অন্তরীকরণ (প্রশ্নমালা IXB)

1. যদি $\mathbf{f(x)} = \begin{cases} -x, & \text{যখন } x \le 0 \\ x, & \text{যখন } 0 < x < 1 \\ 1-x, & \text{যখন } x \ge 1 \end{cases}$ **হয়, তবে দেখাও যে x = 0 বিন্দুতে f(x) ফাংশন অবিচ্ছিন্ন এবং x = 1 বিন্দুতে বিচ্ছিন্ন ।**

সমাধানঃ x = 0 বিন্দুতে, $\lim\limits_{x\to0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to0^+} x = 0,$

$\lim\limits_{x\to0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to0^-} (-x) = 0$ এবং $f(0) = -0 = 0$

যেহেতু $\lim\limits_{x\to0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to0^-} f(x) = f(0)$, সুতরাং x = 0 বিন্দুতে f(x) অবিচ্ছিন্ন।

x = 1 বিন্দুতে, $\lim\limits_{x\to1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to1^+} (1-x) = 1-1 = 0$

$\lim\limits_{x\to1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to1^-} x = 1$

যেহেতু $\lim\limits_{x\to1^+} f(x) \ne \lim\limits_{x\to1^-} f(x)$, সুতরাং x = 1 বিন্দুতে f(x) বিচ্ছিন্ন।

2. যদি $\mathbf{f(x)} = \begin{cases} \dfrac{\sin^2 ax}{x^2}, & \text{যখন } x \ne 0 \\ 1, & \text{যখন } x = 0 \end{cases}$ **হয়, তবে প্রমাণ কর যে a = ± 1 না হলে x = 0 বিন্দুতে f(x) ফাংশন বিচ্ছিন্ন হবে।**

প্রমাণঃ x = 0 বিন্দুতে,

$$\lim\limits_{x\to0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to0^+} \frac{\sin^2 ax}{x^2} = \lim\limits_{x\to0^+} \left(\frac{\sin ax}{ax}\right)^2 .a^2$$

$$= 1 \times a^2 = a^2$$

$$\lim\limits_{x\to0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to0^-} \frac{\sin^2 ax}{x^2} = \lim\limits_{x\to0^-} \left(\frac{\sin ax}{ax}\right)^2 .a^2$$

$= 1 \times a^2 = a^2$ এবং $f(0) = 1$

$\therefore$ $a \ne \pm1$ হলে, $\lim\limits_{x\to0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to0^-} f(x) \ne f(0)$

এবং $a = \pm1$ হলে, $\lim\limits_{x\to0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to0^-} f(x) = f(0)$

কাজেই, a = ± 1 না হলে x = 0 বিন্দুতে f(x) ফাংশন বিচ্ছিন্ন হবে।

3. $\mathbf{f(x)} = \begin{cases} \dfrac{x^2-4}{x-2}, & \text{যখন } x \ne 2 \\ 3, & \text{যখন } x = 2 \end{cases}$ **দ্বারা প্রদত্ত একটি বাস্তব ফাংশন । দেখাও যে, f ফাংশনটি x = 2 বিন্দুতে বিচ্ছিন্ন। f ফাংশনটিকে এরূপে সংজ্ঞায়িত কর যেন তা x = 2 বিন্দুতে অবিচ্ছিন্ন হয়।**

প্রমাণঃ x = 2 বিন্দুতে, f(2) = 3,

$$\lim\limits_{x\to2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to2^+} \frac{x^2-4}{x-2}$$

$$= \lim\limits_{x\to2^+} \frac{(x-2)(x+2)}{x-2} = \lim\limits_{x\to2^+} (x+2)$$

$$= 2 + 2 = 4$$

এবং $\lim\limits_{x\to2-} f(x) = \lim\limits_{x\to2^-} \dfrac{x^2-4}{x-2}$

$$= \lim\limits_{x\to2^-} \frac{(x-2)(x+2)}{x-2} = \lim\limits_{x\to2-} (x+2)$$

$$= 2 + 2 = 4$$

যেহেতু $\lim\limits_{x\to2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to1^-} f(x) \ne f(2)$, সুতরাং x = 1 বিন্দুতে f(x) বিচ্ছিন্ন।

