কিছু বিশেষ সূত্র / কৌশল যা ভর্তি পরীক্ষায় দ্রুত উত্তর করতে সাহায্য করবে :

1. $f(x)=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ হলে, $f^{-1}(x)=\dfrac{-dx+b}{cx-a}$,

   ডোমেন $f=\mathbb{R}-\{-\dfrac{d}{c}\}$, রেঞ্জ $f=\mathbb{R}-\{\dfrac{a}{c}\}$

2. $f(x)=ax+b$ হলে, $f^{-1}(x)=\dfrac{x-b}{a}$,

   ডোমেন $f=\mathbb{R}$, রেঞ্জ $f=\mathbb{R}$

3. $f(x)=\dfrac{x^2-a^2}{x-a}$ হলে,

   ডোমেন $f=\mathbb{R}-\{a\}$, রেঞ্জ $f=\mathbb{R}-\{2a\}$

4. $f(x)=\sqrt{x^2-a^2}$ হলে,

   ডোমেন $f=\{x\in\mathbb{R} : x\le -a \text{ or } x\ge a\}$,

   রেঞ্জ $f=\{x\in\mathbb{R} : x\ge 0\}$

5. $f(x)=\sqrt{a^2-x^2}$ হলে,

   ডোমেন $f=\{x\in\mathbb{R}: -a\le x\le a\}=[-a,a]$,

   রেঞ্জ $f=\{x\in\mathbb{R}: 0\le x\le a\}=[0,a]$

6. $f(x)=\log(a+bx)$ হলে,

   ডোমেন $f=\{x\in\mathbb{R}: x>-\dfrac{a}{b}\}$, রেঞ্জ $f=\mathbb{R}$

7. $f(x)=e^x$ হলে, ডোমেন $f=\mathbb{R}$,

   রেঞ্জ $f=\{x\in\mathbb{R}: x>0\}$

প্রশ্নমালা VIII

1.(a) দেওয়া আছে, $f(x)=\begin{cases}3x-1, x>3\\ x^2-2, -2\le x\le 3\\ 2x+3, x<-2\end{cases}$

[ঢা.'১২; য.'০৭, রা '০৮; চ.'০৮,'১২; কু.'১৩]

$\therefore f(2)=2^2-2$ $[\because -2\le 2\le 3]$

$=4-2=2$

$f(4)=3\times 4-1$ $[\because 4>3]$

$=12-1=11$

$f(-1)=(-1)^2-2$ $[\because -2\le -1\le 3]$

$=1-2=-1$

$f(-3)=2\times(-3)+3$ $[\because -3<-2]$

$=-6+3=-3$

1. (b) $f(x)=x^2+ax+b$, $f(1)=1$ ও $f(2)=2$ হলে, $f(3)$ এর মান নির্ণয় কর। [চ.'০৪]

সমাধান: দেওয়া আছে, $f(x)=x^2+ax+b\cdots(1)$

$\therefore f(1)=1^2+a.1+b=1\Rightarrow a+b=0\cdots(2)$

$f(2)=2^2+a.2+b=1$

$\Rightarrow 2a+b=-3\cdots\cdots(3)$

(3) থেকে (2) বিয়োগ করে পাই, $a=-3$

(2) থেকে পাই, $-3+b=0\Rightarrow b=3$

$(1)\Rightarrow f(x)=x^2-3x+3$

$\therefore f(3)=3^2-3\times 3+3=9-9+3=3$ (Ans.)

2. (a) $f(x)=b\dfrac{x-a}{b-a}+a\dfrac{x-b}{a-b}$ হলে, দেখাও যে, $f(a)+f(b)=f(a+b)$

[ব.'০৮; য.'১২; ঢা.'০৭; রা.'০৮,'১৩; কু.'০৮]

প্রমাণ ঃ দেওয়া আছে, $f(x)=b\dfrac{x-a}{b-a}+a\dfrac{x-b}{a-b}$

$\therefore f(a)=b\dfrac{a-a}{b-a}+a\dfrac{a-b}{a-b}=a$

$f(b)=b\dfrac{b-a}{b-a}+a\dfrac{b-b}{a-b}=b$ এবং

$f(a+b)=b\dfrac{a+b-a}{b-a}+a\dfrac{a+b-b}{a-b}$

$=\dfrac{b^2}{b-a}+\dfrac{a^2}{a-b}=\dfrac{a^2}{a-b}-\dfrac{b^2}{a-b}$

$=\dfrac{a^2-b^2}{a-b}=\dfrac{(a-b)(a+b)}{(a-b)}=a+b$

$=f(a)+f(b)$

$\therefore f(a)+f(b)=f(a+b)$ (Showed)

2(b) $f(x)=\dfrac{1}{2}(3^x+3^{-x})$, $g(x)=\dfrac{1}{2}(3-3^{-x})$ হলে, প্রমাণ কর যে, $f(x+y)=f(x)f(y)+g(x)g(y)$ [য.'০৯;সি.'১২; দি.'১৩; চ.'১৪]

প্রমাণঃ L.H.S. $=f(x+y)=\dfrac{1}{2}(3^{x+y}+3^{-x-y})$

R.H.S.$=f(x)f(y)+g(x)g(y)$

$$= \frac{1}{2}(3^x + 3^{-x})\frac{1}{2}(3^y + 3^{-y}) + \frac{1}{2}(3^x - 3^{-x})\frac{1}{2}(3^y - 3^{-y})$$

$$= \frac{1}{4}(3^{x+y} + 3^{x-y} + 3^{-x+y} + 3^{-x-y} + 3^{x+y} - 3^{x-y} - 3^{-x+y} + 3^{-x-y})$$

$$= \frac{1}{4}.2(3^{x+y} + 3^{-x-y}) = \frac{1}{2}(3^{x+y} + 3^{-x-y})$$

$\therefore$ L.H.S. = R.H.S. (Proved)

3. (a) $y = f(x) = \frac{ax+b}{cx-a}$ হলে, x এর মাধ্যমে $f(y)$ এর মান নির্ণয় কর। [য.'০৭; প্র.ভ.প.'০৪]

প্রমাণ ঃ দেওয়া আছে, $y = f(x) = \frac{ax+b}{cx-a}$

$\therefore f(x) = \frac{ax+b}{cx-a} \Rightarrow f(y) = \frac{ay+b}{cx-a} \cdots(1)$

এবং $y = \frac{ax+b}{cx-a} \Rightarrow cxy - ay = ax + b$

$\Rightarrow cxy - ax = ay + b$

$\Rightarrow (cy - a)x = ay + b$

$\Rightarrow x = \frac{ay+b}{cy-a} = f(y)$ [(1) দ্বারা]

$\therefore f(y) = x$

3. (b) $\phi(x) = \frac{x-1}{x+1}$ হলে, প্রমাণ কর যে, $\frac{\phi(x)-\phi(y)}{1+\phi(x)\phi(y)} = \frac{x-y}{1+xy}$ [য.'০২; সি.'০৫]

প্রমাণ ঃ দেওয়া আছে,

$\phi(x) = \frac{x-1}{x+1}$. $\therefore \phi(y) = \frac{y-1}{y+1}$

$$\frac{\phi(x)-\phi(y)}{1+\phi(x)\phi(y)} = \frac{\frac{x-1}{x+1} - \frac{y-1}{y+1}}{1 + \frac{x-1}{x+1}\cdot\frac{y-1}{y+1}}$$

$$= \frac{\frac{xy+x-y-1-(xy-x+y-1)}{(x+1)(y+1)}}{\frac{xy+x+y+1+xy-x-y+1}{(x+1)(y+1)}}$$

$$= \frac{xy+x-y-1-xy+x-y+1}{2xy+2} = \frac{2(x-y)}{2(1+xy)}$$

$\therefore \frac{\phi(x)-\phi(y)}{1+\phi(x)\phi(y)} = \frac{x-y}{1+xy}$ (Proved)

3. (c) যদি $f(x) = \frac{2x+1}{2x-1}$ হয়, তাহলে প্রমাণ কর যে, $\frac{f(x)+1}{f(x)-1} = 2x$ [দি.'১০; ব.'১৩]

প্রমাণ ঃ দেওয়া আছে, $f(x) = \frac{2x+1}{2x-1}$

$\Rightarrow \frac{f(x)}{1} = \frac{2x+1}{2x-1}$

$\Rightarrow \frac{f(x)+1}{f(x)-1} = \frac{(2x+1)+(2x-1)}{(2x+1)-(2x-1)}$

[যোজন-বিয়োজন করে।]

$\Rightarrow \frac{f(x)+1}{f(x)-1} = \frac{4x}{2}$ $\therefore \frac{f(x)+1}{f(x)-1} = 2x$

3. (d) $y = f(x) = \frac{4x-7}{2x-4}$ হলে, প্রমাণ কর যে, $f(y) = x$ [রা.'১২; ব.'১১; চ.'১২; দি.'০৯,'১৪; সি.'০৯; ঢা.'কু.'১৩]

প্রমাণ ঃ দেওয়া আছে, $y = \frac{4x-7}{2x-4}$

$\Rightarrow 4x - 7 = 2xy - 4y$

$\Rightarrow 4x - 2xy = -4y + 7$

$\Rightarrow -x(2y-4) = -(4y-7)$

$\Rightarrow x = \frac{4y-7}{2y-4} \cdots\cdots$ (i)

আবার, $f(x) = \frac{4x-7}{2x-4}$

$\therefore f(y) = \frac{4y-7}{2y-4} \cdots\cdots$ (ii)

(i) ও (ii) হতে পাই, $f(y) = x$

3. (e) $f(x)=\dfrac{1+x^2+x^4}{x^2}$ হলে, দেখাও যে, $f(\frac{1}{x})=f(x)$ [রা.'০৬; মা.'০৩]

প্রমাণ ঃ দেওয়া আছে, $f(x)=\dfrac{1+x^2+x^4}{x^2}$

$$\therefore f(\frac{1}{x})=\frac{1+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^4}}{\frac{1}{x^2}}=\frac{x^4+x^2+1}{x^4}\times\frac{x^2}{1}$$

$$=\frac{1+x^2+x^4}{x^2}=f(x)$$

4. (a) $f(x)=e^x+e^{-x}$ হলে, প্রমাণ কর যে, $f(x+y)f(x-y)=f(2x)+f(2y)$
[চ.'০৯,'১৩; কু.'১০; রা.'১০, '১৪; ব. '০৯; সি.'০৭; ঢা.'১২; য. '০৮,'১২]

প্রমাণ ঃ L.H.S.$=f(x+y)f(x-y)$

$=\{e^{x+y}+e^{-(x+y)}\}\{e^{x-y}+e^{-(x-y)}\}$

$=e^{x+y+x-y}+e^{x+y-x+y}+e^{-x-y+x-y}+e^{-x-y-x+y}$

$=e^{2x}+e^{2y}+e^{-2y}+e^{-2x}$

$=(e^{2x}+e^{-2x})+(e^{2y}+e^{-2y})$

$=f(2x)+f(2y)=$ R.H.S.

$\therefore$ L.H.S. = R.H.S. (Proved)

4. (b) $\phi(x)=\ln(\dfrac{1-x}{1+x})$ হলে, দেখাও যে, $\phi(y)+\phi(z)=\phi(\dfrac{y+z}{1+yz})$
[রা.'১০; য.'০৬; কু.'১১; ব.'১২]

প্রমাণ : $\phi(y)+\phi(z)=\ln(\dfrac{1-y}{1+y})+\ln(\dfrac{1-z}{1+z})$

$$=\ln(\frac{1-y}{1+y})(\frac{1-z}{1+z})=\ln\frac{1-y-z+yz}{1+y+z+yz}$$

$$\phi(\frac{y+z}{1+yz})=\ln\frac{1-\frac{y+z}{1+yz}}{1+\frac{y+z}{1+yz}}=\ln\frac{1+yz-y-z}{1+yz+y+z}$$

$$\therefore \phi(y)+\phi(z)=\phi(\frac{y+z}{1+yz})$$

4. (c) $f(x)=\ln(\sin x)$ ও $\phi(x)=\ln(\cos x)$ হলে, দেখাও যে, $e^{2\phi(a)}-e^{2f(a)}=e^{\phi(2a)}$
[য.'১০; ব.'১০,'১৪; ঢা.'১০; সি.'১০,'১৪; রা.'০৯]

প্রমাণ ঃ $f(x)=\ln(\sin x)$ $\therefore f(a)=\ln(\sin a)$

$\phi(x)=\ln(\cos x)$ $\therefore \phi(a)=\ln(\cos a)$ এবং

$\phi(2a)=\ln(\cos 2a)$

এখন, $e^{2\varphi(a)}-e^{2f(a)}=e^{2\ln(\cos a)}-e^{2\ln(\sin a)}$

$=e^{\ln(\cos^2 a)}-e^{\ln(\sin^2 a)}=\cos^2 a-\sin^2 a$

$=\cos 2a=e^{\ln(\cos 2a)}=e^{\phi(2a)}$

$\therefore e^{2\varphi(a)}-e^{2f(a)}=e^{\phi(2a)}$ (Showed)

5. (a) $f(x)=\cos x$ হলে,দেখাও যে, $f(2x)=2\{f(x)\}^2-1$ এবং $f(3x)=4\{f(x)\}^3-3f(x)$ [ঢা.'০১, য.'১৩]

প্রমাণ ঃ দেওয়া আছে, $f(x)=\cos x$

$\therefore f(2x)=\cos 2x=2\cos^2 x-1$

$=2(\cos x)^2-1$

$\therefore f(2x)=2\{f(x)\}^2-1$ (Showed)

$f(3x)=\cos 3x=4\cos^3 x-3\cos x$

$=4(\cos x)^3-3\cos x$

$\therefore f(3x)=4\{f(x)\}^3-3f(x)$ (Showed)

5. (b) $f(x)=\sin^3 x\cos x$ হলে, $f(x-\dfrac{3\pi}{2})$ এর মান নির্ণয় কর। [প্র.ভ.প.'০৬]

সমাধান ঃ দেওয়া আছে, $f(x)=\sin^3 x\cos x$

$$\therefore f(x-\frac{3\pi}{2})=\sin^3(x-\frac{3\pi}{2})\cos(x-\frac{3\pi}{2})$$

$$=[\sin\{-(\frac{3\pi}{2}-x)\}]^3\cos\{-(\frac{3\pi}{2}-x)\}$$

$$=[-\sin(\frac{3\pi}{2}-x)]^3\cos(\frac{3\pi}{2}-x)$$

$$=[+\cos x]^3\{-\sin x\}$$

$$=-\cos^3 x\sin x \text{ (Ans.)}$$

5. (c) $f(x)=\frac{1-x}{1+x}$ হলে, প্রমাণ কর যে, $f(\cos\theta)=\tan^2\frac{\theta}{2}$ [কু.'০৭,'০৯,'১৪;দি.'১১; সি.'১১]

প্রমাণ ঃ দেওয়া আছে, $f(x)=\frac{1-x}{1+x}$

$\therefore\ f(\cos\theta)=\frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}=\frac{2\sin^2\frac{\theta}{2}}{2\cos^2\frac{\theta}{2}}$

$\therefore\ f(\cos\theta)=\tan^2\frac{\theta}{2}$ (Showed)

6. (a) $\phi(x)=\tan x$ হলে, দেখাও যে, $\phi(a-b)=\frac{\phi(a)-\phi(b)}{1+\phi(a)\phi(b)}$ [সি.'০৩]

প্রমাণ ঃ দেওয়া আছে, $\phi(x)=\tan x$

$\therefore\ \phi(a)=\tan a$, $\phi(b)=\tan b$ এবং

$\phi(a-b)=\tan(a-b)=\frac{\tan a-\tan b}{1+\tan a\tan b}$

$\therefore\ \phi(a-b)=\frac{\phi(a)-\phi(b)}{1+\phi(a)\phi(b)}$ (Showed)

6. (b) $f(x)=\tan x$ হলে, দেখাও যে, $f(x+y)=\frac{f(x)+f(y)}{1-f(x)f(y)}$ [ঢা.'০৫]

প্রমাণ ঃ দেওয়া আছে, $f(x)=\tan x$

$\therefore\ f(y)=\tan y$ এবং

$f(x+y)=\tan(x+y)=\frac{\tan x+\tan y}{1-\tan x\tan y}$

$\therefore\ f(x+y)=\frac{f(x)+f(y)}{1-f(x)f(y)}$ (Showed)

6. (c) $f(x)=\cos(\ln x)$ হলে, $f(x)\ f(y)-\frac{1}{2}[f(\frac{x}{y})+f(xy)]$ এর মান নির্ণয় কর।

[য.'০৫; কু.'০৭, '০৯; সি.,দি.'১১]

সমাধান ঃ দেওয়া আছে, $f(x)=\cos(\ln x)$

$\therefore\ f(x)\ f(y)-\frac{1}{2}[f(\frac{x}{y})+f(xy)]$

$=\cos(\ln x)\cos(\ln y)-\frac{1}{2}[\cos(\ln\frac{x}{y})+\cos(\ln xy)]$

$=\cos(\ln x)\cos(\ln y)-\frac{1}{2}[\cos(\ln x-\ln y)+\cos(\ln x+\ln y)]$

$=\cos(\ln x)\cos(\ln y)-\frac{1}{2}[2\cos(\ln x)\cos(\ln y)]$

$=\cos(\ln x)\cos(\ln y)-\cos(\ln x)\cos(\ln y)$

$=0$ (Ans.)

7. দেওয়া আছে, $f(x)=x^2-2|x|$ এবং $g(x)=x^2+1$

(a) $(gof)(-4)=g(f(-4))$ [ঢা.'০৫ ; সি'০৮]

$=g((-4)^2-2|-4|)=g(16-2.4)$

$=g(16-8)=g(8)=8^2+1$

$=64+1=65$

(b) $(fog)(5)=f(g(5))$ [ঢা.'০৫ ; সি'০৮]

$=f(5^2+1)=f(25+1)=f(26)$

$=26^2-2|26|=676-2\times26$

$=676-52=624$

(c) $(g\text{ o }f)(3)=g(f(3))$ [ব.'০৭]

$=g(3^2-2|3|)=g(9-6)$

$=g(3)=3^2+1=9+1=10$

(d) $(fog)(-2)=f(g(-2))$ [য.'০৩; ব.'০৭]

$=f((-2)^2+1)=f(4+1)=f(5)$

$=5^2-2|5|=25-10=15$

8. দেওয়া আছে, $f(x)=2x-5$ এবং $g(x)=x^2+6$

[ব.'০৬; সি.'০৬ ; চ.'০৭; য.'০৬,'০৯; রা.'১৩]

$\therefore\ g(f(2))=g(2\times2-5)=g(4-5)$

$=g(-1)=(-1)^2+6=1+6=7$

$f(g(5))=f(5^2+6)=f(25+6)$

$=f(31)=2\times31-5=62-5=57$

9. নিম্নের ফাংশনসমূহের ডোমেন ও রেঞ্জ নির্ণয় কর :

(a) $f(x) = \dfrac{x}{x-1}$ [য.'১০] (b) $f(x) = \dfrac{x}{|x|}$

(c) $f(x) = \sqrt{x^2 - 9}$ (d) $f(x) = \sqrt{16 - x^2}$

(a) $f(x) = \dfrac{x}{x-1} \in \mathbb{R}$ হবে যদি ও কেবল যদি $x \in \mathbb{R}$

এবং $x - 1 \neq 0$ i.e., $x \neq 1$ হয়।

$\therefore$ ডোমেন $f = \mathbb{R} - \{1\}$.

মনে করি, f এর অধীন x এর ছবি y.

$\therefore y = f(x) = \dfrac{x}{x-1} \Rightarrow xy - y = x$

$\Rightarrow xy - x = y \Rightarrow x(y-1) = y \Rightarrow x = \dfrac{y}{y-1}$

$x = \dfrac{y}{y-1} \in \mathbb{R}$ হবে যদি ও কেবল যদি $y \in \mathbb{R}$

এবং $y - 1 \neq 0$ i.e. $y \neq 1$ হয়।

$\therefore$ রেঞ্জ $f = \mathbb{R} - \{1\}$

(b) $x = 0$ ব্যতীত সকল $x \in \mathbb{R}$ এর জন্য প্রদত্ত ফাংশন

$f(x) = \dfrac{x}{|x|}$ সংজ্ঞায়িত হয়।

$\therefore$ ডোমেন $f = \mathbb{R} - \{0\}$

$x > 0$ হলে $|x| = x$. অতএব, ডোমেন f এর সকল

$x > 0$ উপাদানের জন্য, $f(x) = \dfrac{x}{x} = 1$

$x < 0$ হলে $|x| = -x$. অতএব, ডোমেন f এর

সকল $x < 0$ উপাদানের জন্য, $f(x) = \dfrac{x}{-x} = -1$

$\therefore$ রেঞ্জ $f = \{-1, 1\}$

(c) $f(x) = \sqrt{x^2 - 9} \in \mathbb{R}$ হবে যদি ও কেবল যদি

$x \in \mathbb{R}$ এবং $x^2 - 9 \geq 0 \Rightarrow (x-3)(x+3) \geq 0$

অর্থাৎ $x \geq 3$ অথবা, $x \leq -3$ হয়।

$\therefore$ ডোমেন $f = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 3$ অথবা, $x \leq -3\}$

$x = \pm 3 \in$ ডোমেন f এর জন্য $f(x) = 0$ এবং $x > 3$ অথবা $x < -3$ এর জন্য $f(x) > 0$.

$\therefore$ রেঞ্জ $f = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$

(d) $f(x) = \sqrt{16 - x^2} \in \mathbb{R}$ হবে যদি ও কেবল যদি

$x \in \mathbb{R}$ এবং $16 - x^2 \geq 0 \Rightarrow x^2 - 16 \leq 0$

$\Rightarrow (x-4)(x+4) \leq 0$ অর্থাৎ $-4 \leq x \leq 4$ হয়।

$\therefore$ ডোমেন $= \{x \in \mathbb{R} : -4 \leq x \leq 4\}$

$x = \pm 4$ এর জন্য $f(x) = 0$, যা $f(x)$ এর ক্ষুদ্রতম মান এবং $x = 0$ এর জন্য $f(x) = 4$, যা $f(x)$ এর বৃহত্তম মান।

$\therefore$ রেঞ্জ $f = \{x \in \mathbb{R} : 0 \leq x \leq 4\}$

10 (a) $\mathbb{R}$ বাস্তব সংখ্যার সেট এবং $A = \{-3, -1, 0, 1, 3\}$; $f : A \to \mathbb{R}$ ফাংশনটি $f(x) = x^2 + x + 1$ দ্বারা সংজ্ঞায়িত হলে, $f(x)$ এর রেঞ্জ নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ $f(-3) = (-3)^2 + (-3) + 1$
$= 9 - 3 + 1 = 7$

$f(-1) = (-1)^2 + (-1) + 1 = 1 - 1 + 1 = 1$

$f(0) = 0^2 + 0 + 1 = 1$

$f(1) = 1^2 + 1 + 1 = 3$

$f(3) = 3^2 + 3 + 1 = 9 + 3 + 1 = 13$

$\therefore$ $f(x)$ -এর রেঞ্জ $= \{7, 1, 3, 13\}$

10. (b) দেওয়া আছে, $f(x) = \sqrt{x}$ এবং

$g(x) = x^2 - 1$ [চ.'০২ ; সি.'০৫]

$\therefore (fog)(x) = f(g(x)) = f(x^2 - 1)$

$= \sqrt{x^2 - 1}$ $\therefore fog = \sqrt{x^2 - 1}$

$(fog)(x) = \sqrt{x^2 - 1} = \sqrt{(x-1)(x+1)} \in \mathbb{R}$

হবে যদি ও কেবল যদি $x \in \mathbb{R}$ এবং

$(x-1)(x+1) \geq 0$.

$\therefore x \geq 1$ অথবা $x \leq -1$ [$\because 1 > -1$]

$\therefore$ ডোমেন $(fog) = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 1$ অথবা $x \leq -1\}$

$x = 1 \in$ ডোমেন (fog) অথবা $x = -1 \in$ ডোমেন (fog) এর জন্য $(fog)(x) = 0$; যা fog এর ক্ষুদ্রতম মান এবং এর বৃহত্তম মান $\to \infty$.

$\therefore$ রেঞ্জ $(fog) = \{x \in \mathbb{R} : 0 \leq x < \infty\}$

আবার, $(g o f)(x) = g(f(x)) = g(\sqrt{x})$

$= (\sqrt{x})^2 - 1 = x - 1$

$\therefore g o f = x - 1$

এখন, $gof = x - 1 \in \mathbb{R}$ যদি ও কেবল যদি $x \in \mathbb{R}$

$\therefore$ ডোমেন (gof) = $\mathbb{R}$

সকল $x \in$ ডোমেন (gof) = $\mathbb{R}$ এর জন্য, gof এর মান বাস্তব সংখ্যা।

$\therefore$ রেঞ্জ (g o f) = $\mathbb{R}$

11. নিম্নের ফাংশনসমূহে কোনটি এক-এক এবং সার্বিক কারণসহ উল্লেখ কর। এক – এক এবং সার্বিক ফাংশনগুলোর জন্য বিপরীত ফাংশন নির্ণয় কর।

(a) $f(x) = 2x - 3$ [চ.'১০; রা.'১১]

সমাধান : প্রদত্ত ফাংশন, $f(x) = 2x - 3$

যদি সম্ভব হয় কল্পনা করি, $f(x) = 2x - 3$ একটি এক – এক ফাংশন নয় এবং যেকোন দুইটি অসমান উপাদান $x_1, x_2 \in$ ডোমেন f এর ছবি সমান, অর্থাৎ $f(x_1) = f(x_2)$.

$\therefore$ $2x_1 - 3 = 2x_2 - 3 \Rightarrow 2x_1 = 2x_2$

$\therefore$ $x_1 = x_2$; যা আমাদের কল্পনাকে অযৌক্তিক প্রতিপন্ন করে, কেননা $x_1 \neq x_2$

$\therefore$ f(x) একটি এক – এক ফাংশন নয় তা সম্ভব নয়।

$\therefore$ f(x) একটি এক – এক ফাংশন।

$x \in \mathbb{R}$ (ডোমেন f) এর জন্য, $f(x) = 2x - 3$ এর মান সকল বাস্তব সংখ্যা।

$\therefore$ রেঞ্জ f = $\mathbb{R}$. অর্থাৎ, $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$

অতএব, f(x) একটি সার্বিক ফাংশন।

এখন, $f(x) = 2x - 3$

$\therefore$ $f\left(f^{-1}(x)\right) = 2\, f^{-1}(x) - 3$

$\Rightarrow$ $x = 2\, f^{-1}(x) - 3 \Rightarrow 2\, f^{-1}(x) = x + 3$

$\therefore$ $f^{-1}(x) = \dfrac{x+3}{2}$

(b) প্রদত্ত ফাংশন, $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R};\ f(x) = x^3 + 5$ [সি.'০৩;ব.'১৩]

যেকোন $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ -এর জন্য, $f(x_1) = f(x_2)$ যদি ও কেবল যদি, $x_1^3 + 5 = x_2^3 + 5$

$\Rightarrow$ $x_1^3 = x_2^3 \Rightarrow x_1 = x_2$

$\therefore$ f(x) একটি এক – এক ফাংশন।

$x \in \mathbb{R}$ এর জন্য, $f(x) = x^3 + 5$ এর মান সকল বাস্তব সংখ্যা।

$\therefore$ রেঞ্জ f = $\mathbb{R}$. i.e., $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$

অতএব, f(x) একটি সার্বিক ফাংশন।

যদি ফাংশন f -এর অধীন x এর ছবি y অর্থাৎ y = f(x) হয়, তবে ফাংশন f^{-1} -এর অধীন y এর ছবি x অর্থাৎ $x = f^{-1}(y)$ হবে।

এখন, $y = f(x) \Rightarrow y = x^3 + 5 \Rightarrow x^3 = y - 5$

$\Rightarrow$ $x = \sqrt[3]{y-5}$ $\therefore f^{-1}(y) = \sqrt[3]{y-5}$

y কে x দ্বারা প্রতিস্থাপন করে পাই,

$f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x-5}$

11. (c) প্রদত্ত ফাংশন, $A = \mathbb{R} - \{3\}$, $B = \mathbb{R} - \{1\}$,

$f: A \to B$ এবং $f(x) = \dfrac{x-2}{x-3}$

যেকোন $x_1, x_2 \in A$ -এর জন্য, $f(x_1) = f(x_2)$ হবে যদি ও কেবল যদি, $\dfrac{x_1 - 2}{x_1 - 3} = \dfrac{x_2 - 2}{x_2 - 3}$

$\Rightarrow$ $x_1x_2 - 3x_1 - 2x_2 + 6 = x_1x_2 - 2x_1 - 3x_2 + 6$

$\Rightarrow$ $-x_1 = -x_2 \Rightarrow x_1 = x_2$

অতএব, f(x) একটি এক – এক ফাংশন।

মনে করি, f -এর অধীন x এর ছবি y.

$\therefore$ $y = f(x) = \dfrac{x-2}{x-3} \Rightarrow xy - 3y = x - 2$

$\Rightarrow$ $x(y-1) = 3y - 2 \Rightarrow x = \dfrac{3y-2}{y-1}$ ...... (1)

এখন, $x = \dfrac{3y-2}{y-1} \in \mathbb{R}$ হবে যদি ও কেবল যদি $y \in \mathbb{R}$ এবং $y - 1 \neq 0$ i.e., $y \neq 1$ হয়।

$\therefore$ রেঞ্জ f = $\mathbb{R} - \{1\} = B$

$\therefore$ $f(A) = B$

অতএব, f(x) একটি সার্বিক ফাংশন।

(1) হতে পাই, $x = \dfrac{3y-2}{y-1}$

$\Rightarrow$ $f^{-1}(y) = \dfrac{3y-2}{y-1}$ [$\because y = f(x)$ iff $x = f^{-1}(y)$]

y কে x দ্বারা প্রতিস্থাপন করে পাই,

$f^{-1}(x) = \dfrac{3x-2}{x-1}$

11. (d) প্রদত্ত ফাংশন, $A = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$ এবং $f: A \to A$, $f(x) = x^2$

যেকোন $x_1, x_2 \in A$ -এর জন্য, $f(x_1) = f(x_2)$ হবে যদি ও কেবল যদি, $x_1^2 = x_2^2$

$\Rightarrow x_1 = x_2$ $[\because x \geq 0]$

অতএব, $f(x)$ একটি এক - এক ফাংশন ।

মনে করি, $y = f(x) = x^2 \Rightarrow x^2 = y$

$\Rightarrow x = \sqrt{y} \cdots\cdots (1)$ $[\because x \geq 0]$

$x = \sqrt{y} \in \mathbb{R}$ হবে যদি ও কেবল যদি $y \in \mathbb{R}$ এবং $y \geq 0$ হয়।

$\therefore$ রেঞ্জ $f = \{y \in \mathbb{R} : y \geq 0\} = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0] = A$

$\therefore f(A) = A$

অতএব, $f(x)$ একটি সার্বিক ফাংশন ।

এখন, (1) হতে পাই, $x = \sqrt{y}$

$\therefore f^{-1}(y) = \sqrt{y}$ $[\because y = f(x) \text{ iff } x = f^{-1}(y)]$

y কে x দ্বারা প্রতিস্থাপন করে পাই, $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$

11. (e) প্রদত্ত ফাংশন, $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$

$x_1 = 1, x_2 = -1 \in \mathbb{R}$ (ডোমেন f) এর জন্য,

$f(x_1) = f(1) = (1)^2 = 1$ এবং

$f(x_2) = f(-1) = (-1)^2 = 1$

$\therefore f(x_1) = f(x_2) = 1$, কিন্তু $x_1 \neq x_2$.

