসার্ধ 10 cm হলে $\angle B = ?$ [SU 08-09]

$Sol^n.:$ $\frac{a}{\sin A} = 2R \Rightarrow \sin A = \frac{10}{2.10}$

$\Rightarrow A = 30^0$ $\therefore B + C = 180° - 30° = 150°$

$\therefore$ B = 150°/2 = 75°

22. একটি ত্রিভুজের বাহুগুলোর পরিমাপ যথাক্রমে 3, 5 ও 7 হলে স্থূলকোণটির মান – [IU 06-07; RU 07-08]

$Sol^n.:$ স্থূলকোণটি = $\cos^{-1}\frac{3^2+5^2-7^2}{2.3.5} = 120^0$

23. কোন ত্রিভুজের বাহুগুলো 13, 14, 15 হলে ত্রিভুজটির ক্ষেত্রফল – [RU 07-08; BUET 06-07]

$Sol^n.:$ $S = \frac{13+14+15}{2} = 21$

ক্ষেত্রফল = $\sqrt{21(21-13)(21-14)(21-15)} = 84$

24. ABC ত্রিভুজে $\angle A = 60^0, \angle B = 75^0$ এবং $c = \sqrt{6}$ cm হলে $a = ?$ [SU 06-07]

$Sol^n.:$ $\angle C = 180^0 - (60^0 + 75^0) = 45^0$

$\therefore$ $\frac{a}{\sin A} = \frac{c}{\sin C} \Rightarrow a = \sqrt{6}\frac{\sin 60^0}{\sin 45^0} = 3$

25. $(a-b)^2\cos^2\frac{C}{2} + (a+b)^2\sin^2\frac{C}{2} = ?$ [SU 06-07]

প্রদত্ত রাশি = $a^2 + b^2 - 2ab(\cos^2\frac{C}{2} - \sin^2\frac{C}{2})$

= $a^2 + b^2 - 2ab\cos C = c^2$

26. ABC একটি ত্রিভুজ হলে $2(bc\cos A + ca\cos B + ab\cos C) = ?$ [RU 06-07]

$Sol^n.:$ প্রদত্ত রাশি = $2bc\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} + 2ca\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca} + 2bc\frac{a^2+a^2-b^2}{2ab}$

= $a^2 + b^2 + c^2$

27. যেকোন ত্রিভুজের ক্ষেত্রে $bc\cos^2\frac{A}{2} + ca\cos^2\frac{B}{2} + ab\cos^2\frac{C}{2} = ?$ [IU 05-06]

$Sol^n.:$ প্রদত্ত রাশি = $bc\frac{s(s-a)}{bc} + ca\frac{s(s-b)}{ca} + ab\frac{s(s-c)}{ab}$ = $s\{3s - 2(a+b+c)\}$

= $s(3s - 2s) = s^2$

3(c) L.H.S.= $\sin(n+1)x\ \cos(n-1)x - \cos(n+1)x\ \sin(n-1)x$

= $\sin\{(n+1)x - (n-1)x\}$

= $\sin(nx + x - nx + x)$

= $\sin 2x$ = R.H.S. (Proved)

বহুনির্বাচনি প্রশ্ন:

1. Sol^n : $\sec(-135^0) = \sec 135^0$
$= \sec(180^0 - 45^0) = -\sec 45^0 = -\sqrt{2}$
$\therefore$ Ans.(b)

2. Sol^n : $\cos\theta = \frac{5}{13} \Rightarrow \sec\theta = \frac{13}{5}$

$\therefore$ $\tan\theta = \sqrt{\sec^2\theta - 1} = \frac{12}{5}$, $[\because \theta < 90^0]$

$\therefore$ $\tan 2\theta = \frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta} = \frac{2\times\frac{12}{5}}{1-\frac{144}{25}}$

$= \frac{24}{5}\times(-\frac{25}{119}) = -\frac{120}{119}$ $\therefore$ Ans. (c)

3. Sol^n : $\cot 45^0 + \cot(\pi + 45^0) + \cot(2\pi + 45^0) + \cdots\cdots + \cot(9\pi + 45^0)$

$= (9 + 1) \cot 45^0 = 10 .1 = 10 \therefore$ Ans.(a)

4. সব তথ্য সত্য। $\therefore$ Ans. (d)

5. **Sol^n :** ক্যালকুলেটরের সাহায্যে, $\sin 15°$ এবং $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$ এর আসন্ন মান $= 0{\cdot}258 \therefore$ Ans. (c)

6. **Sol^n :** $\cos 68°20' \cos 8°20' + \cos 81°40' \cos 21°40' = \cos(68°20' - 8°20')$

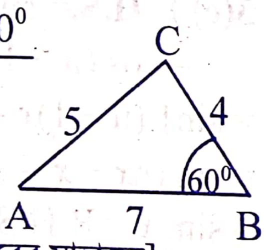
$= \cos 60° = \frac{1}{2} \therefore$ Ans. (c)

7. **Sol^n :** $\frac{\cos 8^0 + \sin 8^0}{\cos 8^0 - \sin 8^0} = \frac{1 + \tan 8^0}{1 - \tan 8^0}$

$= \frac{\tan 45^0 + \tan 8^0}{\tan 45^0 - \tan 8^0} = \tan(45° + 8°) = \tan 53°$

8. **Sol^n :** $\Delta = sr = \frac{4+5+7}{2} r = 8r \therefore$ Ans. (a)

9. **Sol^n :** $\frac{\sin A}{4} = \frac{\sin 60^0}{5}$



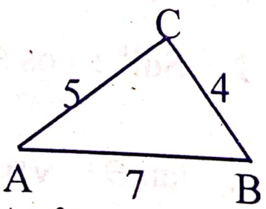
$\Rightarrow \sin A = \frac{4}{5} \times \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\therefore A = 43{\cdot}85^0$ [ক্যালকুলেটরের সাহায্যে]

ত্রিভুজটির পরিব্যাসার্ধ $R = \frac{5}{2\sin 60^0} = \frac{5}{\sqrt{3}}$

$\sec B = \sec 60^0 = 2 \therefore$ Ans. (b)

10. **Sol^n :** $\frac{\sin B}{\sin C} = \frac{5}{7}$



$\therefore$ Ans (a).

11. **Sol^n :** $\cos A = \frac{7^2 + 5^2 - 4^2}{2 \times 7 \times 5}$

$= \frac{49 + 25 - 16}{70} = \frac{58}{70} = \frac{29}{35} \therefore \sec A = \frac{35}{29}$

$\therefore$ Ans. (d).

12. **Sol^n :** $\sin^2\theta - \cos^2\theta = -\cos 2\theta$

$= -\cos 60^0 = -\frac{1}{2} \therefore$ Ans. (b).

13. **Sol^n :** $\sec(\theta - 990^0) = \sec(990^0 - \theta)$
$= \sec(11 \times 90^0 - \theta) = -\operatorname{cosec}\theta$

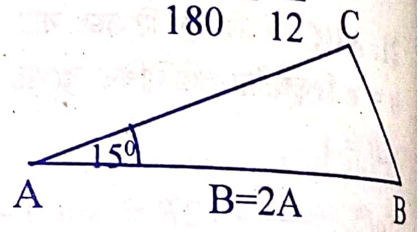
$\therefore$ Ans. (d).

14. **Sol^n :** $\sin(-\theta) \sec(-\theta) \cot(630^0 + \theta)$
$= (-\sin\theta)(\sec\theta) \cot(7 \times 90^0 + \theta)$
$= -\sin\theta \times \frac{1}{\cos\theta} \times (-\tan\theta) = \tan^2\theta$

$\therefore$ Ans. (c)

15. **Sol^n :** $\angle A = 15^0 = \frac{15\pi}{180} = \frac{\pi}{12}$

$\therefore$ Ans. (b)



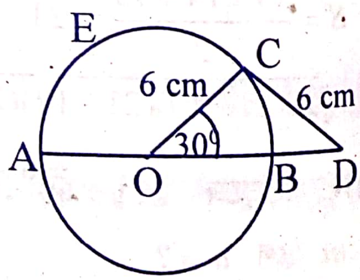
16. **Sol^n :** $b : c = \sin B : \sin C$
$= \sin 30^0 : \sin(180^0 - 45^0)$
$= \frac{1}{2} : \frac{1}{\sqrt{2}} = 1 : \sqrt{2} \therefore$ Ans. (a)

17. **Sol^n :** $\sec\theta - \operatorname{cosec}\theta = 0$

$\Rightarrow \frac{1}{\cos\theta} = \frac{1}{\sin\theta} \Rightarrow \tan\theta = 1$

$\Rightarrow \theta = \frac{\pi}{4} \therefore$ Ans. (b)

18. **Sol^n :**



$\angle AOC = 180^0 - 30^0$

$= 150^0 = \frac{150\pi}{180} = \frac{5\pi}{6}$

$\therefore$ চাপ $AEC = 6 \times \frac{5\pi}{6}$

$= 5\pi \therefore$ Ans.(d)

19. **Sol^n :**

OCD ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল

$= \frac{1}{2}(OC \times CD)\sin(180^\circ - 60^\circ)$

$= \frac{1}{2}(6\times 6)\frac{\sqrt{3}}{2} = 9\sqrt{3}$ $\therefore$ Ans. (b)

20. Sol^n : $\frac{OD}{\sin C} = \frac{6}{\sin 30^0}$

$\Rightarrow \frac{OD}{\sqrt{3}/2} = \frac{6}{1/2} \Rightarrow OD = 6\sqrt{3}$ $\therefore$ Ans. (c)

21. Sol^n : $\tan\theta = \pm\frac{\sqrt{13^2 - 12^2}}{12} = \pm\frac{5}{12}$

$\therefore$ Ans. (a)

22. Sol^n : $\angle C = 180^\circ - (60^\circ + 75^\circ) = 45^\circ$

$\therefore \frac{a}{\sin A} = \frac{c}{\sin C} \Rightarrow \frac{a}{\sin 60^0} = \frac{\sqrt{6}}{\sin 45^0}$

$\Rightarrow a = \sqrt{6}\times\frac{\sqrt{3}/2}{1/\sqrt{2}} = \frac{6}{2} = 3$ $\therefore$ Ans.(b)

23. Sol^n : $\theta = 20^\circ$ ধরে প্রদত্ত রাশি $= 0{\cdot}766$ এবং $\cos 2\theta = 0{\cdot}766$. $\therefore$ Ans. (c)

24. Sol^n : $\tan\theta = \pm\sqrt{\frac{1-\cos 2\theta}{1+\cos 2\theta}}$

$= \pm\sqrt{\frac{25-24}{25+24}} = \pm\frac{1}{7}$ $\therefore$ Ans. (d)

25. Sol^n : $9^2 + 40^2 = 41^2$ $\therefore$ ত্রিভুজটি সমকোণী ত্রিভুজ,যার পরিবৃত্তের ব্যাসার্ধ $= \frac{41}{2} = 20{\cdot}5$ $\therefore$ Ans.(a)

26. Sol^n : $\sin A + \cos A = \sin B + \cos B$

$\Rightarrow \sin A - \sin B = \cos B - \cos A$

$\Rightarrow 2\cos\frac{1}{2}(A+B)\sin\frac{1}{2}(A-B) =$

$2\sin\frac{1}{2}(A+B)\sin\frac{1}{2}(A-B)$

$\Rightarrow \tan\frac{1}{2}(A+B) = 1 = \tan\frac{\pi}{4}$

$\Rightarrow \frac{1}{2}(A+B) = \frac{\pi}{4} \Rightarrow A + B = \frac{\pi}{2}$

$\therefore$ Ans. (b)

$\sin A + \cos A = \sin B + \cos B$ হলে, $A + B = ?$ [DU 13-14; BUTex 14-15]

(a) $\frac{2\pi}{3}$ (b) $\frac{\pi}{2}$ (c) $\frac{\pi}{6}$ (d) $\frac{\pi}{3}$

27. Sol^n : $\frac{\sin 75^0 + \sin 15^0}{\sin 75^0 - \sin 15^0} = \tan(45^0 + 15^0)$

$= \tan 60^0 = \sqrt{3}$ $\therefore$ Ans. (a)

28. Sol^n : $\cos A\sin(A - \frac{\pi}{6})$

$= \frac{1}{2}\{\sin(2A - \frac{\pi}{6}) - \sin\frac{\pi}{6}\}$

$= \frac{1}{2}\{\sin(2A - \frac{\pi}{6}) - \sin\frac{\pi}{6}\}$

বৃহত্তম মানের জন্য, $2A - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2}$

$\Rightarrow 2A = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6} = \frac{4\pi}{6} \Rightarrow A = \frac{\pi}{3}$ $\therefore$ Ans.(b)

29. Sol^n : $\sin\alpha + \sin\beta = a$

$\Rightarrow \sin^2\alpha + \sin^2\beta + 2\sin\alpha\sin\beta = a^2 \cdots\cdots$(i)

$\cos\alpha + \cos\beta = b$

$\Rightarrow \cos^2\alpha + \cos^2\beta + 2\cos\alpha\cos\beta = b^2 \cdots$ (ii)

$(i)^2 + (ii)^2 \Rightarrow 2 + 2\cos(\alpha - \beta) = a^2 + b^2$

$\Rightarrow \cos(\alpha - \beta) = \frac{a^2 + b^2 - 2}{2}$ $\therefore$ Ans.(b)

30. Sol^n : $\tan\theta = \frac{3}{4}, \pi < \theta < \frac{3\pi}{2}$ হলে,

$\cos 2\theta + \sin 2\theta = \frac{2\tan\theta}{1+\tan^2\theta} + \frac{1-\tan^2\theta}{1+\tan^2\theta}$

$= \frac{1 + 2\tan\theta - \tan^2\theta}{1+\tan^2\theta} = \frac{1 + 2\times\frac{3}{4} - \frac{9}{16}}{1 + \frac{9}{16}}$

$= \frac{\frac{16+24-9}{16}}{\frac{25}{16}} = \frac{31}{25}$ $\therefore$ Ans.(d)

31. **Sol^n :** $\tan 75^0$ এর মান ধনাত্মক এবং 1 এর চেয়ে বড়। $\therefore$ Ans. (b)

32. **Sol^n :** $\frac{\cos 27^0 - \sin 63^0}{\cos 27^0 + \sin 63^0} = \tan(45^0 - 27^0)$

$= \tan 18^0$. $\therefore$ Ans. (d)

33. **Sol^n :** $\cos(-\theta) = \cos\theta$ $\therefore$ Ans. (b)

34. **Sol^n :** $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$

$\Rightarrow \frac{a}{\sin 90^0} = \frac{b}{\sin 60^0} = \frac{3cm}{\sin 30^0}$

$\Rightarrow b = \cos(-\theta) = 3 \times \frac{\sqrt{3}}{2} \times 2 = 3\sqrt{3}$ cm

$\therefore$ Ans. (c)

35. **Sol^n :** $\cos\left(7\frac{1}{2}\right)^0 = \sqrt{\cos^2(7\frac{1}{2})^0}$

$= \sqrt{\frac{1}{2}(1 + \cos 15^0)}$

$= \sqrt{\frac{1}{2}\{1 + \sqrt{\frac{1}{2}(1 + \cos 30^0)}\}}$

$= \sqrt{\frac{1}{2}\{1 + \sqrt{\frac{1}{2}(1 + \frac{\sqrt{3}}{2})}\}}$

$= \sqrt{\frac{1}{2}\{1 + \sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{4}}\}}$

$= \sqrt{\frac{1}{2}\{1 + \frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{3}}\}} = \frac{1}{2}\sqrt{2 + \sqrt{2+\sqrt{3}}\}}$

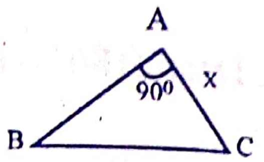
$\therefore$ Ans. (b)

36. **Sol^n :** $\sin 10^0 = 2\sin 5^0 \cos 5^0$

$= 2\sin 5^0 \sqrt{1 - \sin^2 5^0}$

$= 2p\sqrt{1 - p^2}$ $\therefore$ Ans. (b)

উদ্দীপকের আলোকে 37 ও 38 নং প্রশ্নের উত্তর দাওঃ-



37. **Sol^n :** $\frac{BC}{\sin A} = \frac{CA}{\sin B} = \frac{AB}{\sin C}$

$\Rightarrow \frac{BC}{90^0} = \frac{CA}{\sin 30^0} = \frac{AB}{\sin 60}$

$\Rightarrow BC : CA : AB = 1 : \frac{1}{2} : \frac{\sqrt{3}}{2}$

$= 2 : 1 : \sqrt{3}$ $\therefore$ Ans.. (b)

38. **Sol^n :** $\frac{AC}{\sin B} = \frac{AB}{\sin C}$ হলে $\sin C$ এর মান কত?

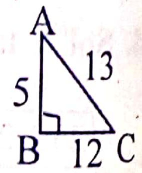
(a) x (b) $\frac{1}{x}$

(c) $\sqrt{x^2 - 1}$ (d) $\sqrt{1 - x^2}$

39. **Sol^n :** $\sec(270^0 + \theta) = \operatorname{cosec}\theta$

$\therefore$ Ans. (c)

40. **Sol^n :** $\sin\theta = \frac{5}{13}$



$\therefore$ Ans. (b)

(a) $\frac{-5}{13}$ (b) $\frac{5}{13}$ (c) $\frac{-12}{13}$ (d) $\frac{12}{13}$

41. **Sol^n :** $a = b\cos B + c\cos C$ সঠিক নয়?