(দ্বিতীয় অংশ): x = 2 বিন্দুতে f(x) ফাংশনের অবিচ্ছিন্নতার জন্য নিম্নরূপে সংজ্ঞায়িত করা হলো-

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-4}{x-2}, & \text{যখন } x \ne 2 \\ 4, & \text{যখন } x = 2 \end{cases}$$

প্রশ্নমালা IX C

1. x এর সাপেক্ষে নিম্নের ফাংশনগুলির অন্তরক সহগ নির্ণয় কর ঃ

1(a) $(2x)^n - b^n$ **[চ.'০২]**

ধরি, $y = (2x)^n - b^n = 2^n x^n - b^n$

$\therefore \frac{dy}{dx} = 2^n \frac{d}{dx}(x^n) - \frac{d}{dx}(b^n)$

$= 2^n (nx^{n-1}) - 0$

$\therefore \frac{d}{dx}\{(2x)^n - b^n\} = 2^n nx^{n-1}$ (Ans.)

1(b) $\frac{d}{dx}(x\sqrt{x} + x^2\sqrt{x} + \frac{x^2}{\sqrt{x}} - \sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}})$

$= \frac{d}{dx}(x^{1+\frac{1}{2}} + x^{2+\frac{1}{2}} + x^{2-\frac{1}{2}} - x^{\frac{1}{2}} + x^{-\frac{1}{2}})$

$= \frac{d}{dx}(x^{\frac{3}{2}} + x^{\frac{5}{2}} + x^{\frac{3}{2}} - x^{\frac{1}{2}} + x^{-\frac{1}{2}})$

$= \frac{d}{dx}(2x^{\frac{3}{2}} + x^{\frac{5}{2}} - x^{\frac{1}{2}} + x^{-\frac{1}{2}})$

$= 2.\frac{3}{2}x^{\frac{3}{2}-1} + \frac{5}{2}x^{\frac{5}{2}-1} - \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1} - \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}-1}$

$= 3x^{\frac{1}{2}} + \frac{5}{2}x^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{2x\sqrt{x}}$ (Ans.)

1(c) $\frac{d}{dx}(a^x + x^a - e^x)$

$= \frac{d}{dx}(a^x) + \frac{d}{dx}(x^a) - \frac{d}{dx}(e^x)$

$= a^x \ln a + a x^{a-1} - e^x$ (Ans.)

1(d) $\frac{d}{dx}(\log_a x + \log_{10} x^a + e^{\ln x} + \ln x + e^x)$

$= \frac{d}{dx}(\log_a x + a\log_{10} x + x + \ln x + e^x)$

$= \frac{1}{x\ln a} + a\frac{1}{x\ln 10} + 1 + \frac{1}{x} + e^x$

(e) $\frac{d}{dx}(3\sin x + 4\ln x - 2a^x + \ln x^a)$

$= \frac{d}{dx}(3\sin x + 4\ln x - 2a^x + a\ln x)$

$= 3\cos x + 4.\frac{1}{x} - 2a^x \ln x + a\frac{1}{x}$

2. মূল নিয়মে x এর সাপেক্ষে নিম্নের ফাংশনগুলির অন্তরক সহগ নির্ণয় কর ঃ

(a) sin2x [ঢা.'০৫; ব.'১৩]

মনে করি, $f(x) = \sin 2x$

$\therefore f(x+h) = \sin 2(x+h) = \sin(2x+2h)$

অন্তরক সহগের সংজ্ঞা হতে পাই,

$\frac{d}{dx}\{f(x)\} = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$

$\therefore \frac{d}{dx}(\sin 2x) = \lim_{h\to 0}\frac{\sin(2x+2h)-\sin 2x}{h}$

$= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}[2\cos\frac{2x+2h+2x}{2}\sin\frac{2x+2h-2x}{2}]$

$= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\cdot 2\cos(2x+h)\sin h$

$= 2\lim_{h\to 0}\frac{\sin h}{h}\cdot\lim_{h\to 0}\cos(2x+h)$

$= 2.1.\cos(2x+0) = 2\cos 2x$

2.(b) cos 3x [ঢা.'০২; রা.'১১]

মনে করি, $f(x) = \cos 3x$.