অতএব, $f(x)$ এক - এক ফাংশন নয় ।

মনে করি, $y = f(x) = x^2 \Rightarrow x^2 = y$

$\Rightarrow x = \pm\sqrt{y}$

$x = \pm\sqrt{y} \in \mathbb{R}$ হবে যদি ও কেবল যদি $y \in \mathbb{R}$ এবং $y \geq 0$ হয়।

$\therefore$ রেঞ্জ $f = \{y \in \mathbb{R} : y \geq 0\}$

অর্থাৎ রেঞ্জ $f = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\} \subset \mathbb{R}$

$\therefore f(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}$.

অতএব, $f(x)$ একটি সার্বিক ফাংশন নয় ।

11. (f) প্রদত্ত ফাংশন, $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 + 1$

যেকোন $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$-এর জন্য, $f(x_1) = f(x_2)$ হবে যদি ও কেবল যদি $x_1^3 + 1 = x_2^3 + 1$

$\Rightarrow x_1^3 = x_2^3 \Rightarrow x_1 = x_2$

অতএব, $f(x)$ একটি এক - এক ফাংশন ।

এখন, $x \in \mathbb{R}$(ডোমেন f) এর জন্য, $f(x) = x^3 + 1$ - এর মান সকল বাস্তব সংখ্যা ।

$\therefore$ রেঞ্জ $f = \mathbb{R}$ i.e., $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$

অতএব, $f(x)$ একটি সার্বিক ফাংশন ।

এখন, $y = f(x) = x^3 + 1 \Rightarrow x^3 = y - 1$

$\Rightarrow x = \sqrt[3]{y-1}$

$\therefore f^{-1}(y) = \sqrt[3]{y-1}$ $[\because y = f(x) \text{ iff } x = f^{-1}(y)]$

y কে x দ্বারা প্রতিস্থাপন করে পাই,

$f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x-1}$

11. (g) প্রদত্ত ফাংশন,

$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = |x - 1|$

$x_1 = 0, x_2 = 2 \in \mathbb{R}$ (ডোমেন f) এর জন্য,

$f(x_1) = f(0) = |0 - 1| = |-1| = 1$ এবং

$f(x_2) = f(2) = |2 - 1| = |1| = 1$

$\therefore f(x_1) = f(x_2) = 1$, কিন্তু $x_1 \neq x_2$.

অতএব, $f(x)$ এক - এক ফাংশন নয় ।

$x \in \mathbb{R}$ (ডোমেন f) এর জন্য, $f(x) = |x - 1|$ এর মান অঋণাত্মক সংখ্যা ।

$\therefore$ রেঞ্জ $f = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\} \subset \mathbb{R}$

$\therefore f(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}$.

অতএব, $f(x)$ একটি সার্বিক ফাংশন নয় ।

11. (h) প্রদত্ত ফাংশন, $A = [-2, 2]$, $B = [0,4]$, $f : A \rightarrow B$, $f(x) = x^2$

$x_1 = -2, x_2 = 2 \in \mathbb{R}$ (ডোমেনf) এর জন্য,

$f(x_1) = f(-2) = (-2)^2 = 4$ এবং

$f(x_2) = f(2) = 2^2 = 4$

$\therefore f(x_1) = f(x_2) = 4$, কিন্তু $x_1 \neq x_2$.

অতএব, $f(x)$ এক - এক ফাংশন নয় ।

সকল $x \in$ ডোমেন f এর জন্য, $f(x) = x^2$ এর মান অঋণাত্মক এবং $x \leq 4$.

$\therefore$ রেঞ্জ $f = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0$ এবং $x \leq 4\}$

$= \{x \in \mathbb{R} : 0 \leq x \leq 4\} = [0, 4] = B$

$\therefore f(A) = B$

অতএব, $f(x)$ একটি সার্বিক ফাংশন ।

12. (a) বাস্তব সংখ্যা সেট $\mathbb{R}$ এর উপর $S=\{(x,y) : y=\sqrt{x}\}$ অন্বয়ের ডোমেন এবং রেঞ্জ নির্ণয় কর। S^{-1} নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ দেওয়া আছে, $S=\{(x,y) : y=\sqrt{x}\}$

S সেটের বর্ণনাকারী শর্ত, $y=\sqrt{x}$.

$y=\sqrt{x}\in\mathbb{R}$ হবে যদি ও কেবল যদি $x\in\mathbb{R}$ এবং $x\geq 0$ হয়।

$\therefore$ ডোমেন $S=\{x\in\mathbb{R} : x\geq 0\}$

সকল $x\in$ ডোমেন S এর জন্য, $f(x)=x^2$ এর মান অঋণাত্মক।

$\therefore$ রেঞ্জ $S=\{x\in\mathbb{R} : x\geq 0\}$

এখন, $y=\sqrt{x}\Rightarrow x=y^2$

$\therefore$ $S^{-1}=\{(y,x) : x=y^2\}$

x কে y দ্বারা y এবং কে x দ্বারা প্রতিস্থাপন করে পাই, $S^{-1}=\{(x,y) : y=x^2\}$

12. (b) $A=\mathbb{R}-\{-\frac{1}{2}\}$ এবং $B=\mathbb{R}-\{\frac{1}{2}\}$ বাস্তব সংখ্যার সেট $\mathbb{R}$-এর দুইটি উপসেট এবং $f: A\rightarrow B$; যেখানে $f(x)=\dfrac{x-3}{2x+1}$. দেখাও যে, ফাংশনটি এক-এক ও সার্বিক। [ঢা. '০৯]

সমাধান ঃ যেকোন $x_1, x_2\in A=\mathbb{R}-\{-\frac{1}{2}\}$ এর জন্য; $f(x_1)=f(x_2)$ যদি ও কেবল যদি,

$$\frac{x_1-3}{2x_1+1}=\frac{x_2-3}{2x_2+1}$$

$$\Rightarrow 2x_1x_2-6x_2+x_1-3x_1-1=2x_1x_2-6x_1+x_2-3.$$

$$\Rightarrow 7x_1=7x_2\Rightarrow x_1=x_2$$

অতএব, $f(x)$ একটি এক - এক ফাংশন।

ধরি, $y=f(x)=\dfrac{x-3}{2x+1}\Rightarrow 2xy+y=x-3$

$$\Rightarrow (2y-1)x=-y-3\Rightarrow x=\frac{y+3}{1-2y}$$

এখন, $x=\dfrac{y+3}{1-2y}\in A=\mathbb{R}-\{-\frac{1}{2}\}$ যদি ও কেবল যদি $y\in\mathbb{R}$ এবং $1-2y\neq 0$ অর্থাৎ $y\neq\frac{1}{2}$

$\therefore$ রেঞ্জ $f=\mathbb{R}-\{\frac{1}{2}\}=B.$

$\therefore$ $f(A)=B.$

অতএব, $f(x)$ একটি সার্বিক ফাংশন।

13. $f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$, $f(x)=x^2$ দ্বারা সংজ্ঞায়িত করা হলে, মান নির্ণয় কর ঃ

(a) $f^{-1}(25)$ [কু. '০৫; য. '১১]

(b) $f^{-1}(-16)$ [য. '০৪, '১১]

(c) $f^{-1}([16,36])$ (d) $f^{-1}(\{16,36\})$

সমাধান ঃ (a) মনে করি, $f^{-1}(25)=x$

$\therefore$ $f(x)=25$ [$\because f(x)=y$ iff $f^{-1}(y)=x$]

$\Rightarrow x^2=25\Rightarrow x=\pm 5$

$\therefore$ $f^{-1}(25)=\{-5, 5\}$

(b) মনে করি, $f^{-1}(-16)=x$

$\therefore$ $f(x)=-16\Rightarrow x^2=-16$

x এর এমন কোন বাস্তব মান নেয় যার বর্গ ঋণাত্মক।

$\therefore$ $f^{-1}(-16)=\emptyset$

(c) মনে করি, $y=f(x)=x^2\Rightarrow x=\pm\sqrt{y}$

$\therefore$ $f^{-1}(y)=\pm\sqrt{y}$

[$\because y=f(x)$ iff $x=f^{-1}(y)$]

$\therefore$ $f^{-1}(16)=\pm\sqrt{16}=\pm 4$ এবং

$f^{-1}(36)=\pm\sqrt{36}=\pm 6$

$\therefore$ $f^{-1}([16,36])=[-6,-4]\cup[4,6]$

$=\{x\in\mathbb{R} : -6\leq x\leq -4$ অথবা $4\leq x\leq 6\}$

(d) মনে করি, $y=f(x)=x^2\Rightarrow x=\pm\sqrt{y}$

$\therefore$ $f^{-1}(y)=\pm\sqrt{y}$

[$\because y=f(x)$ iff $x=f^{-1}(y)$]

$\therefore$ $f^{-1}(16)=\pm\sqrt{16}=\pm 4$ এবং

$f^{-1}(36)=\pm\sqrt{36}=\pm 6$

$\therefore$ $f^{-1}(\{16,36\})=\{-6,-4,4,6\}$ (Ans.)

14. $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ কে $f(x) = x^2 + 1$ দ্বারা সংজ্ঞায়িত করা হলে, মান নির্ণয় কর ঃ

(a) $f^{-1}(5)$ [চ.'০০] (b) $f^{-1}(0)$ [ব.'১১]

(c) $f^{-1}([5,37])$ [ব.'১১]

(d) $f^{-1}(-5)$ [কু.'০৩; য.'০৮]

(e) $f^{-1}(10)$ [য.'০৮] (f) $f^{-1}(\{1, 10\})$

(a) মনে করি, $f^{-1}(5) = x$

$\therefore$ $f(x) = 5$, [$\because f(x) = y$ iff $f^{-1}(y) = x$]

$\Rightarrow x^2 + 1 = 5 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2$

$\therefore$ $f^{-1}(5) = \{-2, 2\}$

(b) মনে করি, $f^{-1}(0) = x$

$\therefore$ $f(x) = 0$ [$\because f(x) = y$ iff $f^{-1}(y) = x$]

$\Rightarrow x^2 + 1 = 0 \Rightarrow x^2 = -1$; যা x এর বাস্তব মানের জন্য সম্ভব নয়।

$\therefore$ $f^{-1}(0) = \emptyset$

(c) মনে করি, $y = f(x) = x^2 + 1 \Rightarrow x = \pm\sqrt{y-1}$

$\therefore$ $f^{-1}(y) = \pm\sqrt{y-1}$

[$\because f(x) = y$ iff $f^{-1}(y) = x$]

$\therefore$ $f^{-1}(5) = \pm\sqrt{5-1} = \pm 2$ এবং

$f^{-1}(37) = \pm\sqrt{37-1} = \pm 6$

$\therefore$ $f^{-1}([16,36]) = [-6, -2] \cup [2, 6]$

$= \{x \in \mathbb{R} : -6 \le x \le -2$ অথবা $2 \le x \le 6\}$

(d) মনে করি, $f^{-1}(-5) = x$ $\therefore$ $f(x) = -5$

[$\because f(x) = y$ iff $f^{-1}(y) = x$]

$\Rightarrow x^2 + 1 = -5 \Rightarrow x^2 = -6$; যা x এর বাস্তব মানের জন্য সম্ভব নয়।

$\therefore$ $f^{-1}(-5) = \emptyset$

(e) মনে করি, $f^{-1}(10) = x$ $\therefore$ $f(x) = 10$

[$\because f(x) = y$ iff $f^{-1}(y) = x$]

$\Rightarrow x^2 + 1 = 10 \Rightarrow x^2 = 9 \Rightarrow x = \pm 3$

$\therefore$ $f^{-1}(10) = \{-3, 3\}$

(f) মনে করি, $y = f(x) = x^2 + 1$

$\Rightarrow x = \pm\sqrt{y-1}$

$\therefore$ $f^{-1}(y) = \pm\sqrt{y-1}$

[$\because f(x) = y$ iff $f^{-1}(y) = x$]

$\therefore$ $f^{-1}(1) = \pm\sqrt{1-1} = 0$ এবং

$f^{-1}(10) = \pm\sqrt{10-1} = \pm 3$

$\therefore$ $f^{-1}(\{1,10\}) = \{-3, 0, 3\}$

15. $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ কে $f(x) = x^2 - 7$ দ্বারা সংজ্ঞায়িত করা হলে, মান নির্ণয় কর ঃ

(a) $f^{-1}(2)$ [চ.'০৩; রা.'১০] (b) $f^{-1}(-3)$

(a) মনে করি, $f^{-1}(2) = x$

$\therefore$ $f(x) = 2$ [$\because f(x) = y$ iff $f^{-1}(y) = x$]

$\Rightarrow x^2 - 7 = 2 \Rightarrow x^2 = 9 \Rightarrow x = \pm 3$

$\therefore$ $f^{-1}(2) = \{-3, 3\}$

(b) মনে করি, $f^{-1}(-3) = x$

$\therefore$ $f(x) = -3$ [$\because f(x) = y$ iff $f^{-1}(y) = x$]

$\Rightarrow x^2 - 7 = -3 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2$

$\therefore$ $f^{-1}(-3) = \{-2, 2\}$

16. (a) $f(x) = ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right)$ হলে, দেখাও যে,

$$f^{-1}(x) = \left(\frac{1-e^x}{1+e^x}\right).$$

প্রমাণ ঃ ধরি, $y = f(x) = ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right)$

$\therefore$ $y = f(x) \Rightarrow x = f^{-1}(y) \cdots (1)$ এবং

$y = ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right) \Rightarrow \frac{1-x}{1+x} = e^y$

$\Rightarrow e^y + xe^y = 1 - x \Rightarrow x + xe^y = 1 - e^y$

$\Rightarrow (1 + e^y)x = 1 - e^y \Rightarrow x = \frac{1-e^y}{1+e^y}$

$\Rightarrow f^{-1}(y) = \frac{1-e^y}{1+e^y}$ [(1) দ্বারা]

$\therefore$ $f^{-1}(x) = \frac{1-e^x}{1+e^x}$ (Showed)

16. (b) $f(2x-1) = x+2$ হলে, $f(x+3)$ এবং $f^{-1}(x)$ এর মান নির্ণয় কর।

প্রমাণ ঃ ধরি, $2x - 1 = y \therefore f(y) = x + 2$ এবং

$2x = y + 1 \Rightarrow x = \frac{1}{2}(y+1)$

$\Rightarrow x + 2 = 2 + \frac{1}{2}(y+1) = \frac{4+y+1}{2}$

$\Rightarrow f(y) = \frac{y+5}{2}$

$\therefore f(x+3) = \frac{x+3+5}{2} = \frac{x+8}{2}$ (Ans.)

আবার, $f(2x-1) = x+2$

$\Rightarrow f^{-1}(x+2) = 2x - 1$

$\therefore f^{-1}\{(x-2)+2\} = 2(x-2) - 1$

$\Rightarrow f^{-1}(x) = 2x - 4 - 1 = 2x - 5$ (Ans.)

16. (c) $\varphi(x) = \cot^{-1}(1+x+x^2)$ হলে দেখাও যে, $\varphi(0) + 2\varphi(1) + \varphi(2) = \frac{\pi}{2}$ [ঢা.'০৯]

প্রমাণ ঃ দেওয়া আছে, $\varphi(x) = \cot^{-1}(1+x+x^2)$

$\therefore \varphi(0) = \cot^{-1}(1+0+0) = \cot^{-1}(1) = \tan^{-1}(1)$

$\varphi(1) = \cot^{-1}(1+1+1) = \cot^{-1}(3) = \tan^{-1}\frac{1}{3}$

$\varphi(2) = \cot^{-1}(1+2+4) = \cot^{-1}(7) = \tan^{-1}\frac{1}{7}$

$\therefore \varphi(0) + 2\varphi(1) + \varphi(2)$

$= \tan^{-1}(1) + 2\tan^{-1}\frac{1}{3} + \tan^{-1}\frac{1}{7}$

$= \{\tan^{-1}(1) + \tan^{-1}\frac{1}{7}\} + 2\tan^{-1}\frac{1}{3}$

$= \tan^{-1}\frac{1+\frac{1}{7}}{1-\frac{1}{7}} + \tan^{-1}\frac{2.\frac{1}{3}}{1-(\frac{1}{3})^2}$

$= \tan^{-1}\frac{7+1}{7-1} + \tan^{-1}(\frac{2}{3}\times\frac{9}{9-1})$

$= \tan^{-1}\frac{4}{3} + \tan^{-1}\frac{6}{8} = \tan^{-1}\frac{4}{3} + \cot^{-1}\frac{4}{3}$

$\therefore \varphi(0) + 2\varphi(1) + \varphi(2) = \frac{\pi}{2}$ (Showed),

$[\because \tan^{-1}\theta + \cot^{-1}\theta = \frac{\pi}{2}]$

16. (d) যদি $f(x) = \sqrt{1-x^2}$, $-1 \le x \le 0$ হয়, তবে $f^{-1}(x)$ নির্ণয় কর এবং $f^{-1}(\frac{1}{2})$-এর মান নির্ণয় কর। [রা.'১১]

সমাধান : ধরি, $y = f(x) = \sqrt{1-x^2}$

$\therefore y^2 = 1 - x^2 \Rightarrow x^2 = 1 - y^2$

$\Rightarrow x = -\sqrt{1-y^2}$, $[\because -1 \le x \le 0]$

$\Rightarrow f^{-1}(y) = -\sqrt{1-y^2} \therefore f^{-1}(x) = -\sqrt{1-y^2}$

$[\because y = f(x) \text{ iff } x = f^{-1}(y)]$

এখন, $f^{-1}(\frac{1}{2}) = -\sqrt{1-(\frac{1}{2})^2} = -\sqrt{\frac{4-1}{4}}$

$\therefore f^{-1}(\frac{1}{2}) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ (Ans.)

17. (a) $F = \{(x, y) : x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}$ এবং $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1\}$. অন্বয় F এর ডোমেন ও রেঞ্জ নির্ণয় কর। F^{-1} নির্ণয় কর।

সমাধান : F সেটের বর্ণনাকারী শর্ত : $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$

$\Rightarrow \frac{y^2}{9} = 1 - \frac{x^2}{16} \Rightarrow y^2 = \frac{9}{16}(16 - x^2)$

$\Rightarrow y = \pm\frac{3}{4}\sqrt{16-x^2} \cdots\cdots (1)$

$y = \pm\frac{3}{4}\sqrt{16-x^2} \in \mathbb{R}$ হবে যদি ও কেবল যদি

$x \in \mathbb{R}$ এবং $16 - x^2 \ge 0 \Rightarrow x^2 - 4^2 \le 0$

$\Rightarrow (x-4)(x+4) \le 0 \Rightarrow -4 \le x \le 4$ হয়।

$\therefore$ ডোমেন $F = \{x \in \mathbb{R} : -4 \le x \le 4\} = [-4, 4]$

এখন, $x = 0 \in$ ডোমেন F এর জন্য,

$y = \pm\frac{3}{4}\sqrt{16-0^2} = \pm\frac{3}{4}\times 4 = \pm 3$; যা রেঞ্জ F এর যথাক্রমে বৃহত্তম ও ক্ষুদ্রতম মান।

রেঞ্জ $F = [-3, 3]$

$\therefore F^{-1} = \{(y, x) : y \in [-3, 3], x \in [-4, 4]$ এবং $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1\}$

x কে y দ্বারা এবং y কে x দ্বারা প্রতিস্থাপন করে পাই,

$F^{-1} = \{(x, y) : x \in [-3, 3], y \in [-4, 4]$ এবং $\frac{y^2}{16} + \frac{x^2}{9} = 1\}$

$\therefore F^{-1} = \{(x, y) : x \in [-3, 3], y \in [-4, 4]$ এবং $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = 1\}$

17(b) $f(x) = \sqrt{x^2 + 4}$ **দ্বারা প্রকাশিত** $f : [-2, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ **অন্বয়ের রেঞ্জ নির্ণয় কর।** $f^{-1}([\sqrt{5}, \frac{5}{2}])$ **ও নির্ণয় কর।**

সমাধান ঃ দেওয়া আছে, $f(x) = \sqrt{x^2 + 4}$

$\therefore f(0) = \sqrt{4} = 2$; যা $x \in [-2, 2]$ এর জন্য $f(x)$ অর্থাৎ রেঞ্জ f এর ক্ষুদ্রতম মান।

$f(\pm 2) = \sqrt{(\pm 2)^2 + 4} = \sqrt{4 + 4} = 2\sqrt{2}$; যা $x \in [-2, 2]$ এর জন্য $f(x)$ অর্থাৎ রেঞ্জ f এর বৃহত্তম মান।

$\therefore$ রেঞ্জ $f = [2, 2\sqrt{2}]$

মনে করি, $y = f(x) = \sqrt{x^2 + 4}$

$\therefore y^2 = x^2 + 4 \Rightarrow x^2 = y^2 - 4$

$\Rightarrow x = \pm\sqrt{y^2 - 4}$

$\therefore f^{-1}(y) = \pm\sqrt{y^2 - 4}$

$[\because y = f(x) \Leftrightarrow x = f^{-1}(y)]$

$\therefore f^{-1}(\sqrt{5}) = \pm\sqrt{5 - 4} = \pm 1$ এবং

$f^{-1}(\frac{5}{2}) = \pm\sqrt{\frac{25}{4} - 4} = \pm\sqrt{\frac{25 - 16}{4}} = \pm\frac{3}{2}$

$\therefore f^{-1}([\sqrt{5}, \frac{5}{2}]) = [-\frac{3}{2}, -1] \cup [1, \frac{3}{2}]$

17. (c) $f(x) = 5 - 3x$ **দ্বারা প্রকাশিত** $f : [-5, 3] \rightarrow \mathbb{R}$ **ফাংশনের রেঞ্জ নির্ণয় কর।** $f^{-1}([-4, \frac{1}{2}])$ **ও নির্ণয় কর।**

সমাধান ঃ দেওয়া আছে, $f(x) = 5 - 3x$

$\therefore f(-5) = 5 - 3 \times (-5) = 5 + 20 = 20$; যা $x \in [-5, 3]$ এর জন্য $f(x)$ এর বৃহত্তম মান।

$f(3) = 5 - 3 \times (3) = 5 - 9 = -4$; যা $x \in [0, 2]$ এর জন্য $f(x)$ এর ক্ষুদ্রতম মান।

$\therefore$ রেঞ্জ $f = [-4, 20]$ (Ans.)

মনে করি, $y = f(x) \therefore y = 5 - 3x$

$\Rightarrow 3x = 5 - y \Rightarrow x = \frac{5 - y}{3}$

$\therefore f^{-1}(y) = \frac{5 - y}{3}$

$[\because y = f(x) \Leftrightarrow x = f^{-1}(y)]$

$\therefore f^{-1}(-4) = \frac{5 + 4}{3} = 3$; যা $y \in [-4, \frac{1}{2}]$ এর জন্য $f^{-1}(y)$ এর বৃহত্তম মান।

$f^{-1}(\frac{1}{2}) = \frac{5 - \frac{1}{2}}{3} = \frac{9}{2 \times 3} = \frac{3}{2}$; যা $y \in [-4, \frac{1}{2}]$ এর জন্য $f^{-1}(y)$ এর ক্ষুদ্রতম মান।

$\therefore f^{-1}([-4, \frac{1}{2}]) = [\frac{3}{2}, 3]$ (Ans.)

17. (d) $f(x) = 2x^2 + 1$ **দ্বারা সংজ্ঞায়িত** $f : [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ **ফাংশনের রেঞ্জ নির্ণয় কর।** $f^{-1}([\frac{3}{2}, 3])$ **এর মান নির্ণয় কর।**

সমাধান ঃ দেওয়া আছে, $f(x) = 2x^2 + 1$

$\therefore f(0) = 2 \times (0)^2 + 1 = 1$; যা $x \in [0, 2]$ এর জন্য $f(x)$ এর ক্ষুদ্রতম মান।

$f(2) = 2 \times (2)^2 + 1 = 9$; যা $x \in [0, 2]$ এর জন্য $f(x)$ এর বৃহত্তম মান।

$\therefore$ রেঞ্জ $f = [1, 9]$ (Ans.)

মনে করি, $y = f(x) \therefore y = 2x^2 + 1$

$\Rightarrow 2x^2 = y - 1 \Rightarrow x^2 = \frac{y - 1}{2}$

$\Rightarrow x = \sqrt{\dfrac{y-1}{2}}$; $[\because x \in [0, 2]]$

$\therefore f^{-1}(y) = \sqrt{\dfrac{y-1}{2}}$

$[\because y = f(x) \Leftrightarrow x = f^{-1}(y)]$

$\therefore f^{-1}(3) = \sqrt{\dfrac{3-1}{2}} = \sqrt{\dfrac{2}{2}} = 1$; যা $y \in [\dfrac{3}{2}, 3]$ এর জন্য $f^{-1}(y)$ এর বৃহত্তম মান।

$f^{-1}(\dfrac{3}{2}) = \sqrt{\dfrac{\frac{3}{2}-1}{2}} = \sqrt{\dfrac{1}{4}} = \dfrac{1}{2}$; যা $y \in [\dfrac{3}{2}, 3]$ এর জন্য $f^{-1}(y)$ এর ক্ষুদ্রতম মান।

$\therefore f^{-1}([\dfrac{3}{2}, 3]) = [\dfrac{1}{2}, 1]$ (Ans.)

18. $f(\dfrac{1-x}{1+x}) = x + 2$ হলে $f(x+3)$ এবং $f^{-1}(x)$ নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ ধরি, $\dfrac{1-x}{1+x} = y \quad \therefore f(y) = x + 2$

এবং $y + xy = 1 - x \Rightarrow x(y+1) = 1 - y$

$\Rightarrow x = \dfrac{1-y}{1+y} \Rightarrow x + 2 = \dfrac{1-y}{1+y} + 2$

$\Rightarrow f(y) = \dfrac{1-y+2+2y}{1+y}$ $[\because f(y) = x + 2]$

$\Rightarrow f(y) = \dfrac{3+y}{1+y}$

$\therefore f(x+3) = \dfrac{3+(x+3)}{1+(x+3)} = \dfrac{x+6}{x+4}$ (Ans.)

২য় অংশ: দেওয়া আছে, $f(\dfrac{1-x}{1+x}) = x + 2$

$\Rightarrow f^{-1}(x+2) = \dfrac{1-x}{1+x}$

$\therefore f^{-1}\{(x-2)+2\} = \dfrac{1-(x-2)}{1+(x-2)}$

$\Rightarrow f^{-1}(x) = \dfrac{3-x}{x-1}$ (Ans.)

