প্রশ্নমালা IX I

এক নজরে প্রয়োজনীয় সূত্রাবলী :

1. $D^n(x^n) = n!$ 2. $D^n(e^{ax}) = a^n e^{ax}$

3. $D^n\left(\frac{1}{ax+b}\right) = \frac{(-1)^n n!\, a^n}{(ax+b)^{n+1}}$

4. $D^n\{\ln(ax+b)\} = \frac{(-1)^{n-1}.(n-1)!.a^n}{(ax+b)^n}$

5. $D^n\{\sin(ax+b)\} = a^n \sin\left(\frac{n\pi}{2} + ax + b\right)$

6. $D^n(\cos ax) = a^n \cos\left(\frac{n\pi}{2} + ax\right)$

7. $D^n[e^{ax}\cos(bx+c)] = (a^2+b^2)^{n/2}$
$e^{ax}\cos(bx + c + n\tan^{-1}\frac{b}{a})$

1 $y = 4x^{\frac{3}{2}} - 3 + 2x^{\frac{1}{2}}$ হলে, y_2 নির্ণয় কর এবং $x = 4$ হলে, y_2 এর মান নির্ণয় কর।

সমাধান: এখানে, $y = 4x^{\frac{3}{2}} - 3 + 2x^{\frac{1}{2}}$

x-এর সাপেক্ষে পর্যায়ক্রমে অন্তরীকরণ করে পাই,

$$y_1 = 4\times\frac{3}{2}x^{\frac{3}{2}-1} - 0 + 2\times\frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1} = 6x^{\frac{1}{2}} + x^{-\frac{1}{2}}$$

$$y_2 = 6\times\frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1} + \left(-\frac{1}{2}\right)x^{-\frac{1}{2}-1} = 3x^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}$$

$x = 4$ হলে, $y_2 = 3.4^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}.4^{-\frac{3}{2}}$

$$= \frac{3}{2} - \frac{1}{2}.\frac{1}{8} = \frac{24-1}{16} = \frac{23}{16}$$

2. $y = \sin x$ হলে, দেখাও যে, $y_4 - y = 0$ [রা.'০৪; ব.'০৪]

প্রমাণ : এখানে, $y = \sin x$

x-এর সাপেক্ষে পর্যায়ক্রমে অন্তরীকরণ করে পাই,

$y_1 = \cos x$, $y_2 = -\sin x$, $y_3 = -\cos x$,

$y_4 = \sin x = y$

$\therefore\ y_4 - y = 0$ (Showed)

3.(a) $y = \sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}$ হলে, দেখাও যে, $2x\frac{dy}{dx} + y = 2\sqrt{x}$ [ঢা.'০৭; য.'০৭; কু.'০৮; প্র.ভ.প.'০৪]

প্রমাণঃ এখানে, $y = \sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} \Rightarrow \sqrt{x}y = x + 1$

উভয় পক্ষকে x-এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই,

$$\sqrt{x}\frac{dy}{dx} + y\frac{d}{dx}(\sqrt{x}) = \frac{d}{dx}(x+1)$$

$$\Rightarrow \sqrt{x}\frac{dy}{dx} + y.\frac{1}{2\sqrt{x}} = 1$$

উভয় পক্ষকে $2\sqrt{x}$ দ্বারা গুণ করে পাই,

$$2x\frac{dy}{dx} + y = 2\sqrt{x} \quad \text{(Showed)}$$

3(b) $y = \sqrt{(1-x)(1+x)}$ হলে, দেখাও যে, $(1-x^2)\frac{dy}{dx} + xy = 0$ [য.'০৪]

প্রমাণ : এখানে, $y = \sqrt{(1-x)(1+x)} = \sqrt{1-x^2}$

উভয় পক্ষকে x-এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{1-x^2}}(-2x) = \frac{-x\sqrt{1-x^2}}{1-x^2}$$

$$\Rightarrow (1-x^2)\frac{dy}{dx} = -x\sqrt{1-x^2} = -xy$$

$$\therefore\ (1-x^2)\frac{dy}{dx} + xy = 0 \quad \text{(Showed)}$$

3(c) $y = px + \frac{q}{x}$ হলে, দেখাও যে, $x\frac{d^2y}{dx^2} + 2\frac{dy}{dx} = 2p$ [কু. '০২; চ. '০৫; য.,ঢা.'০৯]

প্রমাণ : এখানে, $y = px + \frac{q}{x} \Rightarrow xy = px^2 + q$

উভয় পক্ষকে x-এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই,

$$x\frac{dy}{dx} + y.1 = p(2x) + 0 \Rightarrow x\frac{dy}{dx} + y = 2px$$

পুনরায় x-এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই,

$$x\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{dy}{dx}.1+\frac{dy}{dx}=2p$$

$$\therefore\ x\frac{d^2y}{dx^2}+2\frac{dy}{dx}=2p \text{ (Showed)}$$

4.(a) $y=ax^2+\frac{b}{\sqrt{x}}$ **হলে, দেখাও যে,** $2x^2y_2-xy_1-2y=0$

[ব. '০২; ঢা. '০৬; কু. '০৯; সি.'১৩; য.,দি.'১৪]

প্রমাণ ঃ এখানে, $y=ax^2+\frac{b}{\sqrt{x}}=ax^2+bx^{-\frac{1}{2}}$

x-এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই,

$$y_1=2ax-\frac{1}{2}bx^{-\frac{1}{2}-1}=2ax-\frac{1}{2}bx^{-\frac{3}{2}}$$

$$y_2=2a+\frac{3}{4}bx^{-\frac{3}{2}-1}=2a+\frac{3}{4}bx^{-\frac{5}{2}}$$

এখন, $2x^2y_2-xy_1-2y=4ax^2+\frac{3}{2}bx^{-\frac{1}{2}}$

$$-(2ax^2-\frac{1}{2}bx^{-\frac{1}{2}})-(2ax^2+2bx^{-\frac{1}{2}})$$

$$=4ax^2+\frac{3}{2}bx^{-\frac{1}{2}}-2ax^2+\frac{1}{2}bx^{-\frac{1}{2}}$$

$$-2ax^2-2bx^{-\frac{1}{2}}$$

$$=4ax^2-4ax^2+2bx^{-\frac{1}{2}}-2bx^{-\frac{1}{2}}=0$$

$$\therefore\ 2x^2y_2-xy_1-2y=0 \text{ (Showed)}$$

4(b) $y=px^2+qx^{-\frac{1}{2}}$ **হলে, দেখাও যে,** $2x^2\frac{d^2y}{dx^2}-x\frac{dy}{dx}=2y$ **[রা.'০৬; য.'১২; কু. '০৬; সি. '০৮, '১০; মা.'০৯; চ.'১১,'১৩; দি.'১১; ঢা.'১৩]**

প্রমাণ ঃ এখানে, $y=px^2+qx^{-\frac{1}{2}}$

$$\therefore\ \frac{dy}{dx}=2px-\frac{1}{2}qx^{-\frac{3}{2}},\ \frac{d^2y}{dx^2}=2p+\frac{3}{4}qx^{-\frac{5}{2}}$$

এখন, $2x^2\frac{d^2y}{dx^2}-x\frac{dy}{dx}=4px^2+\frac{3}{2}qx^{-\frac{1}{2}}$

$$-(2px^2-\frac{1}{2}qx^{-\frac{1}{2}})$$

$$=4px^2+\frac{3}{2}qx^{-\frac{1}{2}}-2px^2+\frac{1}{2}qx^{-\frac{1}{2}}$$

$$=2px^2+2qx^{-\frac{1}{2}}=2(px^2+qx^{-\frac{1}{2}})=2y$$

$$\therefore\ 2x^2\frac{d^2y}{dx^2}-x\frac{dy}{dx}=2y \text{ (Showed)}$$

5.(a) $y=\frac{1}{2}(e^x+e^{-x})$ **হলে, দেখাও যে,** $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+1=y^2$ **[চ.'০৩]**

