$\therefore \ a = 2\pi \frac{dr}{dt} \Rightarrow \frac{dr}{dt} = \frac{a}{2\pi}$

$\therefore$ ক্ষেত্রফলের বৃদ্ধিহার $\frac{a}{2\pi}$ ফুট/সেকেন্ড। (১)

15. (f) একটি গতিশীল কণার t সময়ে অতিক্রান্ত দূরত্ব $s = ut + \frac{1}{2}ft^2$ সমীকরণ দ্বারা প্রকাশ করা হয় যেখানে u এবং f ধ্রুবক। দেখাও যে, t সময়ে তার বেগ u + ft এবং ত্বরণ f.

প্রমাণ : এখানে $s = ut + \frac{1}{2}ft^2$

$\therefore$ t সময়ে কণাটির বেগ, $\frac{ds}{dt} = u + ft$ এবং

t সময়ে কণাটির ত্বরণ, $\frac{d^2s}{dt^2} = f$ (২)

15. (g) একটি গতিশীল কণার কোন সরলরেখায় t সেকেন্ডে অতিক্রান্ত দূরত্ব $s = \frac{1}{2}t^3 + t^2 + 4t$ মিটার। 5 সেকেন্ড শেষে কণাটির বেগ ও ত্বরণ নির্ণয় কর। [সি.'০৫]

সমাধান ঃ এখানে $s = \frac{1}{2}t^3 + t^2 + 4t$

$\therefore$ t সেকেন্ডে কণাটির বেগ, $\frac{ds}{dt} = \frac{3}{2}t^2 + 2t + 4$ (১)

এবং t সময়ে কণাটির ত্বরণ, $\frac{d^2s}{dt^2} = 3t + 2$ (১)

$\therefore$ 5 সেকেন্ড শেষে কণাটির বেগ $= \frac{3}{2}.25 + 10 + 4$

$= 51.5 \text{ ms}^{-1}$ (১)

এবং ত্বরণ $= (3 \times 5 + 2) \text{ ms}^{-2} = 17 \text{ ms}^{-2}$ (১)

প্রশ্নমালা IX K

1. (a) দেখাও যে, $f(x) = x^3 - 3x^2 + 18x + 15$ একটি ক্রমবর্ধমান ফাংশন।

প্রমাণ : দেওয়া আছে, $f(x) = x^3 - 3x^2 + 18x + 15$

$\therefore \ f'(x) = 3x^2 - 6x + 18$

$= 3(x^2 - 2x + 1) + 15$

$= 3(x - 1)^2 + 15 > 0$, সকল $x \in \mathbb{R}$ এর জন্য।

$\therefore$ প্রদত্ত ফাংশনটি একটি ক্রমবর্ধমান ফাংশন।

(b) দেখাও যে, x = 1 বিন্দুতে $f(x) = x^3 - 3x^2 + x$ ফাংশনটি হ্রাস পায়।

প্রমাণ : দেওয়া আছে, $f(x) = x^3 - 3x^2 + x$

$\therefore \ f'(x) = 3x^2 - 6x + 1$

$\therefore \ f'(1) = 3 \times 1^2 - 6 \times 1 + 1 = 3 - 6 + 1$

$= -2 < 0$

$\therefore \ x = 2$ বিন্দুতে প্রদত্ত ফাংশনটি হ্রাস পায়।

2. নিম্নের ফাংশনগুলি কোন ব্যবধিতে হ্রাস পায় ও কোন ব্যবধিতে বৃদ্ধি পায় নির্ণয় কর।

(a) $f(x) = 3x^2 - 6x + 4, -1 \le x \le 2$

সমাধান : দেওয়া আছে, $f(x) = 3x^2 - 6x + 4$

$\therefore \ f'(x) = 6x - 6 = 6(x - 1)$

$f'(x) = 0 \Rightarrow 6(x - 1) = 0$

$\Rightarrow x = 1$

এখানে, $x = 1$ বিন্দুতে $f'(x) = 0$ এবং বিন্দুটি $-1 \le x \le 2$ ব্যবধিকে $-1 \le x < 1$ এবং $1 < x \le 2$ ব্যবধিতে বিভক্ত করে।

এখন, $-1 \le x < 1$ এর জন্য $6(x - 1) < 0$, কাজেই $f'(x) < 0$.

$\therefore \ -1 \le x < 1$ ব্যবধিতে f(x) ফাংশন হ্রাস পায়।

আবার, $1 < x \le 2$ এর জন্য $6(x - 1) > 0$, কাজেই $f'(x) > 0$.

$\therefore \ 1 < x \le 2$ ব্যবধিতে f(x) ফাংশন বৃদ্ধি পায়।

(b) $f(x) = (x - 2)^3 (x + 1)^2, -1 \le x \le 3$

সমাধান : দেওয়া আছে, $f(x) = (x - 2)^3 (x + 1)^2$

$\therefore \ f'(x) = (x - 2)^3 \times 2(x + 1)$

$+ (x + 1)^2 \times 3(x - 2)^2$

$= (x - 2)^2 (x + 1) \{2(x - 3) + 3(x + 1)\}$

$= (x - 2)^2 (x + 1)(2x - 6 + 3x + 3)$

$= (x - 2)^2 (x + 1)(5x - 3)$

$\therefore \ f'(x) = 0 \Rightarrow x = -1, 3/5, 2$

$x = -1, 3/5, 2$ বিন্দুগুলি $-1 \le x \le 3$ ব্যবধিকে $-1 < x < 3/5$, $3/5 < x < 2$ এবং $2 < x < 3$ ব্যবধিতে বিভক্ত করে।

এখন, $-1 < x < 3/5$ এর জন্য $f'(x) < 0$.

$\therefore -1 < x < 3/5$ ব্যবধিতে $f(x)$ ফাংশন হ্রাস পায়।

$3/5 < x < 2$ এর জন্য $f'(x) > 0$.

$\therefore 3/5 < x < 2$ ব্যবধিতে $f(x)$ ফাংশন বৃদ্ধি পায়।

$2 < x < 3$ এর জন্য $f'(x) > 0$.

$\therefore 3/5 < x < 2$ ব্যবধিতে $f(x)$ ফাংশন বৃদ্ধি পায়।

3. x এর কোন মানের জন্য নিচের ফাংশনগুলো গুরুমান অথবা লঘুমান পাওয়া যায়?