$\therefore$ Ans. (a)

42. **Sol^n :** $\operatorname{cosec}(-2580^0) = -\operatorname{cosec} 2580^0$

$= -\operatorname{cosec}(28 \times 90^0 + 60^0)$

$= -\operatorname{cosec} 60^0 = -\frac{2}{\sqrt{3}}$ $\therefore$ Ans. (b)

43. **Sol^n :** $\sec(B + C) = \sec(\frac{\pi}{2} - A)$

$= \operatorname{cosec} A$ $\therefore$ Ans. (d)

44. **Sol^n :** $\frac{1 - \tan^2(45^0 + x)}{1 + \tan^2(45^0 + x)}$

$= \cos 2(45^0 + x) = \cos(90^0 + 2x)$

$= \sin 2x \quad \therefore$ Ans. (d)

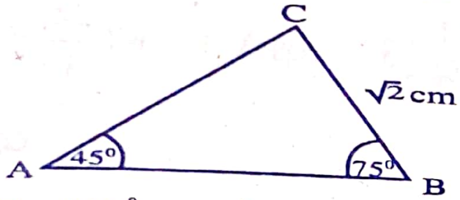
45. **Sol^n :** $A = 60^0, B = 45^0$ হলে,

$\cos(B - A) = \cos A \cos B + \sin A \sin B$

$= \cos 60^0 \cos 45^0 + \sin 60^0 \sin 45^0$

$= \frac{1}{2}.\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{3}}{2}.\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}} \quad \therefore$ Ans. (c)

নিচের উদ্দীপকের আরেঅকে 46 ও 47 নং প্রশ্নের উত্তর দাও:-



46. **Sol^n :** $\angle C = 180^0 - (45^0 + 75^0)$

$= 60^0$

$\therefore \quad \sin(B+C) = \sin(75^0 + 60^0) = \sin 135^0$

$= \sin(180^0 - 45^0) = \sin 45^0 = \frac{1}{\sqrt{2}}$

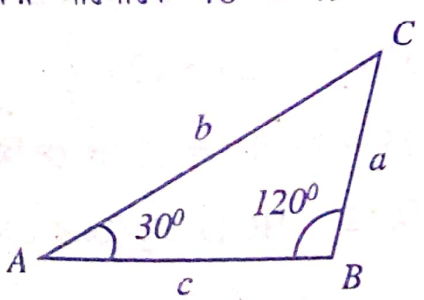
$\therefore$ Ans. (b)

47. **Sol^n :** $\frac{AB}{\sin 60^0} = \frac{\sqrt{2}}{\sin 45^0}$

$\Rightarrow \frac{AB}{\sqrt{3}/2} = \frac{\sqrt{2}}{1/\sqrt{2}} \Rightarrow \frac{2AB}{\sqrt{3}} = 2 \Rightarrow AB = \sqrt{3}$

$\therefore$ Ans. (d)

উদ্দীপকের আলোকে 48 ও 49 নং প্রশ্নের উত্তর দাও-



48. **Sol^n :** $\frac{c+a}{b} = \frac{2R\sin C + 2R\sin A}{2R\sin B}$

$= \frac{\sin C + \sin A}{\sin B} = \frac{\sin 30^0 + \sin 30^0}{\sin 120^0}$

$= \frac{2\times\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{2}{\sqrt{3}} \quad \therefore$ Ans.(c)

49. **Sol^n :** $\frac{a}{\sin 30^0} = \frac{b}{\sin 120^0}$

$\Rightarrow \frac{a}{1/2} = \frac{3}{\sqrt{3/2}} \Rightarrow a = \sqrt{3}$

$\therefore \Delta AOB$ এর ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2}ab\sin 30^0$

$= \frac{1}{2}(3\sqrt{3})\frac{1}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{4} \quad \therefore$ Ans. (a)

50. **Sol^n :** $\operatorname{cosec}(-660^0) = -\operatorname{cosec} 660^0$

$= -\operatorname{cosec}(7\times 90^0 + 30^0) = +\operatorname{cosec} 30^0$

$= 2 \quad \therefore$ সঠিক উত্তর অনুপস্থিত।

51. **Sol^n :** $2\sin^2 15^0 = 1 - \cos 30^0$

$= 1 - \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{2-\sqrt{3}}{2} \quad \therefore$ Ans. (a)

52. **Sol^n :** ΔABC এর পরিসীমা 12 একক।

$\therefore$ Ans.(b)

সৃজনশীল প্রশ্ন:

1. ABC ত্রিভুজে A, B ও C কোণের বিপরীত বাহু যথাক্রমে a, b ও c. ত্রিভুজটির ক্ষেত্রে প্রমাণ কর যে,

(a) $\tan A = \tan B + \tan C$, যখন $\cos A = \cos B \cos C$. **[য.'০৩,'০৯; ব.,কু.,দি.'১৩; রা.'১৪]**

সমাধান : প্রশ্নমালা VII B এর উদাহরণ 7 দ্রষ্টব্য।

(b) $\cos A + \cos B + \cos C = 1 + 4 \sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$ **[ঢা.'১২;কু.'০৬; ব.'১২]**

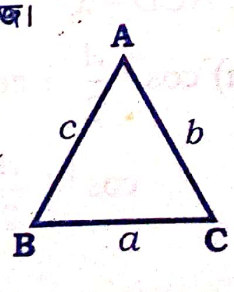
সমাধান : প্রশ্নমালা VII F এর উদাহরণ 2 দ্রষ্টব্য।

(c) $\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$ **[ব.'১১ ; য.'১১,'১৪; চ.'১০; দি.'১১; রা.'১৩; মা.'১০,'১২,'১৪]**

প্রশ্নমালা VII G এর কোসাইন সূত্র ও সাইন সূত্র দ্রষ্টব্য।

2. পাশের চিত্রে, ABC একটি ত্রিভুজ।

(a) ত্রিভুজটির বাহু তিনটি $a = 3$ একক, $b = 5$ একক ও $c = 7$ একক হলে, এর পরিব্যাসার্ধ নির্ণয় কর।



সমাধান : ত্রিভুজটির অর্ধপরিসীমা,

$s = \dfrac{3+5+7}{2} = 7\cdot5$ একক।

$\therefore$ ত্রিভুজটির ক্ষেত্রফল,

$\Delta = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

$= \sqrt{7\cdot5(7\cdot5-3)(7\cdot5-5)(7\cdot5-7)}$

$= \sqrt{7\cdot5\times4\cdot5\times2\cdot5\times0\cdot5}$

$= 6\cdot495$ বর্গ একক।

$\therefore$ ত্রিভুজটির পরিব্যাসার্ধ, $R = \dfrac{abc}{4\Delta} = \dfrac{3\times5\times7}{4\times6\cdot495}$

$= \dfrac{3\times5\times7}{4\times6\cdot495} = 4\cdot041$ একক (প্রায়)।

(b) $A = \dfrac{\pi}{16}$ হলে প্রমাণ কর যে,

$2\sin A = \sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}$

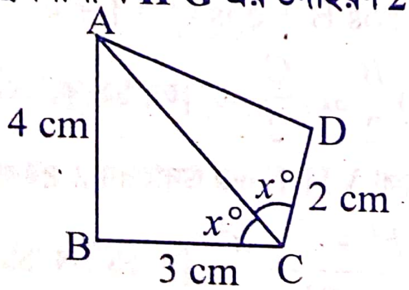
[য. '১৪; কু.'০৩; ব. '১০,'১৪; রা.'১২,'১৪; চ.'১৪]

সমাধান : প্রশ্নমালা VII D এর উদাহরণ 1 দ্রষ্টব্য।

(c) $\cos A = \sin B - \cos C$ হলে দেখাও যে, ত্রিভুজটি সমকোণী। **[কু.'১৩ ; রা.'১২; চ.'০৮ ; য.'০৯,'১২,'১৪ ; সি.'১১; ঢা.'০৭,'১৩; ব.'১০,'১২; মা.'০৯,'১৪ প্র.ভ.প.'০৪,'০৫]**

সমাধান : প্রশ্নমালা VII G এর উদাহরণ 2 দ্রষ্টব্য।

3.



চিত্রে ABCD চতুর্ভূজে AB = 4 সে.মি., BC = 3 সে.মি., CD = 2 সে.মি. এবং $\angle ABC = 90°$। কর্ণ AC, $\angle BCD$ এর সমদ্বিখন্ডক এবং $\angle ACB = \angle ACD = x°$।

(a) $\cos^2\dfrac{A}{2} + \cos^2\left(\dfrac{\pi}{3}+\dfrac{A}{2}\right) + \cos^2\left(\dfrac{A}{2}-\dfrac{\pi}{3}\right) = \dfrac{3}{2}$ **[ব.'১১]**

প্রমাণ : L.H.S. $= \cos^2\dfrac{A}{2} + \cos^2\left(\dfrac{\pi}{3}+\dfrac{A}{2}\right) + \cos^2\left(\dfrac{A}{2}-\dfrac{\pi}{3}\right)$

$= \dfrac{1}{2}\left\{1+\cos2.\dfrac{A}{2} + 1 + \cos2\left(\dfrac{\pi}{3}+\dfrac{A}{2}\right) + 1 + \cos2\left(\dfrac{\pi}{3}-\dfrac{A}{2}\right)\right\}$

$= \dfrac{1}{2}\left\{3 + \cos A + \cos\left(\dfrac{2\pi}{3}+A\right) + \cos\left(\dfrac{2\pi}{3}-A\right)\right\}$

$= \dfrac{1}{2}\left\{3 + \cos A + 2\cos\dfrac{2\pi}{3}\cos A\right\}$

$= \dfrac{1}{2}\left\{3 + \cos A + 2\left(-\dfrac{1}{2}\right)\cos A\right\}$

$= \dfrac{1}{2}\{3+\cos A - \cos A\} = \dfrac{3}{2} =$ R.H.S.

(b) বর্গ সে.মি. এ AD^2 এর প্রকৃত মান নির্ণয় কর।

সমাধান: $AC = \sqrt{AB^2+BC^2} = \sqrt{4^2+3^2} = 5$

$\therefore \cos x° = \dfrac{BC}{AC} = \dfrac{3}{5}$, $\sin x° = \dfrac{AB}{AC} = \dfrac{4}{5}$

এখন, ΔADC এ কোসাইন সূত্র প্রয়োগ করে পাই,

$AD^2 = AC^2 + CD^2 - 2AC.CD\cos x°$

$= 5^2 + 2^2 - 2\times5\times2\times\dfrac{3}{5}$

$= 25 + 4 - 12 = 17$ বর্গ সে.মি.

(c) বর্গ সে.মি. এ ABCD চতুর্ভুজের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

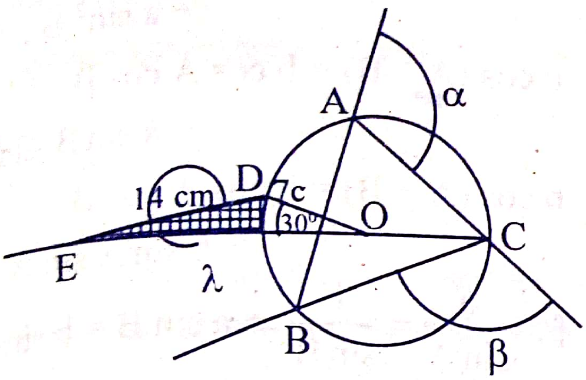
সমাধান: ABCD চতুর্ভুজের ক্ষেত্রফল = ABC ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল + ACD ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল

$= \dfrac{1}{2}(AB\times BC) + \dfrac{1}{2}(AC\times CD\sin x^0)$

$= \dfrac{1}{2}(4\times3) + \dfrac{1}{2}\left(5\times2\times\dfrac{4}{5}\right)$

$= 6 + 4 = 10$ বর্গ সে.মি.।

4.



(a) প্রমাণ কর যে, $\sin x \sin(x+30°) + \cos x \sin(x+120°) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

প্রমাণ: প্রশ্নমালা VII B এর উদাহরণ 3 দ্রষ্টব্য।

(b) চিত্রের ছায়াঘেরা অংশের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

সমাধান: DOE ত্রিভুজ হতে পাই,

$$\frac{DO}{\sin E} = \frac{DE}{\sin O} \Rightarrow \frac{7}{\sin E} = \frac{14}{\sin 30^0}$$

$$\Rightarrow \frac{7}{\sin E} = \frac{14}{1/2} \Rightarrow \sin E = \frac{7}{28} = \frac{1}{4}$$

$\therefore \angle E = \sin^{-1}(\frac{1}{4}) = 14{\cdot}48^0$

$\therefore \angle D = \{180^0 - (30^0 + 14{\cdot}48)\}$
$= 135{\cdot}52^0$

$\therefore$ DOE ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2}(OD \times DE)\sin D$

$= \frac{1}{2}(7 \times 14) \times \sin 135\cdot52$
$= 34{\cdot}33$ বর্গ সে.মি.

আবার, 30^0 কোণ দ্বারা সৃষ্ট বৃত্তকলার ক্ষেত্রফল

$= \frac{1}{2}(7)^2 \times 30 \times \frac{\pi}{180} = 12{\cdot}83$ বর্গ সে.মি.

$\therefore$ ছায়াঘেরা অংশের ক্ষেত্রফল $= 34{\cdot}33 - 12{\cdot}83$
$= 21{\cdot}5$ বর্গ সে.মি. (প্রায়)

(c) চিত্রের সাহায্যে প্রমাণ কর যে,
$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\lambda - 2\cos\alpha \cos\beta \cos\lambda = 1$

প্রমাণ: চিত্র হতে পাই,

$\alpha + \beta + \lambda = \pi - A + \pi - B + \pi - C$
$= 3\pi - (A + B + C)$
$= 3\pi - \pi = 2\pi$

$\Rightarrow \alpha + \beta = 2\pi - \lambda$

$\Rightarrow \cos(\alpha + \beta) = \cos(2\pi - \lambda)$

$\Rightarrow \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta = \cos\lambda$

$\Rightarrow \cos\alpha\cos\beta - \cos\lambda = \sin\alpha\sin\beta$

$\Rightarrow (\cos\alpha\cos\beta - \cos\lambda)^2 = \sin^2\alpha\sin^2\beta$

$\Rightarrow \cos^2\alpha\cos^2\beta - 2\cos\alpha\cos\beta\cos\lambda + \cos^2\lambda = (1-\cos^2\alpha)(1-\cos^2\beta)$

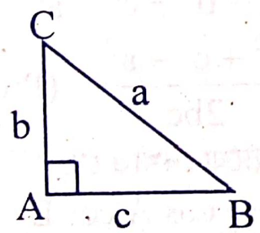
$\Rightarrow \cos^2\alpha\cos^2\beta - 2\cos\alpha\cos\beta\cos\lambda + \cos^2\lambda = 1 - \cos^2\alpha - \cos^2\beta + \cos^2\alpha\cos^2\beta$

$\therefore \cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\lambda - 2\cos\alpha \cos\beta \cos\lambda = 1$ (Proved)

5. ΔABC এ, $a = b\cos C + c\cos B$

(a) $\angle A = 90^0$ হলে $a = b\cos C + c\cos B$ এর সাহায্যে প্রমাণ কর যে, $a^2 = b^2 + c^2$

প্রমাণ :



ABC সমকোণী ত্রিভুজ হতে পাই,

$\cos C = \frac{b}{a}$ এবং $\cos B = \frac{c}{a}$

এখন, $a = b\cos C + c\cos B$

$\Rightarrow a = b \times \frac{b}{a} + c \times \frac{c}{a}$

$\therefore a^2 = b^2 + c^2$

(b) উদ্দীপকের সাহায্যে দেখাও যে,

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

প্রমাণ : $a = b\cos C + c\cos B$

$\Rightarrow a^2 = (b\cos C + c\cos B)^2$

$\Rightarrow a^2 = b^2\cos^2 C + c^2\cos^2 B + 2bc\cos B\cos C$

$\Rightarrow a^2 = b^2(1-\sin^2 C) + c^2(1-\sin^2 B) + 2bc\cos B\cos C$

$\Rightarrow a^2 = b^2 - b^2\sin^2 C + c^2 - c^2\sin^2 B + 2bc\cos B\cos C$

$\Rightarrow b^2\sin^2 C + c^2\sin^2 B - 2bc\cos B\cos C = b^2 + c^2 - a^2$

$\Rightarrow (2R\sin B)^2\sin^2 C + (2R\sin C)^2\sin^2 B - 2bc\cos B\cos C = b^2 + c^2 - a^2$

$\left[\because \dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C} = 2R\right]$

$\Rightarrow 4R^2\sin^2 B\sin^2 C + 4R^2\sin^2 C\sin^2 B - 2bc\cos B\cos C = b^2 + c^2 - a^2$

$\Rightarrow 8R^2\sin^2 B\sin^2 C - 2bc\cos B\cos C = b^2 + c^2 - a^2$

$\Rightarrow 2(2R\sin B)(2R\sin C)\sin B\sin C - 2bc\cos B\cos C = b^2 + c^2 - a^2$

$\Rightarrow 2bc\sin B\sin C - 2bc\cos B\cos C = b^2 + c^2 - a^2$

$\Rightarrow -2bc\cos(B+C) = b^2 + c^2 - a^2$

$\Rightarrow -2bc\cos(\pi - A) = b^2 + c^2 - a^2$

$\Rightarrow 2bc\cos A = b^2 + c^2 - a^2$

$\therefore \cos A = \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$ (Proved)

(c) উদ্দীপকের সাহায্যে দেখাও যে,

$\cos(A+B) = \cos A\cos B - \sin B\sin A$

প্রমাণ : $a = b\cos C + c\cos B$

$\Rightarrow -b\cos C = c\cos B - a$

$\Rightarrow -b\cos\{\pi - (A+B)\} = (a\cos B + b\cos A)\cos B - a$

$[\because c = a\cos B + b\cos A]$

$\Rightarrow b\cos(A+B) = a\cos^2 B + b\cos A\cos B - a$

$\Rightarrow b\cos(A+B) = b\cos A\cos B - a(1-\cos^2 B)$

$\Rightarrow b\cos(A+B) = b\cos A\cos B - a\sin^2 B$

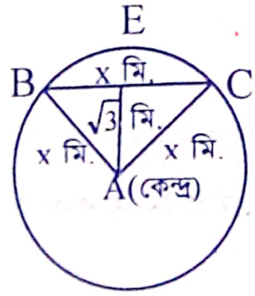
$\Rightarrow b\cos(A+B) = b\cos A\cos B - a\sin B.\sin B$

$\Rightarrow b\cos(A+B) = b\cos A\cos B - b\sin A\sin B$

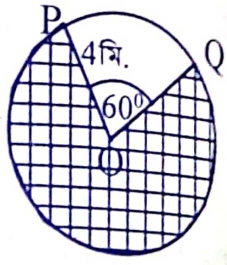
$\left[\because \dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B} \Rightarrow a\sin B = b\sin A\right]$

$\therefore \cos(A+B) = \cos A\cos B - \sin A\sin B$

6.