19. নিম্নের অন্বয়গুলোর লেখ অঙ্কন কর। কোনগুলো ফাংশন এবং কোনগুলো ফাংশন নয় তা লেখচিত্র থেকে কারণসহ উল্লেখ কর।

সমাধান :

(a) নিচের তালিকায় $x \in [-3, 3]$ এর ভিন্ন ভিন্ন মানের জন্য $y = x^2$ এর প্রতিরূপী মান নির্ণয় করি :

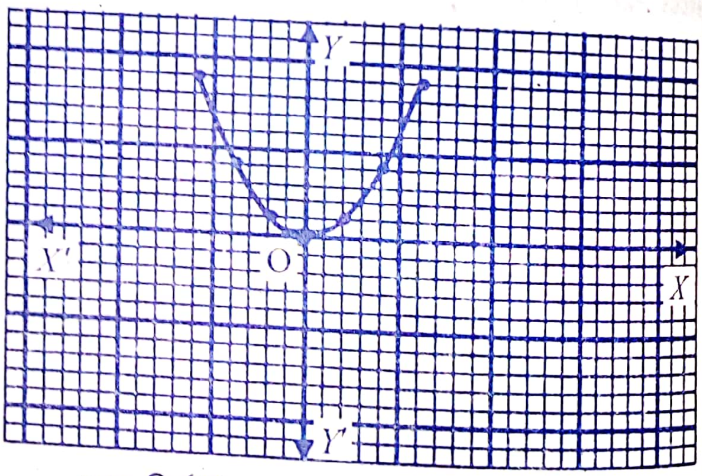
x	± 3	± 2	± 1	0
$y = x^2$	9	4	1	0

একটি ছক কাগজে স্থানাংকের অক্ষ রেখা $X'OX$ ও YOY' আঁকি।

স্কেল নিধারণ ঃ

x-অক্ষ বরাবর ক্ষুদ্রতম বর্গক্ষেত্রের 2 বাহু = 1 একক।

y-অক্ষ বরাবর ক্ষুদ্রতম বর্গক্ষেত্রের 1 বাহু = 1 একক।



এখন নির্ধারিত স্কেল অনুযায়ী তালিকাভুক্ত বিন্দুগুলো ছক কাগজে স্থাপন করি। স্থাপিত বিন্দুগুলো মুক্ত হস্তে বক্রাকারে যোগ করে $R = \{(x, y) : y = x^2$ এবং $-3 \le x \le 3\}$ এর লেখ অঙ্কন করা হল।

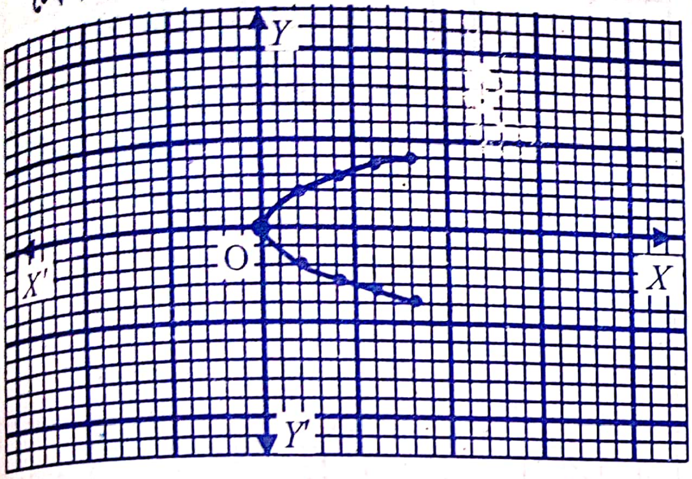
$-3 \le x \le 3$ সীমার মধ্যে y-অক্ষের সমান্তরাল প্রতিটি উলম্ব রেখায় প্রদত্ত অন্বয়ের লেখচিত্রটির একটি মাত্র বিন্দু আছে। অতএব, প্রদত্ত অন্বয় একটি ফাংশন।

19. (b) নিচের তালিকায় $x \in [0, 4]$ এর ভিন্ন ভিন্ন মানের জন্য $y^2 = x \Rightarrow y = \pm\sqrt{x}$ এর প্রতিরূপী মান নির্ণয় করি :

x	0	1	2	3	4
$y = \pm\sqrt{x}$	0	± 1	± 1.42	± 1.73	± 2

একটি ছক কাগজে স্থানাংকের অক্ষ রেখা X'OX ও YOY' আঁকি ।

স্কেল নিধারণ ঃ



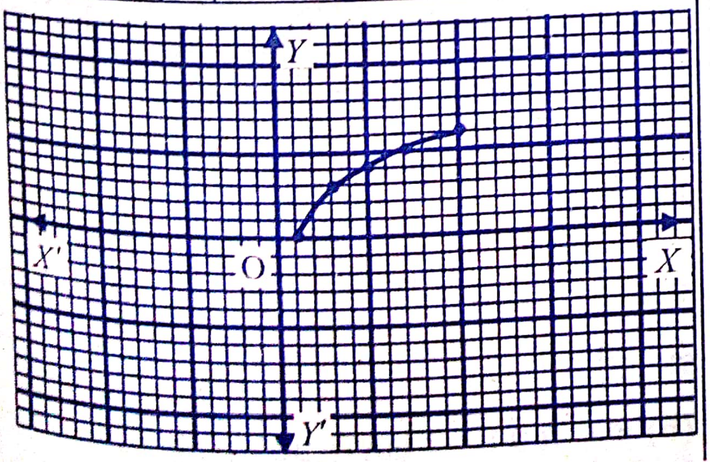
x-অক্ষ বরাবর ক্ষুদ্রতম বর্গক্ষেত্রের 2 বাহু =1একক ।
y-অক্ষ বরাবর ক্ষুদ্রতম বর্গক্ষেত্রের 2 বাহু =1 একক।

এখন নির্ধারিত স্কেল অনুযায়ী তালিকাভুক্ত বিন্দুগুলো ছক কাগজে স্থাপন করি। স্থাপিত বিন্দুগুলো মুক্ত হস্তে বক্রাকারে যোগ করে $R=\{(x , y) : y^2 = x$ এবং $0 \le x \le 4\}$ এর লেখ অঙ্কন করা হল।

$0 < x \le 4$ সীমার মধ্যে y-অক্ষের সমান্তরাল প্রতিটি উলম্ব রেখায় প্রদত্ত অন্বয়ের লেখচিত্রটির একাধিক (দুইটি) বিন্দু আছে । অতএব , প্রদত্ত অন্বয় ফাংশন নয় ।

19. (c) নিচের তালিকায় $x \in [0 , 10]$ এর ভিন্ন ভিন্ন মানের জন্য $y = \sqrt{x-1}$ এর প্রতিরূপী মান নির্ণয় করি :

x	1	3	5	7	10
$y = \sqrt{x-1}$	0	1.42	2	2.45	3

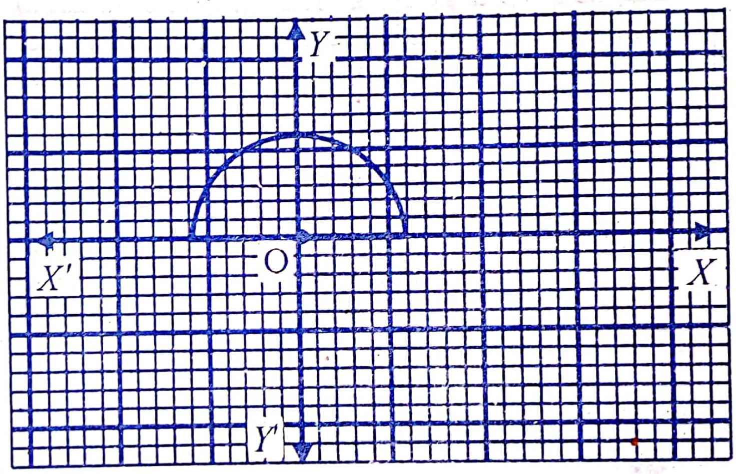


এখন নির্ধারিত স্কেল অনুযায়ী তালিকাভুক্ত বিন্দুগুলো ছক কাগজে স্থাপন করি । স্থাপিত বিন্দুগুলো মুক্ত হস্তে বক্রাকারে যোগ করে $R = \{(x , y) : y = \sqrt{x-1}$ এবং $1 \le x \le 10\}$ এর লেখ অঙ্কন করা হল।

$1 \le x \le 10$ সীমার মধ্যে y-অক্ষের সমান্তরাল প্রতিটি উলম্ব রেখায় প্রদত্ত অন্বয়ের লেখচিত্রটির একটি মাত্র বিন্দু আছে । অতএব, প্রদত্ত অন্বয় একটি ফাংশন ।

15.(d) প্রদত্ত অন্বয় R এর বর্ণনাকারী শর্ত $x^2 + y^2 = 9$ এবং $y \ge 0$ একটি অর্ধবৃত্ত , যার কেন্দ্রের স্থানাংক $(0, 0)$ এবং ব্যাসার্ধ 3 .

একটি ছক কাগজে স্থানাংকের অক্ষ রেখা X'OX ও YOY' আঁকি ।



স্কেল নিধারণ ঃ

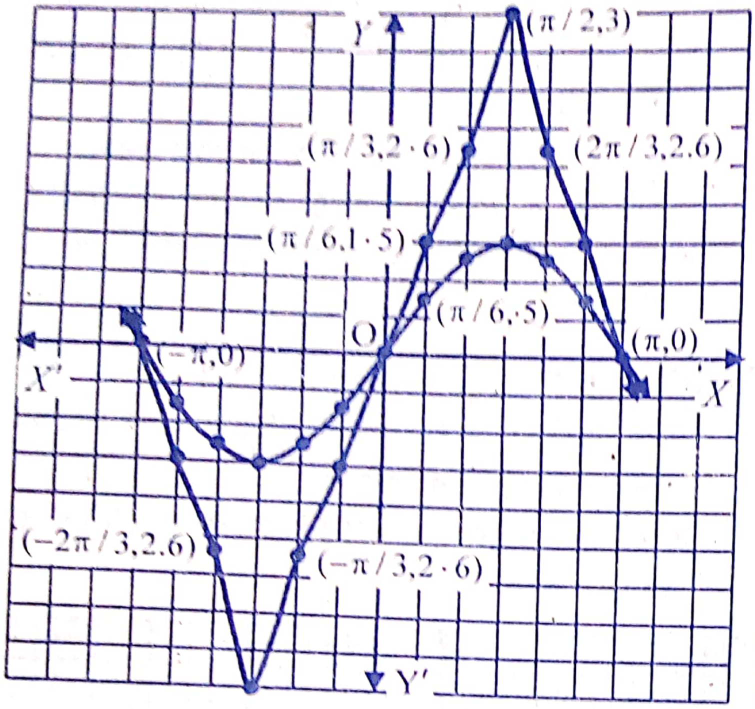
x-অক্ষ বরাবর ক্ষুদ্রতম বর্গক্ষেত্রের 2 বাহু = 1 একক ।
y-অক্ষ বরাবর ক্ষুদ্রতম বর্গক্ষেত্রের 2 বাহু = 1 একক ।
y-অক্ষের সমান্তরাল কোন সরললেখা প্রদত্ত অন্বয়ের লেখকে একাধিক বিন্দুতে ছেদ করেনা । অতএব , প্রদত্ত অন্বয় একটি ফাংশন ।

$y \ge 0$ সীমার মধ্যে y-অক্ষের সমান্তরাল প্রতিটি উলম্ব রেখায় প্রদত্ত অন্বয়ের লেখচিত্রটির একটি মাত্র বিন্দু আছে ।
অতএব, প্রদত্ত অন্বয় একটি ফাংশন ।

20. (a) $y = \sin x$, $-\pi \le x \le \pi$ এর গ্রাফ হতে $y = 3 \sin x$ এর গ্রাফ অঙ্কন কর।

সমাধান: x-অক্ষ বরাবর ছোট বর্গের এক বাহু $= 30°$ এবং y- অক্ষ বরাবর ছোট বর্গের 3 বাহু =

1 ধরে $y = \sin x$, $-\pi \le x \le \pi$ লেখচিত্র অঙ্কন করি।



$y = \sin x$ এর রূপান্তরিত ফাংশন $y = 3 \sin x$,y অক্ষের দিকে সংকুচিত হয় । $y = \sin x$ লেখের প্রতিটি বিন্দুর y –স্থানাঙ্ককে 3 গুণ বৃদ্ধি করে বিন্দুটিকে উপরের দিকে সরিয়ে $y = 3 \sin x$ লেখ নিচে অঙ্কন করা হলো।

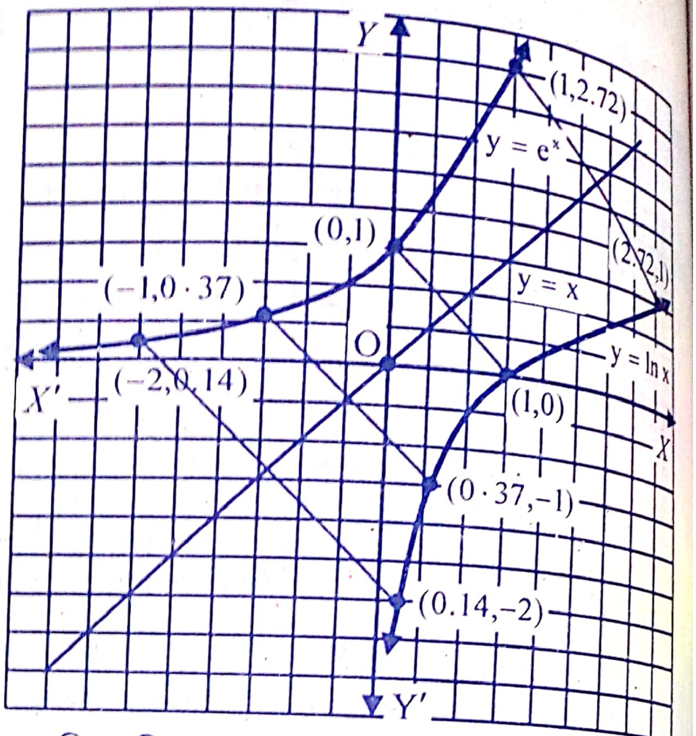
(b) $y = e^x$ এর লেখ হতে $y = ln\, x$ এর লেখ অঙ্কন কর।

নিচের তালিকায় x এর ভিন্ন ভিন্ন মানের জন্য $y = e^x$ এর প্রতিরূপী মান নির্ণয় করি :

x	−2	−1	0	1	2
$y = e^x$	0·14	0·37	1	2.72	7·39

x - অক্ষ ও y - অক্ষ বরাবর ক্ষুদ্রতম বর্গের 3 বাহু = 1 একক ধরে তালিকাভুক্ত বিন্দুগুলি ছক কাগজে স্থাপন করি এবং সরু পেন্সিল দিয়ে স্থাপিত বিন্দুগুলি মুক্ত হস্তে বক্রাকারে যোগ করে $f(x) = e^x$ এর লেখ অঙ্কন করি।

$f(x) = e^x$ ফাংশনের লেখের উপরস্থ (−2, 0·14) , (−1, 0·37), (0,1) ও (1, 2·72) বিন্দুগুলির x স্থানাঙ্ক ও y স্থানাঙ্কের স্থান বিনিময় করে যথাক্রমে (0·14, −2) , (0·37, −1), (1,0) ও (2·72,1)



বিন্দুগুলি ছক কাগজে স্থাপন করি এবং সরু পেন্সিল দিয়ে স্থাপিত বিন্দুগুলি মুক্ত হস্তে বক্রাকারে যোগ করে $f(x) = e^x$ এর বিপরীত ফাংশন $f^{-1}(x) = \ln x$ এর লেখ অঙ্কন করা হলো।
(অন্যভাবে, $y = x$ সরলরেখা হতে (−2, 0·14), (−1, 0·37), (0,1) ও (1, 2·72) বিন্দুগুলির সমদূরবর্তী বিন্দুগুলির সাহায্যে $f^{-1}(x) = \ln x$ এর লেখ অঙ্কন করা যায়।)

21. ফাংশনগুলির পর্যায় নির্ণয় কর:

(a) $\sin\left(5\theta + \frac{\pi}{4}\right)$ (b) $7\tan(-3\theta)$

(c) $\cos\frac{1}{2}\theta \tan\theta$

সমাধান: (a) ধরি, $f(\theta) = \sin\left(5\theta + \frac{\pi}{4}\right)$

$\therefore$ $f(\theta) = \sin\left(5\theta + \frac{\pi}{4} + 2\pi\right)$

[$\because \sin\theta$ এর পর্যায় 2π]

$= \sin 5\left(\theta + \frac{\pi}{20} + \frac{2\pi}{5}\right) = f\left(\theta + \frac{2\pi}{5}\right)$

$\therefore$ $\sin\left(5\theta + \frac{\pi}{4}\right)$ এর পর্যায় $\frac{2\pi}{5}$.

(b) ধরি, $f(\theta) = 7\tan(-3\theta)$

$\therefore$ $f(\theta) = 7\tan(-3\theta + \pi)$

[$\because$ tan θ এর পর্যায় π]

$= 7\tan 3(-\theta + \frac{\pi}{3}) = f(\theta + \frac{\pi}{3})$

$\therefore$ $7\tan(-3\theta)$ এর পর্যায় $\frac{\pi}{3}$.

(c) ধরি, $f(\theta) = \cos\frac{1}{2}\theta\tan\theta$

$\cos\frac{1}{2}\theta = \cos(\frac{1}{2}\theta + 2\pi) = \cos\frac{1}{2}(\theta + 4\pi)$

[$\because$ $\sin\theta$ এর পর্যায় 2π]

এবং $\tan\theta = \tan(\theta + \pi) = \tan(\theta + 2\pi)$

$= \tan(\theta + 3\pi) = \tan(\theta + 4\pi)$

[$\because$ tan θ এর পর্যায় π]

$\therefore$ $f(\theta) = \cos\frac{1}{2}(\theta + 4\pi)\tan(\theta + 4\pi)$

$= f(\theta + 4\pi)$

$\therefore$ $\cos\frac{1}{2}\theta\tan\theta$ এর পর্যায় 4π.

সম্ভাব্য ধাপসহ প্রশ্ন :

22. $A = [-3, 5]$ এবং $f : A \to \mathbb{R}$ ফাংশনটি $f(x) = 2x^2 - 7$ দ্বারা সংজ্ঞায়িত। $f(2)$, $f(6)$ এবং $f(t-2)$ নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ $2 \in A = [-3, 5]$, সুতরাং $f(2)$ সংজ্ঞায়িত এবং $f(2) = 2.2^2 - 7 = 8 - 7 = 1$ (১)

$6 \notin A = [-3, 5]$, সুতরাং $f(6)$ অসংজ্ঞায়িত। (১)

যদি $t - 2 \in A = [-3, 5]$ i.e. $-3 \le t - 2 \le 5$

i.e. $-1 \le t \le 7$ হয়, তবে $f(t-2)$ সংজ্ঞায়িত হবে (১)

এবং $f(t-2) = 2.(t-2)^2 - 7$

$= 2(t^2 - 4t + 4) - 7$

$= 2t^2 - 8t + 8 - 7$

$= 2t^2 - 8t + 1$ (১)

23. যদি $f(x) = \frac{3x+5}{3x-5}$ হয়, তাহলে প্রমাণ কর যে, $\frac{f(x)+1}{f(x)-1} = \frac{3x}{5}$. [চ.'১১]

প্রমাণ ঃ দেওয়া আছে, $f(x) = \frac{3x+5}{3x-5}$

$\Rightarrow \frac{f(x)}{1} = \frac{3x+5}{3x-5}$

$\Rightarrow \frac{f(x)+1}{f(x)\mp 1} = \frac{(3x+5)+(3x-5)}{(3x+5)-(3x-5)}$ (১)

[যোজন-বিয়োজন করে।]

$\Rightarrow \frac{f(x)+1}{f(x)\mp 1} = \frac{6x}{10}$ $\therefore \frac{f(x)+1}{f(x)-1} = \frac{3x}{5}$ (১)

24. যদি $y = f(x) = \frac{5x+3}{4x-5}$ হয়, তাহলে দেখাও যে, $x = f(y)$. [ঢা.'১১; সি.'১৩]

প্রমাণ ঃ দেওয়া আছে, $y = f(x) = \frac{5x+3}{4x-5}$

$\therefore$ $f(y) = \frac{5y+3}{4y-5}$, [$\because f(x) = \frac{5x+3}{4x-5}$] (১)

এখন, $y = \frac{5x+3}{4x-5} \Rightarrow 4xy - 5y = 5x + 3$

$\Rightarrow 4xy - 5x = 5y + 3$

$\Rightarrow (4y - 5)x = 5y + 3$

$\Rightarrow x = \frac{5y+3}{4y-5} = f(y)$ $\therefore x = f(y)$ (১)

25. $f(x) = \ln(\sin x)$ ও $\phi(x) = \ln(\cos x)$ হলে,দেখাও যে, $e^{2\phi(x)} + e^{2f(x)} = 1$ [প্র.ভ.প. '৯৯]

প্রমাণ ঃ $f(x) = \ln(\sin x)$ $\therefore f(a) = \ln(\sin a)$ এবং

$\phi(x) = \ln(\cos x)$ $\therefore \phi(a) = \ln(\cos a)$ (১)

এখন, $e^{2\varphi(a)} + e^{2f(a)} = e^{2\ln(\cos x)} + e^{2\ln(\sin x)}$

$= e^{\ln(\cos^2 x)} + e^{\ln(\sin^2 x)} = \cos^2 x + \sin^2 x$

$\therefore$ $e^{2\varphi(a)} + e^{2f(a)} = 1$ (Showed) (১)

26. $f(x) = \ln(x)$ ও $\phi(x) = x^3$ হলে, দেখাও যে, $f(\phi(x)) = 3f(x)$ [ব.'০২]

প্রমাণ ঃ $f(\phi(x)) = f(x^3)$, [$\because \phi(x) = x^3$] (১)

$= ln(x^3)$ [$\because f(x) = \ln(x)$]

$= 3\,ln(x) = 3f(x)$ [$\because f(x) = \ln(x)$]

$\therefore \quad f(\phi(x)) = 3f(x)$ (Showed) (১)

27. $f(x) = \ln(x)$ ও $\phi(x) = x^n$ হলে, দেখাও যে, $f(\phi(x)) = n f(x)$ [রা. '০৩,'০৭; সি. '০৬]

প্রমাণ ঃ $f(\phi(x)) = f(x^n)$ $[\because \phi(x) = x^n]$ (১)

$= ln(x^n)$ $[\because f(x) = \ln(x)]$

$= n\, ln(x) = n\, f(x)$ $[\because f(x) = \ln(x)]$

$\therefore \quad f(\phi(x)) = nf(x)$ (Showed) (১)

28. দেওয়া আছে, $f(x) = x^2 + 3x + 1$ এবং $g(x) = 2x - 3$ [চ.'০৭; ব.'১২; দি.'১৩]

$\therefore$ $(gof)(2) = g(f(2)) = g(2^2 + 3.2 + 1)$ (১)

$= g(4 + 6 + 1) = g(11) = 2 \times 11 - 3$

$= 22 - 3 = 19$ (১)

$(fog)(2) = f(g(2)) = f(2.2 - 3) = f(4-3)$

$= f(1) = 1^2 + 3 \times 1 + 1 = 1 + 3 + 1 = 5$ (১)

29. $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, যেখানে $f(x) = x^2$; $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, যেখানে $g(x) = x^3 + 1$ এবং $x = -3$ হলে দেখাও যে, $(fog)(x) \neq (gof)(x)$ [ঢা.'০৭,'১১]

প্রমাণ: $(fog)(x) = f(g(x)) = f(x^3 + 1)$ (১) + (১)

$= (x^3 + 1)^2 = \{(-3)^3 + 1\}^2$ (১)

$= (-27 + 1)^2 = 676$

$(gof)(x) = g(f(x))$

$= g(x^2) = (x^2)^3 + 1 = (-3)^6 + 1$

$= 730$

$\therefore$ $(fog)(x) \neq (gof)(x)$ (Showed) (১)

30. দেওয়া আছে, $f(x) = x^2 + 2x - 3$ এবং $g(x) = 3x - 4$ [কু.'০৬; দি.'১০; সি.'১২]

$\therefore$ $(f o g)(x) = f(g(x)) = f(3x-4)$ (১)+ (১)

$= (3x - 4)^2 + 2(3x - 4) - 3$ (১)

$= 9x^2 - 24x + 16 + 6x - 8 - 3$

$= 9x^2 - 18x + 5$ (Ans.)

$\therefore$ $(f o g)(3) = 9 \times 3^2 - 18 \times 3 + 5$

$= 81 - 54 + 5 = 32$ (Ans.) (১)

31. $f(x) = 2x^3 + 3$ এবং $g(x) = \sqrt[3]{\frac{x-3}{2}}$ হলে, দেখাও যে, $(fog)(x) = (g o f)(x)$ [প্র.ভ.প.'০৩]

সমাধান : $(fog)(x) = f(g(x)) = f\left(\sqrt[3]{\frac{x-3}{2}}\right)$ (১) +(১)

$= 2\left(\sqrt[3]{\frac{x-3}{2}}\right)^3 + 3 = 2 \times \frac{x-3}{2} + 3$ (১)

$= x - 3 + 3 = x$

$(gof)(x) = g(f(x)) = g(2x^3 + 3)$

$= \sqrt[3]{\frac{2x^3 + 3 - 3}{2}} = \sqrt[3]{\frac{2x^3}{2}} = \sqrt[3]{x^3} = x$ (১)

$\therefore$ $(fog)(x) = (g o f)(x)$ (Showed

32. $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ফাংশনটি (i) $f(x) = x^3$ (ii) $f(x) = x^2 + 1$ দ্বারা প্রকাশিত হলে, উহাদের রেঞ্জ নির্ণয় কর। [কু.'০৭]

(i) প্রদত্ত ফাংশন, $f(x) = x^3$

$x \in \mathbb{R}$ এর যেকোন মানের জন্য $f(x) = x^3$ এর মান যেকোন বাস্তব সংখ্যা। (১)

$\therefore$ রেঞ্জ $f = \mathbb{R}$ (১)

(ii) প্রদত্ত ফাংশন, $f(x) = x^2 + 1$

মনে করি, f এর অধীন x এর ছবি y.

$\therefore$ $y = f(x) = x^2 + 1 \Rightarrow x^2 = y - 1$ (১)

$\Rightarrow$ $x = \pm\sqrt{y-1} \in \mathbb{R}$ যদি ও কেবল যদি $x \in \mathbb{R}$ এবং $y \geq 1$ (১)

$\therefore$ রেঞ্জ $f = \{y \in \mathbb{R} : y \geq 1\}$ (Ans.) (১)

33. $A = \{-4, -2, 0, 2, 4\}$ এবং $f: A \to \mathbb{R}$ ফাংশনটি $f(x) = x^2 + 2x + 3$ দ্বারা সংজ্ঞায়িত। f এর রেঞ্জ নির্ণয় কর। [চ.'০১]

সমাধান ঃ $f(-4) = (-4)^2 + 2(-4) + 3$ (১)

$= 16 - 8 + 3 = 11$

$f(-2) = (-2)^2 + 2(-2) + 3 = 4 - 4 + 3 = 3$

$f(0) = 0^2 + 2 \times 0 + 3 = 3$

$f(2) = 2^2 + 2 \times 2 + 3 = 4 + 4 + 3 = 11$

$f(4) = 4^2 + 2 \times 4 + 3 = 16 + 8 + 3 = 27$

$\therefore$ f-এর রেঞ্জ $= \{11, 3, 3; 11, 27\}$

$= \{3, 11, 27\}$ (Ans.) (১)

$A = \{1, 2, 3, 4\}$ এবং $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$; $f: A \to B$ ফাংশনটি $f(x) = x + 1$ দ্বারা প্রকাশিত। ফাংশনটির ডোমেন এবং রেঞ্জ নির্ণয় কর। ফাংশনটি কি এক-এক ? [কু.'১২; প্র.ভ.প. ০৫]

সমাধান : দেওয়া আছে, $f(x) = x + 1$

$f(1) = 1 + 1 = 2$, $f(2) = 2 + 1 = 3$

$f(3) = 4$, $f(4) = 5$ (১)

ডোমেন $f = \{1, 2, 3, 4\} = A$ (১)

রেঞ্জ $f = \{2, 3, 4, 5\}$ (১)

প্রতীয়মান হয় যে, $x \in \{1, 2, 3, 4\}$ এর ভিন্ন ভিন্ন মানের জন্য $f(x) = x + 1$ এর ভিন্ন ভিন্ন মান পাওয়া যায়।

অতএব, $f(x)$ একটি এক - এক ফাংশন। (১)

5. $A = \mathbb{R} - \{3\}$ এবং $B = \mathbb{R} - \{1\}$ বাস্তব সংখ্যার সেট $\mathbb{R}$ -এর দুইটি উপসেট এবং $f: A \to B$; যেখানে $f(x) = \dfrac{x-2}{x-3}$. দেখাও যে, ফাংশনটি এক-এক ও সার্বিক।

সমাধান : যেকোন $x_1, x_2 \in A = \mathbb{R} - \{3\}$ এর জন্য $f(x_1) = f(x_2)$ যদি ও কেবল যদি,

$\dfrac{x_1 - 2}{x_1 - 3} = \dfrac{x_2 - 2}{x_2 - 3}$ (১)

$\Rightarrow x_1x_2 - 2x_2 - 3x_1 + 6 = x_1x_2 - 2x_1 - 3x_2 + 6$

$\Rightarrow -x_1 = -x_2 \Rightarrow x_1 = x_2$

অতএব, $f(x)$ একটি এক - এক ফাংশন। (১)

ধরি, $y = f(x) = \dfrac{x-2}{x-3} \Rightarrow xy - 3y = x - 2$

$\Rightarrow (y-1)x = 3y - 2 \Rightarrow x = \dfrac{3y-2}{y-1}$

এখন, $x = \dfrac{3y-2}{y-1} \in A = \mathbb{R} - \{3\}$ হবে যদি ও কেবল যদি $y \in \mathbb{R}$ এবং $y - 1 \neq 0 \Rightarrow y \neq 1$ হয়। (১)

$\therefore$ রেঞ্জ $f = \mathbb{R} - \{1\} = B$. (১)

$\therefore f(A) = B$.

অতএব, $f(x)$ একটি সার্বিক ফাংশন। (১)

36. $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ফাংশনটি $f(x) = x^3 + 7$ দ্বারা সংজ্ঞায়িত হলে $f^{-1}(x)$, $f^{-1}(34)$ এবং $f^{-1}(-57)$ এর মান নির্ণয় কর। [প্র.ভ.প.'০৪]

সমাধান : মনে করি, $y = f(x) = x^3 + 7$

$x^3 = y - 7 \Rightarrow x = \sqrt[3]{y-7}$

$\therefore f^{-1}(y) = \sqrt[3]{y-7}$ (১)

$[\because f(x) = y \text{ iff } f^{-1}(y) = x]$

y এর পরিবর্তে x লিখে পাই,

$f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x-7}$ (Ans.) (১)

$\therefore f^{-1}(2) = \sqrt[3]{34-7} = \sqrt[3]{27} = 3$ এবং (১)

$f^{-1}(-57) = \sqrt[3]{-57-7} = \sqrt[3]{-64} = -4$ (১)

37. দেখাও যে, $A = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$ এবং $f: A \to A$, $f(x) = x^2$ দ্বারা সংজ্ঞায়িত ফাংশনের $f^{-1}(x)$ বিদ্যমান। $f^{-1}(x)$ নির্ণয় কর।

যেকোন $x_1, x_2 \in A$ এর জন্য, $f(x_1) = f(x_2)$ হবে যদি ও কেবল যদি, $x_1^2 = x_2^2 \Rightarrow x_1 = x_2$ হয়। $[\because x \geq 0]$ (১)

$\therefore f(x)$ একটি এক- এক ফাংশন। (১)

ধরি, $y = f(x) = x^2 \Rightarrow x^2 = y$

$\Rightarrow x = \sqrt{y}$ …… (1) $[\because x \geq 0]$

এখন, $x = \sqrt{y} \in \mathbb{R}$ যদি ও কেবল যদি, $y \in \mathbb{R}$ এবং $y \geq 0$

$\therefore$ রেঞ্জ $f = \{y \in \mathbb{R} : y \geq 0\} = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0] = A$ (১)

$\therefore f(A) = A$

$\therefore f(x)$ একটি সার্বিক ফাংশন। (১)

যেহেতু $f(x)$ একটি এক - এক ও সার্বিক ফাংশন, সুতরাং $f(x)$ -এর বিপরীত ফাংশন বিদ্যমান। (১)

এখন (1) হতে পাই, $x = \sqrt{y}$

$\therefore f^{-1}(y) = \sqrt{y}$ $[\because y = f(x) \text{ iff } x = f^{-1}(y)]$

$\therefore f^{-1}(x) = \sqrt{x}$ (১)

38. $A, B \subseteq \mathbb{R}$ এবং $f(x): A \to B$ হলে এবং (i) $f(x) = \sqrt{x-2}$ (ii) $f(x) = x^2$

(iii) $f(x) = (x-1)^2$ ফাংশনগুলোর বিপরীত ফাংশন $f^{-1}(x)$ বিদ্যমান থাকলে A এবং B সেটের মান নির্ণয় কর ; যেখানে A বৃহত্তম।

(*i*) যেহেতু $f(x) = \sqrt{x-2}$ ফাংশনের বিপরীত ফাংশন f^{-1} বিদ্যমান , সুতরাং প্রদত্ত ফাংশনটি এক – এক এবং সার্বিক । (১)

$\therefore$ রেঞ্জ $f = B$. (১)

এখন , $f(x) = \sqrt{x-2} \in \mathbb{R}$ হবে যদি ও কেবল যদি, $x \in \mathbb{R}$ এবং $x-2 \geq 0$ i.e., $x \geq 2$ হয়।

$\therefore$ ডোমেন $f = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 2\}$ (১)

ডোমেন $f = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 2\}$ এর জন্য , $f(x) = \sqrt{x-2}$ একটি এক – এক ফাংশন।

$\therefore$ A = ডোমেন $f = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 2\}$ (১)

$x \in$ ডোমেন f এর জন্য , $f(x)$ এর মান অঋণাত্মক ।

$\therefore$ রেঞ্জ $f = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$. (১)

$\therefore$ $B = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$ (১)

(ii) যেহেতু $f(x) = x^2$ ফাংশনের বিপরীত ফাংশন f^{-1} বিদ্যমান, সুতরাং প্রদত্ত ফাংশনটি এক – এক এবং সার্বিক । (১)

$\therefore$ রেঞ্জ $f = B$. (১)

এখন, $f(x) = x^2 \in \mathbb{R}$ যদি ও কেবল যদি , $x \in \mathbb{R}$.