(a) ধরি, $f(x) = \dfrac{x^2 - 7x + 6}{x - 10}$ [য.'০৭]

$\therefore f'(x) = \dfrac{(x-10)(2x-7) - (x^2 - 7x + 6).1}{(x-10)^2}$

চরম মানের জন্য, $f'(x) = 0$

$\therefore \dfrac{(x-10)(2x-7) - (x^2 - 7x + 6).1}{(x-10)^2} = 0$

$\Rightarrow 2x^2 - 27x + 70 - x^2 + 7x - 6 = 0$

$\Rightarrow x^2 - 20x + 64 = 0$

$\Rightarrow (x-4)(x-16) = 0 \Rightarrow x = 4, 16$

$\therefore$ $x = 4$ ও 16 এর জন্য প্রদত্ত ফাংশনের গুরুমান অথবা লঘুমান থাকবে।

(b) $x^4 - 8x^3 + 22x^2 - 24x + 5$ [কু.'০৪]

ধরি, $f(x) = x^4 - 8x^3 + 22x^2 - 24x + 5$

$\therefore f'(x) = 4x^3 - 24x^2 + 44x - 24$

চরম মানের জন্য, $f'(x) = 0$

$\therefore 4x^3 - 24x^2 + 44x - 24 = 0$

$\Rightarrow x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0$

$\Rightarrow x^2(x-1) - 5x(x-1) + 6(x-1) = 0$

$\Rightarrow (x-1)(x^2 - 5x + 6) = 0$

$\Rightarrow (x-1)(x-2)(x-3) = 0$

$\therefore x = 1, 2, 3$

$\therefore$ $x = 1, 2$ ও 3 এর জন্য প্রদত্ত ফাংশনের গুরুমান অথবা লঘুমান থাকবে।

4. $f(x) = x - x^2 - x^3$ এর সন্ধিবিন্দু নির্ণয় কর।

সমাধান : $f(x) = x - x^2 - x^3$

$\therefore f'(x) = 1 - 2x - 3x^2$

সন্ধিবিন্দুতে, $f'(x) = 0$

$\therefore 1 - 2x - 3x^2 = 0 \Rightarrow 3x^2 + 2x - 1 = 0$

$\Rightarrow 3x^2 + 3x - x - 1 = 0$

$\Rightarrow 3x(x+1) - 1(x+1) = 0$

$\Rightarrow (x+1)(3x-1) = 0$

$\therefore x = -1, \dfrac{1}{3}$

$x = -1$ হলে, $f(x) = -1 - 1 + 1 = -1$

$x = \dfrac{1}{3}$ হলে, $f(x) = \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{9} - \dfrac{1}{27}$

$= \dfrac{9-3-1}{27} = \dfrac{5}{27}$

$\therefore$ নির্ণেয় সন্ধিবিন্দু $(-1, -1)$, $\left(\dfrac{1}{3}, \dfrac{5}{27}\right)$

5. নিচের ফাংশনগুলো গুরুমান ও লঘুমান নির্ণয় কর :

(a) $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x + 5$ [চ.'০৪; রা.'১১]

সমাধান : $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x + 5$

$\therefore f'(x) = 6x^2 - 18x + 12$ এবং

$f''(x) = 12x - 18$

চরম মানের জন্য, $f'(x) = 0$

$\Rightarrow 6x^2 - 18x + 12 = 0 \Rightarrow x^2 - 3x + 2 = 0$

$\Rightarrow (x-1)(x-2) = 0 \quad \therefore x = 1, 2$

এখন, $f''(1) = 12 \times 1 - 18 = -6 < 0$

$\therefore$ $f(x)$ গুরুমান হবে যখন $x = 1$ এবং

এর মান $= f(1) = 2 - 9 + 12 + 5 = 19 - 9 = 10$

আবার, $f''(2) = 12 \times 2 - 18 = 24 - 18 = 6 > 0$

$\therefore$ $f(x)$ লঘুমান হবে যখন $x = 2$ এবং

এর মান $= f(2) = 2 \times 2^3 - 9 \times 2^2 + 12 \times 2 + 5$

$= 16 - 36 + 24 + 5 = 45 - 36 = 9$

5(b) $f(x) = x^3 - 3x^2 - 45x + 13$

[রা.'০৫,'১০; ব.'০৮; সি.'০৮; চ.'০৯,'১১]

সমাধান : $f(x) = x^3 - 3x^2 - 45x + 13$

$\therefore f'(x) = 3x^2 - 6x - 45$ এবং

$f''(x) = 6x - 6$

চরম মানের জন্য, $f'(x) = 0$

$\Rightarrow 3x^2 - 6x - 45 = 0 \Rightarrow x^2 - 2x - 15 = 0$

$\Rightarrow (x-5)(x+3) = 0 \quad \therefore x = 5, -3$

এখন, $f''(-3) = 6\times -3 - 6 = -24 < 0$

$\therefore$ f (x) গুরুমান হবে যখন $x = -3$ এবং

এর মান = f$(-3) = -27 - 27 + 135 + 13$

$= 148 - 54 = 94$

আবার, $f''(5) = 6\times 5 - 6 = 24 > 0$

$\therefore$ f (x) লঘুমান হবে যখন $x = 5$ এবং

এর মান = f$(5) = 125 - 75 - 225 + 13$

$= 138 - 300 = -162$

5(c) $x(12-2x)^2$ [য.'০৫]

সমাধান ঃ ধরি, $f(x) = x(12-2x)^2$

$= 4x(6-x)^2$

$\therefore \; f'(x) = 4x.2(6-x)(-1) + 4(6-x)^2.1$

$= 4(6-x)(-2x+6-x)$

$= 4(6-x)(6-3x) = 12(6-x)(2-x)$

এবং $f''(x) = 12\{(6-x)(-1) + (2-x)(-1)\}$

$= 12(-6+x-2+x) = 24(x-4)$

চরম মানের জন্য, $f'(x) = 0$

$\Rightarrow 12(6-x)(2-x) = 0 \quad \therefore x = 2, 6$

এখন, $f''(2) = 24(2-4) = -48 < 0$

$\therefore$ f (x) গুরুমান হবে যখন $x = 2$ এবং

এর মান = f $(2) = 8(6-2)^2 = 128$

আবার, $f''(6) = 24(6-4) > 0$

$\therefore$ f (x) লঘুমান হবে যখন $x = 6$ এবং

এর মান = f$(6) = 8(6-6)^2 = 0$

5(d) $1 + 2\sin x + 3\cos^2 x, \; 0 \le x \le \frac{\pi}{2}$

[ব.'০১; ঢা.'০৮]