$\therefore f(x+h) = \cos 3(x+h) = \cos(3x+3h)$

অন্তরক সহগের সংজ্ঞা হতে পাই,

$\frac{d}{dx}\{f(x)\} = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$

$\therefore \frac{d}{dx}(\cos 3x) = \lim_{h\to 0}\frac{\cos(3x+3h)-\cos 3x}{h}$

$= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}[2\sin\frac{3x+3h+3x}{2}\sin\frac{3x-3h-3x}{2}]$

$= 2\lim_{h\to 0}\sin(3x+\frac{3h}{2}) \times -\lim_{\frac{3h}{2}\to 0}\frac{\sin(3h/2)}{3h/2}\times\frac{3}{2}$

$[\because h\to 0 \therefore \frac{3h}{2}\to 0]$

$= 2\sin(3x+0).(-1.\frac{3}{2}) = -3\sin 3x$

2(c) cos ax [রা.'০১]

মনে করি, $f(x) = \cos ax$.

$\therefore f(x+h) = \cos a(x+h) = \cos(ax+ah)$

অন্তরক সহগের সংজ্ঞা হতে পাই,

$\frac{d}{dx}\{f(x)\} = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$

$\therefore \frac{d}{dx}(\cos ax) = \lim_{h\to 0}\frac{\cos(ax+ah)-\cos ax}{h}$

$= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}[2\sin\frac{ax+ah+ax}{2}\sin\frac{ax-ah-ax}{2}]$

$= 2\lim_{h\to 0}\sin(ax+\frac{ah}{2})\times -\lim_{h\to 0}\frac{\sin(ah/2)}{ah/2}\times\frac{a}{2}$

$= 2\sin(ax+0).(-1.\frac{a}{2}) = -a\sin ax$

2(d) tan 2x [চ.'০১]

মনে করি, $f(x) = \tan 2x$.

$\therefore f(x+h) = \tan 2(x+h) = \tan(2x+2h)$

অন্তরক সহগের সংজ্ঞা হতে পাই,

$\frac{d}{dx}\{f(x)\} = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$

$\therefore \frac{d}{dx}(\tan 2x) = \lim_{h\to 0}\frac{\tan(2x+2h)-\tan 2x}{h}$

$= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}[\frac{\sin(2x+2h)}{\cos(2x+2h)} - \frac{\sin 2x}{\cos 2x}]$

$= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}[\frac{\sin(2x+2h)\cos 2x - \sin 2x\cos(2x+2h)}{\cos(2x+2h)\cos 2x}]$

$= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\frac{\sin(2x+2h-2x)}{\cos(2x+2h)\cos 2x}$

$= \lim_{h\to 0}\frac{\sin 2h}{2h}\times 2\times\lim_{h\to 0}\frac{1}{\cos(2x+2h)\cos 2x}$

$= 1\times 2\times\frac{1}{\cos(2x+0)\cos 2x} = \frac{2}{\cos^2 2x}$

$= 2\sec^2 2x$

2(e) sec 2x [য. '০২,'০৭; চ.'০৭,'১০]

মনে করি, $f(x) = \sec 2x$.