$\therefore$ ডোমেন $f = \mathbb{R}$ (১)

ডোমেন $f = \mathbb{R}$ এর জন্য, $f(x) = x^2$ ফাংশনটি এক – এক নয় । (১)

কিন্তু ডোমেন f-এর সর্বাধিক মান $\{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$ অথবা $\{x \in \mathbb{R} : x \leq 0\}$ এর জন্য $f(x) = x^2$ ফাংশনটি এক–এক ।

$\therefore$ $A = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$ অথবা $A = \{x \in \mathbb{R} : x \leq 0\}$

$x \in$ ডোমেন f এর জন্য, $f(x)$ -এর মান অঋণাত্মক।

$\therefore$ রেঞ্জ $f = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$ (১)

$\therefore$ $B = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$ (১)

(iii) যেহেতু $f(x) = (x-1)^2$ ফাংশনের বিপরীত ফাংশন f^{-1} বিদ্যমান , সুতরাং প্রদত্ত ফাংশনটি এক – এক এবং সার্বিক । (১)

রেঞ্জ $f = B$. (১)

এখন, $f(x) = (x-1)^2 \in \mathbb{R}$ হবে যদি ও কেবল যদি , $x \in \mathbb{R}$

$\therefore$ ডোমেন $f = \mathbb{R}$

ডোমেন $f = \mathbb{R}$-এর জন্য ,প্রদত্ত ফাংশন $f(x) = (x-1)^2$ এক–এক নয় । (১)

কিন্তু ডোমেন f -এর সর্বাধিক মান $\{x \in \mathbb{R} : x \geq 1\}$ অথবা $\{x \in \mathbb{R} : x \leq 1\}$ এর জন্য $f(x) = (x-1)^2$ ফাংশনটি এক–এক । (১)

$\therefore$ $A = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 1\}$ অথবা $A = \{x \in \mathbb{R} : x \leq 1\}$

$x \in$ ডোমেন f এর জন্য, $f(x)$ এর মান অঋণাত্মক।

$\therefore$ রেঞ্জ $f = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$. (১)

$\therefore$ $B = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$ (১)

39. $R = \{(x, y) : y^2 = x, 0 \leq x \leq 4$ এবং $y \geq 0\}$ অন্বয়ের লেখ অঙ্কন কর। ইহা ফাংশন কীনা তা লেখচিত্র থেকে কারণসহ উল্লেখ কর।

সমাধান : নিচের তালিকায় $x \in [0, 4]$ এর ভিন্ন ভিন্ন মানের জন্য $y^2 = x \Rightarrow y = \sqrt{x}$ $(\because y \geq 0)$ এর প্রতিরূপী মান নির্ণয় করি ঃ

x	0	1	2	3	4
$y = \sqrt{x}$	0	1	1.42	1.73	2

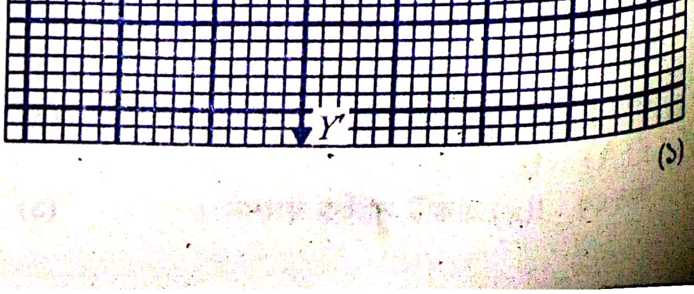
(১)

একটি ছক কাগজে স্থানাংকের অক্ষ রেখা $X'OX$ ও YOY' আঁকি ।

স্কেল নিধারণ ঃ

x-অক্ষ বরাবর ক্ষুদ্রতম বর্গক্ষেত্রের 2 বাহু =1একক।

y-অক্ষ বরাবর ক্ষুদ্রতম বর্গক্ষেত্রের 2 বাহু =1একক।



(১)

এখন নির্ধারিত স্কেল অনুযায়ী তালিকাভুক্ত বিন্দুগুলো ছক কাগজে স্থাপন করি। স্থাপিত বিন্দুগুলো মুক্ত হস্তে বক্রাকারে যোগ করে $R=\{(x, y): y^2 = x, 0 \le x \le 4$ এবং $y \ge 0\}$ এর লেখ অঙ্কন করা হল। (১)

$0 \le x \le 4$ সীমার মধ্যে y-অক্ষের সমান্তরাল প্রতিটি উলম্ব রেখায় প্রদত্ত অন্বয়ের লেখচিত্রটির একটি মাত্র বিন্দু আছে। অতএব, প্রদত্ত অন্বয় একটি ফাংশন। (১)

40. $R = \{(x, y) : (x-1)^2 + (y+2)^2 = 9\}$ অন্বয়ের লেখ অঙ্কন কর। ইহা ফাংশন কীনা তা লেখচিত্র থেকে কারণসহ উল্লেখ কর।

সমাধান : প্রদত্ত অন্বয় R এর বর্ণনাকারী সমীকরণ

$(x-1)^2 + (y+2)^2 = 9$ একটি বৃত্ত, যার কেন্দ্রের স্থানাংক $(1, -2)$ এবং ব্যাসার্ধ 3. (১)

একটি ছক কাগজে স্থানাংকের অক্ষ রেখা $X'OX$ ও YOY' আঁকি।

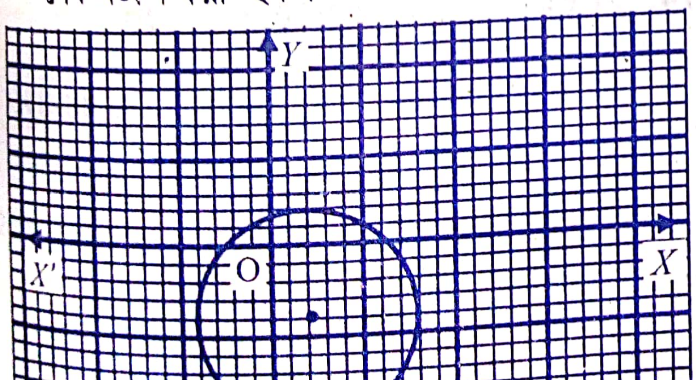
স্কেল নিধারণ ঃ

x-অক্ষ বরাবর ক্ষুদ্রতম বর্গক্ষেত্রের 2 বাহু $=1$ একক।

y-অক্ষ বরাবর ক্ষুদ্রতম বর্গক্ষেত্রের 2 বাহু $=1$ একক।

$(1, -2)$ বিন্দুকে কেন্দ্র করে 3 একক ব্যাসার্ধ নিয়ে একটি বৃত্ত অঙ্কন করি। (১)

$\therefore$ $R = \{(x, y) : (x-1)^2 + (y+2)^2 = 9\}$ এর লেখ অঙ্কন করা হল। (১)



$2 < x < 4$ সীমার মধ্যে y-অক্ষের সমান্তরাল প্রতিটি উল্লম্ব রেখায় প্রদত্ত অন্বয়ের লেখচিত্রটির একাধিক (দুইটি) বিন্দু আছে। অতএব, প্রদত্ত অন্বয় ফাংশন নয়। (১)

41. $4f(x) + 2x\, f(\frac{1}{x}) = 10x + 17$ **হলে, $f(x)$ এর মান নির্ণয় কর।**

সমাধান ঃ দেওয়া আছে,

$4f(x) + 2x\, f(\frac{1}{x}) = 10x + 17 \cdots \cdots$ (i)

x কে $\frac{1}{x}$ দ্বারা প্রতিস্থাপন করে পাই,

$4f(\frac{1}{x}) + 2\frac{1}{x}\, f(x) = 10\frac{1}{x} + 17$ (১)

$\Rightarrow 4x f(\frac{1}{x}) + 2f(x) = 10 + 17x$

$\Rightarrow 2f(x) + 4x\, f(\frac{1}{x}) = 17x + 10 \cdots \cdots$ (ii)

(i) $\times 2 -$ (ii) $\Rightarrow$

$(8-2) f(x) = (20-17)x + 34 - 10$

$\Rightarrow 6 f(x) = 3x + 24$

$\therefore$ $f(x) = \frac{1}{2}x + 4$ (Ans.) (১)

42. $2f(x) + 3f(-x) = x^2 - x + 1$ **হলে, $f(x)$ এর মান নির্ণয় কর।**

সমাধান ঃ দেওয়া আছে,

$2f(x) + 3f(-x) = x^2 - x + 1 \cdots \cdots$ (i)

x কে $(-x)$ দ্বারা প্রতিস্থাপন করে পাই,

$2f(-x) + 3f(x) = (-x)^2 - (-x) + 1$ (১)

$\Rightarrow 3f(x) + 2f(-x) = x^2 + x + 1 \cdots \cdots$ (ii)

(ii)$\times 3 -$ (i)$\times 2 \Rightarrow$

$(9-4)f(x) = (3-2)x^2 + (3+2)x + 3 - 2$

$\Rightarrow 5f(x) = x^2 + 5x + 1$

$\therefore$ $f(x) = \frac{1}{5}(x^2 + 5x + 1)$ (১)

ভর্তি পরীক্ষার MCQ ঃ

1. $f(x) = \frac{1-x}{1+x}$ **হলে $f(\cos\theta)$ এর মান নির্ণয় কর। [RU 07-08; JU 09-10]**

***Sol*".:** $f(\cos\theta) = \frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta} = \frac{2\sin^2\frac{\theta}{2}}{2\cos^2\frac{\theta}{2}}$

$= \tan^2 \frac{\theta}{2}$

2. $f(x) = \frac{x}{1+x}$ হলে f(2/3) + f(3/2) সমান– **[DU 04-05]**

Sol".: $f(2/3) + f(3/2) = \frac{2}{3} \times \frac{3}{5} + \frac{3}{2} \times \frac{2}{5} = 1$

3. $f(a) = \ln(a)$ হলে $f(\frac{1}{a}) =$ কত? **[KUET 05-06; JU 09-10]**

Sol".: $f(\frac{1}{a}) = \ln(\frac{1}{a}) = \ln(a^{-1}) = -\ln(a)$

4. $g(\theta) = \frac{1-\tan\theta}{1+\tan\theta}$ হলে $g(\frac{\pi}{4} - \theta) = ?$ **[KUET 08-09]**

Sol".: $g(\theta) = \frac{1-\tan\theta}{1+\tan\theta} = \tan(\frac{\pi}{4} - \theta)$

$\therefore \quad g(\frac{\pi}{4} - \theta) = \tan\{\frac{\pi}{4} - (\frac{\pi}{4} - \theta)\} = \tan\theta$

5. $f(x) = x^2 + 4$ এবং $g(x) = 2x - 1$ হলে $(gof)(x) = ?$ **[DU 07-08, 05-06; Jt.U 05-06; JU, CU 09-10]**

Sol".: $(gof)(x) = g(x^2 + 4)$

$= 2(x^2 + 4) - 1 = 2x^2 + 7$

6. f(x) = sinx , g(x) = x^2 হলে $f(g(\frac{\sqrt{\pi}}{2})) = ?$ **[DU 09-10]**

Sol".: $f(g(\frac{\sqrt{\pi}}{2})) = f(\frac{\pi}{4}) = \sin\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

7. f(x) = $3x^3 + 2$, g(x) = $\sqrt[3]{\frac{x-2}{2}}$ হলে (fog)(5) এর মান হবে– **[BUET 08-09]**

Sol".: $(fog)(5) = f(\sqrt[3]{\frac{5-2}{2}}) = f(1) = 3.1^3 + 2$

8. $f(x) = x^2 + 3$ হলে $f(f(-3)) = ?$ **[KUET 07-08]**

Sol".: $f(f(-3)) = f((-3)^2 + 3) = f(12)$

$= 12^2 + 3 = 147$

9. f(x) = $x^3 + 5$ এর বিপরীত ফাংশন **[JU 09-10]**

Sol".: $f(f^{-1}(x)) = \{f^{-1}(x)\}^3 + 5$

$\Rightarrow x = \{f^{-1}(x)\}^3 + 5 \Rightarrow f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x-5}$

10. একটি ফাংশন $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, f(x) = 2x + 1 দ্বারা সংজ্ঞায়িত করা হলে $f^{-1}(2)$ এর মান হবে– **[BUET 06-07; JU, RU 09-10]**

Sol".: $f^{-1}(x) = \frac{x-1}{2} \therefore f^{-1}(2) = \frac{2-1}{2} = \frac{1}{2}$

11. যদি $f(x) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ এবং $f(x) = x^2$ হয় তবে $f^{-1}(4) =$ কত? **[CU 04-05; JU,Jt.U,RU 09-10]**

Sol".: $x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2$

$\therefore \quad f^{-1}(4) = \{-2, 2\}$

12. f(x) = $\frac{5x+3}{4x-5}$ হলে $f^{-1}(x) = ?$ **[DU10- 11]**

Sol".: $f^{-1}(x) = \frac{5x+3}{4x-5}$ [সূত্র ব্যবহার করে।]

13. একটি ফাংশন $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, f(x) = $\frac{x-2}{x-3}$ দ্বারা সংজ্ঞায়িত করা হলে $f^{-1}(0)$ সমান– **[BUET 08-09]**

Sol".: $f^{-1}(x) = \frac{+3x-2}{x-1} \therefore f^{-1}(0) = 2$

14. $f(x) = \frac{x-3}{2x+1}$ এবং $x \neq -\frac{1}{2}$ হলে $f^{-1}(-2)$ এর মান– **[DU,RU 08-09]**

Sol".: $f^{-1}(x) = \frac{-x-3}{2x-1}$

$\therefore \quad f^{-1}(-2) = \frac{-(-2)-3}{2(-2)-1} = \frac{2-3}{-4-1} = \frac{1}{5}$

15. $f(x) = \frac{2x-1}{x-2}$ ফাংশনের ডোমেন , রেঞ্জ এবং বিপরীত ফাংশন নির্ণয় কর।**[IU, SU 07-08; CU 05-06, 08-09; JU 09-10]**

$Sol^n.:$ ডোমেন $= \mathbb{R}-\{2$, রেঞ্জ $=\mathbb{R}-\{\frac{2}{1}\}=\mathbb{R}-\{2\}$

এবং $f^{-1}(x)=\frac{-2x-1}{x-(-2)}=\frac{-2x-1}{x+2}$

16. $\log(5x^2-7)$ ফাংশনের ডোমেন হবে– **[CU 07-08]**

$Sol^n.: 5x^2-7>0 \Rightarrow x^2-\frac{7}{5}>0$

$\Rightarrow (x-\sqrt{7/5})(x+\sqrt{7/5})>0$

ডোমেন $=\{x\in\mathbb{R}: x>\sqrt{7/5}$ অথবা $x<-\sqrt{7/5}\}$

17. $f(x)=\frac{x}{|x|}$ ফাংশনের ডোমেন ও বিস্তার হবে– **[CU 04-05, 06,07]**

$Sol^n.:$ ডোমেন $f=\mathbb{R}-\{0\}=(-\infty,\infty)-\{0\}$

বিস্তার $f=\{-1, 1\}$

18. $f(x)=\sqrt{\frac{1-x}{x}}$ ফাংশনটির ডোমেন কত? **[SU 05-06]**

A. (0,1) B. [0,1) C. (0,1] D. [0,1]

$Sol^n.:$ $f(x)\in\mathbb{R}$ iff $(1-x)x\geq 0$ but $x\neq 0$

$\Rightarrow (x-0)(x-1)\leq 0$ but $x\neq 0 \Rightarrow 0<x\leq 1$

19. $f(x)=x^2-1$ দ্বারা সংজ্ঞায়িত ফাংশন f এর ডোমেন [−1,1] হলে রেঞ্জ কত ? **[IU 04-05]**

$Sol^n.:$ $f(0)=0^2-1=-1$; যা $x\in[-1,1]$ এর জন্য $f(x)$ এর ক্ষুদ্রতম মান।

$f(\pm1)=(\pm1)^2-1=0$; যা $x\in[-1,1]$ এর জন্য $f(x)$ এর বৃহত্তম মান ।

$\therefore$ f এর রেঞ্জ $=[-1,0]$

20. $f(x)=\sqrt{x}+1$ হলে এর ডোমেন এবং রেঞ্জ কত? **[CU '03-04]**

$Sol^n.:$ এখানে ডোমেন হল সকল অঋণাত্মক সংখ্যার সেট অর্থাৎ $[0,\infty)$ । $f(0)=\sqrt{0}+1=1$; যা $x\in[0,\infty)$ এর জন্য $f(x)$ এর ক্ষুদ্রতম মান।

$\therefore$ রেঞ্জ $f=[1,\infty)$

21. $f(x)=\sqrt{1-x^2}$ ফাংশনের ডোমেন কত? **[CU 03-04, 08-09]**

$Sol^n.: 1-x^2\geq 0 \Rightarrow x^2-1\leq 0$

$\Rightarrow (x-1)(x+1)\leq 0 \Rightarrow -1\leq x\leq 1$

$\therefore$ ডোমেন $f=\{x\in\mathbb{R}: -1\leq x\leq 1\}$

22. $f(x)=\sqrt{x-2}$ এবং $g(x)=x^2+1$ হয় , তাহলে fog এর ডোমেন হবে– **[BUET 10 -11]**

$Sol^n.:$ $fog=f(g(x))=f(x^2+1)$

$=\sqrt{x^2+1-2}=\sqrt{x^2-1}=\sqrt{(x-1)(x+1)}$

For Dom, $(x-1)(x+1)\geq 0 \Rightarrow x\leq -1$ or, $x\geq 1$

$\therefore$ Dom (fog) $=(-\infty,-1)\cup(1,\infty)$

ফাংশনে ক্যালকুলেটরের ব্যবহার ঃ

$f(x)=\frac{x}{1+x}$ হলে $f(2/5) \div f(5/2)$ সমান–

ALPHA X) ÷ (1 + ALPHA X))

SOLVE= CALC Screen এ দেখাবে x?

Press 2 ab/c 5 = মান আসে 2 / 7

Again, press = Screen এ দেখাবে x?

Press 5 ab/c 2 = মান আসে 5 / 7

Press 2 / 7 ÷ 5 /7 = Screen এ আসে 2/5. Ans. 2/5.

বহুনির্বাচনি প্রশ্ন:

1. $Sol^n:$ $f(x)=x^2$ দ্বারা সংজ্ঞায়িত $f:[0,2]\rightarrow\mathbb{R}$ ফাংশনটি একক কিন্তু সার্বিক নয়। [0 , 2] এর ভিন্ন ভিন্ন উপাদানের ছবি ভিন্ন ভিন্ন কিন্তু $\mathbb{R}$ সেটের সকল উপাদানই A সেটের উপাদানের ছবি নয়। $\therefore$ Ans. (c)
2. $Sol^n:$ [− 2 , 2] এর ভিন্ন উপাদান −2 ও 2 এর ছবি 4 কিন্তু [0 , 4] সেটের সকল উপাদানই [− 2 , 2] সেটের উপাদানের ছবি । $\therefore$ Ans. (b)
3. $Sol^n:$ সব তথ্য সত্য। $\therefore$ Ans. (d)
4. $Sol^n:$ দ্বিঘাত ফাংশনের লেখ y অক্ষ অথবা y অক্ষের সমান্তরাল রেখার সাপেক্ষে প্রতিসম হয়।

5. **Sol^n :** f(x) এর রূপান্তরি ফাংশন f(x−4) ডানে স্থান্তরিত হয়। ∴ Ans. (b)

6. **Sol^n :** x অক্ষের সাপেক্ষে $y = x^2$ এর প্রতিচ্ছবি $y = -x^2$

7. **Sol^n :** 3 বিজোড় বলে $\text{cosec}^3 (4\theta + \frac{\pi}{3})$ এর পর্যায় $= \frac{2\pi}{|4|} = \frac{\pi}{2}$. ∴ Ans. (b)

8. **Sol^n :** $1 - x^2 \geq 0 \Rightarrow x^2 - 1 \leq 0$
$\Rightarrow -1 \leq x \leq 1$ ∴ Ans. (b)

9. **Sol^n :** x>0 হলে $\frac{x}{|x|} = 1$, x<0 হলে $\frac{x}{|x|} = -1$
∴ বিসত্মার f = {−1, 1} ∴ Ans. (a)

10. **Sol^n :** f(x) ফাংশনের গ্রাফ থেকে এর রূপান্তরিত ফাংশন f(x + 2) এর গ্রাফ 2 একক স্থানান্তরিত হবে বামে। ∴ Ans. (a)

11. **Sol^n :** $g(x) = 2x$ ∴ $g^{-1}(x) = \frac{x}{2}$.
∴ $(fog^{-1})(2) = f(g^{-1}(2)) = f(\frac{2}{2}) = f(1)$
$= 1 + 1 = 2$ ∴ Ans. (c)

12. **Sol^n :** $16 - x^2 \geq 0 \Rightarrow x^2 - 16 \leq 0$
$\Rightarrow x^2 - 16 \leq 0 \Rightarrow -4 \leq x \leq 4$
∴ ডোমেন f = [−4, 4] ∴ Ans. (a)

13. **Sol^n :** কোডোমেন f = {1, 4, 9}
∴ Ans.(b)

14. **Sol^n :** f(x) এর রেঞ্জ সকল অঋণাত্মক সংখ্যা। অর্থাৎ [0, ∞[∴ Ans. (c).

15. **Sol^n :** $f(x + 2) = |2(x + 2) - 1|$
$= |2x + 3|$
$2x + 3 = 0$ হলে, $x = -3/2$
∴ $f(x + 2) = |2x + 3|$, x-অক্ষকে (− 3/2 , 0) বিন্দুতে ছেদ করে। ∴ Ans. (b)

16. **Sol^n :** $fof(3) = f(f(3)) = f((3-2)(1-3))$
$= f(-2) = (-2-2)(1+2) = -12$
∴ Ans. (a)

17. **Sol^n :** রেঞ্জ $f = \mathbb{R} - \left\{\frac{2}{3}\right\}$ ∴ Ans. (b)

18. **Sol^n :** $f(-3) = 2 \times (-3) + 1 = -5$
∴ Ans. (b)

19. **Sol^n :**]− ∞, ∞[∴ Ans. (d)

20. **Sol^n :** x = 0 এর জন্য f(x) = |x| এর সর্বনিম্ন মান 0 এবং x = − 5 এর জন্য f(x) = | x | এর সর্বোচ্চ মান 5. ∴ রেঞ্জ f = [0, 5].
∴ Ans. (c)

21. **Sol^n :** $y = \cos x$ ফাংশনের পর্যায়কাল 2π
∴ Ans. (d) [দি.বো. ২০১৭]

22. **Sol^n :** $y = f(x) = x^3 + 3 \Rightarrow x^3 = y - 3$
$\Rightarrow x = (y-3)^{1/3} \Rightarrow f^{-1}(y) = (y-3)^{1/3}$
$\Rightarrow f^{-1}(11) = (11-3)^{1/3} = 8^{1/3} = 2$
∴ Ans. (a) [দি.বো. ২০১৭]

23. **Sol^n :** $3x = 2\pi \Rightarrow x = \frac{2\pi}{3}$
∴ Ans. (a) [ঢা.বো. ২০১৭]

24. **Sol^n :** [ঢা.বো. ২০১৭]
সূত্র: $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d} \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{-dx+b}{cx-a}$
∴ $f(x) = \frac{3x+2}{4x+5} \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{-5x+2}{4x-3}$
∴ Ans. (b)

25. **Sol^n :** $x - 2 \geq 0 \Rightarrow x \geq 2$ [ঢা.বো.'১৭]
∴ ডোমেন $= [2, \infty)$ ∴ Ans. (d)

26. **Sol^n :** $\frac{3x}{2} = \pi \Rightarrow x = \frac{2\pi}{3}$ [সি.বো. ১৭]
∴ Ans. (b)

27. Solⁿ : x_3 এর প্রতিচ্ছবি না থাকায় (iii) নং ফাংশন নয়। ∴ Ans. (a)[সিলেট বোর্ড ২০১৭]

28. Solⁿ : x = 0 হলে, y = −2. সুতরাং, প্রদত্ত ফাংশনের লেখ y -অক্ষকে (0, −2) বিন্দুতে ছেদ করে। তদুপরি, x^2 এর সহগ ধনাত্মক বলে ইহা অবতলীয় (Concave upward).

∴ Ans. (a) [সিলেট বোর্ড ২০১৭]

29. Solⁿ : $\tan x$ এর রেঞ্জ $(-\infty,\infty)$.

∴ Ans. (c) [সি. বো. ২০১৭]

30. Solⁿ : $1+\sin\frac{3\pi}{2}==1-1=0<1$

∴ $f(1+\sin\frac{3\pi}{2})= f(0)=3.0+1=1$

∴ Ans.(d) [সি. বো. ১৭]

31. Solⁿ : $fof(-1)=f(f(-1))$ [সি. বো. ২০১৭]

$=f\{3(-1)+1\}=f(-2)=3(-2)+1$

$=-6+1=-5$ ∴ Ans. (b)

32. Solⁿ : $f(\ln 2x)=2e^{2\ln 2x}=2e^{\ln(2x)^2}$

$=2e^{\ln(4x^2)}=2\times 4x^2=8x^2$

∴ Ans.(d) [সিলেট বোর্ড ২০১৭]

33. Solⁿ : সাধারণত দ্বিঘাত, পরমমান ও ত্রিকোণমিতিক ফাংশন এক-এক ও সার্বিক নয়। তবে রৈখিক ফাংশন এক-এক ও সার্বিক।

∴ Ans. (d) [চট্টগ্রাম বোর্ড ২০১৭]

34. Solⁿ : $f(x)=\frac{1}{\sqrt{8-x}}$ এর ডোমেন

$=\{x\in\mathbb{R} : 8-x>0\}$

$=\{x\in\mathbb{R} : x>8\}=(-\infty,8)$

∴ Ans.(b) . [চট্টগ্রাম বোর্ড ২০১৭]

35. Solⁿ : সূত্র : $f(x)=\frac{ax+b}{cx+d}$ এর রেঞ্জ $=\mathbb{R}-\{\frac{a}{c}\}$

∴ $f(x)=\frac{4x-13}{x-5}$ এর রেঞ্জ $=\mathbb{R}-\{\frac{4}{1}\}$

∴ Ans. (b) [চট্টগ্রাম বোর্ড ২০১৭]

38. Solⁿ : $x+y=0\Rightarrow y=-x$ একটি মূলবিন্দুগামী সরলরেখা যার ঢাল −1

∴ Ans. (b) [য .বো.'১৭]

39. Solⁿ : $-1\le\sin x\le 1$. [য .বো.'১৭]

∴ $f(x)=\sin x$ এর রেঞ্জ $[-1,1]$ ∴ Ans.(c)

40. Solⁿ : $f(x)=\frac{x-4}{2x+1}$ এর ডোমেন [য .বো.'১৭]

$=\mathbb{R}-\{-\frac{1}{2}\}$, [সূত্রানুযায়ী] ∴ Ans.(b)

41. Solⁿ : পরমমান ফাংশনের লেখ ১ম ও ২য় অথবা ৩য় ও ৪র্থ চতুর্ভাগে অসীম পর্যন্ত বিস্তৃত। পরমমান চিহ্নের বামে (−) থাকায় তা ৩য় ও ৪র্থ চতুর্ভাগে অসীম পর্যন্ত বিস্তৃত হবে। [য .বো.'১৭]

∴ Ans. (d)

42. Solⁿ : $-1\le\cos 3x\le 1$ বলে f(x) ফাংশনটির রেঞ্জ $[-1, 1]$ [রা.বো.'১৭]

∴ Ans. (b)

43. Solⁿ : $(gof)(-2)=g(f(-2))$ [রা.বো.'১৭]

$=g(3(-2)-2)=g(-8)=2(-8)+5$

$=-16+5=-11$ ∴ Ans. (a)

44. Solⁿ : $3x-2=y\Rightarrow x=\frac{y+2}{3}$

∴ $f^{-1}(x)=\frac{x+2}{3}$ [রা.বো.'১৭]

সূত্র: $f(x)=ax+b$ হলে, $f^{-1}(x)=\frac{x-b}{a}$

∴ Ans. (b)

45. Solⁿ : ফ্যাংশনের রেঞ্জ = X [কু.বো.'১৭]

∴ Ans. (d)

46. Solⁿ : উদ্দীপকে বর্ণিত f ফ্যাংশনটি *iii.* ধ্রুব ফাংশন নয়। ∴ Ans. (a) [কু.বো.'১৭]

47. Solⁿ : প্রশ্নমতে, $-2\le t-2\le 10$ [কু.বো.'১৭]

$\Rightarrow -2+2\le t-2+2\le 10+2\Rightarrow 0\le t\le 12$

$\therefore$ Ans. (d)

48. Sol^n : $9 - x^2 > 0 \Rightarrow x^2 - 9 < 0$

$\Rightarrow (x-3)(x+3) < 0 \Rightarrow -3 < x < 3$

আবার, $-1 \le x - 3 \le 1 \Rightarrow 2 \le x \le 4$

$\therefore$ ডোমেন $f = [2, 3)$ $\therefore$ Ans.(b) [ব.বো.'১৭]

49. Sol^n : অনটু বা সার্বিক ফাংশনের ক্ষেত্রে, কোডোমেন = রেঞ্জ $\therefore$ Ans. (c) [ব.বো.'১৭]

50. Sol^n : $x^3 + x^2y + xy^2 = 0$ একটি অব্যক্ত ফাংশন। $\therefore$ Ans. (b) [ব.বো.'১৭]

সৃজনশীল প্রশ্ন:

1. $f(x) = x^2 + 3x + 1$, $g(x) = \sqrt{2x - 10}$.