দৃশ্যকল্প -১



দৃশ্যকল্প -২

(a) $\sin 2\alpha = k\sin 2\theta$ হলে দেখাও যে,

$\tan(\alpha - \theta) = \dfrac{k-1}{k+1}\tan(\alpha + \theta)$

প্রমাণ: প্রশ্নমালা VII C এর উদাহরণ 2 দ্রষ্টব্য।

(b) দৃশ্যকল্প -১ হতে ABEC ক্ষেত্রের পরিসীমা নির্ণয় কর।

সমাধান: ABC সমবাহু ত্রিভুজের উচ্চতা, $\dfrac{\sqrt{3}}{2}x = \sqrt{3}$

$\therefore x = 2$ সে.মি. $= r$ (বৃত্তের ব্যাসার্ধ)

$\angle BAC = 60^0 = \dfrac{\pi}{3} = \theta$

$\therefore$ বৃত্তাংশ BEC $= r\theta = 2 \times \dfrac{\pi}{3} = \dfrac{2\pi}{3}$ সে.মি.

$\therefore$ ABEC ক্ষেত্রের পরিসীমা $= 2x +$ বৃত্তাংশ BEC

$= 2\times 2 + \dfrac{2\pi}{3} = \dfrac{12 + 2\pi}{3} = \dfrac{2(6+\pi)}{3}$ সে.মি.।

(c) দৃশ্যকল্প -২ হতে প্রতি বর্গ মিটার 500 টাকা দরে ছায়াঘেরা অংশে টাইলস করতে কত টাকা খরচ হবে নির্ণয় কর।

সমাধান: বৃত্তের ছায়াঘেরা অংশে কেন্দ্রে উৎপন্ন কোণ θ হলে, $\theta = 360^0 - 60^0 = 300^0 = \dfrac{300\pi}{180} = \dfrac{5\pi}{3}$

বৃত্তের ব্যাসার্ধ $r = 4$ মি.

ছায়াঘেরা অংশের ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2}r^2\theta$

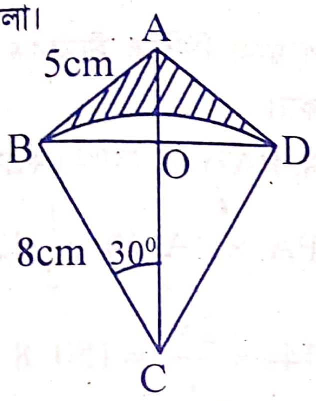
$\therefore = \frac{1}{2}\times 4^2 \times \frac{5\pi}{3} = \frac{40\times 3\cdot 1416}{3}$

$= 41\cdot 89$ বর্গ মি.

$\therefore$ প্রতি বর্গ মিটার 500 টাকা দরে ছায়াঘেরা অংশে টাইলস করতে খরচ হবে $(41\cdot 89\times 500)$ টাকা।

$= 20945$ টাকা।

7. উদ্দীপক: চিত্রে, ABCD একটি ঘুড়ি। CBD একটি বৃত্তকলা।



(a) প্রমাণ কর যে, $\frac{\tan^2(\theta+\frac{\pi}{4})-1}{\tan^2(\theta+\frac{\pi}{4})+1} = \sin 2\theta$

প্রমাণ: L.H.S. $= \frac{\tan^2(\theta+\frac{\pi}{4})-1}{\tan^2(\theta+\frac{\pi}{4})+1}$

$= -\frac{1-\tan^2(\theta+\frac{\pi}{4})}{1+\tan^2(\theta+\frac{\pi}{4})} = -\cos 2(\theta+\frac{\pi}{4})$

$= -\cos(\frac{\pi}{2}+2\theta) = +\ \sin 2\theta = $ R.H.S.

(b) দেখাও যে, $BO = 4$ এবং এর সাহায্যে দেখাও যে, ΔBOC এর ক্ষেত্রফল $8\sqrt{3}$ বর্গ একক।

সমাধান: যেহেতু ABCD একটি ঘুড়ি, $AB = AD$, $BC = CD$ এবং AC ও BD কর্ণদ্বয় পরস্পরকে O বিন্দুতে সমকোণে ছেদ করে।

ΔBOC এ সাইন সূত্র প্রয়োগ করে পাই,

$$\frac{BC}{\sin 90^0} = \frac{BO}{\sin 30^0} \Rightarrow \frac{8}{1} = \frac{BO}{1/2}$$

$\Rightarrow BO = 4$

এখন, ΔBOC সমকোণী ত্রিভুজে,

$CO = \sqrt{BC^2 - BO^2} = \sqrt{8^2-4^2}$

$= \sqrt{48} = 4\sqrt{3}$

$\therefore$ ΔBOC এর ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2}(OB\times OC)$

$= \frac{1}{2}(4\times 4\sqrt{3}) = 8\sqrt{3}$ বর্গ একক। (প্রমাণিত)

(c) রেখাংশ দ্বারা চিহ্নিত সীমাবদ্ধ এলাকার ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

সমাধান: এখানে, $\angle BCD = 2\angle BCO$

$= 2\times 30^0 = 60^0 = \frac{\pi}{3}$

$AO = \sqrt{AB^2 - OB^2} = \sqrt{5^2-4^2} = 3$

$\therefore$ ΔBCD এর ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2}(BC\times CD)\sin 60^0$

$= \frac{1}{2}(8\times 8)\frac{\sqrt{3}}{2} = 16\sqrt{3} = 27.71$ বর্গ একক

BCD বৃত্তকলার ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2}(BC^2\times \angle BCD)$

$= \frac{1}{2}(8^2\times\frac{\pi}{3}) = 33.51$

ΔABD এর ক্ষেত্রফল $= 2\times \Delta ABO$

$= 2\times\frac{1}{2}(OA\times OB)$

$= 3\times 4 = 12$ বর্গ একক

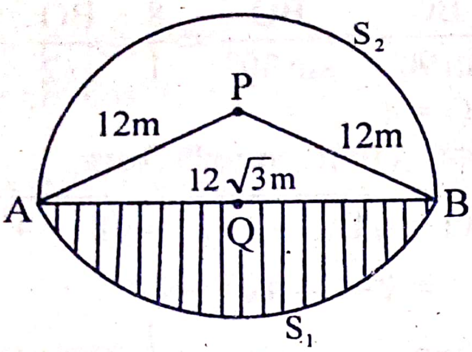
$\therefore$ রেখাংশ দ্বারা চিহ্নিত সীমাবদ্ধ এলাকার ক্ষেত্রফল

$=$ ΔABD এর ক্ষেত্রফল – { BCD বৃত্তকলার ক্ষেত্রফল – ΔBCD এর ক্ষেত্রফল}

$= 12 - (33.51 - 27.71) = 12 - 5.8$

$= 6.2$ বর্গ একক (প্রায়)

8. চিত্রে, P কেন্দ্র বিশিষ্ট বৃত্তের বৃত্তচাপ S_1 এবং Q কেন্দ্র বিশিষ্ট বৃত্তের বৃত্তচাপ S_2।



(a) দেখাও যে, $\angle APB = \frac{2\pi}{3}$

সমাধান : $\cos APB = \frac{AP^2 + PB^2 - AB^2}{2 \times AP \times PB}$

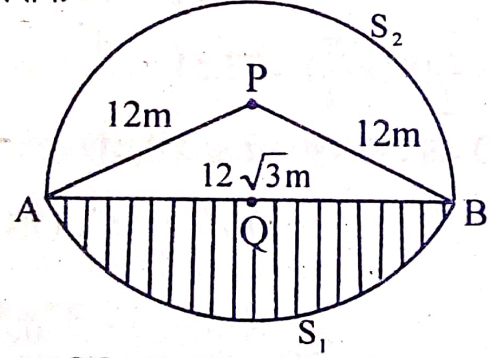
$= \frac{12^2 + 12^2 - (12\sqrt{3})^2}{2 \times 12 \times 12} = \frac{144 + 144 - 432}{288}$

$= \frac{-144}{288} = -\frac{1}{2} = \cos 120^0$

$\therefore \quad \angle APB = 120^0 = \frac{120}{180}\pi = \frac{2\pi}{3}$ (Showed)

(b) একজন খেলোয়াড় S_1 ও S_2 পথ 6 সেকেন্ডে অতিক্রম করলে তার গতিবেগ ঘন্টায় কত কিলোমিটার তা নির্ণয় কর।

সমাধান:



P কেন্দ্র বিশিষ্ট বৃত্তের ব্যাসার্ধ $r_1 = 12m$ এবং Q কেন্দ্র বিশিষ্ট বৃত্তের ব্যাসার্ধ $r_2 = \frac{12\sqrt{3}}{2} = 6\sqrt{3}m$

$S_1 =$ PAB বৃত্তাংশের দৈর্ঘ্য $= AP \times \angle APB$

$= 12 \times \frac{2\pi}{3} = 25 \cdot 13$ m

$S_2 =$ Q কেন্দ্র বিশিষ্ট বৃত্তের অর্ধ-পরিসীমা

$= \frac{1}{2}(2\pi r_2) = \pi r_2 = 6\sqrt{3}\pi$

$= 32 \cdot 65$ m

$\therefore \quad S_1 + S_2 = (25 \cdot 13 + 32 \cdot 65)$ m

$= 57 \cdot 78$ m

$\therefore$ খেলোয়াড়টির গতিবেগ $= \frac{57 \cdot 78}{6}$ মি./সে.

$= \frac{57 \cdot 78 \times 1000}{6 \times 60 \times 60}$ কি.মি./ঘন্টা

$= 2 \cdot 68$ কি.মি./ঘন্টা (প্রায়)

(c) রেখাংশ দ্বারা চিহ্নিত সীমাবদ্ধ এলাকার ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

সমাধান: PAB বৃত্তকলার ক্ষেত্রফল

$= \frac{1}{2}(PA^2 \times \angle APB) = \frac{1}{2}(12^2 \times \frac{2\pi}{3})$

$= \frac{1}{2}(144 \times \frac{2\pi}{3}) = 150 \cdot 8$ বর্গ মিটার

ΔPAB এর ক্ষেত্রফল

$= \frac{1}{2}(AP \times BP)\sin APB$

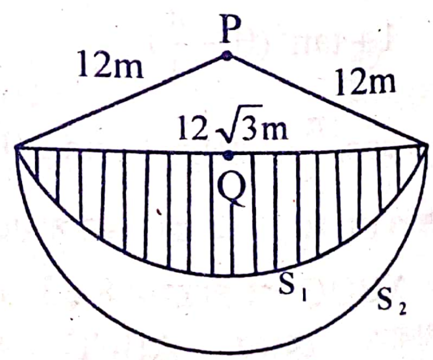
$= \frac{1}{2}(12 \times 12)\sin 120^0 = 62 \cdot 35$ বর্গ মিটার

$\therefore$ রেখাংশ দ্বারা চিহ্নিত সীমাবদ্ধ এলাকার ক্ষেত্রফল

$=$ PAB বৃত্তকলার ক্ষেত্রফল $- \Delta PAB$ এর ক্ষেত্রফল $= 150 \cdot 8 - 62 \cdot 35$

$= 88 \cdot 45$ বর্গ মিটার।

9.



চিত্রে, P কেন্দ্রবিশিষ্ট বৃত্তের বৃত্তচাপ S_1 মি. এবং Q কেন্দ্রবিশিষ্ট বৃত্তের অর্ধবৃত্তচাপ S_2 মি.।

(a) $a \sin\theta + b \sin\varphi = c = a \cos\theta + b \cos\varphi$ হলে দেখাও যে,

$$\cos\frac{1}{2}(\theta-\varphi)=\pm\sqrt{\frac{2c^2-(a-b)^2}{4ab}}$$

প্রমাণ ঃ দেওয়া আছে , $a\sin\theta+b\sin\varphi=c$

$\Rightarrow a^2\sin^2\theta+b^2\sin^2\varphi+2ab\sin\theta\sin\varphi=c^2\ \cdots\cdots\cdots (1)$

এবং $a\cos\theta+b\cos\varphi=c$

$\Rightarrow a^2\cos^2\theta+b^2\cos^2\varphi+2ab\cos\theta\cos\varphi=c^2\ \cdots\cdots\cdots (2)$

(1) ও (2) যোগ করে পাই ,

$a^2(\sin^2\theta+\cos^2\theta)+b^2(\sin^2\varphi+\cos^2\varphi)+2ab(\sin\theta\sin\varphi+\cos\theta\cos\varphi)=2c^2$

$\Rightarrow a^2+b^2+2ab\cos(\theta-\varphi)=2c^2$

$\Rightarrow 2ab\{2\cos^2\frac{1}{2}(\theta-\varphi)-1\}=2c^2-a^2-b^2$

$\Rightarrow 4ab\cos^2\frac{1}{2}(\theta-\varphi)=2c^2-a^2-b^2+2ab$

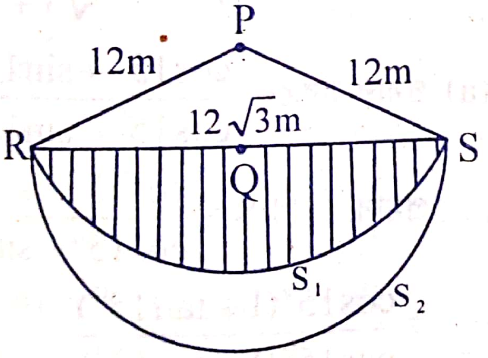
$=2c^2-(a-b)^2$

$\Rightarrow \cos^2\frac{1}{2}(\theta-\varphi)=\frac{2c^2-(a-b)^2}{4ab}$

$\therefore\ \cos\frac{1}{2}(\theta-\varphi)=\pm\sqrt{\frac{2c^2-(a-b)^2}{4ab}}$

(b) একজন খেলোয়াড় s_2 বৃত্তচাপ 3 সেকেন্ডে অতিক্রম করলে তার গতিবেগ ঘন্টায় কত কিলোমিটার তা নির্ণয় কর।

সমাধান:



$r=RQ=QS=\frac{12\sqrt{3}}{2}=6\sqrt{3}$ মিটার ব্যাসার্ধ

বিশিষ্ট অর্ধ-বৃত্তের পরিসীমা $s_2=\frac{1}{2}(2\pi r)=\pi r$

$=6\sqrt{3}\times3\cdot1416=32\cdot65$ মিটার

$\therefore$ খেলোয়াড়টির গতিবেগ $=\frac{32\cdot65}{3}$ মি. / সে .

$=\frac{32\cdot65\times60\times60}{3\times1000}$ কি.মি./ ঘন্টা

$=39\cdot18$ কি.মি./ ঘন্টা (প্রায়)

(c) উদ্দীপকের ছায়াঘেরা অংশের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

সমাধান: $\cos RPS=\frac{12^2+12^2-(12\sqrt{3})^2}{2\times12\times12}$

$=\frac{144+144-432}{288}=\frac{-144}{288}=\frac{-1}{2}$

$\therefore\ \angle RPS=120^0=\frac{120}{180}\pi=\frac{2\pi}{3}$

PRS বৃত্তকলার ক্ষেত্রফল $=\frac{1}{2}(\angle RPS\times12^2)$

$=\frac{1}{2}(\frac{2\pi}{3}\times144)=150\cdot8$ বর্গ একক

PRS ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল $=\frac{1}{2}(PR\times PS)\sin RPS$

$=\frac{1}{2}(12\times12)\sin120^0=\frac{1}{2}(12\times12)\times\frac{\sqrt{3}}{2}$

$=62\cdot35$ বর্গ মিটার

$\therefore$ ছায়াঘেরা অংশের ক্ষেত্রফল

$=(150\cdot8-62\cdot35)=88\cdot45$ বর্গ মিটার।

10. ABC ত্রিভুজে, $A=\frac{\pi}{16}$, $B=\frac{9\pi}{16}$

(a) $\operatorname{cosec}^2A+\tan^2B$ এর মান নির্ণয় কর।

সমাধান: $\operatorname{cosec}^2A+\tan^2B$

$=\operatorname{cosec}^2\frac{\pi}{16}+\tan^2\frac{9\pi}{16}$

$=\operatorname{cosec}^2\frac{\pi}{16}+\tan^2(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{16})$

$=\operatorname{cosec}^2\frac{\pi}{16}-\cot^2\frac{\pi}{16}=1$ (Ans.)