$\therefore f(x+h) = \sec 2(x+h) = \sec(2x+2h)$

অন্তরক সহগের সংজ্ঞা হতে পাই,

$\frac{d}{dx}\{f(x)\} = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$

$\therefore \frac{d}{dx}(\sec 2x) = \lim_{h\to 0}\frac{\sec(2x+2h)-\sec 2x}{h}$

$= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}[\frac{1}{\cos(2x+2h)} - \frac{1}{\cos 2x}]$

$= \lim_{h\to 0}\frac{\cos 2x - \cos(2x+2h)}{h\cos(2x+2h)\cos 2x}$

$= \lim_{h\to 0}\frac{2\sin\frac{2x+2x+2h}{2}\sin\frac{2x+2h-2x}{2}}{h\cos(2x+2h)\cos 2x}$

$= 2\lim_{h\to 0}\frac{\sin(2x+h)}{\cos(2x+2h)\cos 2x}\times\lim_{h\to 0}\frac{\sin h}{h}$

$= 2\frac{\sin(2x+0)}{\cos(2x+0)\cos 2x}\times 1$

$= \frac{2\sin 2x}{\cos 2x\cos 2x} = 2\tan 2x\ \sec 2x$

2(f) e^{2x} [রা.'০৩]

মনে করি, $f(x) = e^{2x}$.

$\therefore f(x+h) = e^{2(x+h)} = e^{2x+2h}$

অন্তরক সহগের সংজ্ঞা হতে পাই,

$\frac{d}{dx}\{f(x)\} = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$

$\therefore \frac{d}{dx}(e^{2x}) = \lim_{h\to 0}\frac{e^{2x+2h}-e^{2x}}{h}$

$= \lim_{h\to 0}\frac{e^{2x}.e^{2h}-e^{2x}}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{e^{2x}}{h}(e^{2h}-1)$

$= e^{2x}\lim_{h\to 0}\frac{e^{2h}-1}{2h}\times 2$

$= e^{2x}\times 1\times 2 = 2e^{2x}$, $[\because \lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x} = 1]$

2. (g) cosec ax

মনে করি, $f(x) = \text{cosec } ax$.

$\therefore f(x+h) = \text{cosec}(ax+ah)$

অন্তরক সহগের সংজ্ঞা হতে পাই,

$\frac{d}{dx}\{f(x)\} = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$

$\therefore \frac{d}{dx}(\text{cosec } ax) =$

$= \lim_{h\to 0}\frac{\text{cosec}(ax+ah)-\text{cosec}\,ax}{h}$

$= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}[\frac{1}{\sin(ax+ah)} - \frac{1}{\sin ax}]$

$= \lim_{h\to 0}\frac{\sin ax - \sin(ax+ah)}{h\sin(ax+ah)\sin ax}$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{2\sin\frac{ax-ax-ah}{2}\cos\frac{ax+ax+ah}{2}}{h\sin(ax+ah)\sin ax}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{2\sin(-\frac{ah}{2})\cos(ax+\frac{h}{2})}{h\sin(ax+ah)\sin ax}$$

$$= -2\lim_{h\to 0}\frac{\sin ah/2}{ah/2}\times\frac{a}{2}\times\lim_{h\to 0}\frac{\cos(ax+h/2)}{\sin(ax+ah)\sin ax}$$

$$= -2\times 1\times\frac{\cos(ax+0)}{\sin(ax+0)\sin ax}$$

$$= -a\times\frac{\cos ax}{\sin ax\sin ax}$$

$$= -a\cot ax\ \operatorname{cosec} ax$$

2(h) cos 2x [মা.বো.'০৪; ব.'১১]

মনে করি, $f(x) = \cos 2x$.

$\therefore\ f(x+h) = \cos 2(x+h) = \cos(2x+2h)$

অন্তরক সহগের সংজ্ঞা হতে পাই,

$$\frac{d}{dx}\{f(x)\} = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$$\therefore\ \frac{d}{dx}(\cos 2x) = \lim_{h\to 0}\frac{\cos(2x+2h)-\cos 2x}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}[2\sin\frac{2x+2h+2x}{2}\sin\frac{2x-2h-2x}{2}]$$

$$= 2\lim_{h\to 0}\sin(2x+h)\times -\lim_{h\to 0}\frac{\sin h}{h}$$

$$= 2\sin(2x+0).(-1) = -2\sin 2x$$

2(i) e^{ax} [ব'০৫,'০৯; ঢা.'০৬; য., দি.'১১; কু.'১৩]

মনে করি, $f(x) = e^{ax}$.