সমাধান ঃ ধরি, $y = 1 + 2\sin x + 3\cos^2 x$

$\therefore \; \frac{dy}{dx} = 2\cos x + 6\cos x(-\sin x)$

$= 2\cos x(1 - 3\sin x)$ এবং

$\frac{d^2y}{dx^2} = 2\cos x(-3\cos x) + 2(1 - 3\sin x)(-\sin x)$

$= -6\cos^2 x - 2\sin x + 6\sin^2 x$

চরম মানের জন্য, $\frac{dy}{dx} = 0$

$\Rightarrow 2\cos x(1 - 3\sin x) = 0$

$\therefore \; \cos x = 0, \sin x = \frac{1}{3}$

$\cos x = 0$ হলে $\sin x = 1$ এবং $\frac{d^2y}{dx^2} = -2 + 6 > 0$

$\therefore$ প্রদত্ত ফাংশন লঘুমান হবে যখন $\cos x = 0$ এবং

এর মান $= 1 + 2(1) + 3(0)^2 = 3$

আবার, $\sin x = \frac{1}{3}$ হলে $\cos^2 x = 1 - \frac{1}{9} = \frac{8}{9}$

$\frac{d^2y}{dx^2} = -6\,.\frac{8}{9} - 2\,.\frac{1}{3} + 6\,.\frac{1}{9} < 0$

$\therefore$ প্রদত্ত ফাংশন গুরুমান হবে যখন $\sin x = \frac{1}{3}$ এবং এর

মান $= 1 + 2.\frac{1}{3} + 3.\frac{8}{9} = \frac{3+2+8}{3} = \frac{13}{3}$

5(e) $u = \frac{4}{x} + \frac{36}{y}$, যখন $x + y = 2$

সমাধান ঃ $u = \frac{4}{x} + \frac{36}{2-x}$ $[\because x + y = 2]$

$\therefore \; \frac{du}{dx} = -\frac{4}{x^2} - \frac{36}{(2-x)^2}(-1)$

$= -\frac{4}{x^2} + \frac{36}{(2-x)^2}$

এবং $\frac{d^2u}{dx^2} = \frac{8}{x^3} + \frac{72}{(2-x)^3}$

চরম মানের জন্য, $\frac{du}{dx} = 0$

$\Rightarrow \; -\frac{4}{x^2} + \frac{36}{(2-x)^2} = 0$

$\Rightarrow -4(4 - 4x + x^2) + 36x^2 = 0$

$\Rightarrow -16 + 16x - 4x^2 + 36x^2 = 0$

$\Rightarrow 32x^2 + 16x - 16 = 0$

$\Rightarrow 2x^2 + x - 1 = 0$

$\Rightarrow (2x+1)(x-1)=0 \therefore x = 1, -\frac{1}{2}$

$x=1$ এর জন্য, $\frac{d^2u}{dx^2} = 8+72>0$

$\therefore x=1$ এর জন্য, u এর লঘুমান আছে।

$\therefore$ লঘুমান $= \frac{4}{x} + \frac{36}{2-x} = \frac{4}{1} + \frac{36}{2-1} = 40$

আবার $x = -\frac{1}{2}$ এর জন্য,

$$\frac{d^2u}{dx^2} = -64 + \frac{72}{(2+\frac{1}{2})^3} = -64 + \frac{72\times 8}{125} < 0$$

$\therefore x = -\frac{1}{2}$ এর জন্য, u এর গুরুমান আছে।

$\therefore$ গুরুমান $= \frac{4}{-\frac{1}{2}} + \frac{36}{2+\frac{1}{2}} = -8 + \frac{72}{5} = \frac{32}{5}$

6.(a) দেখাও যে, $x + \frac{1}{x}$ এর গুরুমান তার লঘুমান অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর। [রা.'০৬; কু.'০৮; ঢা.'০৫,'১১; ব.'০৯; য.,চ., সি.'১০,'১৪]

প্রমাণ : মনে করি, $f(x) = x + \frac{1}{x}$

$\therefore f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2}$ এবং $f''(x) = \frac{2}{x^3}$

চরম মানের জন্য, $f'(x) = 0$

$\therefore 1 - \frac{1}{x^2} = 0 \Rightarrow x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x = -1, 1$

এখন, $f''(-1) = \frac{2}{(-1)^3} < 0$

$\therefore x=-1$ এর জন্য $f(x)$ এর গুরুমান আছে।

$\therefore$ গুরুমান $= f(-1) = -1 + \frac{1}{-1} = -2$

আবার, $f''(1) = \frac{2}{1^3} > 0$

$\therefore x = 1$ এর জন্য $f(x)$ এর লঘুমান আছে।

$\therefore$ লঘুমান $= f(1) = 1 + \frac{1}{1} = 2$

$\therefore x + \frac{1}{x}$ এর গুরুমান তার লঘুমান অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর।

6(b) দেখাও যে, $4e^x + 9e^{-x}$ এর লঘুমান 12. [রা.'০৩,'০৮; ব.'০৫,'১০; কু.'১০; চ.,দি.'১৪]

প্রমাণ : মনে করি, $y = 4e^x + 9e^{-x}$

$\therefore \frac{dy}{dx} = 4e^x - 9e^{-x}$ এবং $\frac{d^2y}{dx^2} = 4e^x + 9e^{-x}$

চরম মানের জন্য, $\frac{dy}{dx} = 0 \therefore 4e^x - 9e^{-x} = 0$

$\Rightarrow 4e^x = \frac{9}{e^x} \Rightarrow (e^x)^2 = \frac{9}{4} \therefore e^x = \pm\frac{3}{2}$

$e^x = \frac{3}{2}$ হলে, $\frac{d^2y}{dx^2} = 4.\frac{3}{2} + 9\times\frac{2}{3} > 0$

$\therefore e^x = \frac{3}{2}$ এর জন্য $4e^x + 9e^{-x}$ এর লঘুমান আছে।

$\therefore$ লঘুমান $= 4.\frac{3}{2} + 9\times\frac{2}{3} = 6 + 6 = 12$

6(c) দেখাও যে, $\frac{x}{\ln(x)}$ এর লঘুমান e. [ঢা.'০৭; কু.'০৯]

প্রমাণ : মনে করি, $f(x) = \frac{x}{\ln(x)}$

$$\therefore f'(x) = \frac{\ln(x).1 - x\frac{1}{x}}{\{\ln(x)\}^2} = \frac{\ln(x)-1}{\{\ln(x)\}^2} \text{ এবং}$$

$$f''(x) = \frac{\{\ln(x)\}^2.\frac{1}{x} - \{\ln(x)-1\}2\ln(x).\frac{1}{x}}{\{\ln(x)\}^4}$$

$$= \frac{\ln(x)\{\ln(x) - 2\ln(x) + 2\}}{x\{\ln(x)\}^4} = \frac{-\ln(x)+2}{x\{\ln(x)\}^3}$$

চরম মানের জন্য, $f'(x) = 0$

$\therefore \frac{\ln(x)-1}{\{\ln(x)\}^2} = 0 \Rightarrow \ln(x) = 1 \therefore x = e$

এখন, $f''(e) = \frac{-1+2}{e(1)^3} = \frac{1}{e} > 0$

$\therefore x = e$ এর জন্য $f(x)$ এর লঘুমান আছে।

$\therefore \frac{x}{\ln(x)}$ এর লঘুমান $= f(e) = \frac{e}{1} = e$

6(d) দেখাও যে, $\frac{\ln x}{x}$ এর লঘুমান $\frac{1}{e}$.

প্রমাণ : মনে করি, $f(x) = \frac{\ln x}{x}$

$$\therefore \quad f'(x) = \frac{x\frac{1}{x} - \ln x.1}{x^2} = \frac{1-\ln x}{x^2} \text{ এবং}$$

$$f''(x) = \frac{x^2(-\frac{1}{x}) - (1-\ln x).2x}{x^4}$$

$$= \frac{-x-2x+2x\ln x}{x^4} = \frac{-3+2\ln x}{x^3}$$

চরম মানের জন্য, $f'(x) = 0$

$$\therefore \quad \frac{1-\ln x}{x^2} = 0 \Rightarrow \ln x = 1 \therefore x = e$$

এখন, $f''(e) = \frac{-3+2.1}{e^3} = \frac{-1}{e^3} < 0$

$\therefore$ $x = e$ এর জন্য $f(x)$ এর গুরুমান আছে।

$\therefore$ $\frac{x}{\ln(x)}$ এর গুরুমান $= f(e) = \frac{1}{e}$

6. (e) দেখাও যে, $(x)^{\frac{1}{x}}$ এর গুরুমান $(e)^{\frac{1}{e}}$.

