$y_3 = (-1)(-2)(-3)x^{-4} = (-1)^3(1.2.3)x^{-3-1}$ (১)

অনুরূপভাবে, $y_n = (-1)^n(1.2.3.\cdots\cdots n)x^{-n-1}$

$\frac{1}{x}$ এর nতম অন্তরক সহগ $= \frac{(-1)^n n!}{x^{n+1}}$ (Ans.) (১)

28(b) ধরি, $y = \frac{x^2+1}{(x-1)(x-2)(x-3)}$

$= \frac{1^2+1}{(x-1)(1-2)(1-3)} + \frac{2^2+1}{(2-1)(x-2)(2-3)}$

$+ \frac{3^2+1}{(3-1)(3-2)(x-3)}$ (১)

$= \frac{2}{(x-1)(-1)(-2)} + \frac{5}{(1)(x-2)(-1)} + \frac{10}{(2)(1)(x-3)}$

$= \frac{1}{x-1} - \frac{5}{x-2} + \frac{5}{x-3}$

$\therefore y_n = \frac{d^n}{dx^n}(\frac{1}{x-1}) - 5\frac{d^n}{dx^n}(\frac{1}{x-2}) +$

$5\frac{d^n}{dx^n}(\frac{1}{x-3})$ (১)

$= \frac{(-1)^n n!}{(x-1)^{n+1}} - \frac{5(-1)^n n!}{(x-2)^{n+1}} + \frac{5(-1)^n n!}{(x-3)^{n+1}}$ (২)

(c) $\sin x \sin 3x = \frac{1}{2}(\cos 2x - \cos 4x)$ (১)

$\therefore \frac{d^n}{dx^n}(\sin x \sin 3x) = \frac{1}{2}\{\frac{d^n}{dx^n}(\cos 2x)$

$- \frac{d^n}{dx^n}(\cos 4x)\}$ (১)

$= \frac{1}{2}\{2^n \cos(\frac{n\pi}{2} + 2x) - 4^n \cos(\frac{n\pi}{2} + 3x)\}$ (২)

প্রশ্নমালা IX J

1. $y = x^3 - 2x^2 + 2$ বক্ররেখার (2, 2) কিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ নির্ণয় কর। [চ.'০১; ঢা.'০৭]

সমাধান ঃ $y = x^3 - 2x^2 + 2 \quad \therefore \frac{dy}{dx} = 3x^2 - 4x$

(2, 2) কিন্দুতে $\frac{dy}{dx} = 3.2^2 - 4(2) = 12 - 8 = 4$

$\therefore$ প্রদত্ত বক্ররেখার (2, 2) কিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ

$y - 2 = 4(x-2) \Rightarrow 4x - y - 6 = 0$

2. $x^2 - y^2 = 7$ বক্ররেখার (4,–3) কিন্দুতে স্পর্শক ও অভিলম্বের সমীকরণ নির্ণয় কর। [ঢা.'১২; সি.'১৩]

সমাধান ঃ $x^2 - y^2 = 7$

ইহাকে x-এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই,

$2x - 2y\frac{dy}{dx} = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{x}{y}$

(4 , – 3) কিন্দুতে $\frac{dy}{dx} = \frac{4}{-3}$

$\therefore$ প্রদত্ত বক্ররেখার (4 , – 3) কিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ $y + 3 = \frac{4}{-3}(x-4)$

$\Rightarrow 4x - 16 = -3y - 9 \quad \therefore 4x + 3y - 7 = 0$

এবং অভিলম্বের সমীকরণ, $y + 3 = \frac{3}{4}(x-4)$

$\Rightarrow 4y + 12 = 3x - 12 \quad \therefore 3x - 4y - 24 = 0$

3(a) $y(x-2)(x-3) - x + 7 = 0$ বক্ররেখাটি যে সমস্ত কিন্দুতে x-অক্ষকে ছেদ করে , ঐ কিন্দুগুলোতে স্পর্শক ও অভিলম্বের সমীকরণ নির্ণয় কর। [ঢা.'০৯; য.'১০; চ.'১০; দি.'১১; কু.'১৪]

সমাধান ঃ $y(x-2)(x-3) - x + 7 = 0$

$\Rightarrow y(x^2 - 5x + 6) - x + 7 = 0 \cdots(1)$

বক্ররেখাটি x-অক্ষকে যে কিন্দুতে ছেদ করে তার কোটি $y = 0$. (1) এ $y = 0$ বসিয়ে পাই $x = 7$.

$\therefore$ বক্ররেখাটি x-অক্ষকে (7,0) কিন্দুতে ছেদ করে।

(1) বক্ররেখাকে x-এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই, $(x^2 - 5x + 6)\frac{dy}{dx} + y(2x-5) - 1 = 0$

$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1 - y(2x-5)}{x^2 - 5x + 6}$

(7 , 0) কিন্দুতে $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{49 - 35 + 6} = \frac{1}{20}$

$\therefore$ নির্ণেয় স্পর্শকের সমীকরণ, $y = \frac{1}{20}(x - 7)$

$\Rightarrow x - 20y - 7 = 0$

এবং অভিলম্বের সমীকরণ, $y = -20(x-7)$

$\Rightarrow 20x + y - 140 = 0$

3(b) দেখাও যে, $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a}$ বক্ররেখার যেকোন স্পর্শক দ্বারা স্থানাঙ্কের অক্ষ দুইটি থেকে কর্তিত অংশের যোগফল একটি ধ্রুবক। [ব. '০২; কু. '০৯; রা. '১৪]

সমাধান ঃ $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a} \quad \cdots (1)$

(1) কে x-এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই,

$$\frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{2\sqrt{y}}\frac{dy}{dx} = 0 \quad \therefore \frac{dy}{dx} = -\frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}}$$

বক্ররেখার উপর (x_1, y_1) যেকোন বিন্দুতে

$\sqrt{x_1} + \sqrt{y_1} = \sqrt{a} \cdots (2)$ এবং $\frac{dy}{dx} = -\frac{\sqrt{y_1}}{\sqrt{x_1}}$

$\therefore$ (x_1, y_1) বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ,

$$y - y_1 = -\frac{\sqrt{y_1}}{\sqrt{x_1}}(x - x_1)$$

$\Rightarrow y\sqrt{x_1} - \sqrt{x_1}y_1 = -x\sqrt{y_1} + x_1\sqrt{y_1}$

$\Rightarrow x\sqrt{y_1} + y\sqrt{x_1} = \sqrt{x_1}y_1 + x_1\sqrt{y_1}$

$\Rightarrow x\sqrt{y_1} + y\sqrt{x_1} = \sqrt{x_1 y_1}(\sqrt{y_1} + \sqrt{x_1})$

$\Rightarrow x\sqrt{y_1} + y\sqrt{x_1} = \sqrt{x_1 y_1}\sqrt{a}$ [(2) দ্বারা]