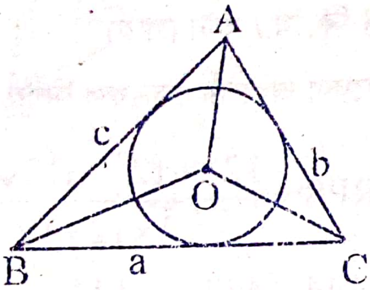
(b) প্রমাণ কর যে, $2\sin A=\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}$

প্রমাণ: পশ্নমালা VIIE এর উদাহরণ -1 দ্রষ্টব্য।

(c) প্রমাণ কর যে, $\cos^2A+\cos^2B+\cos^2C=1-2\sin A\sin B\sin C$

প্রমাণ: পশ্নমালা VIIF এর 4(c) দ্রষ্টব্য।

11. চিত্রে, ABC ত্রিভুজের অন্তঃকেন্দ্র O। $\angle OAB = \alpha$, $\angle OBC = \beta$ এবং $\angle OCA = \gamma$



(a) প্রমাণ কর যে, $\tan 75° = 2+\sqrt{3}$

প্রমাণ: L.H.S. $= \tan 75°$

$= \tan(45^0 + 30^0)$

$= \frac{\tan 45^0 + \tan 30^0}{1 - \tan 45^0 \tan 30^0}$

$= \frac{\tan 45^0 + \tan 30^0}{1 - \tan 45^0 \tan 30^0} = \frac{1 + \frac{1}{\sqrt{3}}}{1 - 1.\frac{1}{\sqrt{3}}}$

$= \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1} = \frac{(\sqrt{3}+1)^2}{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)}$

$= \frac{3+2\sqrt{3}+1}{3-1} = \frac{2(2+\sqrt{3})}{2} = 2+\sqrt{3}$

= R.H.S. (Proved)

(b) $\cot 2\alpha + \cot 2\beta + \cot 2\gamma = \sqrt{3}$ হলে দেখাও যে, $A = B = C$.

প্রমাণ: প্রশ্নমালা VIIF এর 7(a) দ্রষ্টব্য।

(c) দেখাও যে, $\sin(\beta - \gamma) = \frac{AC - AB}{BC}\cos\alpha$

প্রমাণ: ABC ত্রিভুজের অন্তঃকেন্দ্র O বলে, চিত্রানুযায়ী, α.

$\therefore \alpha = \frac{A}{2}, \beta = \frac{B}{2}, \gamma = \frac{C}{2}$

R.H.S. $= \frac{AC - AB}{BC}\cos\alpha$

$= \frac{b-c}{a}\cos\frac{A}{2}$

$= \frac{2R\sin B - 2R\sin C}{2R\sin A}\cos\frac{A}{2}$;

$[\because \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = R]$

$= \frac{\sin B - \sin C}{\sin A}\cos\frac{A}{2}$

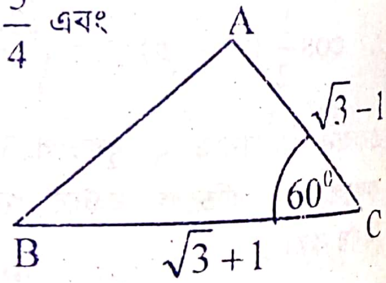
$= \frac{2\sin\frac{1}{2}(B-C)\cos\frac{1}{2}(B+C)}{2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}}\cos\frac{A}{2}$

$= \frac{\sin\frac{1}{2}(B-C)\cos(\frac{\pi}{2} - \frac{A}{2})}{\sin\frac{A}{2}}$

$= \frac{\sin\frac{1}{2}(B-C)\sin\frac{A}{2}}{\sin\frac{A}{2}} = \sin\frac{1}{2}(B-C)$

$= \sin(\frac{1}{2}B - \frac{1}{2}C) = \sin(\beta - \gamma) =$ L.H.S.

12. $\alpha = \tan^{-1}\frac{3}{4}$ এবং



(a) প্রমাণ কর যে, $\frac{\cos 15^0 + \sin 15^0}{\cos 15^0 - \sin 15^0} = \sqrt{3}$

প্রমাণ: L.H.S. $= \frac{\cos 15^0 + \sin 15^0}{\cos 15^0 - \sin 15^0}$

$= \frac{\cos 15^0(1 + \tan 15^0)}{\cos 15^0(1 - \tan 15^0)}$

$= \frac{\tan 45^0 + \tan 15}{1 - \tan 45^0 \tan 15^0}$

$= \tan(45^0 + 15^0) = \tan 60^0$

$= \sqrt{3}$ R.H.S.

(b) $\cos\alpha$ ঋণাত্মক হলে $\frac{\tan\alpha + \sin(-\alpha)}{\cot\alpha + \cos(-\alpha)}$ মান নির্ণয় কর।

সমাধান: $\alpha = \tan^{-1}\frac{3}{4} \Rightarrow \tan\alpha = \frac{3}{4}$ এবং $\cos\alpha$ ঋণাত্মক।

$\therefore \sec\alpha = -\sqrt{1+\tan^2\alpha} = -\sqrt{1+\frac{9}{16}}$

$= -\sqrt{\frac{16+9}{16}} = -\frac{5}{4}$

$\therefore \cos\alpha = -\frac{4}{5}$,

$\sin\alpha = \tan\alpha\cos\alpha = \frac{3}{4}\times(-\frac{4}{5}) = -\frac{3}{5}$

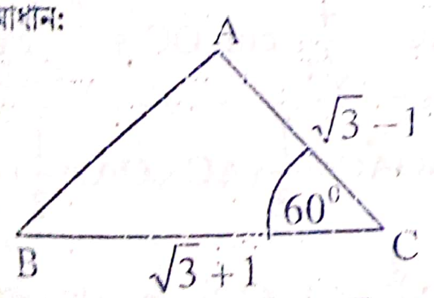
$\therefore \frac{\tan\alpha+\sin(-\alpha)}{\cot\alpha+\cos(-\alpha)} = \frac{\tan\alpha-\sin\alpha}{\cot\alpha+\cos\alpha}$

$= \frac{\frac{3}{4}-(-\frac{3}{5})}{\frac{4}{3}+(-\frac{4}{5})} = \frac{\frac{15+12}{20}}{\frac{20-12}{15}}$

$= \frac{27}{20}\times\frac{15}{8} = \frac{27}{4}\times\frac{3}{8} = \frac{51}{32}$.

(c) AB এর মান ব্যবহার করে ত্রিভুজ ABC এর ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

সমাধান:



এখানে, $a = \sqrt{3}+1$, $b = \sqrt{3}-1$, $C = 60^0$

$\therefore A+B = 180° - C = 180° - 60°$

$\Rightarrow A+B = 120° \ldots\ldots$ (i)

ট্যানজেন্ট সূত্র হতে আমরা পাই,

$\tan\frac{A-B}{2} = \frac{a-b}{a+b}\cot\frac{C}{2}$

$= \frac{\sqrt{3}+1-\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}+1+\sqrt{3}-1}\times\cot 30°$

$= \frac{2}{2\sqrt{3}}\times\sqrt{3} = 1$

$\Rightarrow \frac{A-B}{2} = 45° \Rightarrow A-B = 90° \cdots$ (ii)

(i) + (ii) $\Rightarrow 2A = 210° \therefore A = 105°$

(i) – (ii) $\Rightarrow 2B = 30° \therefore B = 15°$

$c^2 = a^2+b^2-2ab\cos 60°$

$= (\sqrt{3}+1)^2 + (\sqrt{3}-1)^2 - 2(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}+1)\frac{1}{2}$

$= 2(3+1) - 2(3-1)\frac{1}{2}$

$= 8-2 = 6 \quad \therefore c = \sqrt{6}$.

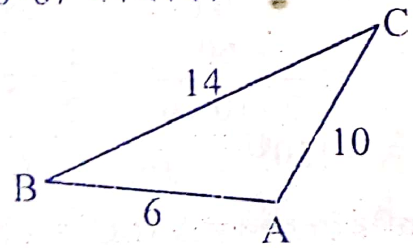
$\therefore$ ত্রিভুজ ABC এর ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2}bc\sin A$

$= \frac{1}{2}(\sqrt{3}-1)\times\sqrt{6}\sin 105^0$

$= \frac{1}{2}\times 0\cdot73\times 2\cdot45\times 0\cdot97$

$= 0\cdot87$ বর্গ একক।

13.



(a) $\tan(1590°)$ এর মান নির্ণয় কর।

সমাধান : $\tan(1590°)$

$= \tan(17\times360° + 60°)$

$= -\cot 60° = -\frac{1}{\sqrt{3}}$

(b) ত্রিভুজটির পরিব্যাসার্ধ ও অন্ত:ব্যাসার্ধ যথাক্রমে R ও r হলে, R : r নির্ণয় কর।

সমাধান : এখানে, ত্রিভুজটির বাহু তিনটি $a = 14$, $b = 10$, $c = 6$.

$\therefore$ ত্রিভুজের অর্ধপরিসীমা $s = \frac{a+b+c}{2}$

$= \frac{14+10+6}{2} = 15$

আমরা জানি, $\frac{abc}{4R} = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

$$\Rightarrow R = \frac{abc}{4\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}}$$

$$= \frac{14\times10\times6}{4\sqrt{15(15-14)(15-10)(15-6)}}$$

$$= \frac{210}{\sqrt{15\times1\times5\times9}} = \frac{210}{15\sqrt{3}} = \frac{14\sqrt{3}}{3}$$

এবং $rs = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

$$\Rightarrow 15r = 15\sqrt{3} \Rightarrow r = \sqrt{3}$$

$$\therefore R : r = \frac{14\sqrt{3}}{3} : \sqrt{3} = \frac{14}{3} = 14 : 3$$

(c) বৃহত্তম কোণের মাধ্যমে ত্রিভুজটির ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

সমাধান : এখানে, ত্রিভুজটির বৃহত্তম কোণ A.

$$\cos A = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} = \frac{10^2+6^2-14^2}{2\times10\times6}$$

$$= \frac{-60}{2\times10\times6} = -\frac{1}{2} = \cos 120^0$$

$\therefore$ $A = 120^0$.

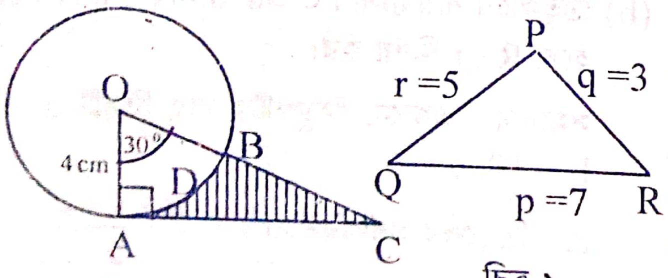
ত্রিভুজটির ক্ষেত্রফল $= \Delta ABC = \frac{1}{2} bc \sin A$

$$= \frac{1}{2}\times10\times6\sin120^0$$

$$= 30\times\sin(180^0-60^0) = 30\times\sin60^0$$

$$= 30\times\frac{\sqrt{3}}{2} = 15\sqrt{3}$$ বর্গ একক।

14.



চিত্র-১ চিত্র-২

(a) যেকোনো ত্রিভুজে দেখাও যে, $\sin 3B = 4\sin B$, যখন $a = 4b$ এবং $A = 3B$.

প্রমাণ: ত্রিভুজের সাইন সূত্র হতে পাই,

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

$$\Rightarrow \frac{4b}{\sin 3B} = \frac{b}{\sin B}$$

$$\therefore \sin 3B = 4\sin B$$

(b) চিত্র-১ অনুযায়ী, ADBC ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

সমাধান : ΔOAC এ, $\angle OAC = 90^0$, $\angle AOC = 30^0$.

$$\therefore \angle ACO = 90^0 - 30^0 = 60^0$$

OAC ত্রিভুজে সাইন সূত্র প্রয়োগ করে পাই,

$$\frac{OA}{\sin ACO} = \frac{AC}{\sin AOC} = \frac{OC}{\sin OAC}$$

$$\Rightarrow \frac{4\text{ cm}}{\sin 60^0} = \frac{AC}{\sin 30^0} = \frac{OC}{\sin 90^0}$$

$$\Rightarrow \frac{4\text{ cm}}{\sqrt{3}/2} = \frac{AC}{1/2} = \frac{OC}{1}$$

$$\Rightarrow AC = \frac{4}{\sqrt{3}}\text{ cm}, OC = \frac{8}{\sqrt{3}}\text{ cm}$$

$$\therefore \Delta OAC = \frac{1}{2}(AC\times OA) = \frac{1}{2}\left(\frac{4}{\sqrt{3}}\times4\right)$$

$$= \frac{8}{\sqrt{3}} = 4\cdot6188$$ বর্গ সে.মি. (প্রায়)

এখানে, বৃত্তের ব্যাসার্ধ $r = 4$ cm, কেন্দ্রে উৎপন্ন কোণ $\theta = 30^0 = \frac{\pi}{6}$.

$\therefore$ OADB বৃত্তকলার ক্ষেত্রফল

$$= \frac{1}{2}\theta r^2 = \frac{1}{2}\times\frac{\pi}{6}\times4^2 = 4\cdot1888$$ বর্গ সে.মি.

$\therefore$ ADBC ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল $= \Delta OAC$ এর ক্ষেত্রফল $-$ OADB বৃত্তকলার ক্ষেত্রফল

$= 4\cdot6188 - 4\cdot1888 = 0\cdot43$ বর্গ সে.মি.।

(c) চিত্র-২ এর বৃহত্তম কোণ নির্ণয় করে তার সাহায্যে ত্রিভুজটির ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

সমাধান : ΔPQR এর বৃহত্তম বাহু $PR = 7$

$\therefore$ বৃহত্তম কোণ $\angle QPR$.

ত্রিভুজের কোসাইন সূত্র হতে পাই,

$$\cos QPR = \frac{PQ^2 + PR^2 - QR^2}{2 \times PQ \times PR}$$

$$= \frac{5^2 + 3^2 - 7^2}{2 \times 5 \times 3} = \frac{25 + 9 - 49}{30} = \frac{-15}{30} = -\frac{1}{2}$$

$= \cos 120^0$

$\therefore \angle QPR = 120^0.$

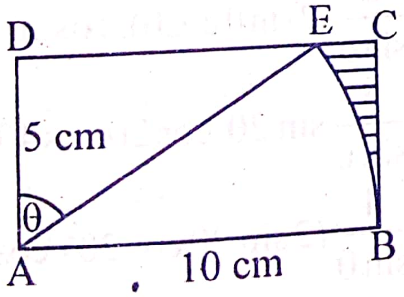
ত্রিভুজটির ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2}(PQ \times PR \sin QPR)$

$$= \frac{1}{2} \times 5 \times 3 \times \sin 120^0$$

$$= \frac{15}{2} \times \sin(180^0 - 60^0) = \frac{15}{2} \times \sin 60^0$$

$$= \frac{15}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{15\sqrt{3}}{4}$$ বর্গ একক।

15.



চিত্রে, ABCD একটি আয়তক্ষেত্র এবং A কেন্দ্র বিশিষ্ট বৃত্তের বৃত্তচাপ BE।

(a) ΔPQR- এ , $p = 6$, $q = 3\sqrt{3}$ এবং $P = 90°$ হলে Q কোণের মান নির্ণয় কর।

সমাধান : দেওয়া আছে, ΔPQR –এ $p = 6$, $q = 3\sqrt{3}$ এবং $P = 90°$

ত্রিভুজের সাইন সূত্র হতে পাই; $\frac{p}{\sin P} = \frac{q}{\sin Q}$

$$\Rightarrow \frac{6}{\sin 90^0} = \frac{3\sqrt{3}}{\sin Q} \Rightarrow \frac{6}{1} = \frac{3\sqrt{3}}{\sin Q}$$

$$\Rightarrow \sin Q = \frac{3\sqrt{3}}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} = \sin 60^0 \therefore Q = 60^0$$

(b) উদ্দীপকের $\frac{DE}{AE}$ অনুপাতটি θ কোণের যে ত্রিকোণমিতিক অনুপাত নির্দেশ করে তার লেখচিত্র $-2\pi \le \theta \le 2\pi$ ব্যবধিতে অঙ্কন কর।

সমাধান : ΔADE , $\frac{DE}{AE} = \sin\theta$.