প্রমাণ : ধরি, $f(x) = (x)^{\frac{1}{x}}$

$$\therefore f'(x) = (x)^{\frac{1}{x}}[\frac{1}{x}\frac{d}{dx}(\ln x) + \ln x\frac{d}{dx}(\frac{1}{x})]$$

$$= (x)^{\frac{1}{x}}[\frac{1}{x}.\frac{1}{x} + \ln x(-\frac{1}{x^2})]$$

$$= (x)^{\frac{1}{x}}[\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^2}\ln x] = (x)^{\frac{1}{x}}(\frac{1-\ln x}{x^2})$$

এবং $f''(x) = (x)^{\frac{1}{x}}\frac{d}{dx}(\frac{1-\ln x}{x^2})$

$$= (x)^{\frac{1}{x}}\frac{x^2(-\frac{1}{x}) - (1-\ln x).2x}{x^4}$$

$$+ (\frac{1-\ln x}{x^2})(x)^{\frac{1}{x}}(\frac{1-\ln x}{x^2})$$

$$= (x)^{\frac{1}{x}}\frac{-x(1+2-2\ln x)}{x^4} + (x)^{\frac{1}{x}}\frac{(1-\ln x)^2}{x^4}$$

$$= (x)^{\frac{1}{x}}\frac{-3+2\ln x}{x^3} + (x)^{\frac{1}{x}}\frac{(1-\ln x)^2}{x^4}$$

চরম মানের জন্য, $f'(x) = 0$

$$\therefore \quad (x)^{\frac{1}{x}}(\frac{1-\ln x}{x^2}) = 0 \Rightarrow \ln x = 1 \therefore x = e$$

এখন, $f''(e) = (e)^{\frac{1}{e}}\frac{-3+2.1}{e^3} + 0 = (e)^{\frac{1}{e}}\frac{-1}{e^3} < 0$

$\therefore$ $x = e$ এর জন্য $f(x)$ এর গুরুমান আছে।

$\therefore$ $(x)^{\frac{1}{x}}$ এর গুরুমান $= f(e) = (e)^{\frac{1}{e}}$

7. দেখাও যে, $\sin x(1+\cos x)$ গরিষ্ঠ হবে যখন $x = \frac{\pi}{3}$.

প্রমাণ : মনে করি, $f(x) = \sin x(1+\cos x)$

$$\therefore \quad f'(x) = \sin x(-\sin x) + (1+\cos x)\cos x$$

$$= -\sin^2 x + \cos x + \cos^2 x$$

$$= \cos x + \cos 2x$$

এবং $f''(x) = -\sin x - 2\sin 2x$

চরম মানের জন্য, $f'(x) = 0$

$$\therefore \quad \cos x + \cos 2x = 0$$

$$\Rightarrow \cos x + 2\cos^2 x - 1 = 0$$

$$\Rightarrow 2\cos^2 x + \cos x - 1 = 0$$

$$\Rightarrow \cos x = \frac{-1 \pm \sqrt{1-4.2.(-1)}}{2.2} = \frac{-1\pm 3}{4}$$

$$\therefore \quad \cos x = \frac{1}{2} = \cos\frac{\pi}{3} \Rightarrow x = \frac{\pi}{3}$$

এখন, $f''(\frac{\pi}{3}) = -\sin\frac{\pi}{3} - 2\sin\frac{2\pi}{3}$

$$= -\frac{\sqrt{3}}{2} - 2\frac{\sqrt{3}}{2} < 0$$

$\therefore$ $\sin x(1+\cos x)$ গরিষ্ঠ হবে যখন $x = \frac{\pi}{3}$

8.(a) দেখাও যে, $f(x) = x^3 - 6x^2 + 24x + 4$ এর কোন গুরুমান অথবা লঘুমান নেই। [য.'০১,'১১]

প্রমাণ ঃ এখানে $f(x) = x^3 - 6x^2 + 24x + 4$

$\therefore f'(x) = 3x^2 - 12x + 24 = 3(x^2 - 4x + 8) = 3\{(x-2)^2 + 4\}$, যা x এর কোন বাস্তব মানের জন্য শূন্য হতে পারে না।

$\therefore$ প্রদত্ত ফাংশনের কোন গুরুমান অথবা লঘুমান নেই।

8(b) দেখাও যে, $f(x) = \dfrac{\sin(x+a)}{\sin(x+b)}$, $x \neq b$ এর কোনো গুরুমান অথবা লঘুমান নেই।

প্রমাণ ঃ এখানে $f(x) = \dfrac{\sin(x+a)}{\sin(x+b)}$

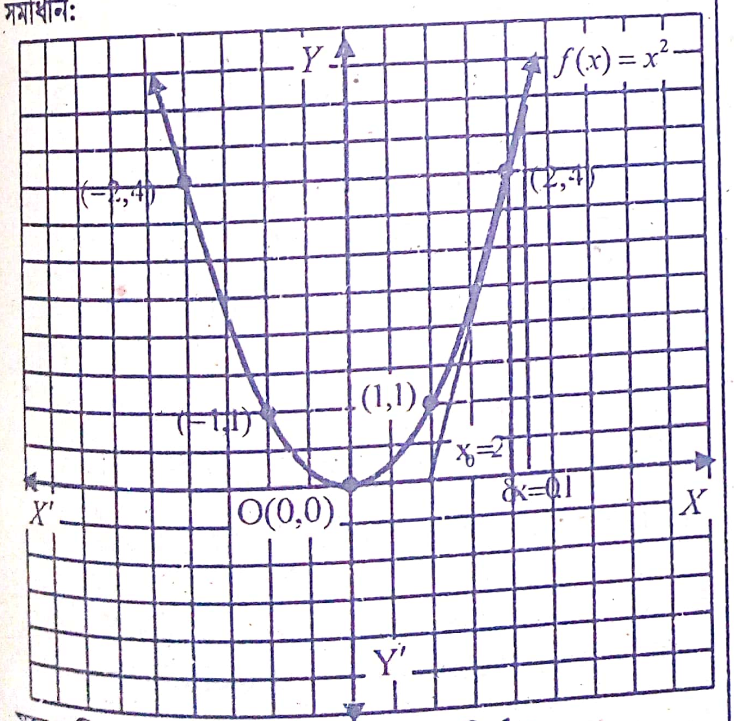
$$\therefore f'(x) = \frac{1}{\sin^2(x+b)}[\sin(x+b).\cos(x+a) - \sin(x+a)\cos(x+b)]$$

$$= \frac{\sin(x+b-x-a)}{\sin^2(x+b)} = \frac{\cos(b-a)}{\sin^2(x+b)}$$, যা x এর কোন বাস্তব মানের জন্য শূন্য হতে পারে না।

$\therefore$ প্রদত্ত ফাংশনের কোন গুরুমান অথবা লঘুমান নেই।

9. (a) $f(x) = x^2$ এর লেখচিত্র ব্যবহার করে $(2\cdot1)^2$ এর আসন্নমান নির্ণয় কর।

সমাধান:



মনে করি, $x_0 = 2$ এবং $x_0 + \delta x = 2\cdot1$

$\therefore \delta x = 0\cdot1$

এখন, $f(x) = x^2 \Rightarrow f'(x) = 2x$

$\therefore f'(2) = 2 \times 2 = 4.$

$\therefore f(x_0 + \delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\,\delta x$

$\Rightarrow f(2\cdot1) \approx f(2) + f'(2) \times 0\cdot1$

$\Rightarrow (2\cdot1)^2 \approx 2^2 + 4 \times 0\cdot1 \Rightarrow (2\cdot1)^2 \approx 4 + 0\cdot4$

$\therefore (2\cdot1)^2 \approx 4\cdot4$ (Ans.)