প্রমাণঃ $y=\frac{1}{2}(e^x+e^{-x})\Rightarrow 2y=e^x+e^{-x}\ \cdots(1)$

$$\therefore\ 2\frac{dy}{dx}=e^x-e^{-x}$$

$$\Rightarrow 4\left(\frac{dy}{dx}\right)^2=(e^x-e^{-x})^2 \quad \text{[বর্গ করে।]}$$

$$=(e^x+e^{-x})^2-4e^xe^{-x}$$

$$=(2y)^2-4 \quad [\because e^x+e^{-x}=2y]$$

$$\therefore\ \left(\frac{dy}{dx}\right)^2+1=y^2 \text{ (Showed)}$$

5(b) $y=Ae^{mx}+Be^{-mx}$ **হলে, দেখাও যে,** $y_2-m^2y=0$ **[য.'০৭; ব.'০৮,'১৩; দি.'১০; সি.'১১]**

প্রমাণ ঃ এখানে, $y=Ae^{mx}+Be^{-mx}$

$$\therefore\ y_1=\frac{d}{dx}(Ae^{mx}+Be^{-mx})=Ame^{mx}-Bme^{-mx}$$

$$y_2=Am^2e^{mx}+Bm^2e^{-mx}$$

$$=m^2(Ae^{mx}+Be^{-mx})$$

$$=m^2y \quad [\because y=Ae^{mx}+Be^{-mx}]$$

$$\therefore\ y_2-m^2y=0 \text{ (Showed)}$$

6(a) $y=\sec x$ **হলে, দেখাও যে,** $y_2=y(2y^2-1)$ **[রা. '০৭; চ. '০৬, ০৮,'১৪; সি. '০৭; ব. '০৬; য. '০৮, '১১; কু.'১০; মা.'১২,'১৪]**

প্রমাণ ঃ এখানে, $y=\sec x$

$\therefore\ y_1 = \frac{d}{dx}(\sec x) = \sec x \tan x$

$y_2 = \sec x.\sec^2 x + \tan x.\sec x \tan x$

$= \sec x(\sec^2 x + \tan^2 x)$

$= \sec x(\sec^2 x + \sec^2 x - 1)$

$\therefore\ y_2 = y(2y^2 - 1)$ $[\because y = \sec x]$

6(b) $y = \tan x + \sec x$ **হলে, প্রমাণ কর যে,** $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\cos x}{(1-\sin x)^2}$

[রা. '১০,'১৪; কু. '০৩; সি.'১৩; ব.,ঢা.'১৪]

প্রমাণ ঃ এখানে, $y = \tan x + \sec x \cdots (1)$

(1) -এর উভয় পক্ষকে x-এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই, $\frac{dy}{dx} = \sec^2 x + \sec x \tan x$

$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\cos^2 x} + \frac{\sin x}{\cos^2 x} = \frac{1+\sin x}{\cos^2 x}$

$= \frac{1+\sin x}{(1+\sin x)(1-\sin x)} = \frac{1}{1-\sin x} \cdots (2)$

(2) -এর উভয় পক্ষকে x-এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই, $\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{1}{(1-\sin x)^2}\frac{d}{dx}(1-\sin x)$

$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\cos x(\cos^2 x + 2\sin x + 2\sin^2 x)}{\cos^4 x}$

$\therefore\ \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\cos x}{(1-\sin x)^2}$ (Showed)

6(c) $y = \sin(\sin x)$ **হলে, প্রমাণ কর যে,** $y_2 + y_1 \tan x + y\cos^2 x = 0$

[য.'০৫; সি.'০৬,'১১; কু.'০৭; ব.'০৯]

প্রমাণ ঃ এখানে, $y = \sin(\sin x) \cdots \cdots (1)$

ইহাকে x-এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই,

$y_1 = \cos(\sin x).\cos x \cdots (2)$

ইহাকে x-এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই,

$y_2 = \cos(\sin x).(-\sin x) + \cos x.\{-\sin(\sin x)\}.\cos x$

$= -\sin x\cos(\sin x) - \cos^2 x.\sin(\sin x)$

$= -\sin x.\frac{y_1}{\cos x} - \cos^2 x.y$ [(1) ও (2) হতে।]

$= -y_1\tan x - y\cos^2 x$

$\therefore\ y_2 + y_1\tan x + y\cos^2 x = 0$ (Showed)

7. (a) $y = (p+qx)e^{-2x}$ **হলে, প্রমাণ কর যে,** $\frac{d^2y}{dx^2} + 4\frac{dy}{dx} + 4y = 0$ **[য. '০২; ব'০৯; দি.'১৩]**

প্রমাণ ঃ এখানে, $y = (p+qx)e^{-2x} \ldots (1)$

ইহাকে x-এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই,

$\frac{dy}{dx} = (p+qx).e^{-2x}(-2) + e^{-2x}(0+q)$

$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = -2y + qe^{-2x}$ [(1) দ্বারা।]

$\Rightarrow \frac{dy}{dx} + 2y = qe^{-2x} \ldots \ldots (2)$

ইহাকে x-এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই,

$\frac{d^2y}{dx^2} + 2\frac{dy}{dx} = -2qe^{-2x}$

$= -2(\frac{dy}{dx} + 2y)$ [(2) দ্বারা।]

$\therefore\ \frac{d^2y}{dx^2} + 4\frac{dy}{dx} + 4y = 0$ (Showed)

7(b) $y = (e^x + e^{-x})\sin x$ **হলে, প্রমাণ কর যে,** $y_4 + 4y = 0$ **[ঢা.'০৪; রা.'০৬; দি.'১২]**

প্রমাণ ঃ এখানে, $y = (e^x + e^{-x})\sin x \cdots (1)$

$\therefore\ y_1 = (e^x + e^{-x})\cos x + (e^x - e^{-x})\sin x$

$y_2 = (e^x + e^{-x})(-\sin x) + (e^x - e^{-x})\cos x + (e^x - e^{-x})\cos x + (e^x + e^{-x})\sin x$

$= 2(e^x - e^{-x})\cos x$

$y_3 = 2\{(e^x + e^{-x})\cos x - (e^x - e^{-x})\sin x\}$

$y_4 = 2[\{(e^x - e^{-x})\cos x - (e^x + e^{-x})\sin x\} - \{(e^x + e^{-x})\sin x + (e^x - e^{-x})\cos x\}]$

$= 2\{(e^x - e^{-x})\cos x - (e^x + e^{-x})\sin x - (e^x + e^{-x})\sin x - (e^x - e^{-x})\cos x\}$

$= 2\{-2(e^x + e^{-x})\sin x\}$

$= -4y$ [(1) দ্বারা।]

$\therefore\ y_4 + 4y = 0$ (Showed)

7(c) $y = e^x \cos x$ **হলে, দেখাও যে, $y_2 - 2y_1 + 2y = 0$ [দি.'১০;চ.'১২;ব.'১৩; মা.'১৪]**

প্রমাণ : এখানে, $y = e^x \cos x \cdots\cdots(1)$

ইহাকে x-এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই,

$y_1 = e^x \cos x + e^x(-\sin x)$

$\Rightarrow y_1 = y - e^x \sin x$ [(1) দ্বারা।]

$\Rightarrow y_1 - y = -e^x \sin x \cdots(2)$

ইহাকে x-এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই,

$y_2 - y_1 = -e^x \sin x - e^x \cos x$

$= y_1 - y - y$ [(1) ও (2) দ্বারা।]

$\therefore\ y_2 - 2y_1 + 2y = 0$ (Showed)

7(d) $y = e^{ax} \sin bx$ **হলে, দেখাও যে,**

$y_2 - 2ay_1 + (a^2 + b^2)y = 0$ **[সি.'০২]**

প্রমাণ : এখানে, $y = e^{ax} \sin bx \cdots\cdots(1)$

ইহাকে x-এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই,

$y_1 = e^{ax}.\cos bx.b + \sin bx.e^{ax}.a$

$= b\, e^{ax} \cos bx + ay$ [(1) দ্বারা।]

$\Rightarrow y_1 - ay = b\, e^{ax} \cos bx \cdots\cdots(2)$

ইহাকে x-এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই,

$y_2 - a\,y_1 = b\{ae^{ax} \cos bx - be^{ax} \sin bx\}$

$\Rightarrow y_2 - a\,y_1 = a(be^{ax} \cos bx) - b^2 e^{ax} \sin bx$

$= a(y_1 - ay) - b^2 y$ [(1) ও (2) দ্বারা।]