(a) $f(x) = 19$ হলে, x এর মান নির্ণয় কর।

সমাধান: $f(x) = 19 \Rightarrow x^2 + 3x + 1 = 19$

$\Rightarrow x^2 + 3x + 1 = 19 \Rightarrow x^2 + 3x - 18 = 0$

$\Rightarrow (x + 6)(x - 3) = 0 \therefore x = 3, -6$ (Ans.)

(b) $(g \circ f)(x)$ এর ডোমেন নির্ণয় কর।

সমাধান: $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x^2 + 3x + 1)$

$= \sqrt{2(x^2 + 3x + 1) - 10}$

$= \sqrt{2x^2 + 6x + 2 - 10}$

$= \sqrt{2x^2 + 6x - 8} \in \mathbb{R}$ হবে যদি ও কেবল যদি, $x \in \mathbb{R}$ এবং $2x^2 + 6x - 8 \ge 0$

$\Rightarrow x^2 + 3x - 4 \ge 0 \Rightarrow (x + 4)(x - 1) \ge 0$

$\Rightarrow x \ge 1$ অথবা, $x \le -4$

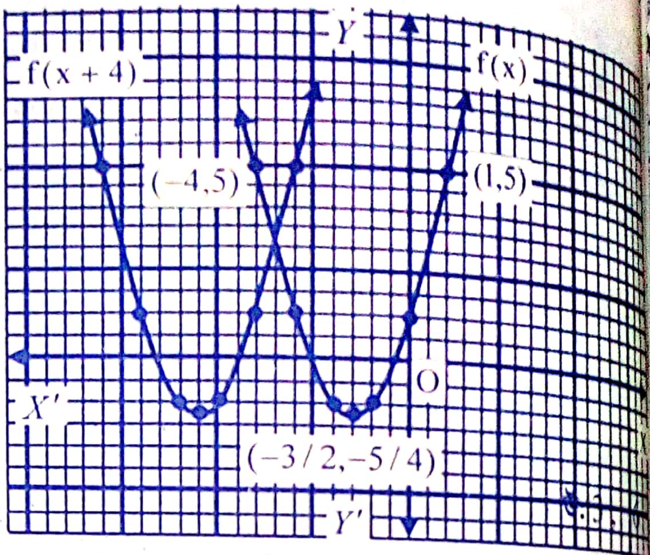
$\therefore$ $(g \circ f)(x)$ এর ডোমেন $= \{x \in \mathbb{R} : x \ge 1$ অথবা, $x \le -4\}$

(c) $f(x)$ ফাংশনের এবং এর রূপান্তরিত ফাংশন $f(x + 4)$ এর স্কেচ অঙ্কন কর।

সমাধান: নিচের তালিকায় x এর ভিন্ন ভিন্ন মানের জন্য $f(x) = x^2 + 3x + 1$ এর প্রতিরূপী মান নির্ণয় করি :

x	0	-1	-2	-3	1	-4	$-\frac{3}{2}$
$f(x) = x^2 + 3x + 1$	1	-1	-1	1		5	$-\frac{5}{4}$

x - অক্ষ ও y - অক্ষ বরাবর ক্ষুদ্রতম বর্গের 2 বাহু = 1 একক ধরে তালিকাভুক্ত বিন্দুগুলি ছক কাগজে স্থাপন করি এবং সরু পেন্সিল দিয়ে স্থাপিত বিন্দুগুলি মুক্ত হস্তে বক্রাকারে যোগ করে $f(x) = x^2 + 3x + 1$ এর স্কেচ অঙ্কন করি।



$f(x)$ ফাংশনের লেখের প্রতিটি বিন্দুকে 4 একক অর্থাৎ 8 ঘর বামে সরিয়ে $f(x)$ এর রূপান্তরিত ফাংশন $f(x + 4)$ এর স্কেচ অঙ্কন করা হলো।

2. $f(x) = \sqrt{x}$, $g(x) = x^2 - 1$.

(a) $g^{-1}(\{-1, 8\})$ এর মান নির্ণয় কর।

সমাধান : ধরি, $y = g(x) = x^2 - 1 \Rightarrow x^2 = y + 1$

$\Rightarrow x = \pm\sqrt{y + 1}$

$\therefore$ $g^{-1}(y) = \pm\sqrt{y + 1}$

$[\because y = g(x) \text{ iff } x = g^{-1}(y)]$

এখন, $g^{-1}(-1) = \pm\sqrt{-1 + 1} = 0$ এবং

$g^{-1}(8) = \pm\sqrt{8 + 1} = \pm\sqrt{9} = \pm 3$

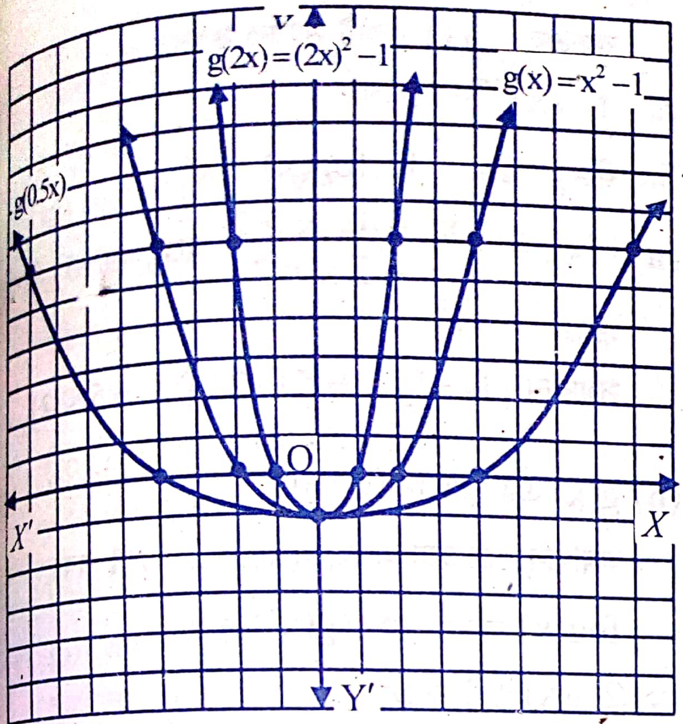
$\therefore$ $g^{-1}(\{-1, 8\}) = \{-3, 0, 3\}$

(b) $(f o g)(x)$ সংযোজিত ফাংশনের ডোমেন ও রেঞ্জ নির্ণয় কর।

সমাধান : 10(b) দ্রষ্টব্য।

(c) $g(x)$ ফাংশনের এবং এর রূপান্তরিত ফাংশন $g(2x)$ ও $g(0 \cdot 5x)$ এর স্কেচ অঙ্কন কর।

x - অক্ষ ও y - অক্ষ বরাবর ক্ষুদ্রতম বর্গের 2 বাহু = 1 একক ধরে $g(x)$ ফাংশনের এবং এর রূপান্তরিত ফাংশন $g(2x)$ ও $g(0 \cdot 5x)$ এর স্কেচ অঙ্কন করা হলো।



3. $f : \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\} \to \mathbb{R}$ কে $f(x) = x^2 + 1$ দ্বারা সংজ্ঞায়িত করা হলো।

(a) $f(x)$ এর রেঞ্জ নির্ণয় কর।

সমাধান : (a) $x = 0$ হলে $f(0) = 0 + 1 = 1$, যা $f(x)$ এর ক্ষুদ্রতম মান এবং $x > 0$ হলে $f(x) > 1$.

$\therefore$ $f(x)$ এর রেঞ্জ $= \{x \in \mathbb{R} : x \geq 1\}$

(b) $f^{-1}(\{1, 10\})$ নির্ণয় কর।

সমাধান : মনে করি, $y = f(x) = x^2 + 1$

$\Rightarrow x^2 = y - 1 \Rightarrow x = \sqrt{y-1}$, $[\because x \geq 0]$

$\therefore \ f^{-1}(y) = \sqrt{y-1}$

$[\because f(x) = y \text{ iff } f^{-1}(y) = x]$

$\therefore \ f^{-1}(1) = \sqrt{1-1} = 0$ এবং

$f^{-1}(10) = \sqrt{10-1} = 3$

$\therefore \ f^{-1}([1,10]) = [0, 3]$ এবং

$f^{-1}(\{1,10\}) = \{0,3\}$

(c) $f(x)$ এর লেখচিত্র থেকে $f^{-1}(x)$ এর লেখচিত্র অঙ্কন কর।

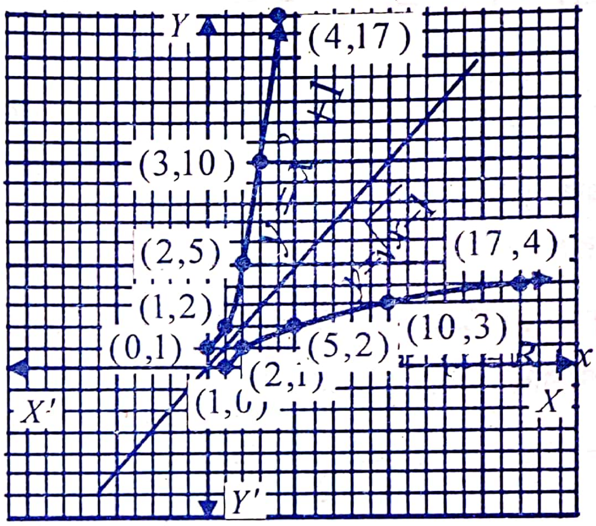
সমাধান : $f(x)$ এর লেখচিত্র থেকে $f^{-1}(x)$ এর লেখচিত্র অঙ্কন কর।

একটি ছক কাগজে স্থানাংকের অক্ষ রেখা X'OX ও YOY' আঁকি।

2. সংযুক্ত তালিকায় $x \geq 0$ এর ভিন্ন ভিন্ন মানের জন্য $y = x^2 + 1$ এর প্রতিরূপী মান নির্ণয় করি :

x	0	1	2	3	4
$f(x)$	1	2	5	10	17

x - অক্ষ ও y - অক্ষ বরাবর ক্ষুদ্রতম বর্গের 1 বাহু = 1 একক ধরে তালিকাভুক্ত বিন্দুগুলি ছক কাগজে স্থাপন করি এবং সরু পেন্সিল দিয়ে স্থাপিত বিন্দুগুলি মুক্ত হস্তে বক্রাকারে যোগ করে $y = x^2 + 1$ এর লেখ অঙ্কন করি।



$y = x$ সরলরেখার লেখ অঙ্কন করি। $y = x$ রেখা হতে (0, 1), (1, 2), (2,5), (3,10), (4, 17) ইত্যাদি বিন্দুগুলির সমদূরবর্তী যথাক্রমে (1,0), (2,1), (5,2), (10,3), (17,4) ইত্যাদি বিন্দুগুলি মুক্ত হস্তে বক্রাকারে যোগ করে $f(x)$ এর লেখ থেকে $f^{-1}(x) = \sqrt{1-x}$ এর লেখ অঙ্কন করা হলো।

উ: {0,3}

4. $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ফাংশনটি $g(x) = 2x + 1$, $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ফাংশনটি $h(x) = \dfrac{1}{x-2}$, $x \neq 2$, $f : A \to B$ ফাংশনটি $f(x) = g(x) \times h(x)$ দ্বারা সংজ্ঞায়িত, যেখানে $A = \mathbb{R} - \{2\}$, $B = \mathbb{R} - \{2\}$।

(a) $x = -2$ হলে $\dfrac{|g(x)|}{h(x)}$ এর মান নির্ণয় কর।

সমাধান : $\dfrac{|g(x)|}{h(x)} = \dfrac{|2x+1|}{1/(x-2)} = |2x+1|(x-2)$

$x = -2$ হলে, $\dfrac{|g(x)|}{h(x)} = |2(-2)+1|(-2-2)$

$= |-4+1|(-4) = |-3|(-4) = 3(-4) = -12$

(b) $h(g(x))$ এর রেঞ্জ নির্ণয় কর।

সমাধান : $h(g(x)) = h(2x+1)$

$= \dfrac{1}{2x+1-2} = \dfrac{1}{2x-1}$

মনে করি, f এর অধীন x এর ছবি y.

$\therefore\ y = f(x) = \dfrac{1}{2x-1} \Rightarrow 2xy - y = 1$

$\Rightarrow 2xy = y + 1 \Rightarrow x = \dfrac{y+1}{2y}$

$x = \dfrac{y+1}{2y} \in \mathbb{R}$ হবে যদি ও কেবল যদি $y \in \mathbb{R}$ এবং $y \neq 0$ হয়।

$\therefore$ রেঞ্জ $f = \mathbb{R} - \{0\}$

(c) $f^{-1}(x)$ নির্ণয়যোগ্য কি'না যাচাই কর।

সমাধান : $f(x) = g(x) \times h(x)$

$= (2x+1) \times \dfrac{1}{x-2} = \dfrac{2x+1}{x-2}$

$f^{-1}(x)$ নির্ণয়যোগ্য হবে যদি $f(x)$ ফাংশনটি এক-এক ও সার্বিক হয়।

যেকোনো $x_1, x_2 \in A$ -এর জন্য, $f(x_1) = f(x_2)$ হবে যদি ও কেবল যদি, $\dfrac{2x_1+1}{x_1-2} = \dfrac{2x_2+1}{x_2-2}$

$\Rightarrow 2x_1x_2 - 4x_1 + x_2 - 2 = 2x_1x_2 + x_1 - 4x_2 - 2$

$\Rightarrow -3x_1 = -3x_2 \Rightarrow x_1 = x_2$

অতএব, $f(x)$ একটি এক - এক ফাংশন।

মনে করি, f -এর অধীন x এর ছবি y.

$\therefore\ y = f(x) = \dfrac{2x+1}{x-2} \Rightarrow xy - 2y = 2x + 1$

$\Rightarrow x(y-2) = 2y + 1 \Rightarrow x = \dfrac{2y+1}{y-2} \cdots (1)$

এখন, $x = \dfrac{2y+1}{y-2} \in \mathbb{R}$ হবে যদি ও কেবল যদি $y \in \mathbb{R}$ এবং $y - 2 \neq 0$ i.e., $y \neq 2$ হয়।

$\therefore$ রেঞ্জ $f = \mathbb{R} - \{2\} = B$

$\therefore\ f(A) = B$

অতএব, $f(x)$ একটি সার্বিক ফাংশন।

$\therefore\ f^{-1}(x)$ নির্ণয়যোগ্য।

5. $f(x) = 2x + 1,\ fog(x) = x^2$;

(a) $h(x) = \begin{cases} x^2 + 4x, x \geq 2 \\ x - 2, x < 2 \end{cases}$ হলে, $h(-5)$ নির্ণয় কর।

সমাধান : $h(-5) = -5 - 2$, $[\because -5 < 2]$

$= -7$ (Ans.)

(b) $g(x)$ এর রেঞ্জ নির্ণয় কর।

সমাধান : দেওয়া আছে, $f(x) = 2x + 1$ এবং

$fog(x) = x^2 \Rightarrow f(g(x)) = x^2$

$\Rightarrow 2\,g(x) + 1 = x^2$

$\Rightarrow g(x) = \dfrac{1}{2}(x^2 - 1)$

$x = 0$ এর জন্য, $g(x) = -\dfrac{1}{2}$, যা $g(x)$ এর সর্বনিম্নমান।

$\therefore\ g(x)$ এর রেঞ্জ $= \{x \in \mathbb{R} : x \geq -\dfrac{1}{2}\}$

(c) $f(x)$ ফাংশনটি এক-এক কিনা ব্যাখ্যা কর।

সমাধান : যেকোনো $x_1, x_2 \in$ ডোম f -এর জন্য, $f(x_1) = f(x_2)$ হবে যদি ও কেবল যদি,

$2x_1 + 1 = 2x_2 + 1$

$\Rightarrow 2x_1 = 2x_2 \Rightarrow x_1 = x_2$

অতএব, $f(x)$ একটি এক - এক ফাংশন।

6. $f(x) = x^2 + 1, x \in \mathbb{R}$ এবং $g(x) = \sqrt{x}, x \in \mathbb{R}^+$

(a) $f(x)$ এক-এক ফাংশন কিনা যাচাই কর।

সমাধান : $x = -1$ এর জন্য $f(x) = (-1)^2 + 1 = 2$

$x = 1$ এর জন্য $f(x) = (1)^2 + 1 = 2$

$\therefore$ x এর দুইটি ভিন্ন মান -1 ও 1 এর জন্য $f(x)$ এর একটি অভিন্ন মান 2 নির্ণয় করা যায়।

$\therefore\ f(x)$ এক-এক ফাংশন নয়।

(b) $(fog)^{-1}$ নির্ণয় কর যেখানে fog এক-এক ও সার্বিক।

সমাধান : $fog(x) = f(g(x)) = f(\sqrt{x})$
$= (\sqrt{x})^2 + 1 = x + 1$

যদি ফাংশন fog -এর অধীন x এর ছবি y অর্থাৎ $y = fog(x)$ হয়, তবে ফাংশন $(fog)^{-1}$-এর অধীন y এর ছবি x অর্থাৎ $x = (fog)^{-1}(y)$ হবে।

এখন, $y = fog(x) \Rightarrow y = x + 1 \Rightarrow x = y - 1$

$\therefore (fog)^{-1}(y) = y - 1$

y কে x দ্বারা প্রতিস্থাপন করে পাই,

$(fog)^{-1}(x) = x - 1$

(c) gof এর স্কেচ অঙ্কন কর।

সমাধান : $gof(x) = g(f(x)) = g(x^2 + 1)$

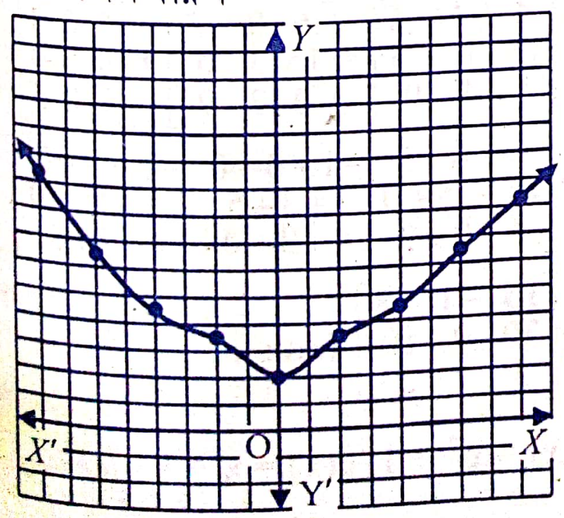
$\Rightarrow gof(x) = \sqrt{x^2 + 1}$

একটি ছক কাগজে স্থানাংকের অক্ষ রেখা $X'OX$ ও YOY' আঁকি।

সংযুক্ত তালিকায় x এর ভিন্ন ভিন্ন মানের জন্য $gof(x) = \sqrt{x^2 + 1}$ এর প্রতিরূপী মান নির্ণয় করি ঃ

x	0	± 1	± 2	± 3	± 4
gof(x)	1	1·7	2·2	3·2	4·1

x - অক্ষ ও y - অক্ষ বরাবর ক্ষুদ্রতম বর্গের 2 বাহু = 1 একক ধরে তালিকাভুক্ত বিন্দুগুলি ছক কাগজে স্থাপন করি এবং সরু পেন্সিল দিয়ে স্থাপিত বিন্দুগুলি মুক্ত হস্তে বক্রাকারে যোগ করে $y = x^2 + 1$ এর স্কেচ অঙ্কন করি।



7. $A = \{-4, 2\}$, $B = \mathbb{R} - \{3\}$, $C = \mathbb{R} - \{1\}$,
$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 5 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ এবং $f(x) = x^2 + 2x + 3$

(a) $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ হলে, f এর রেঞ্জ নির্ণয় কর।

সমাধান : $f(x) = x^2 + 2x + 3$

$\therefore f(-4) = (-4)^2 + 2(-4) + 3 = 16 - 8 + 3$
$= 11$

$f(2) = 2^2 + 2.2 + 3 = 4 + 4 + 3 = 11$

$\therefore$ f এর রেঞ্জ $= \{11, 11\} = \{11\}$

(b) f(D) নির্ণয় কর।

সমাধান : $f(D) = D^2 + 2D + 3I$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 5 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 5 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 5 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} + 3\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1+0+0 & 0+0-1 & -1+0-3 \\ 5+10+0 & 0+4+0 & -5+0+0 \\ 0+5+0 & 0+2+3 & 0+0+9 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 10 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & -1 & -4 \\ 15 & 4 & -5 \\ 5 & 5 & 9 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 10 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1+2+3 & -1+0+0 & -4-2+0 \\ 15+10+0 & 4+4+3 & -5+0+0 \\ 5+0+0 & 5+2+0 & 9+6+3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 6 & -1 & -6 \\ 25 & 11 & -5 \\ 5 & 7 & 18 \end{bmatrix}$$

(c) $g : B \rightarrow C$ ফাংশনটি $g(x) = \dfrac{x-2}{x-3}$ দ্বারা সংজ্ঞায়িত হলে, দেখাও যে, g(x) একটি বিপরীতযোগ্য ফাংশন।

সমাধান : যেকোনো $x_1, x_2 \in A$ -এর জন্য,

$g(x_1) = g(x_2)$ হবে যদি ও কেবল যদি, $\frac{x_1-2}{x_1-3} = \frac{x_2-2}{x_2-3}$

$\Rightarrow x_1x_2 - 3x_1 - 2x_2 + 6 = x_1x_2 - 2x_1 - 3x_2 + 6$

$\Rightarrow -x_1 = -x_2 \Rightarrow x_1 = x_2$

অতএব, $g(x)$ একটি এক – এক ফাংশন।

মনে করি, g -এর অধীন x এর ছবি y.

$\therefore\ y = g(x) = \frac{x-2}{x-3} \Rightarrow xy - 3y = x - 2$

$\Rightarrow x(y-1) = 3y-2 \Rightarrow x = \frac{3y-2}{y-1} \cdots (1)$

এখন, $x = \frac{3y-2}{y-1} \in \mathbb{R}$ হবে যদি ও কেবল যদি

$y \in \mathbb{R}$ এবং $y-1 \neq 0$ i.e., $y \neq 1$ হয়।

$\therefore$ রেঞ্জ $g = \mathbb{R} - \{1\} = C$

$\therefore\ g(A) = C$

অতএব, $g(x)$ একটি সার্বিক ফাংশন।

$g(x)$ একটি এক – এক ও সার্বিক ফাংশন বলে $g(x)$ একটি বিপরীতযোগ্য ফাংশন।

$g^{-1}(x)$ বিদ্যমান।

8. $f(x) = x^2 + 3x + 1$, $g(x) = 2x - 3$ এবং

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 5 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

(a) $7\tan(-3\theta)$ ফাংশনের পর্যায় নির্ণয় কর।

সমাধান : ধরি, $f(\theta) = 7\tan(-3\theta)$

$\therefore\ f(\theta) = 7\tan(-3\theta + \pi)$

[$\because$ $\tan\theta$ এর পর্যায় π]

$= 7\tan 3(-\theta + \frac{\pi}{3}) = f(\theta + \frac{\pi}{3})$

$\therefore$ $7\tan(-3\theta)$ এর পর্যায় $\frac{\pi}{3}$.

(b) gof (x) এর মান ব্যবহার করে gof (2) এর মান নির্ণয় কর।

সমাধান : $gof(x) = g(f(x)) = g(x^2 + 3x + 1)$

$= 2(x^2 + 3x + 1) - 3$

$= 2x^2 + 6x + 2 - 3 = 2x^2 + 6x - 1$

$\therefore\ gof(2) = 2(2)^2 + 6(2) - 1$

$= 8 + 12 - 1 = 19$ (Ans.)

(c) $h(x) = xf(x) + 2g(x) + 6$ হলে $h(A) = I$ সমীকরণ থেকে A^{-1} নির্ণয় কর।

সমাধান : $h(x) = x(x^2 + 3x + 1) + 2(2x - 3) + 6$

$\Rightarrow h(x) = x^3 + 3x^2 + x + 4x - 6 + 6$

$= x^3 + 3x^2 + 5x$

$\therefore\ h(A) = A^3 + 3A^2 + 5A$

প্রশ্নমতে, $A^3 + 3A^2 + 5A = I$

$\Rightarrow A^{-1}(A.A^2 + 3A.A + 5A) = A^{-1}.I$

$\Rightarrow (A^{-1}.A)A^2 + 3(A^{-1}.A)A + 5(A^{-1}.A) = A^{-1}$

$\Rightarrow (I.A^2) + 3(I.A) + 5I = A^{-1}$

$\Rightarrow A^{-1} = A^2 + 3A + 5I$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 5 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 5 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} + 3\begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 5 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} + 5\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 4+0+0 & 0+0-1 & -2+0-3 \\ 10+5+0 & 0+1+0 & -5+0+0 \\ 0+5+0 & 0+1+3 & 0+0+9 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 6 & 0 & -3 \\ 15 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 9 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 4 & -1 & -5 \\ 15 & 1 & -5 \\ 5 & 4 & 9 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 6 & 0 & -3 \\ 15 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 9 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 4+6+5 & -1+0+0 & -5-3+0 \\ 15+15+0 & 1+3+5 & -5+15+0 \\ 5+0+0 & 4+3+0 & 9+9+5 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 15 & -1 & -8 \\ 30 & 9 & 10 \\ 5 & 7 & 23 \end{bmatrix} \text{ (Ans.)}$$

9. $f(x) = x^2 + 1$, $g(x) = x - 1$

(a) $f(x)=\ln(x)$ ও $\phi(x)=x^3$ হলে, দেখাও যে, $f(\phi(x))=3f(x)$

প্রমাণ : $f(\phi(x))=f(x^3)$ [$\because \phi(x)=x^3$]

$=ln(x^3)$ [$\because f(x)=\ln(x)$]

$=3\,ln(x)=3f(x)$ [$\because f(x)=\ln(x)$]

$\therefore f(\phi(x))=3f(x)$ (Showed)

(b) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ হলে, $f^{-1}(\{1,10\})$ এর মান নির্ণয় কর।

সমাধান : প্রশ্নমালা VIII এর 14(f) দ্রষ্টব্য।

(c) $3f(x)+3f(y)-29g(x)-19(y)+2=0$ এর একটি জ্যা এর সমাকরণ $x-y+2=0$ হলে এর দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

সমাধান : দেওয়া আছে, $f(x)=x^2+1$, $g(x)=x-1$,

$3f(x)+3f(y)-29g(x)-19g(y)+2=0$

$\Rightarrow 3(x^2+1)+3(y^2+1)-29(x-1)-19(y-1)+2=0$

$\Rightarrow 3x^2+3+3y^2+3-29x+29-19y+19+2=0$

$\Rightarrow 3x^2+3y^2-29x-19y+56=0$

অর্থাৎ $x^2+y^2-\frac{29}{3}x-\frac{19}{3}y+\frac{56}{3}=0$ বৃত্তের

কেন্দ্র $(\frac{29}{6},\frac{19}{6})$ এবং

ব্যাসার্ধ $r=\sqrt{(\frac{29}{6})^2+(\frac{19}{6})^2-\frac{56}{3}}$

$=\sqrt{\frac{841+361-672}{36}}=\sqrt{\frac{530}{36}}$

কেন্দ্র $(\frac{29}{6},\frac{19}{6})$ থেকে $x-y+2=0$ জ্যা এর

লম্বদূরত্ব $d=\frac{|\frac{29}{6}-\frac{19}{6}+2|}{\sqrt{1+1}}=\frac{11}{3\sqrt{2}}$

$\therefore$ জ্যা এর দৈর্ঘ্য $=2\sqrt{r^2-d^2}$

$=2\sqrt{\frac{530}{36}-\frac{121}{18}}=2\sqrt{\frac{530-242}{36}}$

$=2\sqrt{\frac{288}{36}}=2\sqrt{8}=4\sqrt{2}$ একক।

10. $f(x)=\frac{x^4-49}{x^2+7}$, $g(x)=\sqrt{x+3}$ এবং $gop(x)=\sqrt{\frac{3x^2+2x+3}{1+x^2}}$ তিনটি ফাংশন।

(a) $r(x)=\begin{cases}\lambda x-6; x\le 0\\ \lambda x+6; x>0\end{cases}$ এবং $r(2)=0$ হলে λ এর মান নির্ণয় কর।

সমাধান : এখানে, 2>0. $\therefore r(2)=\lambda\times 2+6=0$

$\Rightarrow 2\lambda=-6\Rightarrow\lambda=-3$ (Ans.)