$\therefore\ f(x+h) = e^{a(x+h)} = e^{ax+ah}$

অন্তরক সহগের সংজ্ঞা হতে পাই,

$$\frac{d}{dx}\{f(x)\} = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$$\therefore\ \frac{d}{dx}(e^{ax}) = \lim_{h\to 0}\frac{e^{ax+ah}-e^{ax}}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{e^{ax}.e^{ah}-e^{ax}}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{e^{ax}}{h}(e^{ah}-1)$$

$$= e^{ax}\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}[\{1+ah+\frac{(ah)^2}{2!}+\frac{(ah)^3}{3!}+\cdots\}-1]$$

$$= e^{ax}\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}(ah+\frac{a^2h^2}{2!}+\frac{a^3h^3}{3!}+\cdots\cdots)$$

$= e^{ax}\lim_{h\to 0}(a+\frac{a^2h}{2!}+\frac{a^3h^2}{3!}+$ h- এর উচ্চঘাত সম্বলিত পদসমূহ)

$$= e^{ax}(a+0+0+\cdots\cdots) = ae^{ax}$$

2(j) $\log_a x$ [চ.'০৮; ঢা.'১১; য.'১২,'১৪; দি.'১৪]

ধরি, $f(x) = \log_a x = \log_a e\times\log_e x$

$$= \frac{\ln x}{\log_e a} = \frac{\ln x}{\ln a}$$

$$\therefore\ f(x+h) = \frac{\ln(x+h)}{\ln a}$$

অন্তরক সহগের সংজ্ঞা হতে পাই,

$$\frac{d}{dx}\{f(x)\} = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$$\therefore\ \frac{d}{dx}(\log_a x) = \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}[\frac{\ln(x+h)}{\ln a}-\frac{\ln x}{\ln a}]$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h\ln a}ln\frac{x+h}{x} = \lim_{h\to 0}\frac{1}{h\ln a}ln(1+\frac{h}{x})$$

$$= \frac{1}{\ln a}\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}[\frac{h}{x}-\frac{1}{2}\frac{h^2}{x^2}+\frac{1}{3}\frac{h^3}{x^3}-\cdots\cdots]$$

$= \frac{1}{\ln a}\lim_{h\to 0}[\frac{1}{x}-\frac{1}{2}\frac{h}{x^2}+$ h-এর উচ্চঘাত সম্বলিত পদসমূহ]

$$= \frac{1}{\ln a}\frac{1}{x}-0 = \frac{1}{x\ln a}$$

(k) $e^{\sqrt{x}}$

মনে করি, $f(x) = e^{\sqrt{x}}$

$\therefore\ f(x+h) = e^{\sqrt{x+h}}$

অন্তরক সহগের সংজ্ঞা হতে পাই,

$$\frac{d}{dx}\{f(x)\} = \lim_{h\to 0}\frac{f(y+h)-f(y)}{h}$$

$$\therefore\ \frac{d}{dx}(e^{\sqrt{x}}) = \lim_{h\to 0}\frac{e^{\sqrt{x+h}}-e^{\sqrt{x}}}{h}\ \ldots\ \ldots\ (i)$$

ধরি, $\sqrt{x} = z\ \ldots\ \ldots$ (ii) এবং

$\sqrt{x+h} = z + k \cdots \cdots$ (iii)

(iii) – (ii) $\Rightarrow \sqrt{x+h} - \sqrt{x} = k$

$h \to 0$ হলে $k \to 0$

$\therefore \frac{d}{dx}(e^{\sqrt{x}}) = \lim_{h\to 0} \frac{e^{z+k} - e^{z}}{k} \cdot \frac{k}{h}$