$\therefore\ y_2 - 2ay_1 + (a^2 + b^2)y = 0$

8.(a) $y = a\cos(\ln x) + b\sin(\ln x)$ **হলে, দেখাও যে, $x^2 y_2 + xy_1 + y = 0$ [চ.'০৭'; ঢা.'০৯; রা.'১৩;সি.'১৪]**

প্রমাণ : $y = a\cos(\ln x) + b\sin(\ln x) \cdots(1)$

ইহাকে x-এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই,

$y_1 = a\{-\sin(\ln x).\frac{1}{x}\} + b\cos(\ln x).\frac{1}{x}$

$\Rightarrow xy_1 = -a\sin(\ln x) + b\cos(\ln x)$

ইহাকে x-এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই,

$xy_2 + y_1.1 = -a\cos(\ln x).\frac{1}{x} - b\sin(\ln x).\frac{1}{x}$

$\Rightarrow x^2 y_2 + xy_1 = -\{a\cos(\ln x) + b\sin(\ln x)\}$

$\Rightarrow x^2 y_2 + xy_1 = -y$ [(1) দ্বারা।]

$\therefore\ x^2 y_2 + xy_1 + y = 0$ (Showed)

8(b) $y = x^2 \ln(x)$ **হলে দেখাও যে, $y_3 x = 2$**

[প্র.ভ.প.'০৬]

প্রমাণ : এখানে, $y = x^2 \ln(x)$

$\therefore\ y_1 = x^2 \frac{1}{x} + \ln(x).2x = x + 2x\ln(x)$

$y_2 = 1 + 2\{x\frac{1}{x} + \ln(x).1\} = 1 + 2 + 2\ln(x)$

$y_3 = 0 + 2.\frac{1}{x}\ \therefore\ y_3 x = 2$ (Showed)

8(c) $y = \ln(\sin x)$ **হলে, দেখাও যে,** $\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{2\cos x}{\sin^3 x}$

[চ.'০৯]

প্রমাণ : এখানে, $y = \ln(\sin x)$

$\therefore\ \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\{\ln(\sin x)\} = \frac{1}{\sin x}(\cos x)$

$= \frac{\cos x}{\sin x} = \cot x$

$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}(\cot x) = -\operatorname{cosec}^2 x$

$\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{d}{dx}(-\operatorname{cosec}^2 x)$

$= -2\operatorname{cosec} x(-\operatorname{cosec} x \cot x)$

$= 2\operatorname{cosec}^2 x \cot x = 2\frac{1}{\sin^2 x}.\frac{\cos x}{\sin x}$

$\therefore\ \frac{d^3y}{dx^3} = \frac{2\cos x}{\sin^3 x}$ (Showed)

9.(a) $y = (x + \sqrt{1 + x^2})^m$ **হলে, প্রমাণ কর যে, $(1 + x^2)y_2 + xy_1 - m^2 y = 0$**

[য.'১০;ব.'১০,'১৪;সি.'১২]

প্রমাণ : এখানে, $y = (x + \sqrt{1 + x^2})^m \cdots(1)$

ইহাকে x-এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই,

$$y_1 = m(x+\sqrt{1+x^2})^{m-1}(1+\frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}})$$

$$= m(x+\sqrt{1+x^2})^{m-1}(\frac{\sqrt{1+x^2}+x}{\sqrt{1+x^2}})$$

$$= \frac{m(x+\sqrt{1+x^2})^m}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{my}{\sqrt{1+x^2}}$$

$\Rightarrow \sqrt{1+x^2}\ y_1 = my$

$\Rightarrow (1+x^2)y_1^2 = m^2y^2$ [উভয় পক্ষকে বর্গ করে]

ইহাকে x-এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই,

$(1+x^2).2y_1y_2 + y_1^2(0+2x) = m^2 2yy_1$

উভয় পক্ষকে $2y_1$ দ্বারা ভাগ করে পাই,

$(1+x^2)y_2 + y_1x = m^2y$

$\therefore (1+x^2)y_2 + xy_1 - m^2y = 0$ (Showed)

9(b) $y = \sqrt{(4+3\sin x)}$ **হলে, দেখাও যে,** $2y\frac{d^2y}{dx^2} + 2\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + y^2 = 4$ **[য.'১৩;কু.'১১,'১৪; চ.'১০; ঢা. '০৮; রা.'১২; সি.'১২;দি.'১১]**

প্রমাণ ঃ $y = \sqrt{(4+3\sin x)} \Rightarrow y^2 = 4+3\sin x$

$\Rightarrow y^2 - 4 = 3\sin x \cdots (1)$

ইহাকে x-এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই,

$$2y\frac{dy}{dx} = 3\cos x$$

ইহাকে x-এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই,

$$2y\frac{d^2y}{dx^2} + 2\frac{dy}{dx}.\frac{dy}{dx} = 3(-\sin x)$$

$\Rightarrow 2y\frac{d^2y}{dx^2} + 2(\frac{dy}{dx})^2 = -(y^2-4)$ [(1) দ্বারা।]

$\therefore 2y\frac{d^2y}{dx^2} + 2(\frac{dy}{dx})^2 + y^2 = 4$

9(c) $y = \ln[x+\sqrt{a^2+x^2}]$ **হলে, দেখাও যে,** $(a^2+x^2)y_2 + xy_1 = 0$ **[চ.'১০,'১৪; য.'১৪]**

প্রমাণ ঃ এখানে, $y = \ln[x+\sqrt{a^2+x^2}] \cdots (1)$

ইহাকে x-এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই,

$$y_1 = \frac{1}{x+\sqrt{a^2+x^2}}(1+\frac{2x}{2\sqrt{a^2+x^2}})$$

$$= \frac{1}{x+\sqrt{a^2+x^2}}\frac{\sqrt{a^2+x^2}+x}{\sqrt{a^2+x^2}}$$

$\Rightarrow y_1\sqrt{a^2+x^2} = 1 \Rightarrow y_1^2(a^2+x^2) = 1$

ইহাকে x-এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই,

$y_1^2(0+2x) + (a^2+x^2)\ 2y_1y_2 = 0$

উভয় পক্ষকে $2y_1$ দ্বারা ভাগ করে পাই,

$(a^2+x^2)y_2 + xy_1 = 0$ (Showed)

10.(a) $y = e^{a\sin^{-1}x}$ **হলে, দেখাও যে,** $(1-x^2)y_2 - xy_1 = a^2y$

[য.'০৯; ঢা.'১১,'১৪; সি.'০৯; ব.'১১; কু'১২; রা.'১৪]

প্রমাণ ঃ এখানে, $y = e^{a\sin^{-1}x} \cdots\cdots(1)$

ইহাকে x-এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই,

$$y_1 = e^{a\sin^{-1}x}.\frac{a}{\sqrt{1-x^2}}$$

$\Rightarrow \sqrt{1-x^2}\ y_1 = ay$ [(1) দ্বারা।]

$\Rightarrow (1-x^2)\ y_1^2 = a^2y^2$

ইহাকে x-এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই,

$(1-x^2)\ 2y_1y_2 + y_1^2(0-2x) = a^2(2yy_1)$

উভয় পক্ষকে $2y_1$ দ্বারা ভাগ করে পাই,

$(1-x^2)\ y_2 - xy_1 = a^2y$ (Showed)

10(b) $y = e^{4\sin^{-1}x}$ **হলে, দেখাও যে,** $(1-x^2)y_2 - xy_1 = 16y$ **[চ.'০২]**

প্রমাণ ঃ এখানে, $y = e^{4\sin^{-1}x} \cdots\cdots(1)$

ইহাকে x-এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই,

$$y_1 = e^{4\sin^{-1}x}.\frac{4}{\sqrt{1-x^2}}$$

$\Rightarrow \sqrt{1-x^2}\ y_1 = 4y$ [(1) দ্বারা।]