(b) gof এর ডোমেন নির্ণয় কর।

সমাধান : দেওয়া আছে, $f(x)=\frac{x^4-49}{x^2+7}$

$\Rightarrow f(x)=\frac{(x^2-7)(x^2+7)}{x^2+7}=x^2-7$ এবং

$g(x)=\sqrt{x+3}$

$\therefore gof(x)=g(f(x))=g(x^2-7)$

$=\sqrt{x^2-7+3}=\sqrt{x^2-4}=\sqrt{(x-2)(x+2)}$

$gof(x)=\sqrt{(x-2)(x+2)}\in\mathbb{R}$ হবে যদি ও কেবল যদি $x\in\mathbb{R}$ এবং $(x-2)(x+2)\ge 0$

$\Rightarrow x\ge 2$ অথবা, $x\le -2$ হয়।

$\therefore$ gof এর ডোমেন $=\{x\in\mathbb{R}: x\ge 2$ অথবা, $x\le -2\}$

(c) প্রমাণ কর যে, $p(x)$ একক ফাংশন নয়।

সমাধান : $gop(x)=g(p(x))=\sqrt{p(x)+3}$

$\therefore$ প্রশ্নমতে, $gop(x)=\sqrt{\frac{3x^2+2x+3}{1+x^2}}$

$\Rightarrow\sqrt{p(x)+3}=\sqrt{\frac{3x^2+2x+3}{1+x^2}}$

$\Rightarrow p(x)+3=\frac{3x^2+2x+3}{1+x^2}$

$$\Rightarrow p(x)=\frac{3x^2+2x+3}{1+x^2}-3$$

$$=\frac{3x^2+2x+3-3-3x^2}{1+x^2}=\frac{2x}{1+x^2}$$

এখন, $x_1=2,\ x_2=\frac{1}{2}\in\mathbb{R}$ (ডোমেন f) এর জন্য,

$f(x_1)=f(2)=\frac{2\times2}{1+2^2}=\frac{4}{5}$ এবং

$$f(x_2)=f(\frac{1}{2})=\frac{2\times\frac{1}{2}}{1+\frac{1}{2^2}}=\frac{4}{5}$$

$\therefore\ f(x_1)=f(x_2)=\frac{4}{5}$, কিন্তু $x_1\neq x_2$.

অতএব, f(x) এক – এক ফাংশন নয়।

11. $f(x)=\ln x$ এবং $g(t)=t^2-2t+1$

(a) $gof(e^3)$ মান নির্ণয় কর।

সমাধান : $gof(e^3)=g(f(e^3))$

$=g(\ln e^3)=g(3\ln e)\ g(3.1)=g(3)$

$=3^2-2\times3+1=9-6+1=4$ (Ans.)

(b) দেখাও যে, $\begin{vmatrix} f(\frac{x}{2}) & f(\frac{y}{2}) & f(\frac{z}{2})\\ f(\frac{2x}{3}) & f(\frac{2y}{3}) & f(\frac{2z}{3})\\ f(\frac{3x}{2}) & f(\frac{3y}{2}) & f(\frac{3z}{2})\end{vmatrix}=0$

প্রমাণ : L.H.S. $=\begin{vmatrix} f(\frac{x}{2}) & f(\frac{y}{2}) & f(\frac{z}{2})\\ f(\frac{2x}{3}) & f(\frac{2y}{3}) & f(\frac{2z}{3})\\ f(\frac{3x}{2}) & f(\frac{3y}{2}) & f(\frac{3z}{2})\end{vmatrix}$

$$=\begin{vmatrix} \ln\frac{x}{2} & \ln\frac{y}{2} & \ln\frac{z}{2}\\ \ln\frac{2x}{3} & \ln\frac{2y}{3} & \ln\frac{2z}{3}\\ \ln\frac{3x}{2} & \ln\frac{3y}{2} & \ln\frac{3z}{2}\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} \ln\frac{x}{2}-\ln\frac{y}{2} & \ln\frac{y}{2}-\ln\frac{z}{2} & \ln\frac{z}{2}\\ \ln\frac{2x}{3}-\ln\frac{2y}{3} & \ln\frac{2y}{3}-\ln\frac{2z}{3} & \ln\frac{2z}{3}\\ \ln\frac{3x}{2}-\ln\frac{3y}{2} & \ln\frac{3y}{2}-\ln\frac{3z}{2} & \ln\frac{3z}{2}\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} \ln(\frac{x}{2}\times\frac{2}{y}) & \ln(\frac{y}{2}\times\frac{2}{z}) & \ln\frac{z}{2}\\ \ln(\frac{2x}{3}\times\frac{3}{2y}) & \ln(\frac{2y}{3}\times\frac{3}{2z} & \ln\frac{2z}{3}\\ \ln(\frac{3x}{2}\times\frac{2}{3y}) & \ln(\frac{3y}{2}\times\frac{2}{3z}) & \ln\frac{3z}{2}\end{vmatrix}$$

$=\begin{vmatrix} \ln(\frac{x}{y}) & \ln(\frac{y}{z}) & \ln\frac{z}{2}\\ \ln(\frac{x}{y}) & l\ln(\frac{y}{z}) & \ln\frac{2z}{3}\\ \ln(\frac{x}{y}) & \ln(\frac{y}{z}) & \ln\frac{3z}{2}\end{vmatrix}=0$, [দুইটি কলাম সমান।]

$f(x)=\ln x$ এবং $g(t)=t^2-2t+1$

(c) $A=\begin{bmatrix} g(1) & f(e) & 2f(e)\\ f(e) & g(2) & 3f(e)\\ 2f(e) & 3f(e) & g(3)\end{bmatrix}$ হলে A^{-1} নির্ণয় কর।

সমাধান :

$$A=\begin{bmatrix} 1^2-2.1+1 & \ln e & 2\ln e\\ \ln e & 2^2-2.2+1 & 3\ln e\\ 2\ln e & 3\ln e & 3^2-2.3+1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2\\ 1 & 1 & 3\\ 2 & 3 & 4\end{bmatrix}$$

$$\therefore \quad |A| = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} = -1(4-6)+2(3-2)$$

$$= 2+2 = 4 \neq 0$$

$\therefore$ A এর বিপরীত ম্যাট্রিক্স A^{-1} বিদ্যমান।

$$\therefore \text{Adj}(A) = \begin{bmatrix} 4-9 & -(4-6) & 3-2 \\ -(4-6) & 0-4 & -(0-2) \\ 3-2 & -(0-2) & 0-1 \end{bmatrix}^T$$

$$= \begin{bmatrix} -5 & 2 & 1 \\ 2 & -4 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} -5 & 2 & 1 \\ 2 & -4 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \quad A^{-1} = \frac{1}{|A|}\text{Adj}(A)$$

$$= \frac{1}{4}\begin{bmatrix} -5 & 2 & 1 \\ 2 & -4 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -5/4 & 1/2 & 1/4 \\ 1/2 & -1 & 1/2 \\ 1/4 & 1/2 & -1/4 \end{bmatrix} \quad \text{(Ans.)}$$

12. $f(x) = x^2 - 2x + 3$ একটি quadratic ফাংশন।

(a) দেখাও যে, $f(x)$ ফাংশনটি এক-এক ফাংশন নয়।

সমাধান : $x_1 = 0,\ x_2 = 2 \in \mathbb{R}$ (ডোমেন f) এর জন্য, $f(x_1) = f(0) = 0^2 - 2\times0 + 3 = 3$ এবং

$f(x_2) = f(2) = 2^2 - 2\times2 + 3 = 3$

$\therefore$ $f(x_1) = f(x_2) = 3$, কিন্তু $x_1 \neq x_2$.

অতএব, $f(x)$ এক – এক ফাংশন নয়।

(b) উদ্দীপকে উল্লেখিত ইংরেজি শব্দটির ব্যঞ্জনবর্ণগুলি একত্রে না রেখে কতভাজে সাজানো যায়।

সমাধান : quadratic শব্দটিতে 2টি a সহ মোট 9টি বর্ণ রয়েছে।

$\therefore$ সবগুলি বর্ণ ব্যবহার করে মোট সাজানো সংখ্যা

$= \frac{9!}{2!} = 181440$, [$\frac{n!}{p!\times q!\times r!}$ সূত্রের সাহায্যে]

প্রদত্ত শব্দের 4টি স্বরবর্ণকে 1টি বর্ণ ধরে মোট বর্ণের সংখ্যা হবে $(9-4+1)$ অর্থাৎ 6টি যাদের সবগুলি বর্ণ ভিন্ন ভিন্ন। এ 6টি বর্ণকে $6! = 720$ প্রকারে এবং 4টি স্বরবর্ণকে (যাদের 2টি a) নিজেদের মধ্যে $\frac{4!}{2!} = 12$ প্রকারে সাজানো যায়।

$\therefore$ স্বরবর্ণগুলি একত্রে রেখে মোট সাজানো সংখ্যা

$= 720 \times 12 = 8640$

$\therefore$ স্বরবর্ণগুলি একত্রে না রেখে সাজানো সংখ্যা = সবগুলি বর্ণ ব্যবহার করে মোট সাজানো সংখ্যা – স্বরবর্ণগুলি একত্রে রেখে মোট সাজানো সংখ্যা

$= 181440 - 8640 = 172800$

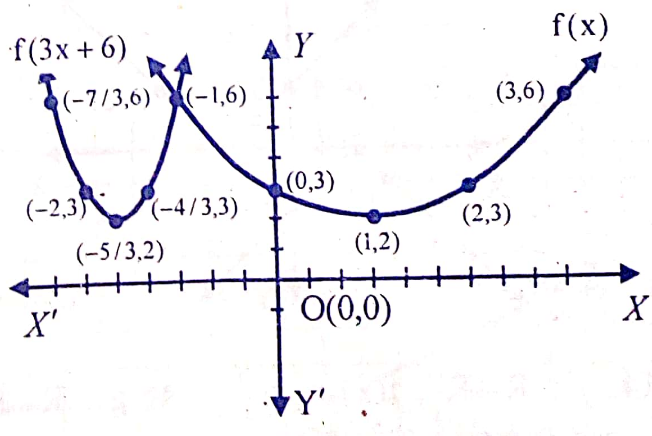
(c) **সমাধান :** $f(x) = x^2 - 2x + 3$

$f'(x) = 2x - 2 = 0$ হলে, $x = 1$. সুতরাং, প্রদত্ত ফাংশনটি $x = 1$ বিন্দুতে বাঁক নিবে।

আবার, $f(3x+6) = f\{3(x+2)\}$. সুতরাং, প্রত্যেক x -স্থানাঙ্ক 3 দ্বারা ভাগ করে ভাগফল থেকে 2 বিয়োগ হবে।

x	-1	0	1	2	3
f(x)	6	3	2	3	6

$(-1, 6), (0,3), (1,2), (2, 3), (3, 6)$ বিন্দুগুলি দ্বারা $f(x) = x^2 - 2x + 3$ ফাংশনের স্কেচ অঙ্কন করি। স্কেচটির উপরস্থ $(-1,6)$, $(0,3)$, $(1,2)$, $(2, 3)$, $(3, 6)$ বিন্দুগুলিকে যথাক্রমে $(-7/3, 6)$, $(-2,3)$, $(-5/3,2)$, $(-4/3, 3)$, $(-1, 6)$ বিন্দুতে স্থানান্তর করে $f(3x+6)$ এর স্কেচ অঙ্কন করি।



13. $f(x) = |x-2|$ এবং

$$g(x) = \tan^{-1}\left(\frac{1}{1+x+x^2}\right)$$

(a) $h(x) = \begin{cases} x^2+1; & x \geq 3 \\ x+3; & x < 3 \end{cases}$ হলে, $h(3)$ নির্ণয় কর।

সমাধান : 3, $x \geq 3$ ব্যবধিতে অবস্থিত।

$\therefore \quad h(3) = 3^2 + 1 = 9 + 1 = 10$ (Ans.)

(b) প্রমাণ কর যে, $g(0) + 2g(1) + g(2) = \dfrac{\pi}{2}$

প্রমাণ : $g(x) = \tan^{-1}\left(\dfrac{1}{1+x+x^2}\right)$

$= \cot^{-1}(1+x+x^2)$

অতপর প্রশ্নমালা VIII এর 16(c) দ্রষ্টব্য।

(c) $f(x)$ এর স্কেচের সাহায্যে $P(x) = -|x+2|$ এর স্কেচ অঙ্কন কর।

সমাধান: $f(x) = |x-2|$

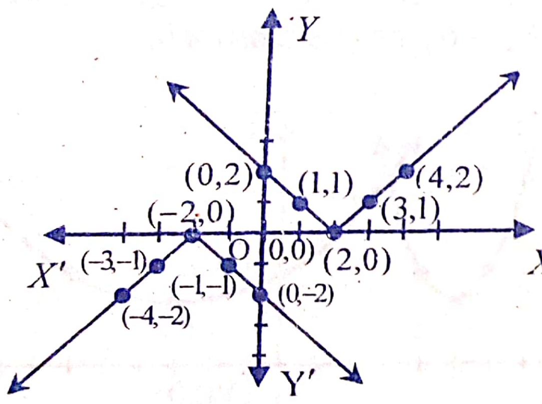
$P(x) = -|x+2| = -|x-2+4|$

$= -f(x+4) = (-1) \times f(x+4)$

$P(x)$ এর লেখের জন্য $f(x)$ এর লেখের প্রতিটি বিন্দুর x-স্থানাঙ্ক থেকে 4 বিয়োগ হবে এবং y-স্থানাঙ্ক (-1) দ্বারা গুণ হবে।

x	0	1	2	3	4
f(x)	2	1	0	1	2

উপর্যুক্ত তথ্যের সাপেক্ষে $f(x)$ এর স্কেচের সাহায্যে $P(x)$ এর স্কেচ নিম্নে অঙ্কন করা হলো।



14. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = e^{-3x}$ এবং $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = (x+3)^2$ দুইটি ফাংশন।

(a) cosec 6x এর পর্যায় নির্ণয় কর।

সমাধান : প্রশ্নমালা VIII এর উদাহরণ 7(a) দ্রষ্টব্য।

(b) $f(\ln x)$ ফাংশনটি এক-এক কিনা যাচাই কর।

সমাধান : $f(\ln x) = e^{3\ln x}$

যেকোনো $x_1, x_2 \in$ ডোমেন f এর জন্য $f(x_1) = f(x_2)$ হবে যদি ও কেবল যদি, $e^{3\ln x_1} = e^{3\ln x_2}$ হয়।

$\Rightarrow 3\ln x_1 = 3\ln x_2 \Rightarrow \ln x_1 = \ln x_2$

$\Rightarrow x_1 = x_2$

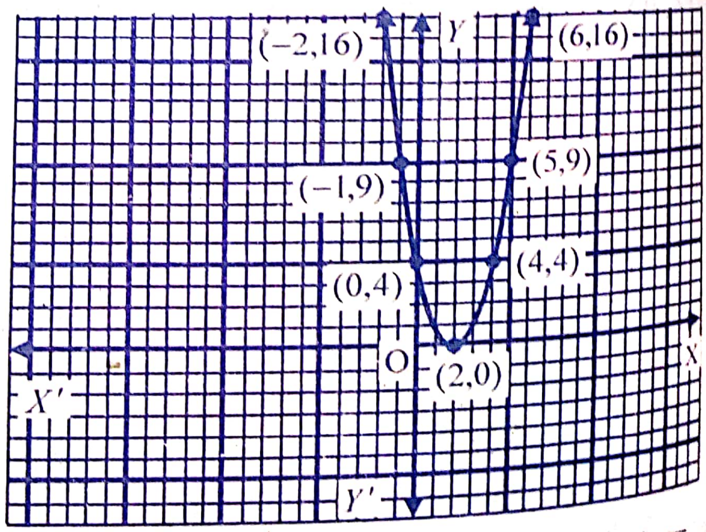
$\therefore$ $f(x)$ একটি এক-এক ফাংশন।

(c) $g(x)$ ফাংশনটির লেখচিত্র অঙ্কনপূর্বক তার বৈশিষ্ট উল্লেখ কর।

সমাধান: নিচের তালিকায় x এর ভিন্ন ভিন্ন মানের জন্য $g(x) = (x-2)^2$ এর প্রতিরূপী মান নির্ণয় করি :

x	2	0	4	–1	5	–2	6
$g(x) = (x-2)^2$	0	4	4	9	9	16	16

x - অক্ষ ও y - অক্ষ বরাবর ক্ষুদ্রতম বর্গের 1 বাহু = 1 একক ধরে তালিকাভুক্ত বিন্দুগুলি ছক কাগজে স্থাপন করি এবং সরু পেন্সিল দিয়ে স্থাপিত বিন্দুগুলি মুক্ত হস্তে বক্রাকারে যোগ করে $g(x) = (x-2)^2$ এর লেখচিত্র অঙ্কন করি।



লেখের বৈশিষ্ট্য :(i) দ্বিঘাত ফাংশন $g(x) = (x-2)^2$ এর লেখচিত্র একটি পরাবৃত্ত।

(ii) y অক্ষের সমান্তরাল $x = 2$ রেখার সাপেক্ষে লেখচিত্রটি প্রতিসম।

(iii) লেখচিত্রটি উত্তলীয় (concave downward)।

(iv) লেখচিত্রটি x অক্ষকে (2, 0) বিন্দুতে স্পর্শ করায় $g(x) = (x-2)^2$ এর বাস্তব মূল থাকবে।

15. দৃশ্যকল্প-১: $A, B \subseteq \mathbb{R}$ এবং $f(x): A \to B$ হলে $f(x) = (x++1)^2$ ফাংশনটির বিপরীত ফাংশন $f^{-1}(x)$ বিদ্যমান।

দৃশ্যকল্প-২: $g(x) = \sin x$

(a) যদি $f(x) = \dfrac{3x+5}{3x-5}$ হয়, তাহলে প্রমাণ কর যে, $\dfrac{f(x)+1}{f(x)-1} = \dfrac{3x}{5}$.

প্রমাণ : দেওয়া আছে, $y = f(x) = \dfrac{5x+3}{4x-5}$

$\therefore f(y) = \dfrac{5y+3}{4y-5}$, $[\because f(x) = \dfrac{5x+3}{4x-5}]$

এখন, $y = \dfrac{5x+3}{4x-5} \Rightarrow 4xy - 5y = 5x + 3$

$\Rightarrow 4xy - 5x = 5y + 3$

$\Rightarrow (4y-5)x = 5y + 3$

$\Rightarrow x = \dfrac{5y+3}{4y-5} = f(y) \quad \therefore x = f(y)$

(b) A এবং B সেটের মান নির্ণয় কর ; যেখানে A বৃহত্তম।

সমাধান : সমাধান: যেহেতু $f(x) = (x-1)^2$ ফাংশনের বিপরীত ফাংশন f^{-1} বিদ্যমান , সুতরাং প্রদত্ত ফাংশনটি এক – এক এবং সার্বিক ।

$\therefore$ রেঞ্জ $f = B$.

এখন, $f(x) = (x-1)^2 \in \mathbb{R}$ হবে যদি ও কেবল যদি , $x \in \mathbb{R}$

$\therefore$ ডোমেন $f = \mathbb{R}$

ডোমেন $f = \mathbb{R}$-এর জন্য , প্রদত্ত ফাংশন $f(x) = (x-1)^2$ এক–এক নয়

কিন্তু ডোমেন f-এর সর্বাধিক মান$\{x \in \mathbb{R}: x \geq 1\}$ অথবা $\{x \in \mathbb{R}: x \leq 1\}$ এর জন্য $f(x) = (x-1)^2$ ফাংশনটি এক–এক

$\therefore A = \{x \in \mathbb{R}: x \geq 1\}$ অথবা $A = \{x \in \mathbb{R}: x \leq 1\}$.

$x \in$ ডোমেন f এর জন্য, $f(x)$ এর মান অঋণাত্মক ।

$\therefore$ রেঞ্জ $f = \{x \in \mathbb{R}: x \geq 0\}$.

$\therefore B = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$

(c) $y = g(2x)$; $0 \leq x \leq \pi$ এর লেখচিত্র অঙ্কন কর।

সমাধান: $y = g(2x) = \cos 2x$

অতপর প্রশ্নমালা VI B এর উদাহরণ-3 দ্রষ্টব্য।

16. $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = e^{\frac{x}{5}}$

$g: A \to B$, $g(x) = \dfrac{3x+1}{2x-1}$, যেখানে $A = \mathbb{R} - \{\frac{1}{2}\}$ এবং $B = \mathbb{R} - \{\frac{3}{2}\}$.

(a) $f(x) = \ln(\sin x)$ ও $\phi(x) = \ln(\cos x)$ হলে দেখাও যে, $e^{2\phi(a)} + e^{2f(a)} = 1$

প্রমাণ: $f(x) = \ln(\sin x) \quad \therefore f(a) = \ln(\sin a)$

এবং $\phi(x) = \ln(\cos x) \quad \therefore \phi(a) = \ln(\cos a)$

এখন, $e^{2\varphi(a)} + e^{2f(a)} = e^{2\ln(\cos x)} + e^{2\ln(\sin x)}$

$= e^{\ln(\cos^2 x)} + e^{\ln(\sin^2 x)} = \cos^2 x + \sin^2 x$

$\therefore e^{2\varphi(a)} + e^{2f(a)} = 1$ (Showed)

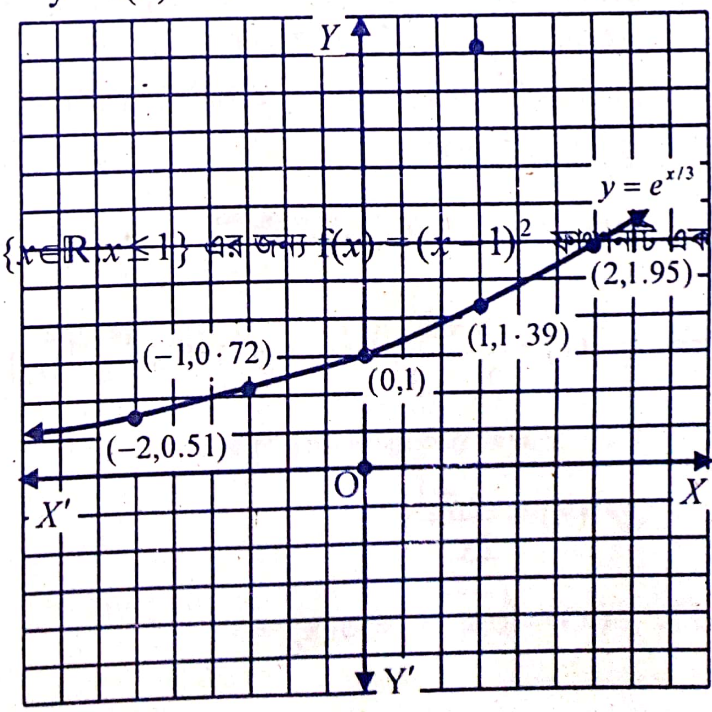
(b) f(x) এর লেখচিত্র অঙ্কনপূর্বক বৈশিষ্ট উল্লেখ কর।

সমাধান: ধরি, $y = f(x) = e^{\frac{x}{3}}$

নিচের তালিকায় x এর ভিন্ন ভিন্ন মানের জন্য $y = e^{\frac{x}{3}}$ এর প্রতিরূপী মান নির্ণয় করি :

x	-2	-1	0	1	2
$y = e^x$	0·51	0·72	1	1.39	1·95

x - অক্ষ ও y - অক্ষ বরাবর ক্ষুদ্রতম বর্গের 3 বাহু = 1 একক ধরে তালিকাভুক্ত বিন্দুগুলি ছক কাগজে স্থাপন করি এবং সরু পেন্সিল দিয়ে স্থাপিত বিন্দুগুলি মুক্ত হস্তে বক্রাকারে যোগ করে $y = f(x) = e^{\frac{x}{3}}$ এর লেখ অঙ্কন করি।



$\therefore$ $f(x) = e^{\frac{x}{3}}$ এর লেখচিত্র y-অক্ষকে (0,1) বিন্দুতে ছেদ করে।

(c) অস্তিত্ব যাচাইপূর্বক $g^{-1}(x)$ নির্ণয় কর।

সমাধান : $g : A \to B$, $g(x) = \dfrac{3x+1}{2x-1}$, যেখানে $A = \mathbb{R} - \{\frac{1}{2}\}$ এবং $B = \mathbb{R} - \{\frac{3}{2}\}$.

যেকোনো $x_1, x_2 \in A$ -এর জন্য, $g(x_1) = g(x_2)$ হবে যদি ও কেবল যদি, $\dfrac{3x_1+1}{2x_1-1} = \dfrac{3x_2+1}{2x_2-1}$

$\Rightarrow 6x_1x_2 - 3x_1 + 2x_2 - 1 = 6x_1x_2 + 2x_1 - 3x_2 - 1$

$\Rightarrow -5x_1 = -5x_2 \Rightarrow x_1 = x_2$

অতএব, $g(x)$ একটি এক – এক ফাংশন।

মনে করি, g -এর অধীন x এর ছবি y.

$\therefore y = g(x) = \dfrac{3x+1}{2x-1} \Rightarrow 2xy - y = 3x + 1$

$\Rightarrow x(2y-3) = y + 1 \Rightarrow x = \dfrac{y+1}{2y-3} \cdots (1)$

এখন, $x = \dfrac{y+1}{2y-3} \in \mathbb{R}$ হবে যদি ও কেবল যদি

$y \in \mathbb{R}$ এবং $2y - 3 \neq 0$ i.e., $y \neq \dfrac{3}{2}$ হয়।

$\therefore$ রেঞ্জ $g = \mathbb{R} - \{\dfrac{3}{2}\} = B$

$\therefore g(A) = B$

অতএব, $g(x)$ একটি সার্বিক ফাংশন।

$g(x)$ একটি এক – এক ও সার্বিক ফাংশন বলে $g^{-1}(x)$ বিদ্যমান।

এখন, (1) হতে পাই, $x = \dfrac{y+1}{2y-3}$

$\Rightarrow g^{-1}(y) = \dfrac{y+1}{2y-3}$, $[\because y = g(x) \text{ iff } x = g^{-1}(y)]$

y কে x দ্বারা প্রতিস্থাপন করে পাই,

$g^{-1}(x) = \dfrac{x+1}{2x-3}$

17. $f(x) = \log_{10} x$ ও $\phi(x) = x^n$

(a) $A = [-3, 5]$ এবং $f : A \to \mathbb{R}$ ফাংশনটি $f(x) = 2x^2 - 7$ দ্বারা সংজ্ঞায়িত। $f(t-2)$ নির্ণয় কর।

সমাধান : যদি $t - 2 \in A = [-3, 5]$ i.e. $-3 \leq t - 2 \leq 5$ i.e. $-1 \leq t \leq 7$ হয়, তবে $f(t-2)$ সংজ্ঞায়িত হবে এবং

$f(t-2) = 2.(t-2)^2 - 7$

$= 2(t^2 - 4t + 4) - 7$

$= 2t^2 - 8t + 8 - 7$ $= 2t^2 - 8t + 1$

(b) দেখাও যে, $f(\phi(x)) = n f(x)$

প্রমাণ : $f(\phi(x)) = f(x^n)$ $[\because \phi(x) = x^n]$

$= \log_a x^n$ $,[\because f(x) = \log_a x]$

$= n \log_a x$

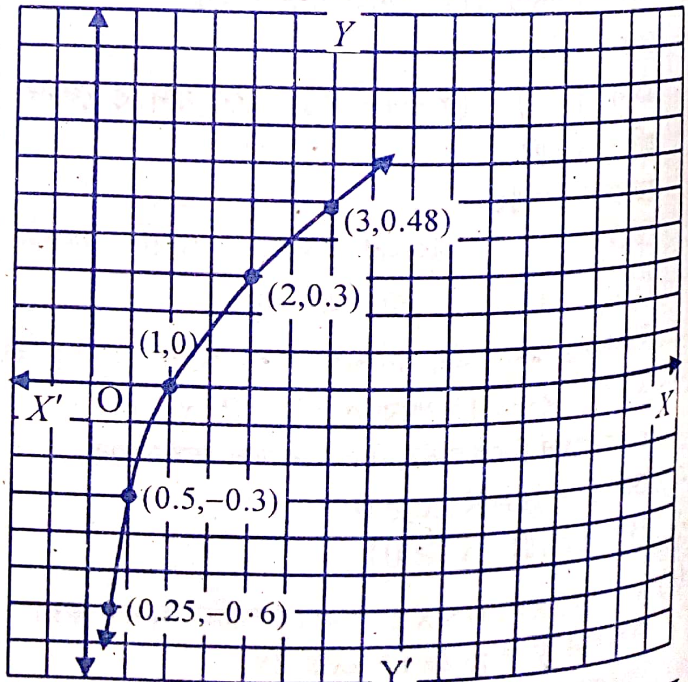
$= n f(x)$, $[\because f(x) = \log_a x]$

$\therefore f(\phi(x)) = nf(x)$ (Showed)

(c) f(x) এর স্কেচ অঙ্কন করে বৈশিষ্ট্য পর্যবেক্ষণ কর।

সমাধান: $f(x) = \log_{10} x$ লগারিদমিক ফাংশনটি $x \leq 0$ এর জন্য অসংজ্ঞায়িত হয়।

x	·25	·5	1	2	3
f(x)	−0·6	−0·3	0	0·3	0·48



লেখের বৈশিষ্ট্যঃ (i) লেখচিত্রটি x অক্ষ বা y অক্ষের সাপেক্ষে প্রতিসম নয়।

(ii) লেখচিত্রটি ১ম চতুর্ভাগ বা ৪র্থ চতুর্ভাগে অসীম পর্যন্ত বিস্তৃত।

(iii) লেখচিত্রটি x অক্ষকে (1,0) বিন্দুতে ছেদ করে।

(iv) y অক্ষ লেখটির একটি অসীমতট রেখা।

18. $f(x) = x^2 + 3x$, $g(x) = 2x - 3$ এবং $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 4 \\ -4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$

(a) f(g (2)) নির্ণয় কর।

সমাধান : $f(g(2)) = f(2.2 - 3) = f(1)$
$= 1^2 + 3.1 = 1 + 3 = 4$

(b) f(A) + 2I নির্ণয় কর।

সমাধান : $f(A) + 2I = A^2 + 3A + 2I$

$$= \begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 4 \\ -4 & 5 & 6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 4 \\ -4 & 5 & 6 \end{bmatrix} + 3\begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 4 \\ -4 & 5 & 6 \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 9+2+4 & 3+3-5 & -3+4-6 \\ 6+6-16 & 2+9+20 & -2+12+24 \\ -12+10-24 & -4+15+30 & 4+20+36 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 9 & 3 & -3 \\ 6 & 9 & 12 \\ -12 & 15 & 18 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 15 & 1 & -5 \\ -4 & 31 & 34 \\ -26 & 41 & 60 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 9 & 3 & -3 \\ 6 & 9 & 12 \\ -12 & 15 & 18 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 15+9+2 & 1+3+0 & -5-3+0 \\ -4+6+0 & 31+9+2 & 34+12+0 \\ -26-12+0 & 41+15+0 & 60+18+2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 26 & 4 & -8 \\ 2 & 42 & 46 \\ -38 & 56 & 80 \end{bmatrix}$$

(c) f(x) এর স্কেচের সাহায্যে f(x) − 1 এর স্কেচ অঙ্কন কর।

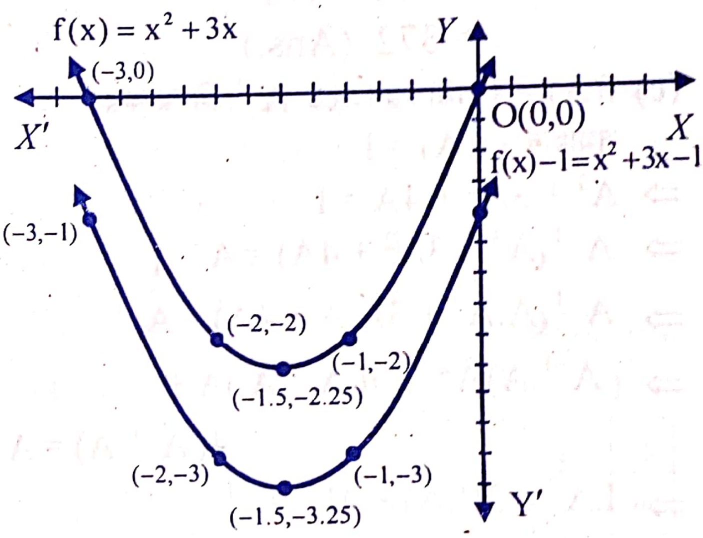
সমাধান : $f(x) = x^2 + 3x$
$f'(x) = 2x + 3 = 0$ হলে, $x = -3/2$
$\therefore$ $x = -3/2$ বিন্দুতে ফাংশনটি বাঁক নেবে।

নিচের তালিকায় x এর ভিন্ন ভিন্ন মানের জন্য $f(x) = x^2 + 3x$ এর প্রতিরূপী মান নির্ণয় করি :

x	-3	-2	-1·5	-1	0
F(x)	0	-2	-2·25	-2	0

f(x) − 1 এর লেখের জন্য f(x) এর লেখের প্রতিটি বিন্দুর y-স্থানাঙ্ক থেকে 1 বিয়োগ হবে। উপর্যুক্ত তথ্যের ব্যবহার করে f(x) এর স্কেচের সাহায্যে f(x) − 1 এর স্কেচ নিয়ে অঙ্কন করা হলো।

x	-3	-2	-1·5	-1	0
y	1	-1	-1·25	-1	1



19. $f(x) = x^3 + 2x^2 + 3x$, $g(x) = x^2 - 3$

এবং $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$

(a) $\tan\frac{3x}{2}$ ফাংশনের পর্যায় নির্ণয় কর।

সমাধান : ধরি, $f(x) = \tan\frac{3x}{2}$

$\therefore$ $f(x) = \tan\frac{3x}{2} = \tan(\frac{3x}{2} + \pi)$,

[$\because$ tanx এর পর্যায় π]

$= \tan\frac{3}{2}(x + \frac{2}{3}\pi) = f(x + \frac{2\pi}{3})$

$\therefore$ $\sin 6x$ এর পর্যায় $\frac{\pi}{3}$.