$\Rightarrow \frac{x}{\sqrt{a}\sqrt{x_1}} + \frac{y}{\sqrt{a}\sqrt{y_1}} = 1$

$\therefore$ অক্ষ দুইটি থেকে কর্তিত অংশের যোগফল

$= \sqrt{a}\sqrt{x_1} + \sqrt{a}\sqrt{y_1} = \sqrt{a}(\sqrt{x_1} + \sqrt{y_1})$

$= \sqrt{a}\sqrt{a} = a$

$\therefore$ যেকোন স্পর্শকের ক্ষেত্রে কর্তিত অংশের যোগফল $= a$, যা একটি ধ্রুবক।

4. $y = x^3 - 3x^2 + 2$ বক্ররেখার যে সকল বিন্দুতে স্পর্শক x-অক্ষের সমান্তরাল তাদের স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর। [ঢা. '০২; রা. '০৫, '১০; য. '০৯; দি. '১২]

সমাধান ঃ $y = x^3 - 3x^2 + 2$

$\therefore \frac{dy}{dx} = 3x^2 - 6x$

স্পর্শক x-অক্ষের সমান্তরাল হলে, $\frac{dy}{dx} = 0$

$\therefore 3x^2 - 6x = 0 \Rightarrow x(x-2) = 0$

$\Rightarrow x = 0, 2$

$x = 0$ হলে, $y = 2$

$x = 2$ হলে, $y = 8 - 12 + 2 = -2$

$\therefore$ নির্ণেয় বিন্দু $(0, 2), (2, -2)$

5.(a) $x^2 + 2ax + y^2 = 0$ বক্ররেখার যে সকল বিন্দুতে স্পর্শক x-অক্ষের উপর লম্ব তাদের স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর। [ব. '০৪, '০৭; য. '০৮; চ. '০৬; কু. '০৬; ঢা. '১৩]

সমাধান ঃ $x^2 + 2ax + y^2 = 0 \cdots \cdots (1)$

ইহাকে x-এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই,

$$2x + 2a + 2y\frac{dy}{dx} = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{x+a}{y}$$

স্পর্শক x-অক্ষের উপর লম্ব হলে, $\frac{dx}{dy} = 0$

$\therefore -\frac{y}{x+a} = 0 \Rightarrow y = 0$

(1) এ $y = 0$ বসিয়ে পাই, $x^2 + 2ax = 0$

$\Rightarrow x(x+2a) = 0 \quad \therefore x = 0, -2a$

$\therefore$ নির্ণেয় বিন্দু $(0, 0), (-2a, 0)$

5(b) $x^2 + 4y^2 = 8$ উপবৃত্তের যে সকল বিন্দুতে স্পর্শক x-অক্ষের উপর লম্ব তাদের স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর। [কু., রা., চ. '০৪; ব. '০৫; য. '০৬; সি. '০৭; দি. '০৯; কু. '১১]

সমাধান ঃ $x^2 + 4y^2 = 8 \cdots \cdots (1)$

ইহাকে x-এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই,

$$2x + 8y\frac{dy}{dx} = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{2x}{8y} = -\frac{x}{4y}$$

স্পর্শক x-অক্ষের উপর লম্ব হলে, $\frac{dx}{dy} = 0$

$\therefore -\frac{4y}{x} = 0 \Rightarrow y = 0$

(1) এ $y = 0$ বসিয়ে পাই, $x^2 = 8 \quad \therefore x = \pm 2\sqrt{2}$

$\therefore$ নির্ণেয় বিন্দু $(2\sqrt{2}, 0), (-2\sqrt{2}, 0)$

5(c) $y = x^2 + \sqrt{1-x^2}$ বক্ররেখার যে সকল কিন্দুতে স্পর্শক x- অক্ষের উপর লম্ব তাদের স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর। [ঢা.'০৬,'১০; চ. '০৭,'১১; ব. '০৯,'১৪; সি.'০৯,'১২; রা.'১৩; য.'১৩]

সমাধান ঃ $y = x^2 + \sqrt{1-x^2} \cdots\cdots (1)$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = 2x + \frac{1}{2\sqrt{1-x^2}}(-2x)$$

$$= \frac{x(2\sqrt{1-x^2}-1)}{\sqrt{1-x^2}}$$

স্পর্শক x- অক্ষের উপর লম্ব হলে, $\frac{dx}{dy} = 0$

$$\therefore \frac{\sqrt{1-x^2}}{x(2\sqrt{1-x^2}-1)} = 0 \Rightarrow \sqrt{1-x^2} = 0$$

$$\Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1$$

$x = 1$ হলে, $y = 1^2 + \sqrt{1-1} = 1$

$x = -1$ হলে, $y = (-1)^2 + \sqrt{1-1} = 1$

$\therefore$ নির্ণেয় কিন্দু $(1, 1), (-1, 1)$

(d) $x^2 + 4x + y^2 = 0$ বক্ররেখার যে সকল কিন্দুতে স্পর্শক x- অক্ষের উপর লম্ব তাদের স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর। [কু.'০৩]

সমাধান ঃ $x^2 + 4x + y^2 = 0 \cdots\cdots (1)$

ইহাকে x-এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই,

$$\therefore 2x + 4 + 2y\frac{dy}{dx} = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{x+2}{y}$$

স্পর্শক x- অক্ষের উপর লম্ব হলে, $\frac{dx}{dy} = 0$

$$\therefore -\frac{y}{x+2} = 0 \Rightarrow y = 0$$

(1) এ $y = 0$ বসিয়ে পাই, $x^2 + 4x = 0$

$\Rightarrow x(x+4) = 0 \Rightarrow x = 0, -4$

$\therefore$ নির্ণেয় কিন্দু $(0, 0), (-4, 0)$

5(e) $y = x^3 - 3x^2 - 2x + 1$ বক্ররেখার যে সমস্ত কিন্দুতে স্পর্শকগুলো অক্ষ দুইটির সাথে সমান সমান কোণ উৎপন্ন করে তাদের ভুজ নির্ণয় কর। [সি.'০৮; কু.'০৭, '১৩; রা.'০৮,'১২; দি.'১০; ঢা.'১১; চ.'১৩; য.'১২]

সমাধান ঃ $y = x^3 - 3x^2 - 2x + 1 \cdots\cdots (1)$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = 3x^2 - 6x - 2$$

স্পর্শক অক্ষ দুইটির সাথে সমান সমান কোণ উৎপন্ন করলে, $\frac{dy}{dx} = \pm 1$ $\therefore$ $3x^2 - 6x - 2 = \pm 1$

'+' নিয়ে, $3x^2 - 6x - 2 = 1$

$\Rightarrow 3x^2 - 6x - 3 = 0 \Rightarrow x^2 - 2x - 1 = 0$

$$\therefore x = \frac{2 \pm \sqrt{4+4}}{2} = \frac{2 \pm 2\sqrt{2}}{2} = 1 \pm 2\sqrt{2}$$

'–' নিয়ে, $3x^2 - 6x - 2 = -1$

$\Rightarrow 3x^2 - 6x - 1 = 0$

$$\therefore x = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 4.3.(-1)}}{2.3} = \frac{6 \pm \sqrt{48}}{6}$$

$$= \frac{3 \pm 2\sqrt{3}}{3}$$

$\therefore$ কিন্দুর ভুজ $1 \pm \sqrt{2}$, $\frac{3 \pm 2\sqrt{3}}{3}$

6. $y = (x+1)(x-1)(x-3)$ বক্ররেখার যে সব কিন্দুতে স্পর্শক x- অক্ষকে ছেদ করে ঐ কিন্দুগুলোতে স্পর্শকের ঢাল নির্ণয় কর। [কু., ঢা.'১০; সি.'১১; দি.'১৩]