$\Rightarrow (1-x^2)\ y_1^2 = 16y^2$

ইহাকে x-এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই,

$(1-x^2)\ 2y_1y_2 + y_1^2(0-2x) = 16(2yy_1)$

উভয় পক্ষকে $2y_1$ দ্বারা ভাগ করে পাই,

$(1-x^2)y_2 - xy_1 = 16y$ (Showed)

10(c) $y = e^{\tan^{-1}x}$ হলে, প্রমাণ কর যে, $(1+x^2)y_2 + (2x-1)y_1 = 0$ [য.'০৪;কু.'০৬;ব.'০৭; দি.'০৯]

প্রমাণ ঃ এখানে, $y = e^{\tan^{-1}x}$ ......(1)

ইহাকে x-এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই,

$y_1 = e^{\tan^{-1}x}.\frac{1}{1+x^2} = y.\frac{1}{1+x^2}$ [(1) দ্বারা।]

$\Rightarrow (1+x^2)y_1 = y$

ইহাকে x-এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই,

$(1+x^2)y_2 + y_1(0+2x) = y_1$

$\therefore (1+x^2)y_2 + (2x-1)y_1 = 0$ (Showed)

10.(d) $y = \tan^{-1}x$ হলে, প্রমাণ কর যে, $(1+x_2)y_2 + 2xy_1 = 0$ [রা.'০২;ঢা.'০৫; কু.'০৫]

প্রমাণ ঃ এখানে, $y = \tan^{-1}x$ ......(1)

ইহাকে x-এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই,

$y_1 = \frac{1}{1+x^2} \Rightarrow (1+x^2)y_1 = 1$

ইহাকে x-এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই,

$(1+x^2)y_2 + y_1(0+2x) = 0$

$\therefore (1+x_2)y_2 + 2xy_1 = 0$ (Showed)

10(e) $\ln y = a\sin^{-1}x$ হলে, দেখাও যে, $(1-x^2)y_2 - x\,y_1 - a^2y = 0$ [ঢা.'০৭]

প্রমাণ ঃ এখানে, $\ln y = a\sin^{-1}x$

ইহাকে x-এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই,

$\frac{1}{y}y_1 = a\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \Rightarrow \sqrt{1-x^2}\;y_1 = ax$

$\Rightarrow (1-x^2)y_1^2 = a^2y^2$ [উভয় পক্ষকে বর্গ করে।]

ইহাকে x-এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই,

$(1-x^2)2y_1y_2 + y_1^2(-2x) = a^2.2yy_1$

উভয় পক্ষকে $2y_1$ দ্বারা ভাগ করে পাই,

$(1-x^2)y_2 - xy_1 = a^2y$

$\therefore (1-x^2)y_2 - x\,y_1 - a^2y = 0$

10(f) $\ln(y) = \tan^{-1}x$ হলে, দেখাও যে, $(1+x^2)y_2 + (2x-1)y_1 = 0$

[রা.'০৫,'০৮,'১০;য.'১০;কু.'১১; ঢা.,ব.'১২]

প্রমাণ ঃ এখানে, $\ln(y) = \tan^{-1}x$

ইহাকে x-এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই,

$\frac{1}{y}y_1 = \frac{1}{1+x^2} \Rightarrow (1+x^2)y_1 = y$

ইহাকে x-এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই,

$(1+x^2)y_2 + y_1(0+2x) = y_1$

$\therefore (1+x^2)y_2 + (2x-1)y_1 = 0$

10(g) $y = \sin^{-1}x$ হলে, প্রমাণ কর যে, $(1-x^2)y_2 - xy_1 = 0$ [সি.'০১,'০৫]

প্রমাণ ঃ এখানে, $y = \sin^{-1}x$

ইহাকে x-এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই,

$y_1 = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \Rightarrow y_1\sqrt{1-x^2} = 1$

$\Rightarrow (1-x^2)y_1^2 = 1$ [উভয় পক্ষকে বর্গ করে।]

ইহাকে x-এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই,

$(1-x^2)2y_1y_2 + y_1(-2x) = 0$

উভয় পক্ষকে $2y_1$ দ্বারা ভাগ করে পাই,

$(1-x^2)y_2 - xy_1 = 0$ (Showed)

11.(a) $y = \tan(m\tan^{-1}x)$ হলে, দেখাও যে, $(1+x^2)y_1 = m(1+y^2)$

[কু.'১২; য.'১১; চ.'১২; ঢা.'১৩]

প্রমাণ ঃ এখানে, $y = \tan(m\tan^{-1}x) \cdots (1)$

ইহাকে x-এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই,

$y_1 = \sec^2(m\tan^{-1}x).\frac{m}{1+x^2}$

$\Rightarrow (1+x^2)y_1 = m\{1+\tan^2(m\tan^{-1}x)\}$

$\Rightarrow (1+x^2)y_1 = m(1+y^2)$ [(1) দ্বারা।]

11(b) $y = \tan(m\tan^{-1}x)$ হলে, দেখাও যে, $(1+x^2)y_2 - 2(my-x)y_1 = 0$ [সি.'০৬]

প্রমাণ ঃ এখানে, $y = \tan(m\tan^{-1}x) \cdots (1)$

ইহাকে x-এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই,

$y_1 = \sec^2(m\tan^{-1}x).\frac{m}{1+x^2}$

$\Rightarrow (1+x^2)y_1 = m\{1+\tan^2(m\tan^{-1}x)\}$

$\Rightarrow (1+x^2)y_1 = m(1+y^2)$ [(1) দ্বারা।]

ইহাকে x-এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই,

$(1+x^2)y_2 + y_1(2x) = m.2yy_1$

$\therefore (1+x^2)y_2 - 2(my-x)y_1 = 0$

11(c) $y=\sin(m\sin^{-1}x)$ **হলে, দেখাও যে,** $(1-x^2)y_2 - xy_1 + m^2y = 0$

[ব.'১১;ঢা.'১০;রা.'০৯; কু.'১৩; দি.'১৪]

প্রমাণ ঃ এখানে, $y=\sin(m\sin^{-1}x)\cdots(1)$

ইহাকে x-এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই,

$$y_1 = \cos(m\sin^{-1}x).\frac{m}{\sqrt{1-x^2}}$$

$\Rightarrow y_1\sqrt{1-x^2} = \mathrm{m}\cos(m\sin^{-1}x)$

$\Rightarrow y_1^2(1-x^2) = m^2\cos^2(m\sin^{-1}x)$

$\Rightarrow y_1^2(1-x^2) = m^2\{1-\sin^2(m\sin^{-1}x)\}$

$\Rightarrow (1-x^2)y_1^2 = m^2(1-y^2)$ [(1) দ্বারা।]

ইহাকে x-এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই,

$(1-x^2)2y_1y_2 + y_1^2(-2x) = m^2(-2yy_1)$

উভয় পক্ষকে $2y_1$ দ্বারা ভাগ করে পাই,

$(1-x^2)y_2 - xy_1 = -m^2y$

$\therefore (1-x^2)y_2 - xy_1 + m^2y = 0$ (Showed)

11(d) $y=\cos(2\sin^{-1}x)$ **হলে, দেখাও যে,** $(1-x^2)y_2 - xy_1 + 4y = 0$ [প্র.ভ.প.'০৬]

প্রমাণ ঃ এখানে, $y=\cos(2\sin^{-1}x)\cdots(1)$

ইহাকে x-এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই,

$$y_1 = -\sin(2\sin^{-1}x).\frac{2}{\sqrt{1-x^2}}$$

$\Rightarrow y_1\sqrt{1-x^2} = -2\sin(2\sin^{-1}x)$

$\Rightarrow y_1^2(1-x^2) = 4\sin^2(2\sin^{-1}x)$

$\Rightarrow y_1^2(1-x^2) = 4\{1-\cos^2(2\sin^{-1}x)\}$

$(1-x^2)y_1^2 = 4(1-y^2)$ [(1) দ্বারা।]

ইহাকে x-এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই,

$(1-x^2).2y_1y_2 + y_1^2(-2x) = 4(-2yy_1)$

উভয় পক্ষকে $2y_1$ দ্বারা ভাগ করে পাই,

$(1-x^2)y_2 - xy_1 = -4y$

$\therefore (1-x^2)y_2 - xy_1 + 4y = 0$ (Showed)