$-2\pi \le \theta \le 2\pi$ ব্যবধিতে $\sin\theta$ এর লেখচিত্র পাঠ্যপুস্তক দ্রষ্টব্য।

(c) উদ্দীপকের ছায়াঘেরা অংশ BEC এর ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

সমাধান : A কেন্দ্র বিশিষ্ট বৃত্তের বৃত্তচাপ BE ।

$\therefore AE = AB = 10$ cm এবং

$$DE = \sqrt{AE^2 - AD^2} = \sqrt{10^2 - 5^2}$$

$$= \sqrt{75} = 5\sqrt{3}$$

ΔADE এ, $\sin\theta = \frac{DE}{AE} = \frac{5\sqrt{3}}{10} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$= \sin 60^0$

$\therefore \angle DAE = \theta = 60^0$

$\therefore \angle BAE = 90^0 - 60^0 = 30^0 = \frac{\pi}{6}$

ছায়াঘেরা অংশ BEC এর ক্ষেত্রফল = ABCD আয়তক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল – {ΔADE এর ক্ষেত্রফল + ABE বৃত্তকলার ক্ষেত্রফল}

$$= 10 \times 5 - \{\frac{1}{2}(AD \times DE) + \frac{1}{2}(\angle BAE \times AB^2)\}$$

$$= 50 - \{\frac{1}{2}(5 \times 5\sqrt{3}) + \frac{1}{2}(\frac{\pi}{6} \times 10^2)\}$$

$$= 50 - (21 \cdot 65 + 26 \cdot 18)$$

$= 50 - 47 \cdot 83 = 2 \cdot 17$ বর্গ সে.মি. (প্রায়)

16. $S = \tan P \cot Q \cot R$,

$X = \sec\frac{\pi}{17}\cdot\sec\frac{2\pi}{17}$ এবং $Y = \cos\frac{4\pi}{17}\cos\frac{9\pi}{17}$

(a) $\tan A = \frac{5}{12}$ হলে দেখাও যে, $\sin 2A = \frac{120}{169}$

প্রমাণ: $\sin 2A = \frac{2\tan A}{1+\tan^2 A} = \frac{2\times\frac{5}{12}}{1+(\frac{5}{12})^2}$

$= \frac{\frac{5}{6}}{1+\frac{25}{144}} = \frac{\frac{5}{6}}{\frac{144+25}{144}} = \frac{5}{6}\times\frac{144}{169} = \frac{120}{169}$

$\therefore \sin 2A = \frac{120}{169}$ (Showed)

(b) $P = 20^0$, $Q = 50^0$, $R = 10^0$ হলে দেখাও যে, $S = \sqrt{3}$

প্রমাণ: $S = \tan P \cot Q \cot R$

$= \tan 20^0 \cot 50^0 \cot 10^0$

$= \frac{2\sin 20^0 \cos 50^0 \cos 10^0}{2\cos 20^0 \sin 50^0 \sin 10^0}$

$= \frac{\sin 20^0\{\cos(50^0+10^0)+\cos(50^0-10^0)\}}{\cos 20^0\{\cos(50^0-10^0)-\cos(50^0+10^0)\}}$

$= \frac{\sin 20^0(\cos 60^0+\cos 40^0)}{\cos 20^0(\cos 40^0-\cos 60^0)}$

$= \frac{\sin 20^0(\frac{1}{2}+\cos 40^0)}{\cos 20^0(\cos 40^0-\frac{1}{2})}$

$= \frac{\frac{1}{2}\sin 20^0+\cos 40^0\sin 20^0}{\cos 20^0\cos 40^0-\frac{1}{2}\cos 20^0}$

$= \frac{\frac{1}{2}\sin 20^0+\frac{1}{2}\{\sin(40^0+20^0)-\sin(40^0-20^0)\}}{\frac{1}{2}\{\cos(40^0+20^0)+\cos(40^0-20^0)\}-\frac{1}{2}\cos 20^0}$

$= \frac{\frac{1}{2}\sin 20^0+\frac{1}{2}\sin 60^0-\frac{1}{2}\sin 20^0}{\frac{1}{2}\cos 60^0+\frac{1}{2}\cos 20^0-\frac{1}{2}\cos 20^0}$

$= \frac{\frac{1}{2}\sin 60^0}{\frac{1}{2}\cos 60^0} = \tan 60^0$

$\therefore S = \sqrt{3}$

(c) প্রমাণ কর যে, $\frac{16Y}{X} = -1$

প্রমাণ: L.H.S. $= \frac{16Y}{X}$

$= 16\frac{\cos\frac{4\pi}{17}\cos\frac{9\pi}{17}}{\sec\frac{\pi}{17}\sec\frac{2\pi}{17}}$

$= 16\cos\frac{\pi}{17}\cos\frac{2\pi}{17}\cos\frac{4\pi}{17}\cos\frac{9\pi}{17}$

$= 16\cos\theta\cos 2\theta\cos 4\theta\cos 9\theta$, যেখানে $\theta = \frac{\pi}{17}$

$= \frac{8}{\sin\theta}(2\sin\theta\cos\theta).\cos 2\theta\cos 4\theta\cos 9\theta$

$= \frac{8}{\sin\theta}\sin 2\theta\cos 2\theta\cos 4\theta\cos 9\theta$

$= \frac{4}{\sin\theta}(2\sin 2\theta\cos 2\theta)\cos 4\theta\cos 9\theta$

$= \frac{4}{\sin\theta}\sin 4\theta\cos 4\theta\cos 9\theta$

$= \frac{2}{\sin\theta}(2\sin 4\theta\cos 4\theta)\cos 9\theta$

$= \frac{1}{\sin\theta}(2\sin 8\theta\cos 9\theta)$

$= \frac{1}{\sin\theta}\{\sin(8\theta+9\theta)-\sin(9\theta-8\theta)\}$

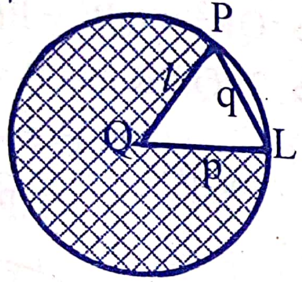
$= \frac{1}{\sin\theta}\{\sin 17\theta-\sin\theta\}$

$= \frac{1}{\sin\theta}\{\sin(17\times\frac{\pi}{17}) - \sin\theta\}$

$= \frac{1}{\sin\theta}\{\sin\pi - \sin\theta\} = \frac{1}{\sin\theta}(0 - \sin\theta)$

$= 0 - 1 = -1 =$ R.H.S. (Proved)

17. চিত্রে, Q বৃত্তটির কেন্দ্র।



(a) প্রমাণ কর যে, $\frac{\cos 33^0 - \sin 33^0}{\cos 33^0 + \sin 33^0} = \tan 12^0$

প্রমাণ: L.H.S. $= \frac{\cos 33^0 - \sin 33^0}{\cos 33^0 + \sin 33^0}$

$= \frac{\cos 33^0(1 - \frac{\sin 33^0}{\cos 33^0})}{\cos 33^0(1 + \frac{\sin 33^0}{\cos 33^0})} = \frac{1 - \tan 33^0}{1 + \tan 33^0}$

$= \frac{\tan 45^0 - \tan 33^0}{1 + \tan 45^0 \tan 33^0} = \tan(45^0 - 33^0)$

$= \tan 12^0 =$ R.H.S.

(b) উদ্দীপকের আলোকে প্রমাণ কর যে,

$\sin\frac{Q-P}{2} = \frac{q-p}{4R}\operatorname{cosec}\frac{L}{2}$

প্রমাণ: R.H.S. $= \frac{q-p}{4R}\operatorname{cosec}\frac{L}{2}$

$= \frac{2R\sin Q - 2R\sin P}{4R}\operatorname{cosec}\frac{L}{2}$

$= \frac{2R(\sin Q - \sin P)}{4R}\frac{1}{\sin\frac{L}{2}}$

$= \frac{\sin Q - \sin P}{2\sin\frac{L}{2}}$

$= \frac{2\sin\frac{1}{2}(Q-P)\cos\frac{1}{2}(Q+P)}{2\sin\frac{L}{2}}$

$= \frac{\sin\frac{1}{2}(Q-P)\cos(\frac{\pi}{2} - \frac{L}{2})}{\sin\frac{L}{2}}$

$= \frac{\sin\frac{1}{2}(Q-P)\sin\frac{L}{2}}{\sin\frac{L}{2}}$

$= \sin\frac{Q-P}{2} =$ L.H.S. (Proved)

(c) $\angle PQL = 60^0$ এবং p = 5 সে.মি. হলে ছায়াঘেরা অংশের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

সমাধান: দেওয়া আছে, $\angle PQL = 60^0 = \frac{\pi}{3}$ এবং

বৃত্তের ব্যাসার্ধ, p = 5 সে.মি.।

$\therefore$ বৃত্তটির ক্ষেত্রফল $= \pi p^2 = \pi\times 5^2 = 25\pi$

PQL বৃত্তকলার ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2}\angle PQL\times p^2$

$= \frac{1}{2}\times\frac{\pi}{3}\times 5^2 = \frac{25}{6}\pi$

$\therefore$ ছায়াঘেরা অংশের ক্ষেত্রফল $= 25\pi - \frac{25}{6}\pi$

$= \frac{150-25}{6}\pi = \frac{125}{6}\pi$ বর্গ একক।

18. PQR একটি ত্রিভুজ।

(a) প্রমাণ কর যে, tanP = tanQ + tanR, যখন cosP = cosQ.cosR

প্রমাণ: R.H.S. = tan Q + tan R

$= \frac{\sin Q}{\cos Q} + \frac{\sin R}{\cos R}$

$$= \frac{\sin Q\cos R + \sin R\cos Q}{\cos Q\cos R}$$

$$= \frac{\sin(Q+R)}{\cos P}$$

$$= \frac{\sin(\pi - P)}{\cos P}, [\because \text{PQR একটি ত্রিভুজ}]$$

$$= \frac{\sin P}{\cos P} = \tan P = \text{L.H.S. (Proved)}$$

(b) প্রমাণ কর যে, $\sin^2 P - \sin^2 Q + \sin^2 R = 2\sin P \cos Q \sin R$.

প্রমাণ: L.H.S. $= \sin^2 P - \sin^2 Q + \sin^2 R$

$= \frac{1}{2}(1 - \cos 2P + 1 - \cos 2R) - \sin^2 Q$

$= \frac{1}{2}(2 - \cos 2P - \cos 2R) - \sin^2 Q$

$= 1 - (\cos 2P + \cos 2R) - \sin^2 Q$

$= 1 - \sin^2 Q - \frac{1}{2}.2\cos(P+R)\cos(P-R)$

$= \cos^2 Q - \cos(\pi - Q)\cos(P-R)$

$= \cos^2 Q + \cos Q \cos(P-R)$

$= \cos Q \{\cos Q + \cos(P-R)\}$

$= \cos Q [\cos\{\pi - (P+R)\} + \cos(P-R)]$

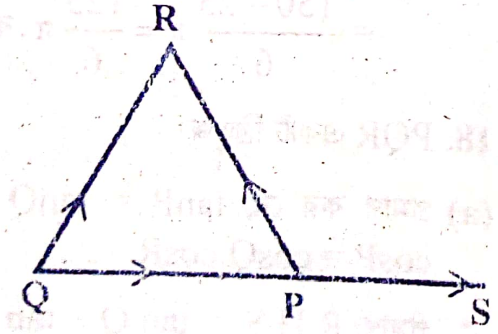
$= \cos Q [-\cos(P+R) + \cos(P-R)]$

$= \cos Q .2 \sin P \sin R$

$= 2\sin P \cos Q \sin R$ = R.H.S. (Proved)

(c) প্রমাণ কর যে, $\cos P = \frac{PQ^2 + PR^2 - QR^2}{2.PQ.PR}$

প্রমাণ:



QP কে S পর্যন্ত বর্ধিত করি। ত্রিভুজের ভেক্টর বিধি

$\therefore \overrightarrow{QR}.\overrightarrow{QR} = (\overrightarrow{QP} + \overrightarrow{PR}).(\overrightarrow{QP} + \overrightarrow{PR})$

$QR^2 = \overrightarrow{QP}.\overrightarrow{QP} + \overrightarrow{QP}.\overrightarrow{PR} + \overrightarrow{PR}.\overrightarrow{QP} + \overrightarrow{PR}.\overrightarrow{PR}$

$= QP^2 + 2\ \overrightarrow{QP}.\overrightarrow{PR} + PR^2$

$= QP^2 + 2|\overrightarrow{QP}||\overrightarrow{PR}|\cos RPS + PR^2$

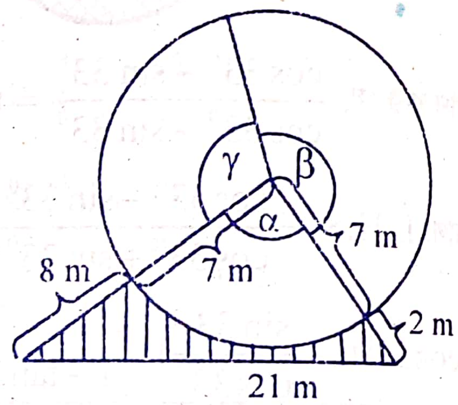
$\Rightarrow QR^2 = QP^2 + PR^2 + 2QP.PR\cos(\pi - P)$

$\Rightarrow QR^2 = QP^2 + PR^2 - 2PQ.PR\cos P$

$\Rightarrow 2PQ.PR\cos P = QP^2 + PR^2 - QR^2$

$\therefore \cos P = \frac{PQ^2 + PR^2 - QR^2}{2.PQ.PR}$

19.



(a) প্রমাণ কর যে, $\tan 75° = 2 + \sqrt{3}$

প্রমাণ: $\tan 75° = \tan(30° + 45°)$

$$= \frac{\tan 30^0 + \tan 45^0}{1 - \tan 30^0 \tan 45^0}$$

$$= \frac{\frac{1}{\sqrt{3}} + 1}{1 - \frac{1}{\sqrt{3}}.1} = \frac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1} = \frac{(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}+1)}{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)}$$

$$= \frac{3 + 2\sqrt{3} + 1}{3 - 1} = \frac{2(\sqrt{3}+2)}{2} = 2 + \sqrt{3}$$

(b) উদ্দীপকের সাহায্যে প্রমাণ কর যে,
$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1 + 2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma$

প্রমাণ: উদ্দীপক অনুসারে আমরা পাই,
$\alpha + \beta + \gamma = 2\pi$

L.H.S. $= \cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma$

হতে পাই, $\overrightarrow{QR} = \overrightarrow{QP} + \overrightarrow{PR}$

$= \frac{1}{2}(1 + \cos 2\alpha + 1 + \cos 2\beta) + \cos^2\gamma$

$= 1 + \frac{1}{2}.2\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta) + \cos^2\gamma$

$= 1 + \cos(2\pi-\gamma)\cos(\alpha-\beta) + \cos^2\gamma$

$= 1 + \cos\gamma\ \cos(\alpha-\beta) + \cos^2\gamma$

$= 1 + \cos\gamma\ [\cos(\alpha-\beta) + \cos\gamma]$

$= 1 + \cos\gamma\ [\cos(\alpha-\beta) + \cos\{2\pi-(\alpha+\beta)\}]$

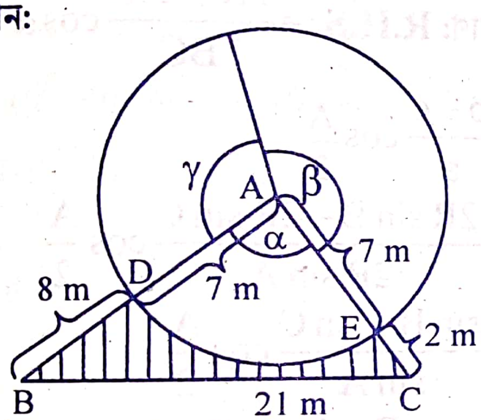
$= 1 + \cos\gamma\ [\cos(\alpha-\beta) + \cos(\alpha+\beta)]$

$= 1 + \cos\gamma\ .\ 2\cos\alpha\cos\beta$

$= 1 + 2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma = \text{R.H.S.}$

(c) উদ্দীপকের ছায়াঘেরা অংশের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

সমাধান:



চিত্রানুযায়ী, ABC ত্রিভুজের বাহুত্রয়ের দৈর্ঘ্য,

$BC = a = 21$ m, $AC = b = 7 + 2 = 9$ m,

$AB = c = 7 + 8 = 15$ m

$$\cos\alpha = \frac{9^2+15^2-21^2}{2\times9\times15} = \frac{81+225-441}{270}$$

$$= \frac{-135}{270} = -\frac{1}{2} = \cos120^0$$

$$\therefore\ \alpha = 120^0 = \frac{120}{180}\pi = \frac{2\pi}{3}$$

$\therefore$ ABC ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল$= \frac{1}{2}\times AB\times AC\sin\alpha$

$= \frac{1}{2}\times15\times9\times\sin120^0$

$= \frac{1}{2}\times15\times9\times\frac{\sqrt{3}}{2} = 58\cdot46$ বর্গ মিটার (প্রায়)

ADE বৃত্তকলার ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2}\alpha(AD)^2$

$= \frac{1}{2}\times\frac{2\pi}{3}\times7^2 = \frac{1}{2}\times\frac{2\pi}{3}\times7^2$

$= 51\cdot31$ বর্গ মিটার (প্রায়)

$\therefore$ ছায়াঘেরা অংশের ক্ষেত্রফল$=58\cdot46 - 51\cdot31$

$= 7\cdot15$ বর্গ মিটার (প্রায়)

20. ABC ত্রিভুজে, $A = \frac{\pi}{16}$, $B = \frac{9\pi}{16}$

(a) $\sin^2A + \sin^2B$ এর মান নির্ণয় কর।

সমাধান: $\sin^2A + \sin^2B = \sin^2\frac{\pi}{16} + \sin^2\frac{9\pi}{16}$

$= \sin^2\frac{\pi}{16} + \sin^2(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{16})$

$= \sin^2\frac{\pi}{16} + \cos^2\frac{\pi}{16} = 1$

(b) প্রমাণ কর যে, $2\sin A = \sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}$

প্রমাণ: R.H.S. $= \sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}$

$= \sqrt{2-\sqrt{2(1+\frac{\sqrt{2}}{2})}} = \sqrt{2-\sqrt{2(1+\frac{\sqrt{2}}{2})}}$

$= \sqrt{2-\sqrt{2(1+\frac{1}{\sqrt{2}})}} = \sqrt{2-\sqrt{2(1+\cos\frac{\pi}{4})}}$

$= \sqrt{2-\sqrt{2.2\cos^2\frac{\pi}{8}}} = \sqrt{2-2\cos\frac{\pi}{8}}$

$= \sqrt{2(1-\cos\frac{\pi}{8})} = \sqrt{2\times2\sin^2\frac{\pi}{16}}$

$= 2\sin\frac{\pi}{16} = 2\sin A = \text{L.H.S.}$

(c) প্রমাণ কর যে, $\cos^2A + \cos^2B - \cos^2C = 1 - 2\sin A\sin B\cos C$

প্রমাণ: ABC একটি ত্রিভুজ বলে, $A + B + C = \pi$

L.H.S. $= \cos^2A + \cos^2B - \cos^2C$

$= \frac{1}{2}(1 + \cos2A + 1 + \cos2B) - \cos^2C$

$= 1 + \frac{1}{2}(\cos 2A + \cos 2B) - \cos^2 C$

$= 1 + \frac{1}{2}.2\cos(A+B)\cos(A-B) - \cos^2 C$

$= 1 + \cos(\pi - C)\cos(A-B) - \cos^2 C$

$= 1 - \cos C\cos(A-B) - \cos^2 C$

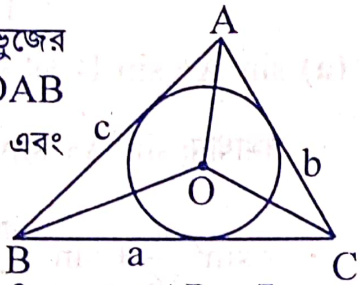
$= 1 - \cos C\{\cos(A-B) + \cos C\}$

$= 1 - \cos C[\cos(A-B) + \cos\{\pi - (A+B)\}]$

$= 1 - \cos C.[\cos(A-B) - \cos(A+B)]$

$= 1 - 2\cos C \sin A \sin B =$ R.H.S

21. চিত্রে, ABC ত্রিভুজের অন্তঃকেন্দ্র O। $\angle OAB = \alpha$, $\angle OBC = \beta$ এবং $\angle OCA = \gamma$



(a) BC = 5 cm, AC = 3cm এবং AB = 7 cm হলে $\angle C$ নির্ণয় কর।

সমাধান: দেওয়া আছে, BC = a = 5 cm, AC = b = 3 cm এবং AB = c = 7 cm. ত্রিভুজের কোসাইন সূত্র হতে পাই,

$\cos C = \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab} = \frac{5^2+3^2-7^2}{2\times5\times3}$

$= \frac{25+9-49}{30} = \frac{-15}{30} = -\frac{1}{2} = \cos 120^0$

$\therefore \quad \angle C = 120^0.$

(b) প্রমাণ কর যে, $\sin 4\alpha - \sin 4\beta + \sin 4\gamma = 4\cos A \sin B \cos C$

প্রমাণ: যেহেতু ABC ত্রিভুজের অন্তঃকেন্দ্র O, $\angle OAB = \alpha = \frac{1}{2}\angle A$, $\angle OBC = \beta = \frac{1}{2}\angle B$ এবং $\angle OCA = \gamma = \frac{1}{2}\angle C$.