সমাধান ঃ $y = (x+1)(x-1)(x-3) \cdots (1)$

$$\frac{dy}{dx} = (x+1)(x-1)\frac{d}{dx}(x-3) + (x+1)(x-3)\frac{d}{dx}(x-1) + (x-1)(x+3)\frac{d}{dx}(x+1)$$

$$= (x+1)(x-1) + (x+1)(x-3) + (x-1)(x-3)$$

যে সব কিন্দুতে স্পর্শক x- অক্ষকে ছেদ করে ঐ সব কিন্দুর y –স্থানাঙ্ক $= 0$

(1) এ $y = 0$ বসিয়ে পাই, $x = -1, 1, 3$

$\therefore$ কিন্দুগুলো $(-1,0), (1, 0), (3, 0)$

$\therefore$ $(-1, 0)$ কিন্দুতে স্পর্শকের ঢাল $= (-2)(-4) = 8$

$(1, 0)$ কিন্দুতে স্পর্শকের ঢাল $= (2)(-2) = -4$

$(3, 0)$ কিন্দুতে স্পর্শকের ঢাল $= (4)(2) = 8$

7.(a) a-এর মান কত হলে, $y = ax(1-x)$ বক্ররেখার মূলকিন্দুতে স্পর্শকটি x-অক্ষের সাথে 60^0 কোণ উৎপন্ন করে। [সি.'০৬,'১০,'১৪ ; ব.'০৪,'০৮,'১২ ; চ.'০৬ ;

য.'০৪,'০৮ ; রা.'০৪,'০৭,'০৯ ; ঢা.'০৮; কু.'১২,'১৪]

সমাধান ঃ $y = ax(1-x) = a(x - x^2)$

$\therefore \frac{dy}{dx} = c(1-2x)$

মূলবিন্দুতে $\frac{dy}{dx} = a(1+0) = a$

কিন্তু মূলবিন্দুতে ঢাল , $\frac{dy}{dx} = \tan(\pm 60^0)$

$\therefore a = \tan(\pm 60^0) = \pm\sqrt{3}$

(b) c-এর মান কত হলে, $y = cx(1+x)$ বক্ররেখার মূলবিন্দুতে স্পর্শকটি x-অক্ষের সাথে 30^0 কোণ উৎপন্ন করে। [কু.'০৬; ব.'০৬; য.'০৭; চ.'১২; ঢা.'১৪]

সমাধান ঃ $y = cx(1+x) = c(x + x^2)$

$\therefore \frac{dy}{dx} = c(1+2x)$

মূলবিন্দুতে $\frac{dy}{dx} = c(1+0) = c$

কিন্তু মূলবিন্দুতে ঢাল , $\frac{dy}{dx} = \tan(\pm 30^0)$

$\therefore c = \tan(\pm 30^0) = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$

8(a) কোন সরলরেখায় একটি গতিশীল কণা t সময়ে $s = at^2 + bt + c$ দূরত্ব অতিক্রম করে। a, b, c ধ্রুবক এবং t সময় পরে কণাটির বেগ v হলে, দেখাও যে, $4a(s-c) = v^2 - b^2$ [য., চ.'০৫; দি.'০৯; কু.'১৪]

সমাধান ঃ এখানে $s = at^2 + bt + c \quad \cdots\cdots(1)$

ইহাকে t এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই,

$\frac{ds}{dt} = 2at + b$

$\therefore$ t সেকেন্ডে পর কণাটির বেগ $v = 2at + b$

$\Rightarrow v^2 = 4a^2t^2 + 4abt + b^2$ [বর্গ করে]

$\Rightarrow v^2 - b^2 = 4a(at^2 + bt)$

$\Rightarrow v^2 - b^2 = 4a(s-c)$ [(1) দ্বারা]

$\therefore 4a(s-c) = v^2 - b^2$

8(b) যদি কোন বৃত্তের ব্যাসার্ধ সমহারে বৃদ্ধি পায় , তবে দেখাও যে, তার ক্ষেত্রফলের বৃদ্ধিহার তার ব্যাসার্ধের সাথে সমানুপাতিক হবে। [ব. '০৬; চ.'০৮;দি.'১১; রা.'১৪]

প্রমাণ : মনে করি, t সময়ে প্রদত্ত বৃত্তের ব্যাসার্ধ r এবং ক্ষেত্রফল A . তাহলে , $A = \pi r^2$

ইহাকে t এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই,

$\frac{dA}{dt} = \frac{d}{dt}(\pi r^2) = 2r\pi\frac{dr}{dt}$

প্রশ্নমতে, $\frac{dr}{dt}$ = ধ্রুবক [$\because$ ব্যাসার্ধ সমহারে বৃদ্ধি পায়।]

$\therefore \frac{dA}{dt}$ = ধ্রুবক $\times r$ [$\because 2\pi\frac{dr}{dt}$ একটি ধ্রুবক]

$\Rightarrow \frac{dA}{dt} \propto r$

$\therefore$ ক্ষেত্রফলের বৃদ্ধিহার তার ব্যাসার্ধের সমানুপাতিক।

8(c) যদি একটি সমবাহু ত্রিভুজের বাহুগুলো প্রতি সেকেন্ডে $\sqrt{3}$ সে.মি. এবং এর ক্ষেত্রফল প্রতি সেকেন্ডে 12 বর্গ সে.মি. পরিমাণ বৃদ্ধি পায়, তাহলে সমবাহু ত্রিভুজের বাহুর দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর। [বুয়েট.'০৮]

সমাধান ঃ ধরি, সমবাহু ত্রিভুজটির বাহুর দৈর্ঘ্য x সে.মি. এবং এর ক্ষেত্রফল A বর্গ সে.মি.। তাহলে,

$A = \frac{\sqrt{3}}{4}x^2 \Rightarrow \frac{dA}{dt} = \frac{\sqrt{3}}{4} \times 2x\frac{dx}{dt} \quad \cdots\cdots (i)$

প্রশ্নমতে, $\frac{dx}{dt} = \sqrt{3}$ এবং $\frac{dA}{dt} = 12$

(i) হতে পাই, $12 = \frac{\sqrt{3}}{4} \times 2x \times \sqrt{3}$

$\Rightarrow 3x = 24 \Rightarrow x = 8$ $\therefore$ বাহুর দৈর্ঘ্য 8 সে.মি.।

সম্ভাব্য ধাপসহ প্রশ্ন:

9. (a) $y = x^3 - 2x^2 + 4x$ বক্ররেখার (2, 5) বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ নির্ণয় কর। [ব.'০৩]

সমাধান ঃ $y = x^3 - 2x^2 + 4x$

$\therefore \frac{dy}{dx} = 3x^2 - 4x + 4$ (১)

(2, 5) বিন্দুতে $\frac{dy}{dx} = 3.2^2 - 4(2) + 4$ (১)

$= 12 - 8 + 4 = 8$

∴ প্রদত্ত বক্ররেখার (2,5) কিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ

$y - 5 = 8(x - 2) \Rightarrow 8x - y - 11 = 0$ (১)

9(b) $x^2 - 5xy + y^2 - 5x + 6y + 9 = 0$ বক্ররেখার (2,1) কিন্দুতে অভিলম্বের সমীকরণ নির্ণয় কর। **[সি.'০২]**

সমাধান ঃ $x^2 - 5xy + y^2 - 5x + 6y + 9 = 0$

ইহাকে x-এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই,

$$2x - 5x\frac{dy}{dx} - 5y + 2y\frac{dy}{dx} - 5 + 6\frac{dy}{dx} = 0 \quad (২)$$

$$\Rightarrow -(5x - 2y - 6)\frac{dy}{dx} = -(2x - 5y - 5)$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{2x - 5y - 5}{5x - 2y - 6}$$

(2, 1) কিন্দুতে $\frac{dy}{dx} = \frac{4 - 5 - 5}{10 - 2 - 6} = \frac{-6}{2} = -3$ (১)

∴ প্রদত্ত বক্ররেখার (2,1) কিন্দুতে অভিলম্বের সমীকরণ

$$y - 1 = -\frac{1}{-3}(x - 2) \quad (১)$$

$\Rightarrow 3y - 3 = x - 2 \quad \therefore x - 3y + 1 = 0$

9. (c) $x^3 - 3xy + y^3 = 3$ অধিবৃত্তের (1,–1) কিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ নির্ণয় কর। **[রা.'০৩]**

সমাধান ঃ $x^3 - 3xy + y^3 = 3$

ইহাকে x-এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই,

$$3x^2 - 3x\frac{dy}{dx} - 3y + 3y^2\frac{dy}{dx} = 0 \quad (২)$$

$$\Rightarrow 3(y^2 - x)\frac{dy}{dx} = 3(y - x^2)$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{y - x^2}{y^2 - x}$$

$(1, -1)$ কিন্দুতে $\frac{dy}{dx} = \frac{-1 - 1}{1 - 1}$ (১)

অর্থাৎ $\left(\frac{dx}{dy}\right)_{(1,-1)} = \frac{0}{-2} = 0$

∴ প্রদত্ত বক্ররেখার (1,–1) কিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ

$$\left(\frac{dx}{dy}\right)_{(1,-1)}(y + 1) = x - 1$$

$\Rightarrow 0.(y + 1) = x - 1 \quad \therefore x - 1 = 0$ (১)

9. (d) $x^3 - 3axy + y^3 = 0$ বক্ররেখার (x_1, y_1) কিন্দুতে অভিলম্বের সমীকরণ নির্ণয় কর। **[চ.'০০]**

সমাধান ঃ $x^3 - 3axy + y^3 = 0$

ইহাকে x-এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই,

$$3x^2 - 3ax\frac{dy}{dx} - 3ay + 3y^2\frac{dy}{dx} = 0 \quad (২)$$

$$\Rightarrow 3(y^2 - ax)\frac{dy}{dx} = 3(ay - x^2)$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{ay - x^2}{y^2 - ax}$$

(x_1, y_1) কিন্দুতে $\frac{dy}{dx} = \frac{ay_1 - x_1^2}{y_1^2 - ax_1}$ (১)

∴ প্রদত্ত বক্ররেখার (x_1, y_1) কিন্দুতে অভিলম্বের সমীকরণ $y - y_1 = -\frac{y_1^2 - ax_1}{ay_1 - x_1^2}(x - x_1)$

$\Rightarrow (y - y_1)(ay_1 - x_1^2) + (x - x_1)(y_1^2 - ax_1)$ (১)

9. (e) দেখাও যে, $y^2 = 4ax$ পরাবৃত্তের (x_1, y_1) কিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ $yy_1 = 2a(x + x_1)$ **[ব.'০১]**

প্রমাণ ঃ $y^2 = 4ax$

ইহাকে x-এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই,

$$2y\frac{dy}{dx} = 4a \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{2a}{y} \quad (১)$$

(x_1, y_1) কিন্দুতে $\frac{dy}{dx} = \frac{2a}{y_1}$ (১)

∴ প্রদত্ত পরাবৃত্তের (x_1, y_1) কিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ $y - y_1 = \frac{2a}{y_1}(x - x_1)$ (১)

$\Rightarrow yy_1 - y_1^2 = 2a(x - x_1)$

$\Rightarrow yy_1 - 4ax_1 = 2a(x - x_1)$; যেহেতু (x_1, y_1) কিন্দু $y^2 = 4ax$ পরাবৃত্তের উপর অবস্থিত।

$\therefore yy_1 = 2a(x + x_1)$ (Showed) (১)

9(f) $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$ বক্ররেখার (x_1, y_1) কিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3} \cdots \cdots (1)$

ইহাকে x-এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই,

$$\frac{2}{3}x^{\frac{2}{3}-1} + \frac{2}{3}y^{\frac{2}{3}-1}\frac{dy}{dx} = 0 \quad (১)$$

$$\Rightarrow x^{-\frac{1}{3}} + y^{-\frac{1}{3}}\frac{dy}{dx} = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{x^{-\frac{1}{3}}}{y^{-\frac{1}{3}}}$$

$$(x_1, y_1) \text{ কিন্দুতে } \frac{dy}{dx} = -\frac{x_1^{-\frac{1}{3}}}{y_1^{-\frac{1}{3}}} \quad (১)$$

$\therefore$ প্রদত্ত বক্ররেখার (x_1, y_1) কিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ $y - y_1 = -\frac{x_1^{-\frac{1}{3}}}{y_1^{-\frac{1}{3}}}(x - x_1)$ (১)

$$\Rightarrow yy_1^{-\frac{1}{3}} - y_1^{\frac{2}{3}} = -xx_1^{-\frac{1}{3}} + x_1^{\frac{2}{3}}$$

$$\Rightarrow xx_1^{-\frac{1}{3}} + yy_1^{-\frac{1}{3}} = x_1^{\frac{2}{3}} + y_1^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$$; যেহেতু (x_1, y_1) কিন্দু (1) বক্ররেখার উপর অবস্থিত।

$\therefore xx_1^{-\frac{1}{3}} + yy_1^{-\frac{1}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ (Ans.) (১)

10. (a) $y^2 - 4x - 6y + 20 = 0$ বক্ররেখার (3,2) কিন্দুতে স্পর্শক ও অভিলম্বের সমীকরণ নির্ণয় কর। **[চ.'০২]**

সমাধান ঃ $y^2 - 4x - 6y + 20 = 0$

ইহাকে x-এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই,

$$2y\frac{dy}{dx} - 4 - 6\frac{dy}{dx} = 0 \quad (১)$$

$$\Rightarrow 2(y-3)\frac{dy}{dx} = 4 \quad \therefore \frac{dy}{dx} = \frac{2}{y-3}$$

$$(3, 2) \text{ কিন্দুতে } \frac{dy}{dx} = \frac{2}{2-3} = -2 \quad (১)$$

$\therefore$ প্রদত্ত বক্ররেখার (3 , 2) কিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ

$y - 2 = -2(x - 3) \Rightarrow 2x + y = 8$ (১)