(b) $fog(x)$ নির্ণয় করে তার সাহায্যে $fog(3)$ নির্ণয় কর।

সমাধান : $fog(x) = f(g(x)) = f(x^2-3)$

$= (x^2-3)^3 + 3(x^2-3)^2 + 4(x^2-3)$

$= (x^2)^3 - 3.(x^2)^2.3 + 3x^2.3^2 - 3^3 + 3\{(x^2)^2 - 2.x^2.3 + 3^2\} + 4x^2 - 12$

$= x^6 - 9x^4 + 27x^2 - 27 + 3x^4 - 18x^2 + 27 + 4x^2 - 12$

$= x^6 - 6x^4 + 13x^2 - 12$

$\therefore$ $fog(3) = 3^6 - 6.3^4 + 13.3^2 - 12$

$= 729 - 486 + 117 - 12$

$= 846 - 474$

$= 372$ (Ans.)

(c) $f(A) = I$ সমীকরণ হতে A^{-1} নির্ণয় কর।

সমাধান : $f(A) = I$

$\Rightarrow A^3 + 3A^2 + 4A = I$

$\Rightarrow A^{-1}(A^3 + 3A^2 + 4A) = A^{-1}.I$

$\Rightarrow A^{-1}(A.A^2 + 3A.A + 4A) = A^{-1}$

$\Rightarrow (A^{-1}.A)A^2 + 3(A^{-1}.A)A + 4(A^{-1}.A) = A^{-1}$

$\Rightarrow I.A^2 + 3(I.A) + 4I = A^{-1}$

$\Rightarrow A^{-1} = A^2 + 3A + 4I$

$$=\begin{bmatrix}2 & 0 & -1\\5 & 1 & 0\\0 & 1 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 0 & -1\\5 & 1 & 0\\0 & 1 & 3\end{bmatrix} + 3\begin{bmatrix}2 & 0 & -1\\5 & 1 & 0\\0 & 1 & 3\end{bmatrix} + 4\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}4+0+0 & 0+0-1 & -2+0-3\\10+5+0 & 0+1+0 & -5+0+0\\0+5+0 & 0+1+3 & 0+0+9\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}6 & 0 & -3\\15 & 3 & 0\\0 & 3 & 9\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}4 & 0 & 0\\0 & 4 & 0\\0 & 0 & 4\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}4 & -1 & -5\\15 & 1 & -5\\5 & 4 & 9\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}6 & 0 & -3\\15 & 3 & 0\\0 & 3 & 9\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}4 & 0 & 0\\0 & 4 & 0\\0 & 0 & 4\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}4+6+4 & -1+0+0 & -5-3+0\\15+15+0 & 1+3+4 & -5+15+0\\5+0+0 & 4+3+0 & 9+9+4\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}14 & -1 & -8\\30 & 8 & 10\\5 & 7 & 22\end{bmatrix} \text{ (Ans.)}$$

20. $A = \{x \in \mathbb{R} : x \leq 0\}$ এবং $f : A \to A$, $f(x) = x^2$ দ্বারা সংজ্ঞায়িত ফাংশন এবং $g(x) = |x+2|$

(a) $h(x) = \sqrt{5-x^2}$ এর ডোমেন নির্ণয় কর।

সমাধান : $h(x) = \sqrt{5-x^2} = \sqrt{(\sqrt{5}-x)(\sqrt{5}+x)}$ $\in \mathbb{R}$ যদি ও কেবল যদি $x \in \mathbb{R}$ এবং

$(\sqrt{5} - x)(\sqrt{5} + x) \geq 0$

$\Rightarrow (x - \sqrt{5})\{x - (-\sqrt{5})\} \leq 0$

$\Rightarrow -\sqrt{5} \leq x \leq \sqrt{5}$ হয়।

$\therefore$ ডোমেন $h(x) = \{x \in \mathbb{R} : -\sqrt{5} \leq x \leq \sqrt{5}\}$

(b) অস্তিত্ব যাচাইপূর্বক $f^{-1}(x)$ নির্ণয় কর।

সমাধান : যেকোনো $x_1, x_2 \in A$ এর জন্য, $f(x_1) = f(x_2)$ হবে যদি ও কেবল যদি, $x_1^2 = x_2^2$

$\Rightarrow x_1 = x_2$ হয়, $[\because x \geq 0]$

$\therefore$ $f(x)$ একটি এক– এক ফাংশন।

ধরি, $y = f(x) = x^2 \Rightarrow x^2 = y$

$\Rightarrow x = \sqrt{y}$ ...... (1), $[\because x \geq 0]$

এখন, $x = \sqrt{y} \in \mathbb{R}$ যদি ও কেবল যদি, $y \in \mathbb{R}$ এবং $y \geq 0$.

$\therefore$ রেঞ্জ $f = \{y \in \mathbb{R} : y \geq 0\}$

$= \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0] = A$

$\therefore$ $f(A) = A$

$\therefore$ $f(x)$ একটি সার্বিক ফাংশন।

যেহেতু $f(x)$ একটি এক – এক ও সার্বিক ফাংশন, সুতরাং $f(x)$-এর বিপরীত ফাংশন বিদ্যমান।

এখন (1) হতে পাই, $x = \sqrt{y}$

$\therefore$ $f^{-1}(y) = \sqrt{y}$

$[\because y = f(x) \text{ iff } x = f^{-1}(y)]$

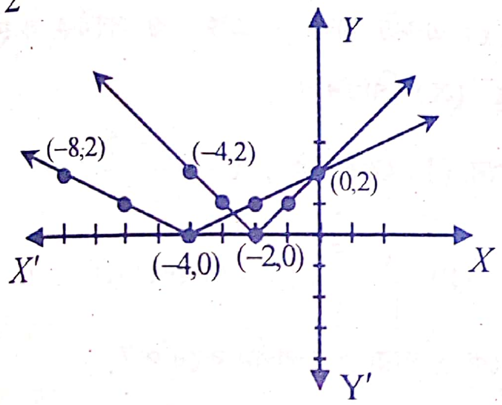
y কে x দ্বারা প্রতিস্থান করে পাই, $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$

(c) $g(x)$ ফাংশনের স্কেচ হতে এর রূপান্তরিত ফাংশন $g(\frac{1}{2}x)$ এর স্কেচ অঙ্কন কর।

সমাধান : $g(\frac{1}{2}x)$ এর লেখের জন্য $g(x) = |x + 2|$ এর লেখের প্রতিটি বিন্দুর x-স্থানাঙ্ক 2 দ্বারা গুণ হবে।

x	0	-1	-2	-3	-4
g(x)	2	1	0	1	2

উপর্যুক্ত তথ্যের সাপেক্ষে $g(x)$ এর স্কেচের সাহায্যে $g(\frac{1}{2}x)$ এর স্কেচ নিম্নে অঙ্কন করা হলো।



21. $4f(x) + 2x\,f(\frac{1}{x}) = 10x + 17$, $g(x) = x^2$

(a) যদি $y = f(x) = \frac{5x+3}{4x-5}$ হয়, তাহলে দেখাও যে, $x = f(y)$.

প্রমাণ : দেওয়া আছে, $y = f(x) = \frac{5x+3}{4x-5}$

$\therefore f(y) = \frac{5y+3}{4y-5}$, $[\because f(x) = \frac{5x+3}{4x-5}]$

এখন, $y = \frac{5x+3}{4x-5} \Rightarrow 4xy - 5y = 5x + 3$

$\Rightarrow 4xy - 5x = 5y + 3$

$\Rightarrow (4y - 5)x = 5y + 3$

$\Rightarrow x = \frac{5y+3}{4y-5} = f(y) \quad \therefore x = f(y)$

(b) $f(x)$ এর মান নির্ণয় কর।

সমাধান : দেওয়া আছে,

$$4\,f(x) + 2x\,f(\frac{1}{x}) = 10x + 17 \cdots\cdots \text{(i)}$$

x কে $\frac{1}{x}$ দ্বারা প্রতিস্থাপন করে পাই,

$$4\,f(\frac{1}{x}) + 2\frac{1}{x}\,f(x) = 10\frac{1}{x} + 17$$

$$\Rightarrow 4x\,f(\frac{1}{x}) + 2\,f(x) = 10 + 17x$$

$$\Rightarrow 2\,f(x) + 4x\,f(\frac{1}{x}) = 17x + 10 \cdots \text{(ii)}$$

(i) $\times 2 -$ (ii) $\Rightarrow$

$(8 - 2)\,f(x) = (20 - 17)x + 34 - 10$

$\Rightarrow 6f(x) = 3x + 24$

$\therefore f(x) = \frac{1}{2}x + 4$ (Ans.)

(c) $g(x)$ ফাংশনের স্কেচ হতে এর রূপান্তরিত ফাংশন $2g(x)$ এর স্কেচ অঙ্কন কর।

সমাধান : $g(x) = x^2$

$g'(x) = 2x = 0$ হলে, $x = 0$

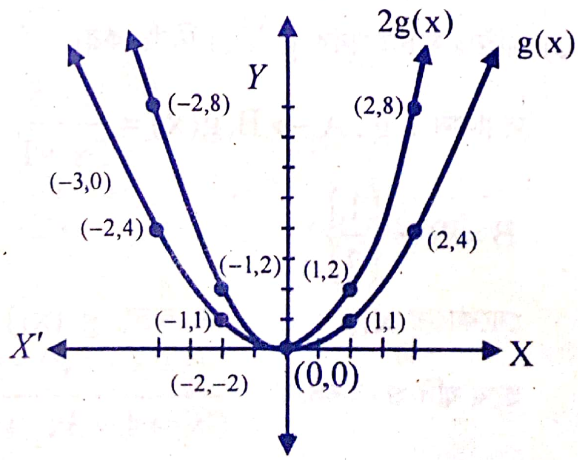
$\therefore$ $x = 0$ বিন্দুতে ফাংশনটি বাঁক নেবে।

নিচের তালিকায় x এর ভিন্ন ভিন্ন মানের জন্য $g(x) = x^2$ এর প্রতিরূপী মান নির্ণয় করি :

x	-2	-1	0	1	2
g(x)	4	1	0	1	4

$2g(x)$ এর লেখের জন্য $g(x)$ এর লেখের প্রতিটি বিন্দুর y-স্থানাঙ্ককে 2 দ্বারা গুণ করতে হবে।

উপর্যুক্ত তথ্যের ব্যবহার করে $g(x)$ এর স্কেচের সাহায্যে $2g(x)$ এর স্কেচ নিম্নে অঙ্কন করা হলো।



22. $A, B \subset R, B = R - \left\{\frac{1}{3}\right\}$,

$g : A \to B, g(x) = \frac{x-5}{3x+1}$ এবং

$h(x) = x^2 + 1.$ [দি.বো. ২০১৭]

(a) $\sin e^{\sqrt{1-x}}$ এর অন্তরক সহগ নির্ণয় কর। ২

সমাধান : $\sin e^{\sqrt{1-x}}$ এর অন্তরক সহগ

$$= \frac{d}{dx}(\sin e^{\sqrt{1-x}}) = \cos e^{\sqrt{1-x}} . \frac{d}{dx}(e^{\sqrt{1-x}})$$

$$= \cos e^{\sqrt{1-x}} . e^{\sqrt{1-x}} \frac{d}{dx}(1-x)^{\frac{1}{2}}$$

$$= \cos e^{\sqrt{1-x}} . e^{\sqrt{1-x}} . \frac{1}{2}(1-x)^{\frac{1}{2}-1} \frac{d}{dx}(1-x)$$

$$= -\cos e^{\sqrt{1-x}} . e^{\sqrt{1-x}} . \frac{1}{2\sqrt{1-x}}$$

(b) দেখাও যে, (hog) (1) - (goh) (2) =2. ৪

সমাধান : $h(x) = x^2 + 1, g(x) = \frac{x-5}{3x+1}$

$\therefore$ (hog) (1) – (goh) (2)

$= h(g(1)) - g(h(2))$

$= h(\frac{1-5}{3.1+1}) - g(2^2 + 1)$

$= h(-1) - g(5) = (-1)^2 + 1 - \frac{5-5}{3.5+1}$

$= 1 + 1$

$\therefore$ (hog) (1) - (goh) (2) = 2

(c) অস্তিত্ব যাচাইপূর্বক $g^{-1}(x)$ নির্ণয় কর। ৪

সমাধান : $g : A \to B, g(x) = \frac{x-5}{3x+1}$, যেখানে

$B = R - \left\{\frac{1}{3}\right\}$

যেকোনো $x_1, x_2 \in A$-এর জন্য, $g(x_1) = g(x_2)$ হবে যদি ও কেবল যদি, $\frac{x_1 - 5}{3x_1 + 1} = \frac{x_2 - 5}{3x_2 + 1}$

$\Rightarrow 3x_1x_2 + x_1 - 15x_2 - 5 = 3x_1x_2 - 15x_1 + x_2 - 5$

$\Rightarrow 16x_1 = 16x_2 \Rightarrow x_1 = x_2$

অতএব , $g(x)$ একটি এক – এক ফাংশন ।

মনে করি , g -এর অধীন x এর ছবি y .

$\therefore y = g(x) = \frac{x-5}{3x+1} \Rightarrow 3xy + y = x - 5$

$\Rightarrow x(3y-1) = -y - 5 \Rightarrow x = \frac{y+5}{1-3y} \cdots (1)$

এখন , $x = \frac{y+5}{1-3y} \in \mathbb{R}$ হবে যদি ও কেবল যদি

$y \in \mathbb{R}$ এবং $1 - 3y \neq 0$ i.e., $y \neq \frac{1}{3}$ হয়।

$\therefore$ রেঞ্জ $g = \mathbb{R} - \{\frac{1}{3}\} = B \quad \therefore \quad g(A) = B$

অতএব , $g(x)$ একটি সার্বিক ফাংশন ।

$g(x)$ একটি এক – এক ও সার্বিক ফাংশন বলে $g^{-1}(x)$ বিদ্যমান।

এখন, (1) হতে পাই , $x = \frac{y+5}{1-3y}$

$\Rightarrow g^{-1}(y) = \frac{y+5}{1-3y}, [\because y = g(x) \text{ iff } x = g^{-1}(y)]$

y কে x দ্বারা প্রতিস্থাপন করে পাই,

$g^{-1}(x) = \frac{x+5}{1-3x}$

23. দৃশ্যকল্প-১: $g(x) = (x+5)^n$ এবং

$f(x) = x^2 - 6$ [সিলেট বোর্ড ২০১৭]

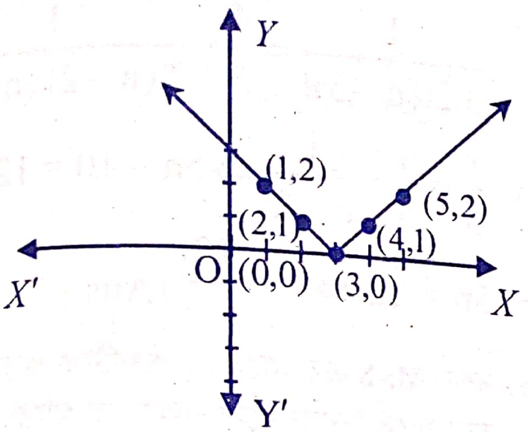
দৃশ্যকল্প-২: রহিম স্যার ছাত্র-ছাত্রীদেরকে "TESTICLE" শব্দটির নিয়ে আলোচনা করলেন।

(a) $y = |x-3|$ এর স্কেচ অংকন কর। ২

সমাধান :

x	1	2	3	4	5
y	2	1	0	1	2

উপর্যুক্ত বিন্দুগুলির সাহায্যে $y = |x-3|$ এর স্কেচ নিম্নে অংকন করা হলো।



(b) দৃশ্যকল্প-১ অনুসারে $n=\frac{1}{2}$ হলে gof এর ডোমেন নির্ণয় কর। 8

সমাধান : $n=\frac{1}{2}$ হলে $g(x)=(x+5)^{1/2}$ এবং

$f(x)=x^2-6$

$\therefore$ $gof(x)=g(f(x))=g(x^2-6)$

$=(x^2-6+5)^{1/2}=(x^2-1)^{1/2}\in\mathbb{R}$ হবে যদি ও কেবল যদি $x\in\mathbb{R}$ এবং

$x^2-1\geq 0 \Rightarrow (x-1)(x+1)\geq 0$

$\Rightarrow x\geq 1$ অথবা $x\leq -1$

$\therefore$ ডোমেন $gof=\{x\in\mathbb{R} : x\geq 1$ অথবা $\leq -1\}$

(c) দৃশ্যকল্প-২ এর বর্ণিত শব্দটিকে কত প্রকারে সাজানো যাবে যাতে প্রথমে ও শেষে E থাকবে না। 8

সমাধান : দৃশ্যকল্প-২ এর বর্ণিত শব্দ TESTICLE এ 2টি T ও 2টি E সহ মোট 8টি বর্ণ আছে।

$\therefore$ সবগুলি বর্ণ নিয়ে সাজানো সংখ্যা $=\frac{8!}{2!2!}=10080$

প্রথমে ও শেষে E রেখে অবশিষ্ট 6টি স্থান বাকী 6টি বর্ণ (যাদের 2টি T) সাজানো যায় $\frac{6!}{2!}=360$ উপায়ে।

$\therefore$ প্রথমে ও শেষে E না রেখে প্রদত্ত শব্দটি সাজানো যাবে $(10080-360)=9720$

24. $f(x)=x^2+3x, g(x)=2x-3$ এবং

$$A=\begin{bmatrix}3&1&-1\\2&3&4\\-4&5&6\end{bmatrix}$$ [রা.বো.'১৭]

(a) নির্ণায়কের সাহায্যে সমাধান কর:

$x+3y+2=0, 2x+y+3=0$.

সমাধান : $x+3y+2=0, 2x+y+3=0$

$\Rightarrow x+3y=-2, 2x+y=-3$

ক্রেমারের নিয়ম ব্যবহার করে পাই,

$$D=\begin{vmatrix}1&3\\2&1\end{vmatrix}=1-6=-5$$

$$D_x=\begin{vmatrix}-2&3\\-3&1\end{vmatrix}=-2+9=7$$

$$D_y=\begin{vmatrix}1&-2\\2&-3\end{vmatrix}=-3+4=1$$

$$\therefore\ x=\frac{D_x}{D}=\frac{7}{-5},\ y=\frac{D_y}{D}=\frac{1}{-5}$$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান, $(x, y)=(-\frac{7}{5},-\frac{1}{5})$

(b) $f(A)+I$ নির্ণয় কর। 8

সমাধান : $f(A)+I=A^2+3A+I$

$$=\begin{bmatrix}3&1&-1\\2&3&4\\-4&5&6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3&1&-1\\2&3&4\\-4&5&6\end{bmatrix}+$$

$$3\begin{bmatrix}3&1&-1\\2&3&4\\-4&5&6\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}9+2+4&3+3-5&-3+4-6\\6+6-16&2+9+20&-2+12+24\\-12+10-24&-4+15+30&4+20+36\end{bmatrix}$$

$$+\begin{bmatrix}9&3&-3\\6&9&12\\-12&15&18\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}15&1&-5\\-4&31&34\\-26&41&60\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}9&3&-3\\6&9&12\\-12&15&18\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}15+9+1&1+3+0&-5-3+0\\-4+6+0&31+9+1&34+12+0\\-26-12+0&41+15+0&60+18+1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}25&4&-8\\2&41&46\\-38&56&79\end{bmatrix}$$

(c) $gof(x)$ এর লেখচিত্র অঙ্কন কর।

সমাধান : $f(x)=x^2+3x, g(x)=2x-3$

$\therefore \quad gof(x) = g(f(x)) = g(x^2+3x)$

$= 2(x^2+3x)-3 = 2x^2+6x-3$

ধরি, $y = 2x^2+6x-3$

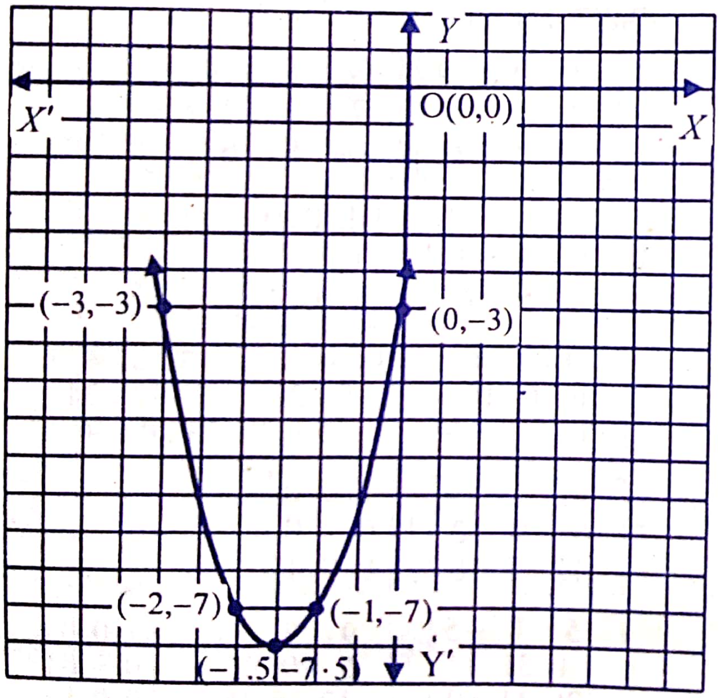
$\frac{dy}{dx} = 4x+6 = 0 \Rightarrow x = -3/2 = -1\cdot5$

$\therefore$ $x = -3/2$ বিন্দুতে ফাংশনটি বাঁক নেবে।

নিচের তালিকায় x এর ভিন্ন ভিন্ন মানের জন্য $y=2x^2+6x-3$ এর প্রতিরূপী মান নির্ণয় করি :

x	-3	-2	$-1\cdot5$	-1	0
y	-3	-7	$-7\cdot5$	-7	-3

x - অক্ষ ও y - অক্ষ বরাবর ক্ষুদ্রতম বর্গের 2 বাহু = 1 একক ধরে তালিকাভুক্ত বিন্দুগুলি ছক কাগজে স্থাপন করি এবং সরু পেন্সিল দিয়ে স্থাপিত বিন্দুগুলি মুক্ত হস্তে বক্রাকারে যোগ করে $y=2x^2+6x-3$ এর লেখ অঙ্কন করি ।



25. দৃশ্যকল্প ১: MUJIBNAGAR [ব.বো.'১৭]

দৃশ্যকল্প ২: $f(x) = \frac{2x+7}{3x-2}, x \in R - \left\{\frac{2}{3}\right\}$

(a) ${}^nC_3 = \frac{4}{5} \times {}^nC_2$ হলে n এর মান নির্ণয় কর।

সমাধান : $\frac{n!}{3!(n-3)!} = \frac{4}{5} \times \frac{n!}{2!(n-2)!}$

$\Rightarrow \frac{1}{3.2!(n-3)!} = \frac{4}{5} \times \frac{1}{2!(n-2).(n-3)!}$

$\Rightarrow \frac{1}{3} = \frac{4}{5} \times \frac{1}{n-2} \Rightarrow 5n-10 = 12$

$\Rightarrow 5n = 22 \Rightarrow n = \frac{22}{5}$ (Ans.)

(b) দৃশ্যকল্প:-১ এর আলোকে শব্দটিকে কতভাবে সাজানো যায় যাতে স্বরবর্ণগুলো একত্রে না থাকে।

সমাধান : MUJIBNAGAR শব্দটিতে 2টি A সহ মোট 10টি বর্ণ রয়েছে।

$\therefore$ সবগুলি বর্ণ ব্যবহার করে মোট সাজানো সংখ্যা

$= \frac{10!}{2!} = 1814400$, [$\frac{n!}{p!\times q!\times r!}$ সূত্রের সাহায্যে]

প্রদত্ত শব্দের 4টি স্বরবর্ণকে 1টি বর্ণ ধরে মোট বর্ণের সংখ্যা হবে (10–4 +1) অর্থাৎ, 7টি যাদের সবগুলি বর্ণ ভিন্ন ভিন্ন ।

এ 7টি বর্ণকে $7! = 5040$ প্রকারে এবং 4টি স্বরবর্ণকে নিজেদের মধ্যে $\frac{4!}{2!} = 12$ প্রকারে সাজানো যায়।

$\therefore$ স্বরবর্ণগুলি একত্রে রেখে মোট সাজানো সংখ্যা

$= 5040 \times 12 = 60480$

$\therefore$ স্বরবর্ণগুলি একত্রে না রেখে সাজানো সংখ্যা = সবগুলি বর্ণ ব্যবহার করে মোট সাজানো সংখ্যা – স্বরবর্ণগুলি একত্রে রেখে মোট সাজানো সংখ্যা

$= 1814400 - 60480 = 1753920$

(c) দৃশ্যকল্প:২ হতে দেখাও যে, $f^{-1}(x) = f(x)$

সমাধান : দেওয়া আছে, $f(x) = \frac{2x+7}{3x-2}$

$\therefore \quad f\left(f^{-1}(x)\right) = \frac{2f^{-1}(x)+7}{3f^{-1}(x)-2}$

$\Rightarrow x = \frac{2f^{-1}(x)+7}{3f^{-1}(x)-2}$

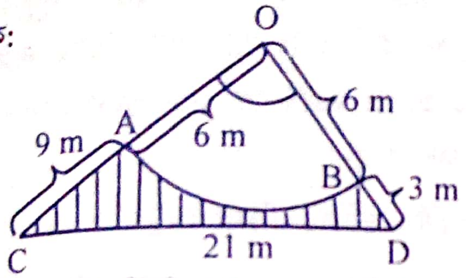
$\Rightarrow 3xf^{-1}(x) - 2x = 2f^{-1}(x)+7$

$\Rightarrow 3xf^{-1}(x) - 2f^{-1}(x) = 2x+7$

$\Rightarrow (3x-2)f^{-1}(x) = 2x+7$

$\therefore f^{-1}(x) = \dfrac{2x+7}{3x-2} = f(x)$ (Showed)

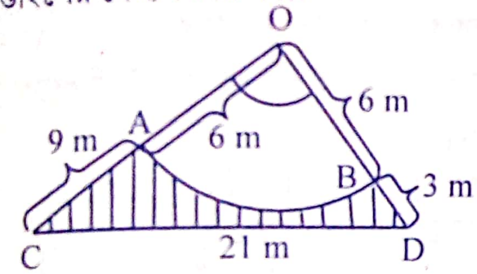
26. উদ্দীপক:



এবং $f(x) = \tan x$, $g(x) = \sin 2x$.