(b) $x = 0$ বিন্দুর সন্নিকটে $f(x) = \sqrt{1+x}$ ফাংশনের লেখকে অসন্নভাবে ঐ বিন্দুতে স্পর্শকের লেখ দ্বারা স্থানীয়ভাবে প্রতিস্থাপন করে $\sqrt{0\cdot9}$ এবং $\sqrt{1\cdot1}$ এর আসন্ন মান নির্ণয় কর।

সমাধান: $f(x) = \sqrt{1+x} \Rightarrow f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{1+x}}$

$\therefore f(0) = \sqrt{1+0} = 1$ এবং $f(0) = \dfrac{1}{2}$

$\therefore x = 0$ বিন্দুর সন্নিকটে $f(x) = \sqrt{1+x}$ ফাংশনের লেখকে অসন্নভাবে ঐ বিন্দুতে স্পর্শকের লেখ দ্বারা স্থানীয়ভাবে প্রতিস্থাপন কওে পাই,

$f(x) \approx f(0) + f'(0)(x-0)$

[$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ সূত্র দ্বারা]

$\Rightarrow \sqrt{1+x} \approx 1 + \dfrac{1}{2}x \;\cdots\cdots (1)$

(1) এ $x = -1$ বসিয়ে পাই,

$\sqrt{1-0\cdot1} \approx 1 + \dfrac{1}{2}(-0\cdot1)$

$\Rightarrow \sqrt{0\cdot9} \approx 1 - 0\cdot05 \Rightarrow \sqrt{0\cdot9} \approx 0\cdot95$

আবার, (1) এ $x = 1$ বসিয়ে পাই,

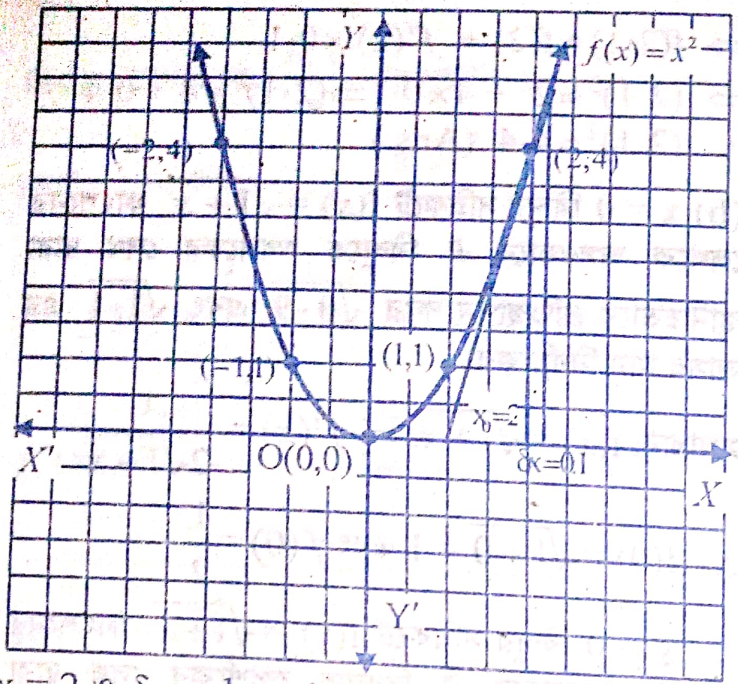
$\sqrt{1+0\cdot1} \approx 1 + \dfrac{1}{2}(0\cdot1)$

$\Rightarrow \sqrt{1\cdot1} \approx 1 + 0\cdot05 \Rightarrow \sqrt{1\cdot1} \approx 1\cdot05$

$\sqrt{0\cdot9}$ এবং $\sqrt{1\cdot1}$ এর আসন্ন মান যথাক্রমে $0\cdot95$ এবং $1\cdot05$.

10. (a) $y = x^2$ স্কেচ অঙ্কন কর এবং তাতে δy ও dy চিহ্নিত কর। $x = 2$ ও $\delta x = dx = 1$ হলে δy ও dy নির্ণয় কর।

সমাধান: নিম্নে $f(x) = y = x^2$ স্কেচ অঙ্কন করে তাতে δy ও dy চিহ্নিত করা হলো।



$x = 2$ ও $\delta x = dx = 1$ হলে,

$\delta y = f(x+\delta x) - f(x) = f(2+1) - f(2)$

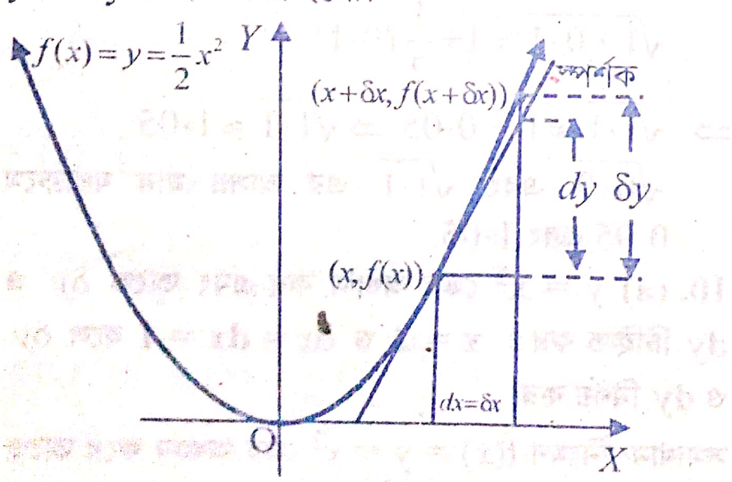
$= f(3) - f(2) = 3^2 - 2^2 = 9 - 4 = 5$

এখন, $f(x) = y = x^2 \Rightarrow f'(x) = 2x$

$\therefore \; dy = f'(x)\,dx = f'(2) \times 1 = 2 \times 2 = 4$

(b) $y = \frac{1}{2}x^2$ স্কেচ অঙ্কন কর এবং তাতে δy ও **dy** চিহ্নিত কর। $x = 3$ ও $\delta x = dx = 3$ হলে δy ও **dy** নির্ণয় কর।

সমাধান: নিম্নে $f(x) = y = x^2$ স্কেচ অঙ্কন করে তাতে δy ও dy চিহ্নিত করা হলো।



$x = 3$ ও $\delta x = dx = 3$ হলে,

$\delta y = f(x+\delta x) - f(x) = f(3+3) - f(3)$

$= f(6) - f(3) = \frac{1}{2}(6^2 - 3^2) = \frac{1}{2}(36 - 9)$

$= 13.5$

এখন, $f(x) = y = \frac{1}{2}x^2 \Rightarrow f'(x) = x$

$\therefore \; dy = f'(x)\,dx = f'(3) \times 3 = 3 \times 3 = 9$

সম্ভাব্য ধাপসহ প্রশ্ন:

11. x এর কোন মানের জন্য, $x(12-2x)^2$ এর গুরুমান অথবা লঘুমান পাওয়া যায়?