এবং অভিলম্বের সমীকরণ, $y - 2 = \frac{1}{2}(x - 3)$

$\Rightarrow 2y - 4 = x - 3 \quad \therefore x - 2y + 1 = 0$ (১)

10. (b) $y = x^3 - 2x^2 + 4$ বক্ররেখার (2 , 4) কিন্দুতে স্পর্শক ও অভিলম্বের সমীকরণ নির্ণয় কর। **[চ.'০৮,'১১]**

সমাধান ঃ $y = x^3 - 2x^2 + 4$

$\therefore \frac{dy}{dx} = 3x^2 - 4x$ (১)

(2 , 4) কিন্দুতে $\frac{dy}{dx} = 3 \times 4 - 8 = 4$ (১)

$\therefore$ প্রদত্ত বক্ররেখার (2 , 4) কিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ

$y - 4 = 4(x - 2)$

$\Rightarrow y - 4 = 4x - 8 \quad \therefore 4x - y - 4 = 0$ (১)

এবং অভিলম্বের সমীকরণ, $y - 4 = -\frac{1}{4}(x - 2)$

$\Rightarrow 4y - 16 = -x + 2 \quad \therefore x + 4y - 18 = 0$ (১)

10. (c) $x^2 + y^2 - 6x - 10y + 21 = 0$ বৃত্তের (1, 2) কিন্দুতে স্পর্শক ও অভিলম্বের সমীকরণ নির্ণয় কর। **[য.'০৩; রা.'১১]**

সমাধান ঃ $x^2 + y^2 - 6x - 10y + 21 = 0$

ইহাকে x-এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই,

$$2x + 2y\frac{dy}{dx} - 6 - 10\frac{dy}{dx} = 0 \quad (১)$$

$$\Rightarrow 2(y-5)\frac{dy}{dx} = -2(x-3)$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{x-3}{y-5}$$

$$(1, 2) \text{ কিন্দুতে } \frac{dy}{dx} = -\frac{1-3}{2-5} = -\frac{2}{3} \quad (১)$$

$\therefore$ প্রদত্ত বক্ররেখার (1 , 2) কিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ

$y - 2 = -\frac{2}{3}(x - 1)$ (১)

$\Rightarrow 3y - 6 = -2x + 2 \quad \therefore 2x + 3y - 8 = 0$

এবং অভিলম্বের সমীকরণ, $y-2=\frac{3}{2}(x-1)$

$\Rightarrow 2y-4=3x-3 \therefore 3x-2y+1=0$ (১)

10. (d) $y=x^3-3x+2$ বক্ররেখার $(2, -2)$ কিন্দুতে স্পর্শক ও অভিলম্বের সমীকরণ নির্ণয় কর। [ঢা.'০৭]

সমাধান ঃ $y=x^3-3x+2 \therefore \frac{dy}{dx}=3x^2-3$ (১)

$(2,-2)$ কিন্দুতে $\frac{dy}{dx}=3\times4-3=9$ (১)

$\therefore$ প্রদত্ত বক্ররেখার $(2,-2)$ কিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ $y+2=9(x-2)$ (১)

$\Rightarrow y+2=9x-18 \therefore 9x-y-20=0$

এবং অভিলম্বের সমীকরণ, $y+2=-\frac{1}{9}(x-2)$

$\Rightarrow 9y+18=-x+2 \therefore x-9y-16=0$ (১)

11. (a) $y(x-2)(x-3)-x+3=0$ বক্ররেখাটি যে সমস্ত কিন্দুতে x-অক্ষকে ছেদ করে, ঐ কিন্দুগুলোতে স্পর্শকের সমীকরণ নির্ণয় কর। [চ.'০৫]

সমাধান ঃ $y(x-1)(x-2)-x+3=0$

$\Rightarrow y(x^2-3x+2)-x+3=0 \cdots(1)$

বক্ররেখাটি x-অক্ষকে যে কিন্দুতে ছেদ করে তার কোটি $y=0$. (1) এ $y=0$ বসিয়ে পাই $x=3$.

$\therefore$ বক্ররেখাটি x-অক্ষকে $(3,0)$ কিন্দুতে ছেদ করে। (১)

(1) বক্ররেখাকে x-এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই, $(x^2-3x+2)\frac{dy}{dx}+y(2x-3)-1=0$ (১)

$\Rightarrow \frac{dy}{dx}=\frac{1-y(2x-3)}{x^2-3x+2}$

$(3,0)$ কিন্দুতে $\frac{dy}{dx}=\frac{1}{9-9+2}=\frac{1}{2}$ (১)

$\therefore$ নির্ণেয় স্পর্শকের সমীকরণ, $y=\frac{1}{2}(x-3)$

$\Rightarrow x-2y-3=0$ (১)

11(b) প্রমাণ কর যে, $3x^2+4xy+5y^2-4=0$ বক্ররেখাটি যে সমস্ত কিন্দুতে $3x+2y=0$ ও $2x+5y=0$ রেখাকে ছেদ করে, ঐ কিন্দুগুলোতে অঙ্কিত স্পর্শক স্থানাঙ্কের অক্ষদ্বয়ের সমান্তরাল।

প্রমাণ ঃ $3x^2+4xy+5y^2-4=0 \cdots(1)$

$3x+2y=0 \Rightarrow y=-\frac{3}{2}x$ হতে y-এর মান (1) এ বসিয়ে পাই,

$3x^2+4x(\frac{-3}{2}x)+5(\frac{-3}{2}x)^2-4=0$

$\Rightarrow 3x^2-6x^2+\frac{45x^2}{4}-4=0$

$\Rightarrow -12x^2+45x^2=16 \therefore x=\pm\frac{4}{\sqrt{33}}$

$\therefore x=\frac{4}{\sqrt{33}}$ হলে, $y=-\frac{3}{2}\times(\frac{4}{\sqrt{33}})=-\frac{6}{\sqrt{33}}$

$x=-\frac{4}{\sqrt{33}}$ হলে, $y=-\frac{3}{2}\times(-\frac{4}{\sqrt{33}})=\frac{6}{\sqrt{33}}$

$\therefore$ (1) বক্ররেখাটি $3x+2y=0$ রেখাকে $(\frac{4}{\sqrt{33}},-\frac{6}{\sqrt{33}})$ ও $(-\frac{4}{\sqrt{33}},\frac{6}{\sqrt{33}})$ কিন্দুতে ছেদ করে। (১)

(1) কে x-এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই,

$6x+4x\frac{dy}{dx}+4y+10y\frac{dy}{dx}=0$ (১)

$\Rightarrow 2(2x+5y)\frac{dy}{dx}=-2(3x+2y)$

$\Rightarrow \frac{dy}{dx}=-\frac{3x+2y}{2x+5y}$

$(\frac{4}{\sqrt{33}},-\frac{6}{\sqrt{33}})$ ও $(-\frac{4}{\sqrt{33}},\frac{6}{\sqrt{33}})$ উভয় কিন্দুতে $3x+2y=0$ অর্থাৎ $\frac{dy}{dx}=-\frac{3x+2y}{2x+5y}=0$ (১)

$\therefore$ এ কিন্দু দুইটিতে অঙ্কিত স্পর্শক x-অক্ষের সমান্তরাল। (১)