$\therefore \quad \alpha+\beta+\gamma = \frac{1}{2}(\angle A + \angle B + \angle C) = \frac{1}{2}\times\pi = \frac{\pi}{2}$

L.H.S.$= \sin 4\alpha - \sin 4\beta + \sin 4\gamma$

$= 2\cos\frac{1}{2}(4\alpha+4\beta)\sin\frac{1}{2}(4\alpha-4\beta) + 2\sin 2\gamma\cos 2\gamma$

$= 2\cos 2(\alpha+\beta)\sin 2(\alpha-\beta) + 2\sin 2\gamma\cos 2\gamma$

$= 2\cos 2(\frac{\pi}{2}-\gamma)\sin(2\alpha-2\beta) + 2\sin 2\gamma\cos 2\gamma$

$= 2\cos(\pi-2\gamma)\sin(2\alpha-2\beta) + 2\sin 2\gamma\cos 2\gamma$

$= -2\cos 2\gamma\sin(2\alpha-2\beta) + 2\sin 2\gamma\cos 2\gamma$

$= 2\cos 2\gamma[-\sin(2\alpha-2\beta) + \sin\{\pi-(2\alpha+2\beta)\}]$

$= 2\cos 2\gamma[-\sin(2\alpha-2\beta) + \sin(2\alpha+2\beta)]$

$= 2\cos 2\gamma.2\sin 2\beta\cos 2\alpha$

$= 4\cos 2\alpha\sin 2\beta\cos 2\gamma$

$= 4\cos A\sin B\cos C =$ R.H.S.

(c) দেখাও যে, $\sin(\beta-\gamma) = \frac{AC-AB}{BC}\cos\alpha$

প্রমাণ: R.H.S. $= \frac{AC-AB}{BC}\cos\alpha$

$= \frac{b-c}{a}\cos\frac{A}{2}$

$= \frac{2R\sin B - 2R\sin C}{2R\sin A}\cos\frac{A}{2}$

$= \frac{\sin B - \sin C}{\sin A}\cos\frac{A}{2}$

$= \frac{2\cos\frac{B+C}{2}\sin\frac{B-C}{2}}{2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}}\cos\frac{A}{2}$

$= \frac{\cos(\frac{\pi}{2}-\frac{A}{2})\sin\frac{B-C}{2}}{\sin\frac{A}{2}}$

$= \frac{\sin\frac{A}{2}\sin(\frac{B}{2}-\frac{C}{2})}{\sin\frac{A}{2}}$

$= \sin(\beta-\lambda) =$ L.H.S.

22. $A = 10^0, B = 50^0, C = 60^0, D = 70^0$

$L = \sin(Q+R-P) + \sin(R+P-Q) + \sin(P+Q-R)$

(a) প্রমাণ কর যে, $\frac{\sin 75^0 - \sin 15^0}{\sin 75^0 + \sin 15^0} = \frac{1}{\sqrt{3}}$

প্রমাণ : $L.H.S. = \dfrac{\sin 75^0 - \sin 15^0}{\sin 75^0 + \sin 15^0}$

$= \dfrac{\sin(90^0 - 25^0) - \sin 15^0}{\sin(90^0 - 25^0) + \sin 15^0}$

$= \dfrac{\cos 25^0 - \sin 15^0}{\cos 25^0 + \sin 15^0} = \dfrac{\cos 25^0(1 - \tan 15^0)}{\cos 25^0(1 + \tan 15^0)}$

$= \dfrac{\tan 45^0 - \tan 15^0}{1 + \tan 45 \tan 15^0} = \tan(45^0 - 15^0)$

$= \tan 30^0 = \dfrac{1}{\sqrt{3}} = R.H.S.$ (Proved)

(b) দেখাও যে, $\sin A \sin B \cos C \sin D = \dfrac{1}{16}$

প্রমাণ : $\sin A \sin B \cos C \sin D$

$= \sin 10^0 \sin 50^0 \cos 60^0 \sin 70^0$

$= \sin 10^\circ \sin 50^\circ . \dfrac{1}{2} . \sin 70^\circ$

$= \dfrac{1}{2} \sin 10^\circ \dfrac{1}{2} .(2 \sin 50^\circ \sin 70^\circ)$

$= \dfrac{1}{4} \sin 10^\circ \{\cos(70^\circ - 50^\circ) - \cos(70^\circ + 50^\circ)\}$

$= \dfrac{1}{4} \sin 10^\circ (\cos 20^\circ - \cos 120^\circ)$

$= \dfrac{1}{4} \sin 10^\circ (\cos 20^\circ + \dfrac{1}{2})$

$= \dfrac{1}{4} \sin 10^\circ \cos 20^\circ + \dfrac{1}{8} \sin 10^\circ$

$= \dfrac{1}{4} . \dfrac{1}{2} \{\sin(20^\circ + 10^\circ) - \sin(20^\circ - 10^\circ)\} + \dfrac{1}{8} \sin 10^\circ$

$= \dfrac{1}{8} \sin 30^\circ - \dfrac{1}{8} \sin 10^\circ + \dfrac{1}{8} \sin 10^\circ$

$= \dfrac{1}{8} . \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{16} = R.H.S.$ (Proved)

(c) প্রমাণ কর যে, $L = 4 \sin P \sin Q \sin R$, যেখানে $P + Q + R = \pi$

$L.H.S. = \sin(Q + R - P) + \sin(R + P - Q) + \sin(P + Q - R)$

$= \sin(P + Q + R - 2P) + \sin(P + Q + R - 2Q) + \sin(P + Q + R - 2R)$

$= \sin(\pi - 2P) + \sin(\pi - 2Q) + \sin(\pi - 2R)$

$= \sin 2P + \sin 2Q + \sin 2R$

$= 2 \sin \dfrac{1}{2}(2P + 2Q) \cos \dfrac{1}{2}(2P - 2Q) + \cos 2R$

$= 2\sin(P + Q)\cos(P - Q) + 2\sin R \cos R$

$= 2\sin(\pi - R)\cos(P - Q) + 2\sin R \cos R$

$= 2\sin C \cos(P - Q) + 2\sin R \cos R$

$= 2\sin R \{\cos(P - Q) + \cos R\}$

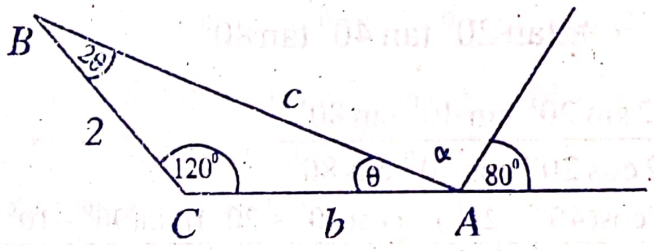
$= 2\sin R \{\cos(P - Q) + \cos(\pi - \overline{P + Q})\}$

$= 2\sin R \{\cos(P - Q) - \cos(P + Q)\}$

$= 2\sin R . 2\sin P \sin Q$

$= 4\sin P \sin Q \sin R = R.H.S.$ (Proved)

23. [ঢা.বো. ২০১৭]



দৃশ্যকল্প-I

দৃশ্যকল্প-II: $p = \tan\theta \tan 2\theta \tan\alpha$.

(a) $\sin 25^0 + \cos 25^0$ এর মান কত? ২

সমাধান: $\sin 25^0 + \cos 25^0$

$= \sin 25^0 + \cos(90^0 - 65^0)$

$= \sin 25^0 + \sin 65^0$

$= 2 \sin \dfrac{1}{2}(65^0 + 25^0) \cos \dfrac{1}{2}(65^0 - 25^0)$

$= 2 \sin 45^0 \cos 20^0 = 2 . \dfrac{1}{\sqrt{2}} \cos 20^0$

$= \sqrt{2} \cos 20^0$ (Ans.)

(b) দৃশ্যকল্প-I হতে b এবং c এর মান নির্ণয় কর। ৪

সমাধান: ΔABC এ, $\theta + 2\theta + 120^0 = 180^0$

$\Rightarrow 3\theta = 60^0 \Rightarrow \theta = 20^0$

ΔABC এ সাইন সূত্র প্রয়োগ করে পাই,

$\Rightarrow \frac{2}{\sin\theta} = \frac{b}{\sin 2\theta} = \frac{c}{\sin 120^0}$

$\Rightarrow \frac{2}{\sin 20^0} = \frac{b}{\sin 40^0} = \frac{c}{\sin 120^0}$

$\Rightarrow b = \frac{2\sin 40^0}{\sin 20^0} = \frac{4\sin 20^0 \cos 20^0}{\sin 20^0}$

$\Rightarrow b = 4\cos 20^0 = 3\cdot 76$ (প্রায়) এবং

$c = \frac{2\sin 120^0}{\sin 20^0} = \frac{1\cdot 73}{0\cdot 34} = 5.1$ (প্রায়)

(c) দৃশ্যকল্প-II হতে দেখাও যে, $p = \sqrt{3}$. ৪

সমাধান: চিত্র হতে পাই,

$\theta + \alpha + 80^0 = 180^0 \Rightarrow 20^0 + \alpha = 100^0$

$\Rightarrow \alpha = 80^0$

$p = \tan\theta \tan 2\theta \tan\alpha$

$= \tan 20^0 \tan 40^0 \tan 80^0$

$= \frac{2\sin 20^0 \sin 40^0 \sin 80^0}{2\cos 20^0 \cos 40^0 \cos 80^0}$

$= \frac{\{\cos(40^0 - 20^0) - \cos(40^0 + 20^0)\}\sin(90^0 - 10^0)}{\{\cos(40^0 + 20^0) + \cos(40^0 - 20^0)\}\cos(90^0 - 10^0)}$

$= \frac{(\cos 20^0 - \cos 60^0)\cos 10^0}{(\cos 60^0 + \cos 20^0)\sin 10^0}$

$= \frac{\cos 20^0 \cos 10^0 - \frac{1}{2}\cos 10^0}{\frac{1}{2}\sin 10^0 + \cos 20^0 \sin 10^0}$

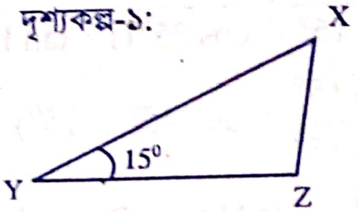
$= \frac{\frac{1}{2}\{\cos(20^0 + 10^0) + \cos(20^0 - 10^0)\} - \frac{1}{2}\cos 10^0}{\frac{1}{2}\sin 10^0 + \frac{1}{2}\{\sin(20^0 + 10^0) - \sin(20^0 - 10^0)\}}$

$= \frac{\frac{1}{2}\cos 30^0 + \frac{1}{2}\cos 10^0 - \frac{1}{2}\cos 10^0}{\frac{1}{2}\sin 10^0 + \frac{1}{2}\sin 30^0 - \frac{1}{2}\sin 10^0}$

$= \frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{4} \times 4 = \sqrt{3}$

$\therefore\ p = \sqrt{3}$

24. দৃশ্যকল্প-১:



দৃশ্যকল্প-২: $f(x) = \frac{1}{2}\sin\frac{x}{2}$ [সি.বো.'১৭]

(a) $\cos 74^0 33' \cos 14^0 33' + \cos 75^0 27' \cos 15^0 27'$ এর মান বের কর। ২

সমাধান: $\cos 74^0 33' \cos 14^0 33' + \cos 75^0 27' \cos 15^0 27'$

$= \cos 74^0 33' \cos 14^0 33' + \cos(90° - 14^0 33') \cos(90° - 74^0 33')$

$= \cos 69°22' \cos 9°22' + \sin 14^0 33' \sin 74^0 33'$

$= \cos(74^0 33' - 14^0 33') = \cos 60° = \frac{1}{2}$

(b) উদ্দীপক ১-এ যদি $\cos x = \sin y - \cos z$ হয়, তাহলে প্রমাণ কর $\angle x + \angle y = \angle z$. ৪

সমাধান: উদ্দীপক ১ হতে পাই,

$\angle x + \angle y + \angle z = 180^0$

এখন, $\cos x = \sin y - \cos z$

$\Rightarrow \cos x + \cos z = \sin y$

$\Rightarrow 2\cos\frac{1}{2}(x+z)\cos\frac{1}{2}(x-z) = \sin y$

$\Rightarrow 2\cos\frac{1}{2}(180^0 - y)\cos\frac{1}{2}(x-z) = \sin y$

$\Rightarrow 2\cos(90^0 - \frac{y}{2})\cos\frac{1}{2}(x-z) = \sin y$

$\Rightarrow 2\sin\frac{y}{2}\cos\frac{1}{2}(x-z) = 2\sin\frac{y}{2}\cos\frac{y}{2}$

$\Rightarrow \cos\frac{1}{2}(x-z) = \cos\frac{y}{2}$

$\Rightarrow \frac{1}{2}(\angle x - \angle z) = \frac{\angle y}{2}$

$\Rightarrow \angle x - \angle z = \angle y$

$\therefore \angle x + \angle y = \angle z.$

(c) দৃশ্যকল্প-২ অনুসারে $f(2\pi - 4\theta)$ এর লেখচিত্র অংকন কর। যেখানে $-2\pi \le \theta \le 2\pi$. 8

সমাধান: $f(x) = \frac{1}{2}\sin\frac{x}{2}$

$\therefore f(2\pi - 4\theta) = \frac{1}{2}\sin\frac{2\pi - 4\theta}{2}$

$= \frac{1}{2}\sin(\pi - 2\theta) = \frac{1}{2}\sin 2\theta$

ধরি, $y = f(2\pi - 4\theta) = \frac{1}{2}\sin 2\theta$

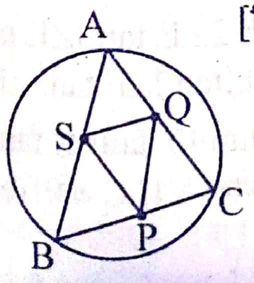
নিচের তালিকায় $\theta \in [-2\pi, 2\pi]$ এর জন্য $y = \frac{1}{2}\sin 2\theta$ এর প্রতিরূপী মান নির্ণয় করি ঃ

θ	-2π	$-\frac{\pi}{3}$	0	$\frac{\pi}{18}$	$\frac{2\pi}{18}$	$\frac{4\pi}{18}$	$\frac{6\pi}{18}$	2π
y	0	–.43	0	.17	.43	.32	.43	0

স্কেল নির্ধারণ ঃ x-অক্ষ বরাবর ছোট বর্গক্ষেত্রের এক বাহু $= \frac{\pi^c}{18}$ এবং y- অক্ষ বরাবর ছোট বর্গক্ষেত্রের 10 বাহু $= 1$.

(উপর্যুক্ত তথ্যের আলোকে লেখচিত্র নিজে অঙ্কন কর।]

25. [সিলেট বোর্ড ২০১৭]



ΔABC এর পরিব্যাসার্ধ R.

(a) $A + B = 105^0$ হলে $\sin C$ নির্ণয় কর। ২

সমাধান: ΔABC -এ,

$A + B + C = 180^0 \Rightarrow 105^0 + C = 180^0$

$\Rightarrow C = 75^0 \Rightarrow \sin C = \sin 75^0$

$\Rightarrow \sin C = \sin(45^0 + 30^0)$

$= \sin 45^0 \cos 30^0 + \cos 45^0 \sin 30^0$

$= \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$ (Ans.)