11(e) $y=(\sin^{-1}x)^2$ **হলে, প্রমাণ কর যে,** $(1-x^2)y_2 - xy_1 - 2 = 0$ [ব.'০৮; রা.'১১]

প্রমাণ ঃ এখানে, $y=(\sin^{-1}x)^2\cdots(1)$

ইহাকে x-এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই,

$$y_1 = 2(\sin^{-1}x).\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$\Rightarrow \sqrt{1-x^2}\,y_1 = 2(\sin^{-1}x)$

$\Rightarrow (1-x^2)y_1^2 = 4(\sin^{-1}x)^2 = 4y$

ইহাকে x-এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই,

$(1-x^2).2y_1y_2 + y_1^2(-2x) = 4y_1$

উভয় পক্ষকে $2y_1$ দ্বারা ভাগ করে পাই,

$(1-x^2)y_2 - xy_1 = 2$

$\therefore (1-x^2)y_2 - xy_1 - 2 = 0$ (Showed)

11(f) $y=\frac{1}{2}(\sin^{-1}x)^2$ **হলে, প্রমাণ কর যে,** $(1-x^2)y_2 - xy_1 - 1 = 0$ [প্র.ভ.প.'০৫]

প্রমাণ ঃ এখানে, $2y=(\sin^{-1}x)^2\cdots(1)$

ইহাকে x-এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই,

$$2y_1 = 2(\sin^{-1}x).\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$\Rightarrow \sqrt{1-x^2}\,y_1 = (\sin^{-1}x)$

$\Rightarrow (1-x^2)y_1^2 = (\sin^{-1}x)^2 = 2y$

ইহাকে x-এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই,

$(1-x^2).2y_1y_2 + y_1^2(-2x) = 2y_1$

উভয় পক্ষকে $2y_1$ দ্বারা ভাগ করে পাই,

$(1-x^2)y_2 - xy_1 = 1$

$\therefore (1-x^2)y_2 - xy_1 - 1 = 0$ (Showed)

12(a) $\cos\sqrt{y} = x$ **হলে, দেখাও যে,** $(1-x^2)y_2 - xy_1 - 2 = 0$ [য.'০৬,'০৮,'১২; চ.'০৬; রা. '০৭,'০৯; সি.'১০; ব.'১০; ঢা.'১১]

প্রমাণ ঃ এখানে, $\cos\sqrt{y} = x \cdots\cdots(1)$

ইহাকে x-এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই,

$$-\sin\sqrt{y}\cdot\frac{1}{2\sqrt{y}}\,y_1 = 1$$

$$\Rightarrow 2\sqrt{y} = -\,y_1\sin\sqrt{y}$$

উভয় পক্ষকে বর্গ করে পাই,

$$4y = y_1^{\,2}\sin^2\sqrt{y} = y_1^{\,2}(1-\cos^2\sqrt{y})$$

$$\Rightarrow 4y = y_1^{\,2}(1-x^2) \qquad [(1) \text{ দ্বারা।}]$$

ইহাকে x-এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই,

$$4y_1 = 2y_1y_2(1-x^2) + y_1^{\,2}(-2x)$$

উভয় পক্ষকে $2y_1$ দ্বারা ভাগ করে পাই,

$$2 = y_2(1-x^2) - xy_1$$

$$\therefore (1-x^2)y_2 - xy_1 - 2 = 0 \text{ (Showed)}$$

12(b) $x = \sin\sqrt{y}$ **হলে, দেখাও যে,** $(1-x^2)y_2 - xy_1 - 2 = 0$ **[ব.'১২; ঢা. '০৮; কু.'০৮; চ.'১১]**

প্রমাণ ঃ এখানে, $x = \sin\sqrt{y} \cdots\cdots (1)$

ইহাকে x-এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই,

$$\cos\sqrt{y}\cdot\frac{1}{2\sqrt{y}}\,y_1 = 1$$

$$\Rightarrow 2\sqrt{y} = y_1\cos\sqrt{y}$$

উভয় পক্ষকে বর্গ করে পাই,

$$4y = y_1^{\,2}\cos^2\sqrt{y} = y_1^{\,2}(1-\sin^2\sqrt{y})$$

$$\Rightarrow 4y = y_1^{\,2}(1-x^2) \qquad [(1) \text{ দ্বারা।}]$$

ইহাকে x-এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই,

$$4y_1 = 2y_1y_2(1-x^2) + y_1^{\,2}(-2x)$$

উভয় পক্ষকে $2y_1$ দ্বারা ভাগ করে পাই,

$$2 = y_2(1-x^2) - xy_1$$

$$\therefore (1-x^2)y_2 - xy_1 - 2 = 0 \text{ (Showed)}$$

12(c) $y = \dfrac{\sin x}{\sqrt{x}}$ **হলে, দেখাও যে,** $x^2y_2 + xy_1 + (x^2 - \frac{1}{4})y = 0$ **[প্র.ভ.প.'০৪]**

প্রমাণ ঃ $y = \dfrac{\sin x}{\sqrt{x}} \Rightarrow \sin x = \sqrt{x}\,y \cdots(1)$

ইহাকে x-এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই,

$$\cos x = \sqrt{x}\;y_1 + y\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$\Rightarrow 2\cos x = \frac{2xy_1 + y}{\sqrt{x}}$$

$$-2\sin x = \frac{\sqrt{x}(2xy_2 + 2y_1 + y_1) - (2xy_1 + y)\frac{1}{2\sqrt{x}}}{x}$$

$$\Rightarrow -2\sqrt{x}\,y = \frac{1}{2x\sqrt{x}}[2x(2xy_2 + 2y_1 + y_1) - 2xy_1 - y]$$

$$\Rightarrow -4x^2y = 4x^2y_2 + 6xy_1 - 2xy_1 - y$$

$$\Rightarrow -4x^2y = 4x^2y_2 + 4xy_1 - y$$

$$\Rightarrow 4(x^2y_2 + xy_1 + x^2y) = y$$

$$\Rightarrow x^2y_2 + xy_1 + x^2y = \frac{y}{4}$$

$$\therefore x^2y_2 + xy_1 + (x^2 - \frac{1}{4})y = 0$$

13.(a) $x = a(\theta + \sin\theta)$ **ও** $y = a(1-\cos\theta)$ **হলে,** $\dfrac{\theta}{2}$ **এর মাধ্যমে** $\dfrac{dy}{dx}$ **ও** $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ **নির্ণয় কর।**

সমাধান : $x = a(\theta + \sin\theta)$, $y = a(1-\cos\theta)$

$$\therefore \frac{dx}{d\theta} = a(1+\cos\theta),\ \frac{dy}{d\theta} = a\sin\theta$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{d\theta}\times\frac{d\theta}{dx} = \frac{a\sin\theta}{a(1+\cos\theta)}$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}{2\cos^2\frac{\theta}{2}} = \tan\frac{\theta}{2}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}(\tan\frac{\theta}{2}) = \frac{d}{d\theta}(\tan\frac{\theta}{2}).\frac{d\theta}{dx}$$

$$= \sec^2\frac{\theta}{2}.\frac{1}{2}.\frac{1}{a(1+\cos\theta)}$$

$$= \frac{1}{2}\sec^2\frac{\theta}{2}.\frac{1}{a.2\cos^2\frac{\theta}{2}}$$

$$= \frac{1}{2}\sec^2\frac{\theta}{2}.\frac{1}{2a}\sec^2\frac{\theta}{2} = \frac{1}{4a}\sec^4\frac{\theta}{2}$$

13(b) $2x = t + t^{-1}$ এবং $2y = t - t^{-1}$ হলে, দেখাও যে, $\frac{dy}{dx} = \frac{t^2+1}{t^2-1}$ এবং $\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{8t^3}{(t^2-1)^3}$

প্রমাণ ঃ এখানে, $2x = t + t^{-1} = t + \frac{1}{t} = \frac{t^2+1}{t}$

$$\therefore \quad 2\frac{dx}{dt} = \frac{t(2t+0)-(t^2+1).1}{t^2} = \frac{t^2-1}{t^2}$$