$= \lim_{k\to 0} \frac{e^{z+k} - e^{z}}{k} \cdot \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h}$

$= \lim_{k\to 0} \frac{e^{z}.e^{k} - e^{z}}{k} \cdot \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{x}\sqrt{1+\frac{h}{x}} - \sqrt{x}}{h}$

$= \lim_{k\to 0} \frac{e^{z}(e^{k} - 1)}{k} \cdot \sqrt{x} \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{1+\frac{h}{x}} - 1}{h}$

$= e^{z} \lim_{k\to 0} \frac{(e^{k} - 1)}{k} \cdot \sqrt{x} \lim_{h\to 0} \frac{(1+\frac{h}{x})^{1/2} - 1}{h}$

$= e^{\sqrt{x}}.1.\sqrt{x} \lim_{h\to 0} \frac{\{1 + \frac{1}{2}.\frac{h}{x} + \frac{1}{2}(\frac{1}{2} - 1)\frac{h^2}{x^2} + \cdots\} - 1}{h}$

$= e^{\sqrt{x}}.\sqrt{x} \lim_{h\to 0} \{\frac{1}{2}.\frac{1}{x} + \frac{1}{2}(\frac{1}{2} - 1)\frac{h}{x^2} + \cdots\}$

$= e^{\sqrt{x}}.\sqrt{x}.\frac{1}{2}.\frac{1}{x} = \frac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}$

3. (a) মূল নিয়মে $x = 2$ -তে x^5 এর অন্তরক সহগ নির্ণয়।

মনে করি, $f(x) = x^5$. $\therefore f(2) = 2^5$

$\therefore f'(2) = \lim_{x\to 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x\to 2} \frac{x^5 - 2^5}{x - 2}$

$= 5 \times (2)^4 \quad [\because \lim_{x\to a} \frac{x^n - a^n}{x - a} = na^{n-1}]$

$= 5 \times 16 = 80$

3 (b) মূল নিয়মে $x = a$ -তে e^{mx} এর অন্তরক সহগ নির্ণয়।

মনে করি, $f(x) = e^{mx}$ $\therefore f(a) = e^{ma}$

$\therefore f'(a) = \lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$

$= \lim_{x\to a} \frac{e^{mx} - e^{ma}}{x - a} = \lim_{x\to a} \frac{e^{ma}(e^{mx-ma} - 1)}{x - a}$

$= e^{ma} \lim_{x-a\to 0} \frac{e^{m(x-a)} - 1}{m(x-a)} \times m$

$= me^{ma}.1 \quad [\because \lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1]$

$= me^{ma}$

3(c) মূল নিয়মে $x = \frac{\pi}{4}$ -তে $\tan x$ এর অন্তরক সহগ নির্ণয়।

মনে করি, $f(x) = \tan x$. $\therefore f(\frac{\pi}{4}) = \tan\frac{\pi}{4}$

$\therefore f'(\frac{\pi}{4}) = \lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{f(x) - f(\frac{\pi}{4})}{x - \frac{\pi}{4}}$

$= \lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{\tan x - \tan\frac{\pi}{4}}{x - \frac{\pi}{4}}$

$= \lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x\cos\frac{\pi}{4} - \cos x\sin\frac{\pi}{4}}{(x - \frac{\pi}{4})\cos x\cos\frac{\pi}{4}}$

$= \lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{\sin(x - \frac{\pi}{4})}{(x - \frac{\pi}{4})\cos x\cos\frac{\pi}{4}}$

$= \lim_{x-\frac{\pi}{4}\to 0} \frac{\sin(x - \frac{\pi}{4})}{x - \frac{\pi}{4}} \times \lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos x\cos\frac{\pi}{4}}$

$= 1.\frac{1}{\cos\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{(1/\sqrt{2})^2} = 2$

প্রশ্নমালা IX D

x এর সাপেক্ষে অন্তরক সহগ নির্ণয় কর ঃ

1(a) $\frac{d}{dx}\{x^2\ln(x)\}$