(b) ΔABC এর ক্ষেত্রে প্রমাণ কর যে,

$a^2 + b^2 + c^2 = 8R^2(1 + \cos A \cos B \cos C)$

প্রমাণ: ত্রিভুজের সাইন সূত্র হতে পাই,

$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$

$\therefore a = 2R \sin A,\ b = 2R \sin B,\ c = 2R \sin C$

L.H. S. $= a^2 + b^2 + c^2$

$= (2R \sin A)^2 + (2R \sin B)^2 + (2R \sin C)^2$

$= 4R^2(\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C)$; আতপর প্রশ্নমালা VII F এর উদাহরণ -5 দ্রষ্টব্য।

(c) ΔPQS এর ক্ষেত্রে-

$\frac{1}{PQ+PS} = \frac{3}{PS+PQ+QS} - \frac{1}{PS+QS}$ হলে $\angle Q$ নির্ণয় কর। 8

সমাধান: মনে করি, PQR ত্রিভুজে, $PQ = s,\ QS = p,\ PS = q$. তাহলে,

$\frac{1}{PQ+PS} = \frac{3}{PS+PQ+QS} - \frac{1}{PS+QS}$

$\Rightarrow \frac{1}{s+q} = \frac{3}{q+s+p} - \frac{1}{q+p}$

$\Rightarrow \frac{1}{s+q} = \frac{2}{q+s+p} + \frac{1}{q+s+p} - \frac{1}{q+p}$

$\Rightarrow \frac{1}{s+q} - \frac{1}{q+s+p} = \frac{2}{q+s+p} - \frac{1}{q+p}$

$$\Rightarrow \frac{q+s+p-s-q}{(q+s+p)(s+q)} = \frac{2q+2p-q-s-p}{(q+s+p)(q+p)}$$

$$\Rightarrow \frac{p}{s+q} = \frac{q+p-s}{q+p}$$

$$\Rightarrow pq + p^2 = q^2 - s^2 + ps + pq$$

$$\Rightarrow p^2 + s^2 - q^2 = ps$$

$$\Rightarrow \frac{p^2+s^2-q^2}{2s} = \frac{1}{2} \Rightarrow \cos Q = \cos 60^0$$

$$\Rightarrow \angle Q = 60^0 \quad \text{(Ans.)}$$

26. দৃশ্যকল্প-১ : ΔXYZ এ, $\cos X = \sin Y - \cos Z.$

দৃশ্যকল্প-২ : $\sqrt{1+n}.\tan\frac{\alpha}{2} = \sqrt{1-n}.\tan\frac{\beta}{2}$

[য .বো.'১৭]

(a) প্রমাণ কর যে, $\tan 75^\circ = 2+\sqrt{3}.$

প্রমাণ: সৃজনশীল প্রশ্ন 11(a) দ্রষ্টব্য।

(b) দৃশ্যকল্প-১ এর আলোকে দেখাও যে, ত্রিভুজটি সমকোণী।

প্রমাণ: প্রশ্নমালা VII G এর অনুরূপ।

(c) দৃশ্যকল্প-২ এর আলোকে দেখাও যে, $\cos\beta = \frac{\cos\alpha - n}{1-n\cos\alpha}$

প্রমাণ: দেওয়া আছে,

$$\sqrt{1+n}.\tan\frac{\alpha}{2} = \sqrt{1-n}.\tan\frac{\beta}{2}$$

$$\Rightarrow \tan^2\alpha = \frac{1-n}{1+n}\tan^2\frac{\beta}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\tan^2\frac{\beta}{2}} = \frac{1-n}{1+n}\frac{1}{\tan^2\frac{\alpha}{2}} = \frac{(1-e)\cos^2\frac{\alpha}{2}}{(1+e)\sin^2\frac{\alpha}{2}}$$

$$\Rightarrow \frac{1-\tan^2\frac{\beta}{2}}{1+\tan^2\frac{\beta}{2}} = \frac{(1-n)\cos^2\frac{\alpha}{2}-(1+n)\sin^2\frac{\alpha}{2}}{(1-n)\cos^2\frac{\alpha}{2}+(1+n)\sin^2\frac{\alpha}{2}}$$

$$= \frac{(\cos^2\frac{\alpha}{2}-\sin^2\frac{\alpha}{2}) - n(\sin^2\frac{\alpha}{2}+\cos^2\frac{\alpha}{2})}{(\sin^2\frac{\alpha}{2}+\cos^2\frac{\alpha}{2}) - n(\cos^2\frac{\alpha}{2}-\sin^2\frac{\alpha}{2})}$$

$$\therefore \cos\beta = \frac{\cos\theta - n}{1-n\cos\theta}$$

27. $\angle E + \angle F = 65^\circ, \angle F - \angle E = 25^\circ$

[য .বো.'১৭]

(a) $\tan\beta = \frac{1}{3}$ হলে, $\sin 2\beta$ এর মান নির্ণয় কর।

সমাধান: দেওয়া আছে, $\tan\beta = \frac{1}{3}$

$$\therefore \sin 2\beta = \frac{2\tan\beta}{1+\tan^2\beta} = \frac{2\times\frac{1}{3}}{1+(\frac{1}{3})^2}$$

$$= \frac{2}{3}\times\frac{9}{9+1} = 2\times\frac{3}{10} = \frac{3}{5} \quad \text{(Ans.)}$$

(b) দেখাও যে,

$$2\sin(\pi+\frac{F}{4}) = -\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}$$

প্রমাণ: দেওয়া আছে,

$$\angle E + \angle F = 65^\circ, \angle F - \angle E = 25^\circ$$

$\therefore$ $2\angle F = 90^0 \Rightarrow \angle F = 45^0$ এবং

$$2\angle E = 40^0 \Rightarrow \angle E = 20^0$$

$$2\sin(\pi+\frac{F}{4}) = 2\sin(180^0+\frac{45^0}{4})$$

$$= -2\sin\frac{45^0}{4} = -2\sin 11^0 15'$$

অতপর, প্রশ্নমালা VII E এর উদাহরণ-1 দ্রষ্টব্য।

(c) দেখাও যে,

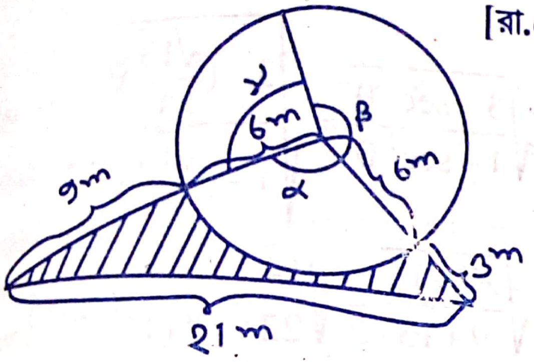
$$\tan\angle E.\tan 2\angle E.\tan 3\angle E.\tan 4\angle E = 3.$$

$$\text{L.H.S.} = \tan\angle E.\tan 2\angle E.\tan 3\angle E.\tan 4\angle E$$

$$= \tan 20^0 \tan 40^0 \tan 60^0 \tan 80^0$$

অতপর, প্রশ্নমালা VII C এর 1(c) দ্রষ্টব্য।

28. [রা.বো.'১৭]



(a) x-এর সাপেক্ষে x^3 sin (lnx) এর অন্তরজ নির্ণয় কর।

সমাধান: x-এর সাপেক্ষে x^3 sin (lnx) এর অন্তরজ $=\frac{d}{dx}\{x^3 \sin(\ln x)\}$

$= x^3\cos(\ln x).\frac{1}{x}+\sin(\ln x).3x^2$

$= x^3\frac{d}{dx}\{\sin(\ln x)\}+\sin(\ln x)\frac{d}{dx}(x^3)$

$=x^3\cos(\ln x).\frac{1}{x}+\sin(\ln x)(3x^2)$

$= x^2\cos(\ln x)+3x^2\sin(\ln x)$ (Ans.)

(b) উদ্দীপকের সাহায্যে মান নির্ণয় কর:
$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma-2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma$

প্রমাণ: এখানে, $\alpha+\beta+\gamma=2\pi$
অতপর প্রশ্নমালা VII F এর 6(a) এর অনুরূপ।

(c) উদ্দীপকের ছায়াঘেরা অংশের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

সমাধান: সৃজনশীল প্রশ্ন 8(c) দ্রষ্টব্য।

29. $A=\frac{2\pi}{15}, \alpha+\beta+\gamma=\pi$ এবং
$\cos\alpha=\cos\beta\cos\gamma$ [কু.বো.'১৭]

(a) প্রমান কর যে, $\cos 2p=\frac{1-\tan^2 p}{1+\tan^2 p}$

প্রমাণ: L.H.S. = $\cos 2p$

$=\cos^2 p-\sin^2 p=\cos^2 p(1-\tan^2 p)$

$=\frac{1-\tan^2 p}{\sec^2 p}=\frac{1-\tan^2 p}{1+\tan^2 p}=$ R.H.S.

(b) উদ্দীপকের আলোকে, প্রমাণ কর যে,
$16\cos A\cos 2A\cos 4A\cos 7A=1$

প্রমাণ: প্রশ্নমালা VII D এর উদাহরণ 3 দ্রষ্টব্য।

(c) উদ্দীপক থেকে দেখাও যে,
$\tan\alpha=\tan\beta+\tan\gamma$

প্রমাণ: প্রশ্নমালা VII B এর 10(a) দ্রষ্টব্য।

30. দৃশ্যকল্প-১: $\sin x+\sin y=a$ এবং
$\cos x+\cos y=b$ [কু.বো.'১৭]
দৃশ্যকল্প-২ : ΔABC এর $A+B+C=\pi$

(a) যদি ΔOQR এর তিনটি বাহর দৈর্ঘ্য যথাক্রমে p, q, r এবং $p^2+q^2-r^2=\sqrt{2}pq$ হয় তবে R কোণের মান নির্ণয় কর।

সমাধান: $p^2+q^2-r^2=\sqrt{2}pq$

$p^2+q^2-r^2=\frac{1}{\sqrt{2}}2pq$

$\Rightarrow \frac{p^2+q^2-r^2}{2pq}=\frac{1}{\sqrt{2}}$

$\Rightarrow \cos R=\cos 45^0 \therefore R=45^0$ (Ans.)

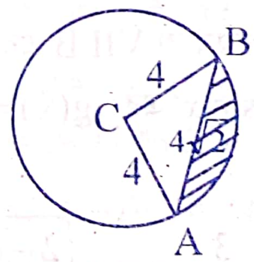
(b) দৃশ্যকল্প : ১ এর আলোকে $\cos(x+y)$ এর মান নির্ণয় কর।

সমাধান: প্রশ্নমালা VII C এর উদাহরণ 7(a) দ্রষ্টব্য।

(c) দৃশ্যকল্প : ২ হতে প্রমাণ কর যে,
$\sin^2 A-\sin^2 B+\sin^2 C=2\sin A\cos B\sin C$.

প্রমাণ: প্রশ্নমালা VII F এর 4(a) দ্রষ্টব্য।

31. দৃশ্যকল্প-১:



দৃশ্যকল্প-২: $\sin C+\sin D=p$
$\cos C+\cos D=q$ [ব.বো.'১৭]

(a) $\tan\theta=\frac{b}{a}$ হলে $\frac{a\cos\theta-b\sin\theta}{a\cos\theta+b\sin\theta}$ এর মান নির্ণয় কর।

সমাধান: দেওয়া আছে, $\tan\theta=\frac{b}{a}$

$\frac{a\cos\theta-b\sin\theta}{a\cos\theta+b\sin\theta}=\frac{\cos\theta(a-b\tan\theta)}{\cos\theta(a+b\tan\theta)}$

$$=\frac{a-b\times\frac{b}{a}}{a+b\times\frac{b}{a}}=\frac{\frac{a^2-b^2}{a}}{\frac{a^2+b^2}{a}}=\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}$$

(b) দৃশ্যকল্প-১: এর আলোকে ছায়াঘেরা অংশের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

সমাধান: চিত্রানুযায়ী, $AC^2+BC^2=4^2+4^2$

$\Rightarrow AC^2+BC^2=32=(4\sqrt{2})=AB^2$

$\therefore \angle ACB=\frac{\pi}{2}$

$\therefore$ ACB বৃত্তকলার ক্ষেত্রফল $=\frac{1}{2}(AC^2\times\angle ACB)$

$=\frac{1}{2}(4^2\times\frac{\pi}{2})=4\pi$ বর্গ একক

ACB ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল $=\frac{1}{2}(AC\times BC)$

$=\frac{1}{2}(4\times4)=8$ বর্গ একক

$\therefore$ ছায়াঘেরা অংশের ক্ষেত্রফল = ACB বৃত্তকলার ক্ষেত্রফল – ACB ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল

$=(4\pi-8)$ বর্গ একক।

(c) দৃশ্যকল্প-২: এর আলোকে প্রমাণ কর যে,

$$\sin\frac{C-D}{2}=\frac{1}{2}\sqrt{4-p^2-q^2}$$

প্রমাণ: প্রশ্নমালা VII B এর 13(a) দ্রষ্টব্য।

32. $f(x)=\sin x$ এবং $g(x)=\cos x$.

[দি.বো. ২০১৭]

(a) $\cos\theta=\frac{3}{\sqrt{13}}$ হলে, $\sqrt{\frac{2-\cot^2\theta}{2+\cot^2\theta}}$ এর মান নির্ণয় কর।

সমাধান : $\cos\theta=\frac{3}{\sqrt{13}}\ \therefore \sec\theta=\frac{\sqrt{13}}{3}$

$$\sqrt{\frac{2-\cot^2\theta}{2+\cot^2\theta}}=\sqrt{\frac{2-(\sec^2\theta-1)}{2+\sec^2\theta-1}}$$

$$=\sqrt{\frac{3-\sec^2\theta}{1+\sec^2\theta}}=\sqrt{\frac{3-(\frac{\sqrt{13}}{3})^2}{1+(\frac{\sqrt{13}}{3})^2}}$$

$$=\sqrt{\frac{27-13}{9+13}}=\sqrt{\frac{14}{22}}=\sqrt{\frac{7}{11}}\ \text{(Ans.)}$$

(b) $f(x)+f(y)=p$ এবং $g(x)+g(y)=q$ হলে প্রমাণ কর যে, $f\left(\frac{x-y}{2}\right)=\pm\frac{1}{2}\sqrt{4-p^2-q^2}$.

প্রমাণ : $f(x)=\sin x$ এবং $g(x)=\cos x$.

$\therefore\ f(x)+f(y)=p\Rightarrow \sin x+\sin y=p$

$g(x)+g(y)=q\Rightarrow \cos x+\cos y=q$

অতপর প্রশ্নমালা VII B এর 13(a) দ্রষ্টব্য।

(c) $-\frac{\pi}{2}\le x\le\pi$ ব্যবধিতে $f(2x)$ এর লেখচিত্র অংকন করে এর একটি বৈশিষ্ট্য লিখ।

সমাধান : $f(x)=\sin x\Rightarrow f(2x)=\sin 2x$

অতপর প্রশ্নমালা VI B এর উদাহরণ 3 দ্রষ্টব্য।

ব্যবহারিক অনুশীলনী

1. একটি ত্রিভুজের বাহুগুলি যথাক্রমে 40 সে.মি., 50 সে.মি. এবং 60 সে.মি. হলে ঐ ত্রিভুজের বৃহত্তম ও ক্ষুদ্রতম কোণ নির্ণয় কর।

পরীক্ষণের নাম ঃ একটি ত্রিভুজের বাহুগুলি যথাক্রমে 40 সে.মি., 50 সে.মি. এবং 60 সে.মি. হলে ঐ ত্রিভুজের বৃহত্তম ও ক্ষুদ্রতম কোণ নির্ণয়।

মূলতত্ত্ব ঃ মনে করি, ABC একটি ত্রিভুজ যার তিনটি বাহু যথাক্রমে a = 40 সে.মি., b = 50 সে.মি. এবং c = 60 সে.মি.। ΔABC তে বৃহত্তম বাহু c = 60 সে.মি. এর বিপরীত কোণ $\angle C$ বৃহত্তম কোণ এবং ক্ষুদ্রতম বাহু a = 40 সে.মি. এর বিপরীত কোণ $\angle A$ ক্ষুদ্রতম কোণ। তাহলে প্রদত্ত উপাত্তের সাহায্যে ΔABC অঙ্কন করে চাঁদার সাহায্যে বৃহত্তম ও ক্ষুদ্রতম কোণ নির্ণয় করি এবং সূত্র $\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$ ও

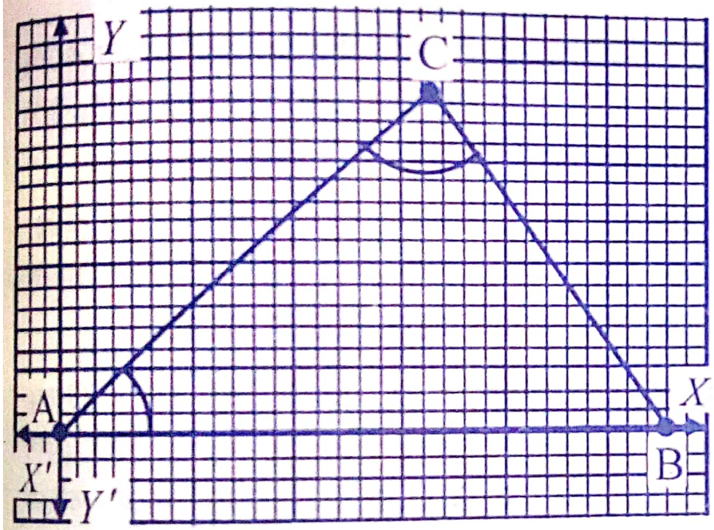
$\cos A = \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$ থেকে প্রাপ্ত মানের সাথে সত্যতা যাচাই করি।

প্রয়োজনীয় উপকরণ ঃ (i) পেন্সিল (ii) স্কেল (iii) গ্রাফ পেপার (iv) ইরেজার (v) শার্পনার (vi) চাঁদা (vii) পেন্সিল কম্পাস (viii) সায়েন্টিফিক ক্যালকুলেটর।

কার্যপদ্ধতি ঃ

1. একটি গ্রাফ পেপারে স্থানাঙ্কের অক্ষ রেখা $X'AX$ ও YAY' আঁকি।

2. x অক্ষ ও y অক্ষ বরাবর ক্ষুদ্রতম বর্গের 1 বাহুর দৈর্ঘ্য = 2 সে.মি. ধরি।



3. গ্রাফ পেপারে AX বরাবর ক্ষুদ্রতম $(60 \div 2)$ অর্থাৎ 30 বর্গের বাহুর সমান করে বৃহত্তম বাহু $AB = 60$ সে.মি. কেটে নেই।

4. A কে কেন্দ্র করে ক্ষুদ্রতম $(50 \div 2)$ অর্থাৎ 25 বর্গের বাহুর সমান ব্যাসার্ধ নিয়ে একটি বৃত্তচাপ আঁকি এবং B কে কেন্দ্র করে $(40 \div 2)$ অর্থাৎ 20 বর্গের বাহুর সমান ব্যাসার্ধ নিয়ে আরও একটি বৃত্তচাপ আঁকি। বৃত্তচাপদ্বয় পরস্পর C বিন্দুতে ছেদ করে। A, B এবং B, C যোগ করি। তাহলে ΔABC তে $AB = c = 60$ সে.মি., $BC = a = 40$ সে.মি. এবং $AC = b = 50$ সে.মি. সূচিত করে।