এবং $2y = t - t^{-1} = t - \frac{1}{t} = \frac{t^2-1}{t} = \frac{t^2-1}{t}$

$$\therefore \quad 2\frac{dy}{dt} = \frac{t(2t-0)-(t^2-1).1}{t^2}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\times\frac{dt}{dx} = \frac{t^2+1}{t^2}\times\frac{t^2}{t^2-1} = \frac{t^2+1}{t^2-1}$$

এখন, $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}(\frac{t^2+1}{t^2-1}) = \frac{d}{dt}(\frac{t^2+1}{t^2-1}).\frac{dt}{dx}$

$$= \frac{(t^2-1).2t-(t^2+1).2t}{(t^2-1)^2}\times\frac{2t^2}{t^2-1}$$

$$= \frac{2t(t^2-1-t^2-1)}{(t^2-1)^2}\times\frac{2t^2}{t^2-1}$$

$$\therefore \quad \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{8t^2}{(t^2-1)^3}$$

14. নিচের ফাংশনগুলোর nতম অন্তরক সহগ নির্ণয় কর।

(a) মনে করি, $y = \ln x$

$$\therefore \quad y_1 = \frac{1}{x} = x^{-1} = (-1)^{1-1}x^{-1}$$

$$y_2 = (-1)x^{-2} = (-1)^{2-1}x^{-2}$$

$$y_3 = (-1)(-2)x^{-3} = (-1)^2(1.2)x^{-3}$$

$$= (-1)^{3-1}\{1.(3-1)\}x^{-3}$$

$$y_4 = (-1)(-2)(-3)x^{-2} = (-1)^3(1.2.3)x^{-4}$$

$$= (-1)^3\{1.2.(4-1)\}x^{-4}$$

অনুরূপভাবে,

$$y_n = (-1)^{n-1}\{1.2.3.\cdots\cdots(n-1)\}x^{-n}$$

$\therefore \ln x$ এর nতম অন্তরক সহগ $= \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n}$

14(b) মনে করি, $y = \frac{1}{a-x} = (a-x)^{-1}$

$$\therefore \quad y_1 = (-1)(a-x)^{-2}(-1) = 1.(a-x)^{-1-1}$$

$$y_2 = (-2)(a-x)^{-3}(-1) = (1.2)(a-x)^{-2-1}$$

$$y_3 = (1.2)(-3)(x-a)^{-4}(-1)$$

$$= (1.2.3)(a-x)^{-3-1}$$

অনুরূপভাবে, $y_n = (1.2.3.\cdots\cdots n)(x-a)^{-n-1}$

$\therefore \frac{1}{a-x}$ এর nতম অন্তরক সহগ $= \frac{n!}{(a-x)^{n+1}}$

14 (c) $\cos^3 x = \frac{1}{4}(3\cos x + \cos 3x)$

$$\therefore \quad \frac{d^n}{dx^n}(\cos^3 x) = \frac{1}{4}\{\frac{d^n}{dx^n}(3\cos x) + \frac{d^n}{dx^n}(\cos 3x)\}$$

$$= \frac{1}{4}\{3\cos(\frac{n\pi}{2}+x) + 3^n\cos(\frac{n\pi}{2}+3x)\}$$

14(d) $e^{3x}\sin^2 x$ [প্র.ভ.প '০১]

$$= e^{3x}\frac{1}{2}(1-\cos 2x)$$

$$= \frac{1}{2}\{e^{3x} - e^{3x}\cos 2x\}$$

$$\therefore \quad \frac{d^n}{dx^n}(e^{3x}\sin^2 x) = \frac{1}{2}\{\frac{d^n}{dx^n}(e^{3x}) - \frac{d^n}{dx^n}(e^{3x}\cos 2x)\}$$

$$= \frac{1}{2}\{3^n e^{3x} - (3^2+2^2)^{\frac{n}{2}}e^{3x}\cos(2x + n\tan^{-1}\frac{2}{3})\}$$

$=\frac{e^{3x}}{2}\{3^n-(\sqrt{13})^n\cos(2x+n\tan^{-1}\frac{2}{3})\}$

সম্ভাব্য ধাপসহ প্রশ্ন :

15. $y=x^2-2+\frac{1}{x^2}$ **হলে,** $\frac{d^2y}{dx^2}$ **এবং** $\frac{d^3y}{dx^3}$ **নির্ণয় কর।**

সমাধানঃ $y=x^2-2+\frac{1}{x^2}=x^2-2+x^{-2}$

x-এর সাপেক্ষে পর্যায়ক্রমে অন্তরীকরণ করে পাই,

$\frac{dy}{dx}=2x-0+(-2)x^{-3}$ (১)

$\frac{d^2y}{dx^2}=2+(-2)(-3)x^{-4}=2+\frac{6}{x^4}$ (১)

$\frac{d^3y}{dx^3}=(-2)(-3)(-4)x^{-5}=-\frac{24}{x^5}$ (১)

16. $y=a\cos x+b\sin x$ **হলে, দেখাও যে,** $y_4-y=0$

প্রমাণ ঃ এখানে, $y=a\cos x+b\sin x$

x-এর সাপেক্ষে পর্যায়ক্রমে অন্তরীকরণ করে পাই,

$y_1=a(-\sin x)+b\cos x$ (১)

$y_2=a(-\cos x)+b(-\sin x)$ (১)

$y_3=a\sin x+b(-\cos x)$

$y_4=a\cos x+b\sin x=y$

$\therefore\ y_4-y=0$ (Showed) (১)

17. $y=\frac{x}{x+2}$ **হলে, দেখাও যে,** $xy_1=y(1-y)$

প্রমাণ ঃ এখানে, $y=\frac{x}{x+2}\Rightarrow x+2=\frac{x}{y}$

উভয় পক্ষকে x-এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই,

$1=\frac{y.1-xy_1}{y^2}\Rightarrow y^2=y-xy_1$ (১)

$\Rightarrow xy_1=y-y^2\ \therefore xy_1=y(1-y)$ (Showed) (১)

18. (a) $y=ax^{n+1}+bx^{-n}$ **হলে, দেখাও যে,** $x^2y_2=n(n+1)y$

প্রমাণ ঃ এখানে, $y=ax^{n+1}+bx^{-n}$

x-এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই,

$y_1=a(n+1)x^n+b(-n)x^{-n-1}$ (১)

$y_2=a(n+1)nx^{n-1}+b(-n)(-n-1)x^{-n-2}$ (১)

এখন, $x^2y_2=n(n+1)ax^{n+1}+n(n+1)bx^{-n}$

$\Rightarrow x^2y_2=n(n+1)(ax^{n+1}+bx^{-n})$

$\therefore\ x^2y_2=n(n+1)y$ (Showed) (১)

18. (b) $y=\sqrt{ax^2+bx+c}$ **হলে, দেখাও যে,** $4y^3y_2=4ac-b^2$

প্রমাণ ঃ এখানে, $y=\sqrt{ax^2+bx+c}$

x-এর সাপেক্ষে পর্যায়ক্রমে অন্তরীকরণ করে পাই,

$y_1=\frac{1}{2\sqrt{ax^2+bx+c}}(2ax+b)$ (২)

$y_2=\frac{\sqrt{ax^2+bx+c}.(2a)-\frac{(2ax+b)^2}{2\sqrt{ax^2+bx+c}}}{(2\sqrt{ax^2+bx+c})^2}$ (১)

$\Rightarrow y_2=\frac{4a(ax^2+bx+c)-4ax^2-4abx-b^2}{4(\sqrt{ax^2+bx+c})^3}$

$\Rightarrow y_2=\frac{4a^2x^2+4abx+4ac-4ax^2-4abx-b^2}{4y^3}$

$\therefore\ 4y^3y_2=4ac-b^2$ (Showed) (১)

19. (a) $y=\sqrt{\cos 2x}$ **হলে, দেখাও যে,** $(yy_1)^2=1-y^4$

প্রমাণ ঃ এখানে, $y=\sqrt{\cos 2x}\Rightarrow y^2=\cos 2x$

উভয় পক্ষকে x-এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই,

$2yy_1=-\sin 2x.2\Rightarrow yy_1=-\sin 2x$ (২)

