অন্তরীকরণ (প্রশ্নমালা IXB)

1. যদি $f(x) = \begin{cases} -x, & \text{যখন } x \le 0 \\ x, & \text{যখন } 0 < x < 1 \\ 1-x, & \text{যখন } x \ge 1 \end{cases}$ হয়, তবে দেখাও যে $x = 0$ বিন্দুতে $f(x)$ ফাংশন অবিচ্ছিন্ন এবং $x = 1$ বিন্দুতে বিচ্ছিন্ন।

সমাধানঃ $x = 0$ বিন্দুতে, $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} x = 0,$

$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} (-x) = 0$ এবং $f(0) = -0 = 0$

যেহেতু $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^-} f(x) = f(0)$, সুতরাং $x = 0$ বিন্দুতে $f(x)$ অবিচ্ছিন্ন।

$x = 1$ বিন্দুতে, $\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} (1-x) = 1-1 = 0$

$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} x = 1$

যেহেতু $\lim_{x\to 1^+} f(x) \ne \lim_{x\to 1^-} f(x)$, সুতরাং $x = 1$ বিন্দুতে $f(x)$ বিচ্ছিন্ন।

2. যদি $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin^2 ax}{x^2}, & \text{যখন } x \ne 0 \\ 1, & \text{যখন } x = 0 \end{cases}$ হয়, তবে প্রমাণ কর যে $a = \pm 1$ না হলে $x = 0$ বিন্দুতে $f(x)$ ফাংশন বিচ্ছিন্ন হবে।

প্রমাণঃ $x = 0$ বিন্দুতে,

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{\sin^2 ax}{x^2} = \lim_{x\to 0^+} \left(\frac{\sin ax}{ax}\right)^2 . a^2$$

$$= 1 \times a^2 = a^2$$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{\sin^2 ax}{x^2} = \lim_{x\to 0^-} \left(\frac{\sin ax}{ax}\right)^2 . a^2$$

$= 1 \times a^2 = a^2$ এবং $f(0) = 1$

$\therefore$ $a \ne \pm 1$ হলে, $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^-} f(x) \ne f(0)$

এবং $a = \pm 1$ হলে, $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^-} f(x) = f(0)$

কাজেই, $a = \pm 1$ না হলে $x = 0$ বিন্দুতে $f(x)$ ফাংশন বিচ্ছিন্ন হবে।

3. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 4}{x - 2}, & \text{যখন } x \ne 2 \\ 3, & \text{যখন } x = 2 \end{cases}$ দ্বারা প্রদত্ত একটি বাস্তব ফাংশন। দেখাও যে, f ফাংশনটি $x = 2$ বিন্দুতে বিচ্ছিন্ন। f ফাংশনটিকে এরূপে সংজ্ঞায়িত কর যেন তা $x = 2$ বিন্দুতে অবিচ্ছিন্ন হয়।

প্রমাণঃ $x = 2$ বিন্দুতে, $f(2) = 3,$

$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+} \frac{x^2-4}{x-2}$$

$$= \lim_{x\to 2^+} \frac{(x-2)(x+2)}{x-2} = \lim_{x\to 2^+} (x+2)$$

$$= 2 + 2 = 4$$

এবং $\lim_{x\to 2-} f(x) = \lim_{x\to 2^-} \dfrac{x^2-4}{x-2}$

$$= \lim_{x\to 2^-} \frac{(x-2)(x+2)}{x-2} = \lim_{x\to 2-} (x+2)$$

$$= 2 + 2 = 4$$

যেহেতু $\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 1^-} f(x) \ne f(2)$, সুতরাং $x = 1$ বিন্দুতে $f(x)$ বিচ্ছিন্ন।

(দ্বিতীয় অংশ): $x = 2$ বিন্দুতে $f(x)$ ফাংশনের অবিচ্ছিন্নতার জন্য নিম্নরূপে সংজ্ঞায়িত করা হলো-

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-4}{x-2}, & \text{যখন } x \ne 2 \\ 4, & \text{যখন } x = 2 \end{cases}$$

প্রশ্নমালা IX C

1. x এর সাপেক্ষে নিম্নের ফাংশনগুলির অন্তরক সহগ নির্ণয় কর ঃ

1(a) $(2x)^n - b^n$ **[চ.'০২]**

ধরি, $y = (2x)^n - b^n = 2^n x^n - b^n$