আবার, $2x+5y=0 \Rightarrow y=-\frac{2}{5}x$ হতে y- এর মান (1) সমীকরণে বসিয়ে পাই,

$3x^2+4x(-\frac{2}{5}x)+5(-\frac{2}{5}x)^2-4=0$

$\Rightarrow 15x^2-8x^2+4x^2-20=0$

$\Rightarrow 11x^2 = 20 \Rightarrow x = \pm\frac{2\sqrt{5}}{\sqrt{11}}$

$\therefore x = \frac{2\sqrt{5}}{\sqrt{11}}$ হলে, $y = -\frac{2}{5}\times\frac{2\sqrt{5}}{\sqrt{11}} = -\frac{4}{\sqrt{55}}$

$x = -\frac{2\sqrt{5}}{\sqrt{11}}$ হলে, $y = -\frac{2}{5}\times(-\frac{2\sqrt{5}}{\sqrt{11}}) = \frac{4}{\sqrt{55}}$

$\therefore$ (1) বক্ররেখাটি $2x+5y=0$ রেখাকে $(\frac{2\sqrt{5}}{\sqrt{11}}, -\frac{4}{\sqrt{55}})$ ও $(-\frac{2\sqrt{5}}{\sqrt{11}}, \frac{4}{\sqrt{55}})$ বিন্দুতে ছেদ করে। (১)

$(\frac{2\sqrt{5}}{\sqrt{11}}, -\frac{4}{\sqrt{55}})$ ও $(-\frac{2\sqrt{5}}{\sqrt{11}}, \frac{4}{\sqrt{55}})$ উভয় বিন্দুতে $2x+5y=0$ অর্থাৎ $\frac{dx}{dy} = -\frac{2x+5y}{3x+2y} = 0$ (১)

$\therefore$ এ বিন্দু দুইটিতে অঙ্কিত স্পর্শক x-অক্ষের লম্ব অর্থাৎ y-অক্ষের সমান্তরাল। (১)

12(a) $y = 4x^3 + 3x^2 - 6x + 1$ বক্ররেখার যে সকল বিন্দুতে স্পর্শক x- অক্ষের সমান্তরাল তাদের স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর। [ঢা.'০০]

সমাধান ঃ $y = 4x^3 + 3x^2 - 6x + 1$

$\therefore \frac{dy}{dx} = 12x^2 + 6x - 6$ (১)

স্পর্শক x- অক্ষের সমান্তরাল হলে, $\frac{dy}{dx} = 0$ (১)

$\therefore 12x^2 + 6x - 6 = 0 \Rightarrow 2x^2 + x - 1 = 0$

$\Rightarrow 2x^2 + 2x - x - 1 = 0$

$\Rightarrow 2x(x+1) - 1(x+1) = 0$

$\Rightarrow (x+1)(2x-1) = 0 \quad \therefore x = -1, \frac{1}{2}$ (১)

$x = -1$ হলে, $y = -4 + 3 + 6 + 1 = 6$

$x = \frac{1}{2}$ হলে, $y = 4.\frac{1}{8} + 3.\frac{1}{4} - 6.\frac{1}{2} + 1$

$= \frac{2+3-8}{4} = -\frac{3}{4}$

$\therefore$ বিন্দু দুইটি $(-1, 6), (\frac{1}{2}, -\frac{3}{4})$ (১)

12(b) $x^2 + y^2 - 2x - 3 = 0$ বক্ররেখার যে সকল বিন্দুতে স্পর্শক x- অক্ষের সমান্তরাল তাদের স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর। [মা.বো.'০৯; ব.'১৩]

সমাধান ঃ $x^2 + y^2 - 2x - 3 = 0 \cdots\cdots(1)$

ইহাকে x এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই,

$2x + 2y\frac{dy}{dx} - 2 = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1-x}{y}$ (১)

স্পর্শক x- অক্ষের সমান্তরাল হলে, $\frac{dy}{dx} = 0$ (১)

$\therefore \frac{1-x}{y} = 0 \Rightarrow x = 1$

(1) এ $x = 1$ বসিয়ে পাই, $1 + y^2 - 2.1 - 3 = 0$ (১)

$\Rightarrow y^2 = 4 \Rightarrow y = \pm 2$

$\therefore$ নির্ণেয় বিন্দু $(1, 2), (1, -2)$ (১)

12. (c) $y = (x-3)^2(x-2)$ বক্ররেখার যে সকল বিন্দুতে স্পর্শক x- অক্ষের সমান্তরাল তাদের স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর। [ঢা.'০৫]

সমাধান ঃ $y = (x-3)^2(x-2)$

$\therefore \frac{dy}{dx} = (x-3)^2.1 + 2(x-3)(x-2)$ (১)

$= (x-3)(x-3+2x-4)$

$= (x-3)(3x-7)$

স্পর্শক x- অক্ষের সমান্তরাল হলে, $\frac{dy}{dx} = 0$ (১)

$\therefore (x-3)(3x-7) = 0 \Rightarrow x = 3, \frac{7}{3}$

$x = 3$ হলে, $y = (3-3)^2(3-2) = 0$ (১)

$x = \frac{7}{3}$ হলে, $y = (\frac{7}{3}-3)^2(\frac{7}{3}-2)$

$= \frac{4}{9}\times\frac{1}{3} = \frac{4}{27}$

$\therefore$ নির্ণেয় বিন্দু $(3, 0), (\frac{7}{3}, \frac{4}{27})$ (১)

12. (d) $y^3 = x^2(2a - x)$ বক্ররেখার যে সকল বিন্দুতে স্পর্শক x- অক্ষের সমান্তরাল তাদের স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর। [চ.'০৯]

সমাধান ঃ $y^3 = x^2(2a - x)$

$\therefore \quad 3y^2 \frac{dy}{dx} = x^2(-1) + 2x(2a - x)$ (২)

স্পর্শক x-অক্ষের সমান্তরাল হলে, $\frac{dy}{dx} = 0$ (১)

$\therefore \quad \frac{x(4a-3x)}{2y} = 0 \Rightarrow x = 0, \frac{4a}{3}$

$x = 0$ হলে, $y^3 = 0 \Rightarrow y = 0$

$x = \frac{4a}{3}$ হলে, $y^3 = \frac{16a^2}{9}(2a - \frac{4a}{3})$

$\Rightarrow \quad y^3 = \frac{16a^2}{9} \times \frac{2a}{3} \quad \therefore y = \frac{2a\sqrt[3]{4}}{3}$

$\therefore$ নির্ণেয় কিন্দু $(0, 0), (\frac{4}{3}a, \frac{2\sqrt[3]{4}}{3}a)$ (১)

13. (a) $y = 3x^2 + 2x - 1$ বক্ররেখার $(1, 0)$ কিন্দুতে স্পর্শকের ঢাল নির্ণয় কর। [রা.'০১]

সমাধান ঃ $y = 3x^2 + 2x - 1 \quad \therefore \frac{dy}{dx} = 6x + 2$ (১)

$(1, 0)$ কিন্দুতে $\frac{dy}{dx} = 6 \times 1 + 2 = 8$ (১)