$\Rightarrow (yy_1)^2=\sin^2 2x$ [উভয় পক্ষকে বর্গ করে।]

$\Rightarrow (yy_1)^2=1-\cos^2 2x$

$=1-(y^2)^2$ $[\because y^2=\cos 2x]$

$\therefore\ (yy_1)^2=1-y^4$ (Showed) (১)

19. (b) $y=\tan\sqrt{1-x}$ **হলে, দেখাও যে,** $2y_1\sqrt{1-x^2}+(1+y^2)=0$

প্রমাণ ঃ এখানে, $y=\tan\sqrt{1-x}$ ……(1)

উভয় পক্ষকে x-এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই,

$$y_1 = \sec^2\sqrt{1-x}.\frac{1}{2\sqrt{1-x}}(-1) \quad (২)$$

$$\Rightarrow 2y_1\sqrt{1-x} = -(1+\tan^2\sqrt{1-x})$$

$$\Rightarrow 2y_1\sqrt{1-x} = -(1+y^2) \quad [(1) \text{ দ্বারা }]$$

$$\therefore 2y_1\sqrt{1-x} + (1+y^2) = 0 \text{ (Showed) } (১)$$

19(c) $y = \dfrac{4}{\sqrt{\sec x}}$ **হলে, দেখাও যে,** $2\cot x\dfrac{dy}{dx} + y = 0$

প্রমাণ ঃ এখানে, $y = \dfrac{4}{\sqrt{\sec x}} \Rightarrow y^2\sec x = 16$

উভয় পক্ষকে x-এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই,

$$y^2\sec x\tan x + \sec x.2y\frac{dy}{dx} = 0 \quad (২)$$

উভয় পক্ষকে $y\sec x$ দ্বারা ভাগ করে পাই,

$$y\tan x + 2\frac{dy}{dx} = 0 \Rightarrow \frac{y}{\cot x} + 2\frac{dy}{dx} = 0$$

$$\therefore 2\cot x\frac{dy}{dx} + y = 0 \quad \text{(Showed) } (১)$$

20. $y = (a + bx)e^{2x}$ **হলে, প্রমাণ কর যে,** $y_2 - 2y_1 - 2be^{2x} = 0$

প্রমাণ ঃ এখানে, $y = (a+bx)e^{2x} \cdots \cdots (1)$

ইহাকে x-এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই,

$$y_1 = (a+bx).e^{2x}(2) + e^{2x}(0+b) \quad (২)$$

$$\Rightarrow y_1 = 2y + be^{2x} \cdots (2) \quad [(1) \text{ দ্বারা।}]$$

ইহাকে x-এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই,

$$y_2 = 2y_1 + be^{2x}.2$$

$$\therefore y_2 - 2y_1 - 2be^{2x} = 0 \quad \text{(Showed) } (১)$$

21(a) $y = x^n \ln x$ **হলে, দেখাও যে,** $xy_1 = ny + x^n$

প্রমাণ ঃ এখানে, $y = x^n \ln x \cdots \cdots (1)$

ইহাকে x-এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই,

$$y_1 = x^n\frac{1}{x} + \ln x.nx^{n-1} \quad (৩)$$

উভয় পক্ষকে x দ্বারা গুণ করে পাই,

$$xy_1 = x^n + nx^n\ln x = x^n + ny \quad [(1) \text{ দ্বারা }]$$

$$\therefore xy_1 = ny + x^n \quad \text{(Showed) } (১)$$

21(b) $y = \sqrt{1+x^2}\ \ln(x + \sqrt{1+x^2})$ **হলে, দেখাও যে,** $(1+x^2)(y_1 - 1) = xy$

প্রমাণ ঃ $y = \sqrt{1+x^2}\ \ln(x+\sqrt{1+x^2}) \cdots (1)$

ইহাকে x-এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই,

$$y_1 = \sqrt{1+x^2}\ \frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}\{1 + \frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}\} + \ln(x+\sqrt{1+x^2}).\frac{1}{2\sqrt{1+x^2}}(2x) \quad (৩)$$

$$= \frac{\sqrt{1+x^2}}{x+\sqrt{1+x^2}}\frac{\sqrt{1+x^2}+x}{\sqrt{1+x^2}} + \sqrt{1+x^2}\ \ln(x+\sqrt{1+x^2}).\frac{x}{1+x^2}$$

$$\Rightarrow y_1 = 1 + y.\frac{x}{1+x^2} \quad [(1) \text{ দ্বারা।}]$$

$$\Rightarrow (1+x^2)y_1 = (1+x^2) + xy$$

$$\therefore (1+x^2)(y_1 - 1) = xy \quad \text{(Showed) } (১)$$

22. $y = \sqrt{1-x^2}\sin^{-1}x - x$ **হলে, দেখাও যে,** $(1-x^2)y_2 - x(y_1 - 2) + y = 0$

প্রমাণ ঃ এখানে, $y = \sqrt{1-x^2}\sin^{-1}x - x \cdots (1)$

ইহাকে x-এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই,

$$y_1 = \frac{\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{\sin^{-1}x}{2\sqrt{1-x^2}}(-2x) - 1 \quad (২)$$

$$\Rightarrow y_1 = 1 - \frac{x\sin^{-1}x}{\sqrt{1-x^2}} - 1 = -\frac{x\sqrt{1-x^2}\sin^{-1}x}{1-x^2}$$

$$\Rightarrow (1-x^2)y_1 = -x(y+x) \quad [(1) \text{ দ্বারা।}]$$

$$\Rightarrow (1-x^2)y_1 + xy + x^2 = 0$$

ইহাকে x-এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই,

$$(1-x^2)y_2 + y_1(-2x) + xy_1 + y + 2x = 0 \quad (১)$$

$$\Rightarrow (1-x^2)y_2 - xy_1 + y + 2x = 0$$

$$\therefore (1-x^2)y_2 - x(y_1 - 2) + y = 0 \quad (১)$$

23(a) $y = \sin\sqrt{x}$ **হলে, দেখাও যে,** $4x(y_1)^2 + y^2 = 1$

প্রমাণ ঃ এখানে, $y = \sin\sqrt{x}$

ইহাকে x-এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই,

$$y_1 = \cos\sqrt{x}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}$$ (২)

$\Rightarrow 2\sqrt{x}\, y_1 = \cos\sqrt{x}$

উভয় পক্ষকে বর্গ করে পাই,

$4x\, {y_1}^2 = \cos^2\sqrt{x} = 1 - \sin^2\sqrt{x} = 1 - y^2$

$\therefore\ 4x\, {y_1}^2 + y^2 = 1$ (Showed) (১)

23(b) $y = \cos\sqrt{x}$ **হলে, দেখাও যে,** $4x(y_1)^2 + y^2 = 1$

প্রমাণ ঃ এখানে, $y = \cos\sqrt{x}$

ইহাকে x-এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই,

$$y_1 = -\sin\sqrt{x}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}$$ (২)

$\Rightarrow 2\sqrt{x}\, y_1 = -\sin\sqrt{x}$

উভয় পক্ষকে বর্গ করে পাই,

$4x\, {y_1}^2 = \sin^2\sqrt{x} = 1 - \cos^2\sqrt{x} = 1 - y^2$

$\therefore\ 4x\, {y_1}^2 + y^2 = 1$ (Showed) (১)

24. $y = (1 - x^2)^n$ **হলে, দেখাও যে,**

$(1 - x^2)\, y_1 + 2nxy = 0$

প্রমাণ ঃ এখানে, $y = (1 - x^2)^n$

উভয় পক্ষকে x-এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই, $y_1 = n(1 - x^2)^{n-1}(-2x)$ (২)

উভয় পক্ষকে $(1 - x^2)$ দ্বারা গুণ করে পাই,

$y_1(1 - x^2) = -2nx(1 - x^2)^n = -2nxy$

$\therefore\ (1 - x^2)\, y_1 + 2nxy = 0$ (Showed) (১)