5. চাঁদার সাহায্যে বৃহত্তম কোণ $\angle C$ এবং ক্ষুদ্রতম কোণ $\angle A$ নির্ণয় করি।

হিসাব ঃ $\cos C = \dfrac{40^2 + 50^2 - 60^2}{2 \times 40 \times 50}$

$= \dfrac{1600 + 2500 - 3600}{4000} = \dfrac{500}{4000} = 0{\cdot}125$

$\therefore \angle C = 82{\cdot}82°$

$\cos A = \dfrac{50^2 + 60^2 - 40^2}{2 \times 50 \times 60}$

$= \dfrac{2500 + 3600 - 1600}{6000} = \dfrac{4500}{6000} = 0{\cdot}75$

$\therefore \angle A = 41{\cdot}41°$

ফল সংকলন ঃ

বৃহত্তম কোণ C নির্ণয়		ক্ষুদ্রতম কোণ A নির্ণয়	
গ্রাফ থেকে প্রাপ্ত মান	সূত্র থেকে প্রাপ্ত মান	গ্রাফ থেকে প্রাপ্ত মান	সূত্র থেকে প্রাপ্ত মান
$\angle C = 83°$	$\angle C = 82{\cdot}82°$	$\angle A = 41{\cdot}5°$	$\angle A = 41{\cdot}41°$

ফলাফল ঃ নির্ণেয় বৃহত্তম কোণ $\angle C = 83°$ এবং ক্ষুদ্রতম কোণ $\angle A = 41{\cdot}5°$।

মন্তব্য ঃ গ্রাফ থেকে প্রাপ্ত মান এবং গাণিতিকভাবে নির্ণীত মান প্রায় সমান। অতএব ফলাফল সঠিক।

2. **একটি ত্রিভুজের কোণগুলি 105°, 60°, 15° হলে ত্রিভুজটির বাহুগুলির অনুপাত নির্ণয় কর।**

পরীক্ষণের নাম ঃ একটি ত্রিভুজের কোণগুলি 105°, 60°, 15° হলে ত্রিভুজটির বাহুগুলির অনুপাত নির্ণয়।

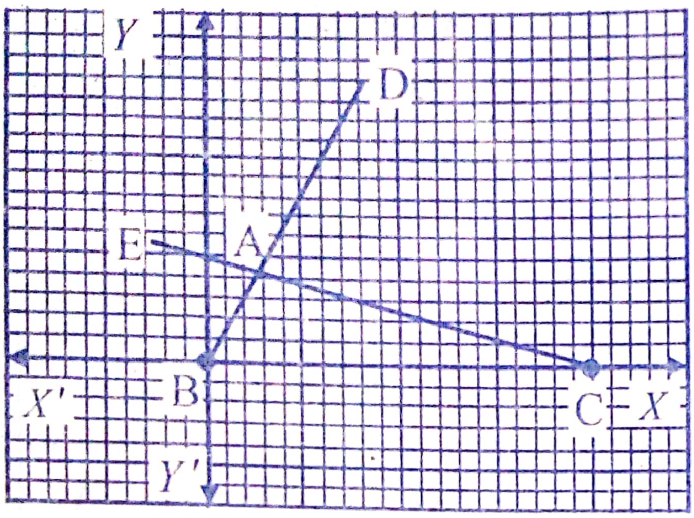
মূলতত্ত্ব ঃ মনে করি, ΔABC এর কোণগুলি $\angle A = 105°$, $\angle B = 60°$ ও $\angle C = 15°$ এর বিপরীত বাহুগুলি যথাক্রমে a, b ও c। তাহলে প্রদত্ত উপাত্ত হতে গ্রাফের সাহায্যে এবং $\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C}$ সূত্রের সাহায্যে a, b ও c এর অনুপাত নির্ণয় করি।

প্রয়োজনীয় উপকরণ ঃ (i) পেন্সিল (ii) স্কেল (iii) গ্রাফ পেপার (iv) ইরেজার (v) শার্পনার (vi) চাঁদা (vii) পেন্সিল কম্পাস (viii) সায়েন্টিফিক ক্যালকুলেটর।

কার্যপদ্ধতি ঃ

1. একটি গ্রাফ পেপারে স্থানাঙ্কের অক্ষ রেখা X'BX ও YBY' আঁকি।

2. x অক্ষ ও y অক্ষ বরাবর ক্ষুদ্রতম বর্গের 2 বাহুর দৈর্ঘ্য = 1 সে.মি. ধরে BC = a = 10 সে.মি. কেটে নেই।



3. চাঁদার সাহায্যে B বিন্দুতে $\angle CBD = 60°$ ও C বিন্দুতে $\angle BCE = 15°$ অঙ্কন করি। BD ও CE রেখা পরস্পরকে A বিন্দুতে ছেদ করে।

4. গ্রাফ থেকে চাঁদার সাহায্যে $\angle A$ এবং পেন্সিল কম্পাসের সাহায্যে AB ও AC বাহুর দৈর্ঘ্য মেপে BX বরাবর বসিয়ে যথাক্রমে c ও b বাহুদ্বয়ের দৈর্ঘ্য নির্ণয় করি।

হিসাব ঃ আমরা জানি, ΔABC তে

$\angle A + \angle B + \angle C = 180° \Rightarrow \angle A + 60° + 15° = 180°$

$\therefore \quad \angle A = 105°$

আবার, $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$

$$\Rightarrow \frac{a}{\sin 105^0} = \frac{b}{\sin 60^0} = \frac{c}{\sin 15^0}$$

$$\Rightarrow \frac{a}{0.966} = \frac{b}{0.866} = \frac{c}{0.259}$$

$$\Rightarrow \frac{a}{\frac{0.966\times10}{0.966}} = \frac{b}{\frac{0.866\times10}{0.966}} = \frac{c}{\frac{0.259\times10}{0.966}}$$

$$\Rightarrow \frac{a}{10} = \frac{b}{8.96} = \frac{c}{2.68}$$

$\therefore \quad a : b : c = 10 : 8.96 : 2.68$

ফল সংকলন ঃ

a : b : c নির্ণয়	
গ্রাফ থেকে প্রাপ্ত অনুপাত ঃ a : b : c = 10 : 9 : 2.7	সূত্র থেকে প্রাপ্ত অনুপাত ঃ a : b : c = 10 : 8.96 : 2.68

ফলাফল ঃ নির্ণেয় অনুপাত,

a : b : c = 10 : 8.96 : 2.68

মন্তব্য ঃ গ্রাফ থেকে প্রাপ্ত মান এবং গাণিতিকভাবে নির্ণীত মান প্রায় সমান। অতএব ফলাফল সঠিক।

3. একটি ত্রিভুজের একটি বাহু 20 সে.মি. এবং এ বাহু সংলগ্ন দুইটি কোণ 70° ও 50° দেওয়া আছে, অপর কোণ ও বাহুদ্বয় নির্ণয় কর।

পরীক্ষণের নাম ঃ একটি ত্রিভুজের একটি বাহু 20 সে.মি. এবং এ বাহু সংলগ্ন দুইটি কোণ 70° ও 50° দেওয়া আছে, অপর কোণ ও বাহুদ্বয় নির্ণয় করতে হবে।

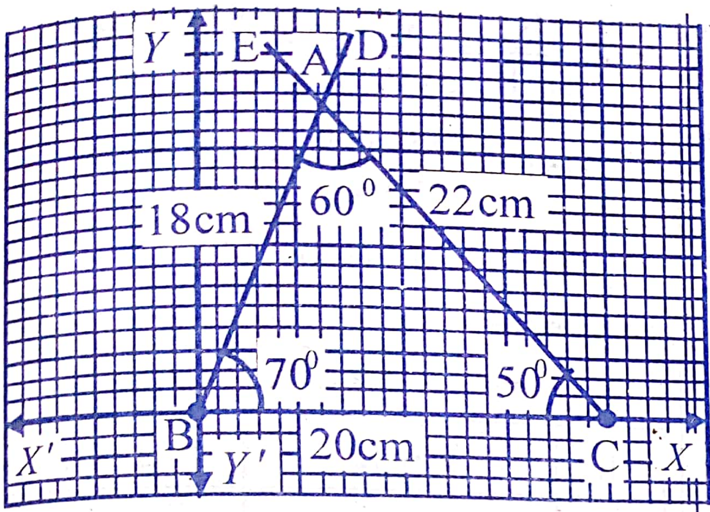
মূলতত্ত্ব ঃ মনে করি, ABC একটি ত্রিভুজ যার একটি বাহু a = 20 সে.মি. এবং এ বাহু সংলগ্ন দুইটি কোণ $\angle B = 70°$ ও $\angle C = 50°$ দেওয়া আছে। তাহলে প্রদত্ত উপাত্ত থেকে a বাহুর বিপরীত কোণ $\angle A$ এবং $\angle B$ ও $\angle C$ কোণের বিপরীত বাহু যথাক্রমে b ও c গ্রাফের সাহায্যে এবং $\angle A + \angle B + \angle C = 180°$ ও $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$ সূত্রের সাহায্যে নির্ণয় করি।

প্রয়োজনীয় উপকরণ ঃ (i) পেন্সিল (ii) স্কেল (iii) গ্রাফ পেপার (iv) ইরেজার (v) শার্পনার (vi) চাঁদা (vii) পেন্সিল কম্পাস (viii) সায়েন্টিফিক ক্যালকুলেটর।

কার্যপদ্ধতি ঃ

1. একটি গ্রাফ পেপারে স্থানাঙ্কের অক্ষ রেখা X'BX ও YBY' আঁকি।

2. x অক্ষ ও y অক্ষ বরাবর ক্ষুদ্রতম বর্গের 1 বাহুর দৈর্ঘ্য = 1 সে.মি. ধরে BX বরাবর ক্ষুদ্রতম 20 বর্গের বাহুর সমান করে BC = 20 সে.মি. কেটে নেই।



3. চাঁদার সাহায্যে BC রেখার B বিন্দুতে $\angle CBD = 70°$ এবং C বিন্দুতে $\angle BCE = 50°$ অঙ্কন করি। BD ও CE রেখা পরস্পরকে A বিন্দুতে ছেদ করে।

হিসাব ঃ আমরা জানি, ΔABC তে

$$\angle A + \angle B + \angle C = 180°$$

$$\Rightarrow \angle A + 70° + 50° = 180°$$

$$\therefore \angle A = 60°$$

আবার, $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} \Rightarrow \frac{20}{\sin 60^0} = \frac{b}{\sin 70^0}$

$$\Rightarrow b = \frac{\sin 70^0}{\sin 60^0} \times 20 = \frac{0 \cdot 939}{0 \cdot 866} \times 20$$

$= 21 \cdot 69$ সে.মি.(প্রায়)

তদ্রূপ, $\frac{a}{\sin A} = \frac{c}{\sin C} \Rightarrow \frac{20}{\sin 60^0} = \frac{c}{\sin 50^0}$

$$\Rightarrow c = \frac{\sin 50^0}{\sin 60^0} \times 20 = \frac{0 \cdot 766}{0 \cdot 866} \times 20$$

$= 17 \cdot 69$ সে.মি. (প্রায়)

ফল সংকলন ঃ

	গ্রাফ থেকে প্রাপ্ত মান ঃ	সূত্র থেকে প্রাপ্ত মান ঃ
$\angle A$	60°	60°
b	22 সে.মি.	21·69 সে.মি.(প্রায়)
c	18 সে.মি.	17·69 সে.মি.(প্রায়)

ফলাফল ঃ নির্ণেয় $\angle A = 60°$

b বাহুর দৈর্ঘ্য AC = 21·69 সে.মি. (প্রায়) ও c বাহুর দৈর্ঘ্য AB = 17·69 সে.মি. (প্রায়)

মন্তব্য ঃ গ্রাফ থেকে প্রাপ্ত মান এবং গাণিতিকভাবে নির্ণীত মান প্রায় সমান। অতএব ফলাফল সঠিক।

4. একটি ত্রিভুজের দুইটি বাহুর দৈর্ঘ্য 9 সে.মি. , 6 সে.মি. এবং এদের অন্তর্ভুক্ত কোণ 60° দেওয়া আছে, অপর বাহু ও কোণদ্বয় নির্ণয় কর।

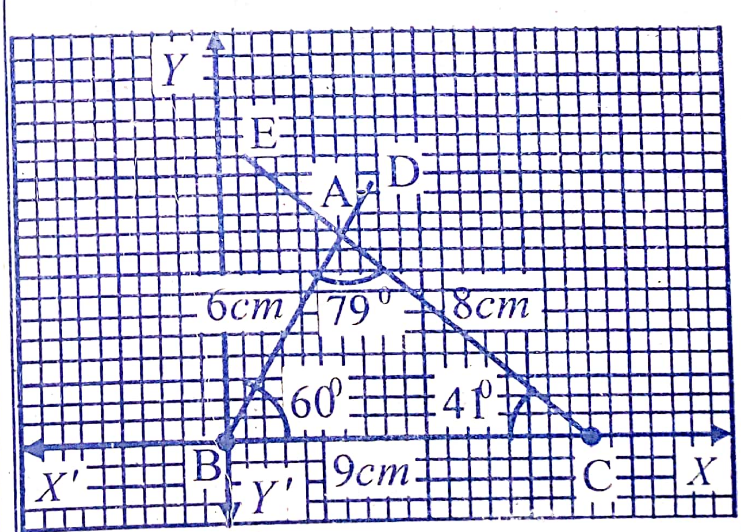
পরীক্ষণের নাম ঃ একটি ত্রিভুজের দুইটি বাহুর দৈর্ঘ্য 9 সে.মি. , 6 সে.মি. এবং এদের অন্তর্ভুক্ত কোণ 60° দেওয়া আছে, অপর বাহু ও কোণদ্বয় নির্ণয় ।

মূলতত্ত্ব ঃ মনে করি, ABC একটি ত্রিভুজ যার দুইটি বাহু BC = a = 9 সে.মি., AB = c = 6 সে.মি. এবং এদের অন্তর্ভুক্ত কোণ $\angle B = 60°$ দেওয়া আছে । তাহলে প্রদত্ত উপাত্ত থেকে a বাহুর বিপরীত কোণ $\angle A$, c বাহুর বিপরীত কোণ $\angle C$ এবং AC = b গ্রাফের সাহায্যে এবং $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B$ ও $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$ সূত্রের সাহায্যে নির্ণয় করি।

প্রয়োজনীয় উপকরণ ঃ (i) পেন্সিল (ii) স্কেল (iii) গ্রাফ পেপার (iv) ইরেজার (v) শার্পনার (vi) চাঁদা (vii) পেন্সিল কম্পাস (viii) সায়েন্টিফিক ক্যালকুলেটর।

কার্যপদ্ধতি ঃ

1. একটি গ্রাফ পেপারে স্থানাঙ্কের অক্ষ রেখা X'BX ও YBY' আঁকি ।



2. x অক্ষ ও y অক্ষ বরাবর ক্ষুদ্রতম বর্গের 2 বাহুর দৈর্ঘ্য = 1 সে.মি. ধরে BX বরাবর ক্ষুদ্রতম 18 বর্গের বাহুর সমান করে BC = a = 9 সে.মি. কেটে নেই।

3. চাঁদার সাহায্যে BC রেখার B বিন্দুতে $\angle CBD = 60°$ অঙ্কন করি।

4. BD রেখা হতে ক্ষুদ্রতম 12 বর্গবাহুর সমান করে $BA = c = 6$ সে.মি. কেটে নেই। A, C যোগ করি।

4. গ্রাফ থেকে চাঁদার সাহায্যে $\angle A$, $\angle C$ এবং পেন্সিল কম্পাসের সাহায্যে AC বাহুর দৈর্ঘ্য মেপে BX বরাবর বসিয়ে b বাহুর দৈর্ঘ্য নির্ণয় করি।

হিসাব ঃ আমরা জানি, $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B$

$= 9^2 + 6^2 - 2\times 9\times 6\cos 60°$

$= 81 + 36 - 108(\cdot 5)$

$\Rightarrow b^2 = 117 - 54 = 63$

$\therefore$ $b = 7{\cdot}94$ সে.মি. (প্রায়)

আবার, $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} \Rightarrow \frac{9}{\sin A} = \frac{7\cdot 94}{\sin 60^0}$

$\Rightarrow \sin A = \frac{9\times 0\cdot 866}{7\cdot 94} = \frac{17\cdot 32}{18} = 0{\cdot}982$

$\therefore$ $A = 78{\cdot}99°$ (প্রায়)

তদ্রুপ, $\frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} \Rightarrow \frac{7\cdot 94}{\sin 60^0} = \frac{6}{\sin C}$

$\Rightarrow \sin C = \frac{6\times 0\cdot 866}{7\cdot 94} = 0{\cdot} 65$

$\therefore$ $C = 40{\cdot}87°$ (প্রায়)

ফল সংকলন ঃ

	গ্রাফ থেকে প্রাপ্ত মান ঃ	সূত্র থেকে প্রাপ্ত মান ঃ
b	8 সে.মি.	7·94 সে.মি.(প্রায়)
$\angle A$	79°(প্রায়)	78·99° (প্রায়)
$\angle C$	41° (প্রায়)	40·87° (প্রায়)

ফলাফল ঃ নির্ণেয় $b = 7{\cdot}94$ সে.মি. (প্রায়), $\angle A = 79°$ এবং $\angle C = 41°$

মন্তব্য ঃ গ্রাফ থেকে প্রাপ্ত মান এবং গাণিতিকভাবে নির্ণীত মান প্রায় সমান। অতএব ফলাফল সঠিক।