(a) AB বৃত্তাংশের দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

সমাধান:



চিত্রানুযায়ী, OCD ত্রিভুজের বাহুত্রয়ের দৈর্ঘ্য,

$CD = 21$ m, $OC = 6+9 = 15$ m,

$OD = 6+3 = 9$ m

$$\cos COD = \frac{OC^2 + OD^2 - CD^2}{2 \times OC \times OD}$$

$$= \frac{15^2 + 9^2 - 21^2}{2 \times 15 \times 9} = \frac{225 + 81 - 441}{270}$$

$$= \frac{-135}{270} = -\frac{1}{2} = \cos 120^0$$

$$\therefore \angle COD = 120^0 = \frac{120}{180}\pi = \frac{2\pi}{3} = \angle AOB$$

$\therefore$ AB বৃত্তাংশের দৈর্ঘ্য $= OA \times \angle AOB = 6 \times \dfrac{2\pi}{3}$

$= 12.57$ বর্গ একক (প্রায়)

(b) $f(\theta) = \dfrac{f(x)+f(y)}{1+f(x)f(y)}$ হলে দেখাও যে, $g(\theta) = \dfrac{g(x)+g(y)}{1+g(x)g(y)}$

প্রমাণ: $f(x) = \tan x$, $g(x) = \sin 2x$.

$$\therefore f(\theta) = \frac{f(x)+f(y)}{1+f(x)f(y)}$$

$$\Rightarrow \tan\theta = \frac{\tan x + \tan y}{1 + \tan x \tan y}$$

$$g(\theta) = \sin 2\theta$$

$$= \frac{2\tan\theta}{1+\tan^2\theta} = \frac{2\dfrac{\tan x + \tan y}{1+\tan x \tan y}}{1 + \dfrac{(\tan x + \tan y)^2}{(1+\tan x \tan y)^2}}$$

$$= \frac{\dfrac{2\tan x + 2\tan y}{1+\tan x \tan y}}{1 + \dfrac{\tan^2 x + \tan^2 y + 2\tan x \tan y}{1 + 2\tan x \tan y + \tan^2 x \tan^2 y}}$$

$$= \frac{(2\tan x + 2\tan y)(1+\tan x \tan y)}{1 + 2\tan x \tan y + \tan^2 x \tan^2 y + \tan^2 x + \tan^2 y + 2\tan x \tan y}$$

$$= \frac{2\tan x + 2\tan y + 2\tan^2 x \tan y + 2\tan x \tan^2 y}{1 + \tan^2 x \tan^2 y + \tan^2 x + \tan^2 y + 4\tan x \tan y}$$

আবার, $\dfrac{g(x)+g(y)}{1+g(x)g(y)} = \dfrac{\sin 2x + \sin 2y}{1 + \sin 2x \sin 2y}$

$$= \frac{\dfrac{2\tan x}{1+\tan^2 x} + \dfrac{2\tan y}{1+\tan^2 y}}{1 + \dfrac{2\tan x}{1+\tan^2 x} \cdot \dfrac{2\tan y}{1+\tan^2 y}}$$

$$= \frac{2\tan x + 2\tan x \tan^2 y + 2\tan y + 2\tan y \tan^2 x}{1 + \tan^2 x + \tan^2 y + \tan^2 x \tan^2 y + 4\tan x \tan y}$$

$$\therefore g(\theta) = \frac{g(x)+g(y)}{1+g(x)g(y)}$$

(c) রেখাংশ দ্বারা উদ্দীপকে চিহ্নিত সীমাবদ্ধ একলাকার ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

সমাধান: চিত্রানুযায়ী, OCD ত্রিভুজের বাহুত্রয়ের দৈর্ঘ্য,

$CD = 21$ m, $OC = 6+9 = 15$ m,

$OD = 6+3 = 9$ m এবং $\angle COD = \dfrac{2\pi}{3}$

$\therefore \Delta$ OCD এর ক্ষেত্রফল

$$= \frac{1}{2}(OC \times OD)\sin COD$$

$$= \frac{1}{2}(15 \times 9)\sin\frac{2\pi}{3} = \frac{1}{2}(15 \times 9)\sin\frac{2\pi}{3}$$

$= 58.46$ বর্গ একক

OAB বৃত্তকলার ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2}(OA^2 \times \angle AOB)$

$= \frac{1}{2}(6^2 \times \frac{2\pi}{3}) = 37.7$ বর্গ একক

$\therefore$ রেখাংশ দ্বারা উদ্দীপকে চিহ্নিত সীমাবদ্ধ একলাকার ক্ষেত্রফল $=$ Δ OCD এর ক্ষেত্রফল $-$ OAB বৃত্তকলার ক্ষেত্রফল

$= 58.46 - 37.7 = 20.76$ বর্গ একক

শ্রেণির কাজ

1. $y = -x^2$ ফাংশনের এবং রূপান্তরিত $y = -(x+3)^2$ ও $y = (x-3)^2$ ফাংশনের লেখচিত্র অঙ্কন কর।

পরীক্ষণের নাম : $y = -x^2$ ফাংশনের ও রূপান্তরিত $y = -(x+3)^2$ ও $y = (x-3)^2$ ফাংশনের লেখচিত্র অঙ্কন

মূলতত্ত্ব : $y = -x^2$ একটি পরাবৃত্তের সমীকরণ যার শীর্ষবিন্দু মূলবিন্দুতে এবং অক্ষ y-অক্ষ। $y = -x^2$ এর লেখ নিজের সমান্তরালে 3 একক বামে সরিয়ে দিয়ে

$y = -(x+3)^2$ পরাবৃত্তের লেখ পাওয়া যায় যার শীর্ষবিন্দু $(-3, 0)$ । আবার, x অক্ষের সাপেক্ষে $y = -x^2$ এর প্রতিচ্ছবি $y = x^2$ এর লেখকে 3 একক ডানে সরিয়ে দিয়ে $y = (x-3)^2$ পরাবৃত্তের লেখ পাওয়া যায় যার শীর্ষবিন্দু $(3, 0)$.

প্রয়োজনীয় উপকরণ : (i) পেন্সিল (ii) স্কেল (iii) গ্রাফ পেপার (iv) ইরেজার (v) শার্পনার (vi) পেন্সিল কম্পাস (vii) সায়েন্টিফিক ক্যালকুলেটর ইত্যাদি।

কার্যপদ্ধতি :

1. একটি ছক কাগজে স্থানাঙ্কের অক্ষ রেখা X'OX ও YOY' আঁকি ।

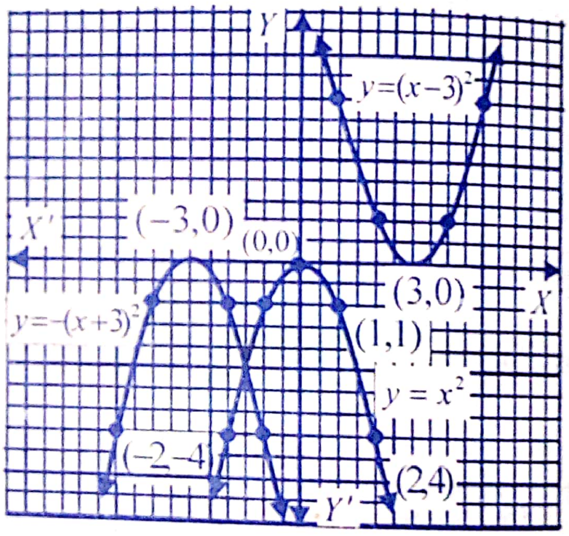
2. নিচের তালিকায় x এর ভিন্ন ভিন্ন মানের জন্য $y = -x^2$ এর প্রতিরূপী মান নির্ণয় করি :

x	-2	-1	0	1	2
$f(x)$	-4	-1	0	-1	-4

3. x-অক্ষ ও y-অক্ষ বরাবর ক্ষুদ্রতম বর্গের 2 বাহু $=$ 1 একক ধরে তালিকাভুক্ত বিন্দুগুলি ছক কাগজে স্থাপন করি এবং সরু পেন্সিল দিয়ে স্থাপিত বিন্দুগুলি মুক্ত হস্তে বক্রাকারে যোগ করে $y = -x^2$ এর লেখ অঙ্কন করি ।

4. লেখটির প্রতিটি বিন্দুকে 2×3 বা 6 বর্গের বাহুর সমান অর্থাৎ 3 একক বাম দিকে সরিয়ে $y = -(x+3)^2$ এর লেখ অঙ্কন করি ।

5. আবার, x অক্ষের সাপেক্ষে $y = -x^2$ এর প্রতিচ্ছবি $y = x^2$ এর লেখের প্রতিটি বিন্দুকে 2×3 বা 6 বর্গের



বাহুর সমান অর্থাৎ 3 একক ডানে সরিয়ে দিয়ে $y = (x-3)^2$ এর লেখ অঙ্কন করি ।

বৈশিষ্ট্য : (i) লেখচিত্র তিনটি পরাবৃত্ত। $y = -x^2$ এর শীর্ষবিন্দু $(0, 0)$, $y = -(x+3)^2$ এর শীর্ষবিন্দু $(-3,0)$ এবং $y = (x-3)^2$ এর শীর্ষবিন্দু $(3, 0)$ । (ii) $y = -x^2$ এর লেখ y অক্ষের সাপেক্ষে, $y = -(x+3)^2$ এর লেখ $x = -3$ রেখার সাপেক্ষে ও $y = (x-3)^2$ এর লেখ $x = 3$ রেখার সাপেক্ষে প্রতিসম।

2. $y = x^2$ ফাংশনের ও রূপান্তরিত $y = -2x^2 + 4x - 5$ ফাংশনের লেখচিত্র অঙ্কন কর।

পরীক্ষণের নাম : $y = x^2$ ফাংশনের ও রূপান্তরিত $y = -2x^2 + 4x - 5$ ফাংশনের লেখচিত্র অঙ্কন

মূলতত্ত্ব ঃ $y = x^2$ একটি পরাবৃত্তের সমীকরণ যার শীর্ষবিন্দু মূলবিন্দুতে এবং অক্ষ y -অক্ষ। $y = x^2$ এর লেখ থেকে $y = -2x^2 + 4x - 5 = -2(x^2 - 2x + 1) - 3 = -2(x-1)^2 - 3$ এর লেখ অঙ্কন করা যায়।

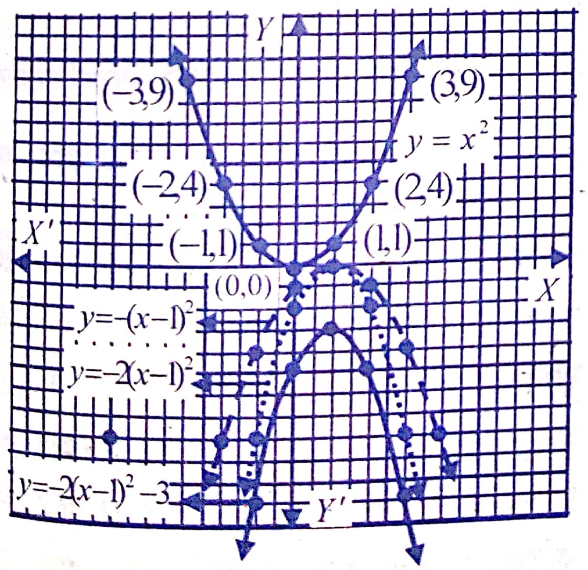
প্রয়োজনীয় উপকরণ ঃ (i) পেন্সিল (ii) স্কেল (iii) গ্রাফ পেপার (iv) ইরেজার (v) শার্পনার (vi) পেন্সিল কম্পাস (vii) সায়েন্টিফিক ক্যালকুলেটর ইত্যাদি।

কার্যপদ্ধতি ঃ

1. একটি ছক কাগজে স্থানাঙ্কের অক্ষ রেখা $X'OX$ ও YOY' আঁকি।
2. নিচের তালিকায় x এর ভিন্ন ভিন্ন মানের জন্য $y = x^2$ এর প্রতিরূপী মান নির্ণয় করি ঃ

x	0	± 1	± 2	± 3
$f(x)$	0	1	4	9

3. x - অক্ষ বরাবর ক্ষুদ্রতম বর্গের 2 বাহু = 1 একক ও y - অক্ষ বরাবর ক্ষুদ্রতম বর্গের 1 বাহু = 1 একক ধরে তালিকাভুক্ত বিন্দুগুলি ছক কাগজে স্থাপন করি এবং সরু পেন্সিল দিয়ে স্থাপিত বিন্দুগুলি মুক্ত হস্তে বক্রাকারে যোগ করে $y = x^2$ এর লেখ অঙ্কন করি।



4. x অক্ষের সাপেক্ষে $y = x^2$ এর প্রতিচ্ছবি $y = -x^2$ এর লেখের প্রতিটি বিন্দুকে 2×1 বা 2 বর্গের বাহুর সমান অর্থাৎ 1 একক ডানে সরিয়ে দিয়ে $y = -(x-1)^2$ এর লেখ অঙ্কন করি। এ লেখকে y অক্ষের দিকে 2 গুণ সংকুচিত করে $y = -2(x-1)^2$ এর লেখ অঙ্কন করি। সর্বশেষে এ লেখের প্রতিটি বিন্দুকে 3 একক নিচে স্থানান্তরিত করে $y = -2(x-1)^2 - 3$ এর লেখ অঙ্কন করা হলো।

বৈশিষ্ট্য ঃ (i) লেখচিত্র দুইটি পরাবৃত্ত। $y = x^2$ এর শীর্ষবিন্দু (0, 0), এবং $y = -2(x-1)^2 - 3$ এর শীর্ষবিন্দু (1, −3)।

(ii) $y = x^2$ এর লেখ y অক্ষের সাপেক্ষে, $y = y = -2(x-1)^2 - 3$ এর লেখ $x = 1$ রেখার সাপেক্ষে সাপেক্ষে প্রতিসম।

3. একই লেখচিত্রে $y = 2x + 5$ ফাংশনের ও তার বিপরীত ফাংশনের লেখচিত্র অঙ্কন কর।

পরীক্ষণের নাম ঃ একই লেখচিত্রে $f(x) = y = 2x + 5$ ফাংশনের ও তার বিপরীত ফাংশন $f^{-1}(x) = \dfrac{x-5}{2}$ এর লেখচিত্র অঙ্কন

মূলতত্ত্ব ঃ $f(x) = 2x + 5$ লেখের উপরস্থ বিন্দুগুলির ভুজ ও কোটির স্থান বিনিময় করে $f^{-1}(x) = \dfrac{x-5}{2}$ এর লেখচিত্র অঙ্কন করা যায় অথবা $y = x$ রেখার সাপেক্ষে $f(x) = 2x + 5$ এর প্রতিচ্ছবি অঙ্কন করে $f^{-1}(x) = \dfrac{x-5}{2}$ এর লেখ পাওয়া যায়।

প্রয়োজনীয় উপকরণ ঃ (i) পেন্সিল (ii) স্কেল (iii) গ্রাফ পেপার (iv) ইরেজার (v) শার্পনার (vi) পেন্সিল কম্পাস (vii) সায়েন্টিফিক ক্যালকুলেটর ইত্যাদি।

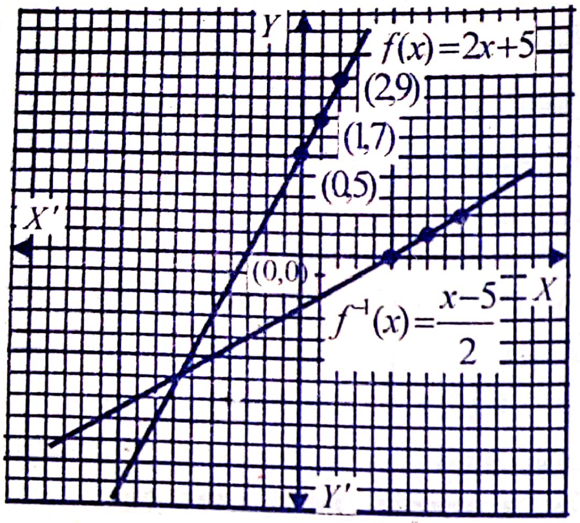
কার্যপদ্ধতি ঃ

1. একটি ছক কাগজে স্থানাঙ্কের অক্ষ রেখা $X'OX$ ও YOY' আঁকি।
2. নিচের তালিকায় x এর ভিন্ন ভিন্ন মানের জন্য $y = 2x + 5$ এর প্রতিরূপী মান নির্ণয় করি ঃ

x	0	1	2
y	5	7	9

3. x - অক্ষ ও y - অক্ষ বরাবর ক্ষুদ্রতম বর্গের 1 বাহু = 1 একক ধরে তালিকাভুক্ত বিন্দুগুলি ছক কাগজে

স্থাপন করি এবং সরূ পেন্সিল দিয়ে স্থাপিত বিন্দুগুলি মুক্ত হস্তে বক্রাকারে যোগ করে $y = 2x + 5$ এর লেখ অঙ্কন করি ।



4. একই স্কেলে (5, 0), (7, 1) , (9, 2) বিন্দুগুলি ছক কাগজে স্থাপন করি এবং সরূ পেন্সিল দিয়ে স্থাপিত বিন্দুগুলি মুক্ত হস্তে বক্রাকারে যোগ করে $f^{-1}(x) = \frac{x-5}{2}$ এর লেখ অঙ্কন করি ।

4. $y = 5^x$ সূচক ফাংশনটির লেখ অঙ্কন করে লেখের বৈশিষ্ট্য নির্ণয় কর।

পরীক্ষণের নাম ঃ $y = 5^x$ ফাংশনটির লেখ অঙ্কন করে লেখের বৈশিষ্ট নির্ণয় ।

মূলতত্ত্বঃ x এর যেকোন বাস্তব মানের জন্য $f(x) = 5^x$ ফাংশনটির লেখচিত্র অঙ্কন করতে হবে এবং লেখের বৈশিষ্ট নির্ণয় করতে হবে।

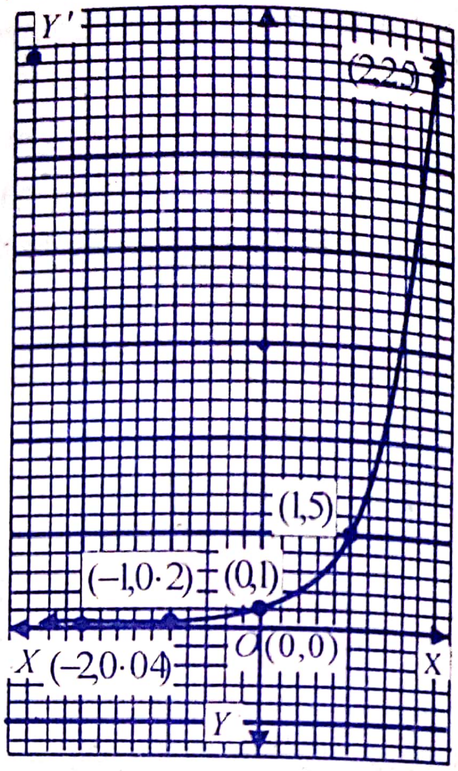
প্রয়োজনীয় উপকরণ ঃ (i) পেন্সিল (ii) স্কেল (iii) গ্রাফ পেপার (iv) ইরেজার (v) শার্পনার (vi) পেন্সিল কম্পাস (vii) সায়েন্টিফিক ক্যালকুলেটর ইত্যাদি।

কার্যপদ্ধতি ঃ

1. একটি ছক কাগজে স্থানাঙ্কের অক্ষ রেখা X'OX ও YOY' আঁকি ।
2. নিচের তালিকায় x এর ভিন্ন ভিন্ন মানের জন্য $y = 5^x$ এর প্রতিরূপী মান নির্ণয় করি ঃ

x	−2	−1	0	1	2
y	0·04	0·2	1	5	25

3. x - অক্ষ ও y - অক্ষ বরাবর ক্ষুদ্রতম বর্গের 1 বাহু = 1 একক ধরে তালিকাভুক্ত বিন্দুগুলি ছক কাগজে স্থাপন করি এবং সরূ পেন্সিল দিয়ে স্থাপিত বিন্দুগুলি মুক্ত হস্তে বক্রাকারে যোগ করে $f(x) = 5^x$ এর লেখ অঙ্কন করি।



বৈশিষ্ট্য ঃ (1) লেখচিত্রটি x অক্ষের নিচে আসবে না । (2) x অক্ষটি লেখটির একটি অসীমতট রেখা। (3) লেখচিত্রটি y অক্ষকে (0, 1) বিন্দুতে ছেদ করে। (4) x অক্ষ বা y অক্ষের সাপেক্ষে লেখচিত্রটি প্রতিসম নয়।

(v) লেখচিত্রটি x অক্ষের ধনাত্মক দিকে বিদ্যমান।

5. $y = \log_{10} x$ লগারিদমিক ফাংশনটির লেখ অঙ্কন করে লেখের বৈশিষ্ট্য নির্ণয় ।

পরীক্ষণের নাম ঃ $y = \log_{10} x$ লগারিদমিক ফাংশনটির লেখ অঙ্কন করে লেখের বৈশিষ্ট্য নির্ণয় ।

মূলতত্ত্ব ঃ $y = \log_{10} x$ সমীকরণটি $x \leq 0$ এর জন্য অসংজ্ঞায়িত হয় বিধায় $x>0$ এর যেকোন বাস্তব মানের জন্য $y = \log_{10} x$ এর লেখচিত্র অঙ্কন করতে হবে এবং লেখের বৈশিষ্ট নির্ণয় করতে হবে।

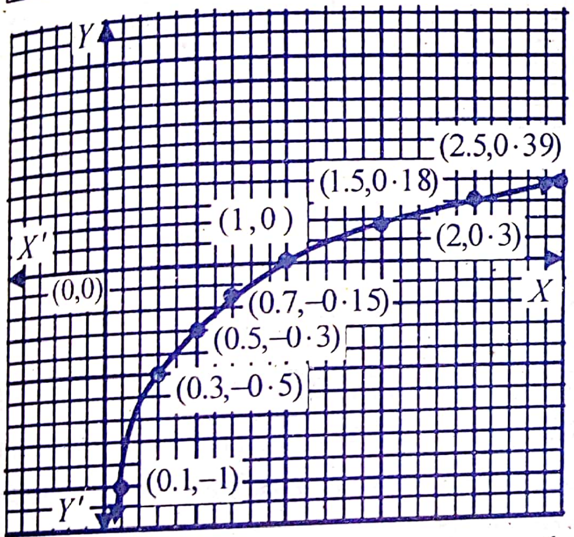
প্রয়োজনীয় উপকরণ ঃ (i) পেন্সিল (ii) স্কেল (iii) গ্রাফ পেপার (iv) ইরেজার (v) শার্পনার (vi) পেন্সিল কম্পাস (vii) সায়েন্টিফিক ক্যালকুলেটর ইত্যাদি।

কার্যপদ্ধতি ঃ

1. একটি ছক কাগজে স্থানাংকের অক্ষ রেখা X'OX ও YOY' আঁকি ।

2. নিচের তালিকায় x এর ভিন্ন ভিন্ন মানের জন্য $f(x)=\log_{10}x$ এর প্রতিরূপী মান নি॰॰য় করি ঃ

x	0.1	0.3	0.5	0·7
$\log_{10}x$	−1	−0·5	−0.3	−0.15
x	1	1·5	2	2.5
$\log_{10}x$	0	0·18	0·3	0·39



3. x - অক্ষ ও y - অক্ষ বরাবর ক্ষুদ্রতম বর্গের 10 বাহু = 1 একক ধরে তালিকাভুক্ত বিন্দুগুলি ছক কাগজে স্থাপন করি এবং সরু পেন্সিল দিয়ে স্থাপিত বিন্দুগুলি মুক্ত হস্তে বক্রাকারে যোগ করে $y=\log_{10}x$ এর লেখ অঙ্কন করি।

বৈশিষ্ট্য ঃ (i) লেখচিত্রটি x অক্ষ বা y অক্ষের সাপেক্ষে প্রতিসম নয়।

(ii) লেখচিত্রটি ১ম চতুর্ভাগ ও ৪র্থ চতুর্ভাগে অসীম পর্যন্ত বিস্তৃত।

(iii) লেখচিত্রটি x অক্ষকে (1,0) বিন্দুতে ছেদ করে।

(iv) y অক্ষ লেখটির একটি অসীমতট রেখা।

(v) লেখচিত্রটি y অক্ষের ধনাত্মক দিকে বিদ্যমান।

6. **$y=\cos^{-1}x$ ত্রিকোণমিতিক ফাংশনটির লেখ অঙ্কন করে লেখের বৈশিষ্ট্য নির্ণয় ।**

পরীক্ষণের নাম ঃ $y=\cos^{-1}x$ এর লেখচিত্র অঙ্কন করে লেখের বৈশিষ্ট্য নির্ণয়, যখন $-1\le x\le 1$.

মূলতত্ত্ব: $x\in[-1,1]$ এর বিভিন্ন বাসত্মব মানের জন্য $y=\cos^{-1}x$ এর লেখচিত্র অঙ্কন করতে হবে এবং লেখের বৈশিষ্ট্য নির্ণয় করতে হবে।

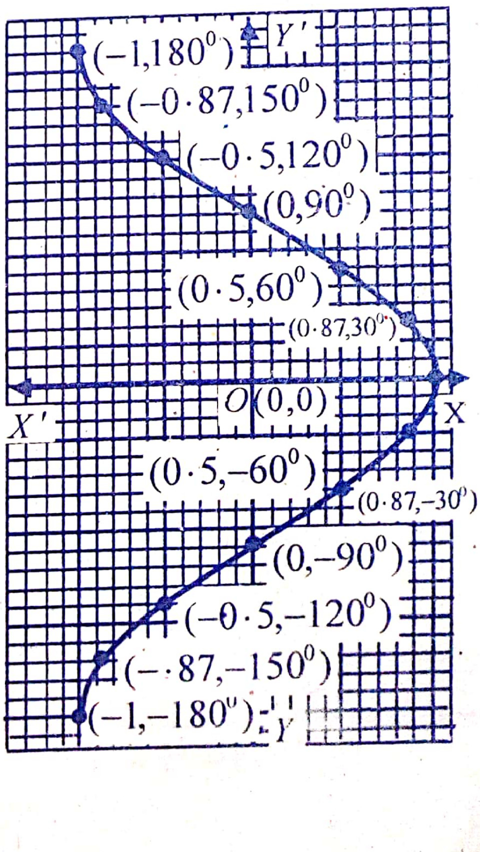
প্রয়োজনীয় উপকরণ ঃ (i) পেন্সিল (ii) স্কেল (iii) গ্রাফ পেপার (iv) ইরেজার (v) শার্পনার (vi) সায়েন্টিফিক ক্যালকুলেটর ইত্যাদি।

1. একটি ছক কাগজে স্থানাঙ্কের অক্ষ রেখা X'OX ও YOY' আঁকি ।

2. নিচের তালিকায় $x\in[-1,1]$ এর ভিন্ন ভিন্ন মানের জন্য $y=\cos^{-1}x$ এর প্রতিরূপী মান নির্ণয় করি ঃ

x	−1	−0·87	−0·5	0
y	± 180°	± 150°	± 120°	± 90°
x	0·5	0·87	1	
y	± 60°	± 30°	90°	

x - অক্ষ বরাবর ক্ষুদ্রতম বর্গের 10 বাহু = 1 একক ও y - অক্ষ বরাবর ক্ষুদ্রতম বর্গের 1 বাহু = 10° একক ধরে তালিকাভুক্ত বিন্দুগুলি ছক কাগজে স্থাপন করি এবং সরু পেন্সিল দিয়ে স্থাপিত বিন্দুগুলি মুক্ত হস্তে বক্রাকারে যোগ করে $y=\cos^{-1}x$ এর লেখ অঙ্কন করি।



বৈশিষ্ট্যঃ (i) লেখচিত্রটি অবিচ্ছিন্ন। (ii) লেখচিত্রটি ঢেউয়ের আকৃতি। (iii) লেখচিত্রটি মূলবিন্দুগামী নয়।

7. $y = |2x - 1|$ পরমমান ফাংশনটির লেখ অঙ্কন করে লেখের বৈশিষ্ট্য নির্ণয় ।

পরীক্ষণের নাম ঃ $y = |x|$ পরমমান ফাংশনটির লেখ অঙ্কন করে লেখের বৈশিস্ট নির্ণয় ।

মূলতত্ত্ব ঃ $y = |2x - 1|$ সমীকরণে x এর সকল বাস্তব মানের জন্য y এর মান অঋণাত্মক।

$$\therefore |2x-1| = \begin{cases} 2x-1, & \textbf{যখন } 2x-1 \geq 0 \\ -(2x-1)x, & \textbf{যখন } 2x-1 < 0 \end{cases}$$

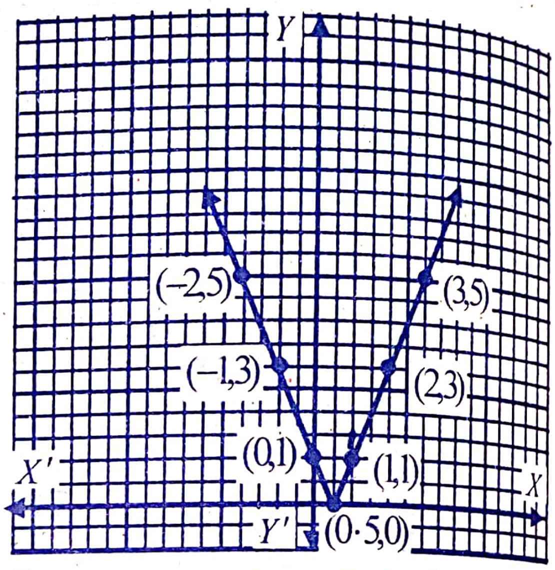
প্রয়োজনীয় উপকরণ ঃ (i) পেন্সিল (ii) স্কেল (iii) গ্রাফ পেপার (iv) ইরেজার (v) শার্পনার (vi) সায়েন্টিফিক ক্যালকুলেটর ইত্যাদি।

কার্যপদ্ধতি ঃ

1. একটি ছক কাগজে স্থানাঙ্কের অক্ষ রেখা $X'OX$ ও YOY' আঁকি ।
2. নিচের তালিকায় x এর ভিন্ন ভিন্ন মানের জন্য $y = |2x-1|$ এর প্রতিরূপী মান নির্ণয় করি ঃ

x	0	−2	−1	1	2	3	0·5
y	1	5	3	1	3	5	0

3. x - অক্ষ ও y - অক্ষ বরাবর ক্ষুদ্রতম বর্গের 2 বাহু = 1 একক ধরে তালিকাভুক্ত বিন্দুগুলি ছক কাগজে স্থাপন করি এবং সরু পেন্সিলের সাহায্যে স্থাপিত বিন্দুগুলি মুক্ত হস্তে বক্রাকারে যোগ করে $y = |x|$ এর লেখ অঙ্কন করি।



বৈশিষ্ট্য ঃ (i) লেখচিত্রটি $x = \frac{1}{2}$ রেখার সাপেক্ষে প্রতিসম । (ii) লেখচিত্রটি ১ম চতুর্ভাগ ও ২য় চতুর্ভাগে অসীম পর্যন্ত বিস্তৃত। (iii) লেখচিত্রটি মূলবিন্দুতে ছেদ করে না। (iv) লেখচিত্রটি y অক্ষের ধনাত্মক দিকে বিদ্যমান।