মনে করি, $f(x) = x(12-2x)^2$

$\therefore \; f'(x) = x.2(12-2x)(-2) + (12-2x)^2.1$

$= (12-2x)(-4x + 12 - 2x)$ (২)

$= 12(6-x)(2-x)$

চরম মানের জন্য, $f'(x) = 0$

$\therefore \; 12(6-x)(2-x) = 0 \Rightarrow x = 2, 6$ (১)

$\therefore$ $x = 2$ ও 6 এর জন্য প্রদত্ত ফাংশনের গুরুমান অথবা লঘুমান থাকবে। (১)

12. নিচের ফাংশনগুলির গুরুমান ও লঘুমান নির্ণয় কর :

(a) $\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 6x + 8$ [ব.'০৩]

সমাধান : ধরি, $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 6x + 8$

$\therefore \; f'(x) = x^2 + x - 6$ এবং $f''(x) = 2x+1$ (১)

চরম মানের জন্য, $f'(x) = 0$

$\Rightarrow x^2 + x - 6 = 0 \Rightarrow (x+3)(x-2) = 0$

$\therefore \; x = -3, 2$ (১)

এখন, $f''(-3) = -6 + 1 = -5 < 0$

$\therefore$ $f(x)$ গুরুমান হবে যখন $x = -3$ এবং

এর মান $= f(-3) = -9 + \frac{9}{2} + 18 + 8 = \frac{43}{2}$ (১)

আবার, $f''(2) = 4 + 1 = 5 > 0$

$\therefore$ $f(x)$ লঘুমান হবে যখন $x = 2$ এবং

এর মান $= f(2) = \frac{8}{3} + 2 - 12 + 8 = \frac{2}{3}$ (১)

12. (b) $x^5 - 5x^4 + 5x^3 - 1$ [কু.'০১]

সমাধান : ধরি, $f(x) = x^5 - 5x^4 + 5x^3 - 1$

$\therefore \; f'(x) = 5x^4 - 20x^3 + 15x^2$

এবং $f''(x) = 20x^3 - 60x^2 + 30x$ (১)

চরম মানের জন্য, $f'(x) = 0$

$\Rightarrow 5x^4 - 20x^3 + 15x^2 = 0$

$\Rightarrow 5x^2(x^2 - 4x + 3) = 0$

$\Rightarrow x^2(x-1)(x-3) = 0 \quad \therefore x = 0, 1, 3$ (১)

এখন, $f''(0) = 0, f''(1) = 20 - 60 + 30 < 0$

এবং $f''(3) = 540 - 540 + 90 > 0$

$\therefore$ $f(x)$ গুরুমান হবে যখন $x = 1$ এবং

এর মান $= f(1) = 1 - 5 + 5 - 1 = 0$ (১)

আবার, $f(x)$ লঘুমান হবে যখন $x = 3$ এবং

এর মান $= f(3) = 243 - 405 + 135 - 1 = -28$ (১)

13. দেখাও যে, $(1/x)^x$ এর গুরুমান $(e)^{\frac{1}{e}}$.

প্রমাণ : ধরি, $f(x) = (\frac{1}{x})^x$

$\therefore f'(x) = (\frac{1}{x})^x [x\frac{d}{dx}(\ln\frac{1}{x}) + \ln\frac{1}{x}\frac{d}{dx}(x)]$ (১)

$= (\frac{1}{x})^x [x\frac{d}{dx}(-\ln x) - \ln x\frac{d}{dx}(x)]$

$= (\frac{1}{x})^x [x(-\frac{1}{x}) - \ln x.1] = -(\frac{1}{x})^x(1 + \ln x)$

এবং $f''(x) = -(\frac{1}{x})^x \frac{d}{dx}(1 + \ln x) -$

$(1 + \ln x)\frac{d}{dx}\{(\frac{1}{x})^x\}$

$= -(\frac{1}{x})^x \frac{1}{x} - (1 + \ln x)\{-(\frac{1}{x})^x(1 + \ln x)\}$

$= (\frac{1}{x})^x \{-\frac{1}{x} + (1 + \ln x)^2\}$ (১)

চরম মানের জন্য, $f'(x) = 0$.

$\therefore -(\frac{1}{x})^x(1 + \ln x) = 0 \Rightarrow \ln x = -1$

$\therefore x = e^{-1} = \frac{1}{e}$ (১)

এখন, $f''(\frac{1}{e}) = (e)^{\frac{1}{e}}(-e + 0) = -e.(e)^{\frac{1}{e}} < 0$

$\therefore x = \frac{1}{e}$ এর জন্য $f(x)$ এর গুরুমান আছে।

$\therefore (1/x)^x$ এর গুরুমান $= f(\frac{1}{e}) = (e)^{\frac{1}{e}}$ (১)

14. দেখাও যে, x^x লঘিষ্ঠ হবে যখন $x = \frac{1}{e}$

প্রমাণ : ধরি, $f(x) = x^x$

$\therefore f'(x) = x^x [x\frac{d}{dx}(\ln x) + \ln x\frac{d}{dx}(x)]$

$= x^x [x.\frac{1}{x} + \ln x.1] = x^x(1 + \ln x)$ (১)

এবং $f''(x) = x^x\frac{d}{dx}(1 + \ln x) -$

$(1 + \ln x)\frac{d}{dx}(x^x)$

$= x^x.\frac{1}{x} + (1 + \ln x)\{x^x(1 + \ln x)\}$

$= x^x\{\frac{1}{x} + (1 + \ln x)^2\}$ (১)

চরম মানের জন্য, $f'(x) = 0$

$\therefore \quad x^x(1 + \ln x) = 0 \Rightarrow \ln x = -1$

$\Rightarrow x = e^{-1} = \frac{1}{e}$ (১)

এখন, $f''(\frac{1}{e}) = (e)^{\frac{1}{e}}(e + 0) = e.(e)^{\frac{1}{e}} > 0$

$\therefore \quad x^x$ লঘিষ্ঠ হবে যখন $x = \frac{1}{e}$ (১)

15. দেখাও যে, $f(x) = x^3 - 6x^2 + 27x + 5$ এর কোন গুরুমান অথবা লঘুমান নেই।

প্রমাণ ঃ এখানে $f(x) = x^3 - 6x^2 + 27x + 5$

$\therefore \quad f'(x) = 3x^2 - 12x + 27$ (১)

$= 3(x^2 - 4x + 9) = 3\{(x-2)^2 + 5\}$, যা x এর কোন বাস্তব মানের জন্য শূন্য হতে পারে না।

$\therefore$ প্রদত্ত ফাংশনের কোন গুরুমান অথবা লঘুমান নেই। (১)