$\therefore$ প্রদত্ত বক্ররেখার $(1, 0)$ কিন্দুতে স্পর্শকের ঢাল 8 (১)

13. (b) $x^2 + xy + y^2 = 4$ বক্ররেখার $(2, -2)$ কিন্দুতে স্পর্শকের ঢাল নির্ণয় কর। [সি.'০৩]

সমাধান ঃ $x^2 + xy + y^2 = 4$

ইহাকে x-এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই,

$2x + x\frac{dy}{dx} + y + 2y\frac{dy}{dx} = 0$ (২)

$\Rightarrow (x + 2y)\frac{dy}{dx} = -(2x + y)$

$\Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{2x+y}{x+2y}$

$(2, -2)$ কিন্দুতে $\frac{dy}{dx} = -\frac{4-2}{2-4} = 1$ (১)

$\therefore$ প্রদত্ত বক্ররেখার $(2,-2)$ কিন্দুতে স্পর্শকের ঢাল 1. (১)

13. (c) $x^3 - 3xy + y^3 = 3$ বক্ররেখাটি $(2, 1)$ দিয়ে অতিক্রম করে। ঐ কিন্দুতে স্পর্শকের ঢাল নির্ণয় কর। [চ.'০৩]

সমাধান ঃ $x^3 - 3xy + y^3 = 3$

ইহাকে x-এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই,

$3x^2 - 3x\frac{dy}{dx} - 3y.1 + 3y^2\frac{dy}{dx} = 0$ (২)

$\Rightarrow \quad -3(x - y^2)\frac{dy}{dx} = -3(x^2 - y)$

$\Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = \frac{x^2 - y}{x - y^2}$

$(2, 1)$ কিন্দুতে $\frac{dy}{dx} = \frac{4-1}{2-1} = 3$ (১)

$\therefore$ স্পর্শকের ঢাল 3 (১)

14. (a) a-এর মান কত হলে, $y = ax(1-x)$ বক্ররেখার মূলকিন্দুতে স্পর্শকটি x-অক্ষের সাথে 30^0 কোণ উৎপন্ন করে। [ঢা.'০৪]

সমাধান ঃ $y = ax(1-x) = a(x - x^2)$

$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = a(1 - 2x)$ (১)

মূলকিন্দুতে $\frac{dy}{dx} = a(1 + 0) = a$ (১)

কিন্তু মূলকিন্দুতে ঢাল, $\frac{dy}{dx} = \tan(\pm 30^0)$ (১)

$\therefore \quad a = \tan(\pm 30^0) = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$ (১)

14. (b) $y = ax^2 + bx + c$ বক্ররেখাটি মূলকিন্দু এবং $(1, 1)$ কিন্দু দিয়ে যায়। যদি মূলকিন্দুতে বক্ররেখাটির ঢাল 2 হয়, তবে a, b, c এর মান নির্ণয়। [ঢা.'০১]

সমাধান ঃ $y = ax^2 + bx + c$

$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = 2ax + b$ (১)

মূলকিন্দুতে $\frac{dy}{dx} = b$ (১)

কিন্তু মূলকিন্দুতে ঢাল, $\frac{dy}{dx} = 2 \quad \therefore b = 2$ (১)

বক্ররেখাটি মূলকিন্দু এবং $(1, 1)$ কিন্দু দিয়ে যায়।

$\therefore \quad 0 = a.0 + b.0 + c = 0 \Rightarrow c = 0$ এবং

$1 = a + b + c \Rightarrow 1 = a + 2 + 0 \Rightarrow a = -1$

$\therefore a=-1, b=2, c=0$ (১)

15. (a) একটি গতিশীল কণার কোন সরলরেখায় t সময়ে অতিক্রান্ত দূরত্ব $s = 63t - 6t^2 - t^3$ দ্বারা প্রকাশিত হয়। 2 সেকেন্ড শেষে তার বেগ এবং থামার পূর্বে অতিক্রান্ত দূরত্ব নির্ণয় কর। [ঢ.'০২; সি.'০৪]

সমাধান ঃ এখানে $s = 63t - 6t^2 - t^3$

ইহাকে t এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই,

$\frac{ds}{dt} = 63 - 12t - 3t^2$ (১)

$\therefore$ t সময় পর কণাটির বেগ $= 63 - 12t - 3t^2$

$\therefore$ 2 সেকেন্ড শেষে কণাটির বেগ $= (63 - 24 - 12)$ একক/সেকেন্ড $= 27$ একক/সেকেন্ড (Ans.) (১)

আবার কণাটির থেমে যাবে যখন বেগ $\frac{ds}{dt} = 0$ (১)

$\therefore 63 - 12t - 3t^2 = 0 \Rightarrow t^2 + 4t - 21 = 0$

$\Rightarrow (t-3)(t+7) = 0 \quad \therefore t = 3 \quad [\because t \neq -7]$

$\therefore$ থামার পূর্বে কণাটি 3 সেকেন্ড চলেছিল এবং 3 সেকেন্ডে অতিক্রান্ত দূরত্ব $s = (189 - 54 - 27)$

$= 108$ একক। (১)

15(b) একটি কণা সরলরেখায় এমনভাবে চলে যেন $s = \sqrt{t}$ হয়। দেখাও যে কণাটির ত্বরণ ঋণাত্মক এবং বেগের ঘনফলের সাথে সমানুপাতিক। [সি.'০২]

প্রমাণ : $s = \sqrt{t} = t^{\frac{1}{2}} \quad \therefore \frac{ds}{dt} = \frac{1}{2}t^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2}t^{-\frac{1}{2}}$ (১)

এবং $\frac{d^2s}{dt^2} = \frac{1}{2}(-\frac{1}{2})t^{-\frac{1}{2}-1} = -\frac{1}{4}t^{-\frac{3}{2}}$ (১)

$\therefore$ কণাটির বেগ $= \frac{1}{2}t^{-\frac{1}{2}}$ এবং (১)

ত্বরণ $= -\frac{1}{4}t^{-\frac{3}{2}} = -2(\frac{1}{2}t^{-\frac{1}{2}})^3 = -2 \times (\text{বেগ})^3$

$\therefore$ ত্বরণ ঋণাত্মক এবং তা বেগের ঘনফলের সমানুপাতিক। (১)

15(c) একটি বস্তুর গতির সমীকরণ $s = t^3 + \frac{1}{t^3}$ হলে দেখাও যে, এর ত্বরণ সর্বদাই ধনাত্মক এবং $t = 10$ হলে এর গতিবেগ নির্ণয় কর। [চ.'০১]

প্রমাণ : গতির সমীকরণ $s = t^3 + \frac{1}{t^3}$

$\therefore$ t সময়ে গতিবেগ, $\frac{ds}{dt} = 3t^2 - \frac{3}{t^4}$ (১)

যখন $t = 10$, গতিবেগ $= 300 - \frac{3}{10^4}$

$= 299.99$ একক (প্রায়) (১)

$\therefore$ $t = 10$ হলে,

আবার t সময়ে ত্বরণ, $\frac{d^2s}{dt^2} = 6t + \frac{12}{t^5} > 0$ (১)

$[\because t > 0]$

$\therefore$ ত্বরণের মান সব সময় ধনাত্মক। (১)