25. $y = \tan x$ **হলে, দেখাও যে,** $y_2 = 2y(1 + y^2)$

প্রমাণ ঃ এখানে, $y = \tan x$

$$\therefore\ y_1 = \frac{d}{dx}(\tan x) = \sec^2 x$$ (১)

$$y_2 = \frac{d}{dx}(\sec^2 x) = 2\sec x.\sec x\tan x$$ (১)

$= 2\tan x\sec^2 x = 2\tan x(1 + \tan^2 x)$

$\therefore\ y_2 = 2y(1 + y^2)$ (Showed) (১)

26. $y = ax\sin x$ **হলে, দেখাও যে,** $x^2 y_2 - 2xy_1 + (x^2 + 2)y = 0$

প্রমাণ ঃ $y = ax\sin x \Rightarrow \frac{y}{x} = a\sin x \cdots (1)$

ইহাকে x-এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই,

$$\frac{xy_1 - y.1}{x^2} = a\cos x$$ (২)

ইহাকে x-এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই,

$$\frac{x^2(xy_2 + y_1.1 - y_1) - (xy_1 - y).2x}{x^4} = -a\sin x$$ (১)

$$\Rightarrow \frac{x(x^2y_2 - 2xy_1 + 2y)}{x^4} = -\frac{y}{x}$$ [(1) দ্বারা।]

$\Rightarrow x^2y_2 - 2xy_1 + 2y = -x^2y$

$\therefore\ x^2y_2 - 2xy_1 + (x^2 + 2)y = 0$ (Showed) (১)

27. $x = \sin t$ **এবং** $y = \sin pt$ **হলে, দেখাও যে,** $(1 - x^2)\, y_2 - x\, y_1 + p^2 y = 0.$

প্রমাণ ঃ এখানে, $x = \sin t$ এবং $y = \sin pt$

$\therefore\ t = \sin^{-1} x$ এবং $pt = \sin^{-1} y$

$\therefore\ p\sin^{-1} x = \sin^{-1} y$ (১)

ইহাকে x-এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই,

$$p\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - y^2}}\, y_1$$ (১)

$\Rightarrow p^2(1 - y^2) = (1 - x^2){y_1}^2$

ইহাকে x-এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই,

$p^2(-2yy_1) = (1 - x^2)2y_1y_2 + (-2x){y_1}^2$ (১)

উভয় পক্ষকে $2y_1$ দ্বারা ভাগ করে পাই,

$-p^2y = (1 - x^2)y_2 - xy_1$

$(1 - x^2)\, y_2 - x\, y_1 + p^2 y = 0.$ (১)

28. নিচের ফাংশনগুলির n তম অন্তরজ (y_n) নির্ণয় কর।

(a) $\frac{1}{x}$ [ঢ.'০২] **(b)** $\frac{x^2 + 1}{(x-1)(x-2)(x-3)}$

(c) $\sin x\sin 3x$

(a) মনে করি, $y = \frac{1}{x} = x^{-1}$

$\therefore\ y_1 = (-1)x^{-2} = (-1)^1 x^{-1-1}$ (১)

$y_2 = (-1)(-2)x^{-3} = (-1)^2(1.2)x^{-2-1}$ (১)

$y_3 = (-1)(-2)(-3)x^{-4} = (-1)^3(1.2.3)x^{-3-1}$ (১)

অনুরূপভাবে, $y_n = (-1)^n(1.2.3.\cdots\cdots n)x^{-n-1}$

$\frac{1}{x}$ এর nতম অন্তরক সহগ $= \frac{(-1)^n n!}{x^{n+1}}$ (Ans.) (১)

28(b) ধরি, $y = \frac{x^2+1}{(x-1)(x-2)(x-3)}$

$= \frac{1^2+1}{(x-1)(1-2)(1-3)} + \frac{2^2+1}{(2-1)(x-2)(2-3)}$

$+ \frac{3^2+1}{(3-1)(3-2)(x-3)}$ (১)

$= \frac{2}{(x-1)(-1)(-2)} + \frac{5}{(1)(x-2)(-1)} + \frac{10}{(2)(1)(x-3)}$

$= \frac{1}{x-1} - \frac{5}{x-2} + \frac{5}{x-3}$

$\therefore y_n = \frac{d^n}{dx^n}(\frac{1}{x-1}) - 5\frac{d^n}{dx^n}(\frac{1}{x-2}) +$

$5\frac{d^n}{dx^n}(\frac{1}{x-3})$ (১)

$= \frac{(-1)^n n!}{(x-1)^{n+1}} - \frac{5(-1)^n n!}{(x-2)^{n+1}} + \frac{5(-1)^n n!}{(x-3)^{n+1}}$ (২)

(c) $\sin x \sin 3x = \frac{1}{2}(\cos 2x - \cos 4x)$ (১)

$\therefore \frac{d^n}{dx^n}(\sin x \sin 3x) = \frac{1}{2}\{\frac{d^n}{dx^n}(\cos 2x)$

$- \frac{d^n}{dx^n}(\cos 4x)\}$ (১)

$= \frac{1}{2}\{2^n \cos(\frac{n\pi}{2} + 2x) - 4^n \cos(\frac{n\pi}{2} + 3x)\}$ (২)

প্রশ্নমালা IX J

1. $y = x^3 - 2x^2 + 2$ বক্ররেখার (2, 2) বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ নির্ণয় কর। [চ.'০১; ঢা.'০৭]

সমাধান ঃ $y = x^3 - 2x^2 + 2 \quad \therefore \frac{dy}{dx} = 3x^2 - 4x$

(2, 2) বিন্দুতে $\frac{dy}{dx} = 3.2^2 - 4(2) = 12 - 8 = 4$

$\therefore$ প্রদত্ত বক্ররেখার (2, 2) বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ $y - 2 = 4(x-2) \Rightarrow 4x - y - 6 = 0$

2. $x^2 - y^2 = 7$ বক্ররেখার (4,–3) বিন্দুতে স্পর্শক ও অভিলম্বের সমীকরণ নির্ণয় কর। [ঢা.'১২; সি.'১৩]

সমাধান ঃ $x^2 - y^2 = 7$

ইহাকে x-এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই,

$2x - 2y\frac{dy}{dx} = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{x}{y}$

$(4, -3)$ বিন্দুতে $\frac{dy}{dx} = \frac{4}{-3}$

$\therefore$ প্রদত্ত বক্ররেখার $(4, -3)$ বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ $y + 3 = \frac{4}{-3}(x-4)$

$\Rightarrow 4x - 16 = -3y - 9 \therefore 4x + 3y - 7 = 0$

এবং অভিলম্বের সমীকরণ, $y + 3 = \frac{3}{4}(x-4)$

$\Rightarrow 4y + 12 = 3x - 12 \therefore 3x - 4y - 24 = 0$

3(a) $y(x-2)(x-3) - x + 7 = 0$ বক্ররেখাটি যে সমস্ত বিন্দুতে x-অক্ষকে ছেদ করে , ঐ বিন্দুগুলোতে স্পর্শক ও অভিলম্বের সমীকরণ নির্ণয় কর।

[ঢা.'০৯; য.'১০; চ.'১০; দি.'১১; কু.'১৪]

সমাধান ঃ $y(x-2)(x-3) - x + 7 = 0$

$\Rightarrow y(x^2 - 5x + 6) - x + 7 = 0 \cdots(1)$

বক্ররেখাটি x-অক্ষকে যে বিন্দুতে ছেদ করে তার কোটি $y = 0$. (1) এ $y = 0$ বসিয়ে পাই $x = 7$.

$\therefore$ বক্ররেখাটি x-অক্ষকে (7,0) বিন্দুতে ছেদ করে।

(1) বক্ররেখাকে x-এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই, $(x^2 - 5x + 6)\frac{dy}{dx} + y(2x-5) - 1 = 0$

$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1 - y(2x-5)}{x^2 - 5x + 6}$

$(7, 0)$ বিন্দুতে $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{49 - 35 + 6} = \frac{1}{20}$

$\therefore$ নির্ণেয় স্পর্শকের সমীকরণ, $y = \frac{1}{20}(x - 7)$