16. দেখাও যে, $f(x) = \frac{ax + b}{ax + c}$ এর কোন গুরুমান অথবা লঘুমান নেই।

প্রমাণ ঃ এখানে $f(x) = \frac{ax + b}{ax + c}$

$\therefore \quad f'(x) = \frac{(ax + c).a - (ax + b).a}{(ax + c)^2}$ (১)

$$= \frac{(ax+c-ax-b)a}{(ax+c)^2} = \frac{(c-b)a}{(ax+c)^2}$$, যা x এর কোন বাস্তব মানের জন্য শূন্য হতে পারে না।

$\therefore$ প্রদত্ত ফাংশনের কোন গুরুমান অথবা লঘুমান নেই। (১)

17. u বেগে উর্ধ্বমুখী দিকে নিক্ষিপ্ত কোনো কণা t সময়ে $h = ut - \frac{1}{2}gt^2$ উচ্চতায় অবস্থান করে। বৃহত্তম উচ্চতা এবং সেখানে পৌছার সময় নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ এখানে $h = ut - \frac{1}{2}gt^2$

$\therefore \frac{dh}{dt} = u - \frac{1}{2}g.2t = u - gt$ এবং

$\frac{d^2h}{dt^2} = 0 - g = -g$ (১)

চরম মানের জন্য, $\frac{dh}{dt} = 0$

$\Rightarrow u - gt = 0 \Rightarrow t = \frac{u}{g}$ (১)

এখন, $t = \frac{u}{g}$ এর জন্য, $\frac{d^2h}{dt^2} = -g < 0$

$\therefore h = ut - \frac{1}{2}gt^2$ বৃহত্তম হবে যখন $t = \frac{u}{g}$. (১)

$\therefore$ বৃহত্তম উচ্চতা $= u.\frac{u}{g} - \frac{1}{2}g\left(\frac{u}{g}\right)^2$

$= \frac{u^2}{g} - \frac{1}{2}\frac{u^2}{g} = \frac{u^2}{2g}$ (১)

এবং সেখানে পৌছার সময় $= \frac{u}{g}$

18. u বেগে ভূমির সাথে α কোণে নিক্ষিপ্ত কোন কণা t সময়ে $u\sin\alpha.t - \frac{1}{2}g\,t^2$ উচ্চতায় অবস্থান করে। বৃহত্তম উচ্চতা এবং সেখানে পৌছার সময় নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ ধরি, $h = u\sin\alpha.t - \frac{1}{2}g\,t^2$

$\therefore \frac{dh}{dt} = u\sin\alpha - \frac{1}{2}g.2t = u\sin\alpha - gt$ এবং

$\frac{d^2h}{dt^2} = 0 - g = -g$ (১)

চরম মানের জন্য, $\frac{dh}{dt} = 0$

$\Rightarrow u\sin\alpha - gt = 0 \Rightarrow t = \frac{u\sin\alpha}{g}$ (১)

এখন, $t = \frac{u\sin\alpha}{g}$ এর জন্য, $\frac{d^2h}{dt^2} = -g < 0$

$\therefore u\sin\alpha.t - \frac{1}{2}gt^2$ বৃহত্তম হবে যখন $t = \frac{u\sin\alpha}{g}$ (১)

$\therefore$ বৃহত্তম উচ্চতা $= u\sin\alpha.\frac{u\sin\alpha}{g} - \frac{1}{2}g\left(\frac{u\sin\alpha}{g}\right)^2$

$= \frac{u^2\sin^2\alpha}{g} - \frac{1}{2}\frac{u^2\sin^2\alpha}{g} = \frac{u^2\sin^2\alpha}{2g}$

এবং সেখানে পৌছার সময় $= \frac{u\sin\alpha}{g}$ (১)

19. $y = x^2 + 2$ বক্ররেখা হতে (3, 2) বিন্দুর ক্ষুদ্রতম দূরত্ব নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ $y = x^2 + 2$ বক্ররেখার (x, y) বিন্দু হতে (3, 2) বিন্দুর দূরত্ব,

$s = \sqrt{(x-3)^2 + (y-2)^2}$ (১)

$\Rightarrow s = \sqrt{(x-3)^2 + x^4}$, $[\because y - 2 = x^2]$

$\therefore \frac{ds}{dx} = \frac{1}{2}\sqrt{(x-3)^2 + x^4}\,\{2(x-3) + 4x^3\}$ (১)

$= (2x^3 + x - 3)\sqrt{(x-3)^2 + x^4}$ এবং

$\frac{d^2s}{dx^2} = (2x^3 + x - 3)^2\sqrt{(x-3)^2 + x^4} + (6x+1)\sqrt{(x-3)^2 + x^4}$ (১)

$x = 1$ এর জন্য, $\frac{ds}{dx} = 0$ এবং $\frac{d^2s}{dx^2} = 7\sqrt{5} > 0$

$\therefore$ নির্ণেয় ক্ষুদ্রতম দূরত্ব $= \sqrt{(1-3)^2 + 1^4} = \sqrt{5}$ একক (১)

বিকল্প পদ্ধতি : $y = x^2 + 2$ বক্ররেখার (x, y) বিন্দুতে স্পর্শকের ঢাল, $\frac{dy}{dx} = 2x$ এবং (x, y) ও $(3, 2)$ বিন্দুগামী রেখার ঢাল $= \frac{y-2}{x-3}$. (২)

$\therefore$ (3,2) বিন্দু হতে $y = x^2 + 2$ বক্ররেখার (x, y) বিন্দুটি ক্ষুদ্রতম দূরত্বে অবস্থিত হলে,

$2x \times \frac{y-2}{x-3} = -1 \Rightarrow 2x \cdot x^2 = -(x-3)$

$\Rightarrow 2x^3 + x - 3 = 0$

$\therefore x = 1$ ও $y = 1^2 + 2 = 3$ (১)

$\therefore$ নির্ণেয় ক্ষুদ্রতম দূরত্ব = (1, 3) ও (3, 2) বিন্দুদ্বয়ের মধ্যবর্তী দূরত্ব $= \sqrt{(1-3)^2+(3-2)^2} = \sqrt{5}$ একক। (১)

20. জনৈক কৃষক 800 ফুট দীর্ঘ্য তারের বেড়ার সাহায্যে বৃহত্তম ক্ষেত্রফল বিশিষ্ট একটি আয়তক্ষেত্র ঘিরে ফেলতে পারে। ক্ষেত্রটির দৈর্ঘ্য ও প্রস্থ কত হওয়া দরকার।

সমাধান ঃ মনে করি, ক্ষেত্রটির দৈর্ঘ্য x ফুট ও প্রস্থ y ফুট। তাহলে,

$2(x + y) = 800 \Rightarrow x + y = 400$

$\Rightarrow y = 400 - x$

এখন, আয়তক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল $A = xy = x(400 - x)$

$= 400x - x^2$ (১)

$\therefore \frac{dA}{dx} = 400 - 2x$ এবং $\frac{d^2A}{dx^2} = -2$ (১)

বৃহত্তম ক্ষেত্রফলের জন্য, $\frac{dA}{dx} = 0 \Rightarrow 400 - 2x = 0$

$\Rightarrow x = 200$ (১)

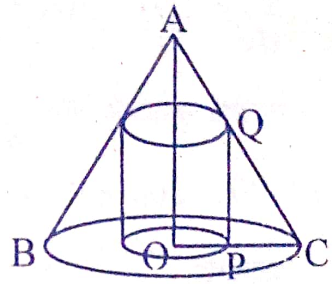
এক্ষেত্রে, $\frac{d^2y}{dx^2} < 0$, $y = 400 - 200 = 200$