15. (d) একটি কণা সরলপথে এমনভাবে চলে যেন t সময়ে তার অতিক্রান্ত দূরত্ব $s = \sqrt{2t}$ হয়। দেখাও যে, কণাটির ত্বরণ বেগের ঘনফলের সাথে সমানুপাতিক। [ঢা.'০১]

প্রমাণ : এখানে $s = \sqrt{2t} = \sqrt{2}\, t^{\frac{1}{2}}$

$\therefore$ কণাটির বেগ $= \frac{ds}{dt} = \sqrt{2}.\frac{1}{2}t^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{\sqrt{2}}t^{-\frac{1}{2}}$ (২)

ত্বরণ $= \frac{d^2s}{dt^2} = -\frac{1}{2\sqrt{2}}t^{-\frac{3}{2}} = -(\frac{1}{\sqrt{2}}t^{-\frac{1}{2}})^3$ (১)

$= -(\text{বেগ})^3$

$\therefore$ কণাটির ত্বরণ বেগের ঘনফলের সাথে সমানুপাতিক। (১)

15. (e) একটি পুকুরের একটি বৃত্তাকার ঢেউ এর পরিধির বৃদ্ধির হার 'a' ফুট/সেকেন্ড। দেখাও যে, এর ব্যাসার্ধের বৃদ্ধির হার $a/2\pi$ ফুট / সেকেন্ড। [প্র.ভ.প.'৯৭]

প্রমাণ : মনে করি, t সেকেন্ডে প্রদত্ত বৃত্তাকার ঢেউ এর ব্যাসার্ধ r ফুট এবং পরিধির S ফুট.

তাহলে, $S = 2\pi r$ (১)

ইহাকে t এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই,

$\frac{dS}{dt} = \frac{d}{dt}(2\pi r) = 2\pi\frac{dr}{dt}$ (১)

প্রশ্নমতে, $\frac{dS}{dt} = a$ [$\because$ পরিধির বৃদ্ধির হার 'a'] (১)

$\therefore\ a = 2\pi\frac{dr}{dt} \Rightarrow \frac{dr}{dt} = \frac{a}{2\pi}$

$\therefore$ ক্ষেত্রফলের বৃদ্ধিহার $\frac{a}{2\pi}$ ফুট/সেকেন্ড। (১)

15. (f) একটি গতিশীল কণার t সময়ে অতিক্রান্ত দূরত্ব $s = ut + \frac{1}{2}ft^2$ সমীকরণ দ্বারা প্রকাশ করা হয় যেখানে u এবং f ধ্রুবক। দেখাও যে, t সময়ে তার বেগ u + ft এবং ত্বরণ f.

প্রমাণ : এখানে $s = ut + \frac{1}{2}ft^2$

$\therefore$ t সময়ে কণাটির বেগ, $\frac{ds}{dt} = u + ft$ এবং

t সময়ে কণাটির ত্বরণ, $\frac{d^2s}{dt^2} = f$ (২)

15. (g) একটি গতিশীল কণার কোন সরলরেখায় t সেকেন্ডে অতিক্রান্ত দূরত্ব $s = \frac{1}{2}t^3 + t^2 + 4t$ মিটার। 5 সেকেন্ড শেষে কণাটির বেগ ও ত্বরণ নির্ণয় কর। [সি.'০৫]

সমাধান : এখানে $s = \frac{1}{2}t^3 + t^2 + 4t$

$\therefore$ t সেকেন্ডে কণাটির বেগ, $\frac{ds}{dt} = \frac{3}{2}t^2 + 2t + 4$ (১)

এবং t সময়ে কণাটির ত্বরণ, $\frac{d^2s}{dt^2} = 3t + 2$ (১)

$\therefore$ 5 সেকেন্ড শেষে কণাটির বেগ $= \frac{3}{2}.25 + 10 + 4$

$= 51.5\ ms^{-1}$ (১)

এবং ত্বরণ $= (3\times 5 + 2)\ ms^{-2} = 17\ ms^{-2}$ (১)

প্রশ্নমালা IX K

1. (a) দেখাও যে, $f(x) = x^3 - 3x^2 + 18x + 15$ একটি ক্রমবর্ধমান ফাংশন।

প্রমাণ : দেওয়া আছে, $f(x) = x^3 - 3x^2 + 18x + 15$

$\therefore\ f'(x) = 3x^2 - 6x + 18$

$= 3(x^2 - 2x + 1) + 15$

$= 3(x-1)^2 + 15 > 0$, সকল $x \in \mathbb{R}$ এর জন্য।

$\therefore$ প্রদত্ত ফাংশনটি একটি ক্রমবর্ধমান ফাংশন।

(b) দেখাও যে, $x = 1$ বিন্দুতে $f(x) = x^3 - 3x^2 + x$ ফাংশনটি হ্রাস পায়।

প্রমাণ : দেওয়া আছে, $f(x) = x^3 - 3x^2 + x$

$\therefore\ f'(x) = 3x^2 - 6x + 1$

$\therefore\ f'(1) = 3\times 1^2 - 6\times 1 + 1 = 3 - 6 + 1$

$= -2 < 0$

$\therefore\ x = 2$ বিন্দুতে প্রদত্ত ফাংশনটি হ্রাস পায়।

2. নিম্নের ফাংশনগুলি কোন ব্যবধিতে হ্রাস পায় ও কোন ব্যবধিতে বৃদ্ধি পায় নির্ণয় কর।

(a) $f(x) = 3x^2 - 6x + 4, -1 \le x \le 2$

সমাধান : দেওয়া আছে, $f(x) = 3x^2 - 6x + 4$

$\therefore\ f'(x) = 6x - 6 = 6(x-1)$

$f'(x) = 0 \Rightarrow 6(x-1) = 0$

$\Rightarrow x = 1$

এখানে, $x = 1$ বিন্দুতে $f'(x) = 0$ এবং বিন্দুটি $-1 \le x \le 2$ ব্যবধিকে $-1 \le x < 1$ এবং $1 < x \le 2$ ব্যবধিতে বিভক্ত করে।

এখন, $-1 \le x < 1$ এর জন্য $6(x-1) < 0$, কাজেই $f'(x) < 0$.

$\therefore\ -1 \le x < 1$ ব্যবধিতে $f(x)$ ফাংশন হ্রাস পায়।

আবার, $1 < x \le 2$ এর জন্য $6(x-1) > 0$, কাজেই $f'(x) > 0$.

$\therefore\ 1 < x \le 2$ ব্যবধিতে $f(x)$ ফাংশন বৃদ্ধি পায়।

(b) $f(x) = (x-2)^3(x+1)^2, -1 \le x \le 3$

সমাধান : দেওয়া আছে, $f(x) = (x-2)^3(x+1)^2$

$\therefore\ f'(x) = (x-2)^3 \times 2(x+1)$

$+ (x+1)^2 \times 3(x-2)^2$

$= (x-2)^2(x+1)\{2(x-3) + 3(x+1)$

$= (x-2)^2(x+1)(2x - 6 + 3x + 3)$

$= (x-2)^2(x+1)(5x-3)$

$\therefore\ f'(x) = 0 \Rightarrow x = -1, 3/5, 2$