$\therefore x = 200, y = 200$ এর জন্য A এর মান বৃহত্তম হয়।

$\therefore$ কৃষক তারের বেড়া দ্বারা যে বৃহত্তম ক্ষেত্রফল বিশিষ্ট আয়তক্ষেত্র ঘিরে ফেলে তার দৈর্ঘ্য 200 ফুট এবং প্রস্থ 200 ফুট। (১)

21. একটি সমবৃত্তভূমিক কোণের মধ্যে একটি খাড়া বৃত্তাকার সিলিন্ডার স্থাপন করা আছে। সিলিন্ডারের বক্রতল বৃহত্তম হলে দেখাও যে, সিলিন্ডারের ব্যাসার্ধ কোণের ব্যাসার্ধের অর্ধেক।

সমাধান ঃ মনে করি কোণের উচ্চতা OA = h, ভূমির ব্যাসার্ধ OC = r . এ কোণের মধ্যে একটি সিলিন্ডার স্থাপন করা আছে যার ভূমির ব্যাসার্ধ OP = x.



এখন, ΔPQC ও ΔAOC সদৃশকোণী ত্রিভূজদ্বয় হতে পাই, $\frac{PQ}{OA} = \frac{PC}{OC} \Rightarrow \frac{PQ}{OA} = \frac{OC - OP}{OC}$

$\Rightarrow \frac{PQ}{h} = \frac{r-x}{r} \Rightarrow PQ = \frac{h(r-x)}{r}$ (১)

সিলিন্ডারের বক্রতল S হলে, $S = 2\pi x \times PQ$

$\Rightarrow S = 2\pi x \frac{h(r-x)}{r} = \frac{2\pi h}{r}(rx - x^2)$ (১)

$\therefore \frac{dS}{dx} = \frac{2\pi h}{r}(r - 2x), \frac{d^2S}{dx^2} = \frac{2\pi h}{r}(0-2)$ (১)

এখন গরিষ্ঠ ও লঘিষ্ঠ মানের জন্য , $\frac{dS}{dx} = 0$

$\Rightarrow \frac{2\pi h}{r}(r - 2x) = 0 \Rightarrow x = \frac{r}{2}$ (১)

অর্থাৎ সিলিন্ডারের ব্যাসার্ধ $= \frac{1}{2}$ (কোণের ভূমির ব্যাসার্ধ)

এক্ষেত্রে, $\frac{d^2S}{dx^2} = -\frac{4\pi h}{r} < 0$

$\therefore$ সিলিন্ডারের বক্রতল বৃহত্তম হলে সিলিন্ডারের ব্যাসার্ধ কোণের ব্যাসার্ধের অর্ধেক। (১)

22. একটি আম বাগানে প্রতি একরে 30টি গাছ আছে এবং প্রতি গাছে গড়ে 400টি আম ধরে। প্রতি একরে অতিরিক্ত একটি গাছের জন্য মোটামোটি 10টি আমের ফলন কমে। আমের সর্বোচ্চ ফলন পাওয়ার জন্য প্রতি একরে কতটি গাছ থাকা উচিত?

সমাধান ঃ মনে করি, সর্বোচ্চ ফলনের জন্য প্রতি একরে গাছের সংখ্যা (30 + x) থাকা প্রয়োজন। তাহলে, প্রতি গাছে আমের সংখ্যা = (400 − 10x). (১)

আমের ফলন y হলে, $y = (30 + x)(400 - 10x)$ (১)

$\Rightarrow y = 1200 + 100x - 10x^2$

$\therefore \frac{dy}{dx} = 100 - 20x$ এবং $\frac{d^2y}{dx^2} = -20$ (১)

সর্বোচ্চ ফলনের জন্য, $\frac{dy}{dx} = 0$

$\Rightarrow 100 - 20x = 0 \Rightarrow x = 5$

এক্ষেত্রে, $\frac{d^2y}{dx^2} < 0.$

$\therefore$ x = 5 হলে ফলন সর্বোচ্চ হবে। অর্থাৎ আমের সর্বোচ্চ ফলন পাওয়ার জন্য প্রতি একরে (30 + 5) = 35 টি গাছ থাকা উচিত। (১)

ভর্তি পরীক্ষার MCQ

1. $y = \cos x + \sin x$ হলে $\frac{d^2y}{dx^2} = ?$ [CU 07-08]

$Sol^n.$ $\frac{dy}{dx} = -\sin x + \cos x$

$\Rightarrow \frac{d^2y}{dx^2} = -\cos x - \sin x$

2. কি শর্তে $\frac{d^n}{dx^n}(ax+b)^m = 0$

[SU 08-09; CU 03-04]

$Sol^n.$ $n > m$

3. $y = x^n$ ফাংশনের (n + 1) তম অনতরক সহগ কত? [CU 07-08]

$Sol^n.$ $y_n = n!$ $\therefore y_{n+1} = 0$

4. $y = e^{ax}$ ফাংশনের y_n কত হবে? [CU 06-07]

$Sol^n.$ $y_n = a^n e^{ax}$

5. $y = (2x-5)^3$ হলে $\frac{d^3y}{dx^3}$ কত? [IU 02-03]

$Sol^n.$ $\frac{d^3y}{dx^3} = {}^3P_3 . 2^3 (2x-5)^{3-3} = 6.8 = 48$

6. $x^2 + y^2 = 25$ হলে (3, – 4) বিন্দুতে $\frac{dy}{dx}$ কত? [DU 01-02; NU 06-07]

$Sol^n.$ $2x + 2y\frac{dy}{dx} = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$

$\therefore$ (3, – 4) বিন্দুতে $\frac{dy}{dx} = \frac{3}{4}$

7. $y = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 7$ বক্ররেখার মূলবিন্দুতে নতির পরিমাণ কত? [DU 00-01]

$Sol^n.$ $\frac{dy}{dx} = 6x^2 + 6x - 12 = -12$ (মূলবিন্দুতে)

8. $3x^2 - 7y^2 + 4xy - 8x = 0$ বক্ররেখাটির (–1, 1) বিন্দুতে অঙ্কিত স্পর্শকের ঢাল কত? [DU 02-03]

$Sol^n.$ $6x - 14y\frac{dy}{dx} + 4x\frac{dy}{dx} + 4y - 8 = 0$

$\Rightarrow -6 - 14\frac{dy}{dx} - 4\frac{dy}{dx} + 4 - 8 = 0$

$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{10}{-18} = -\frac{5}{9}$

9. $y = x^{\frac{1}{2}}$ বক্ররেখার যেবিন্দুতে অঙ্কিত স্পর্শক x-অক্ষের যোগবোধক দিকের সাথে 45^0 কোণ উৎপন্ন করে তা হল– [CU 07-08, 04-05]

$Sol^n.$ $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ $\therefore \frac{1}{2\sqrt{x}} = \tan 45^0 = 1$

$\Rightarrow x = \frac{1}{4}$ এবং $y = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$ $\therefore$ বিন্দু $(\frac{1}{4}, \frac{1}{2})$

10. $y = x^2 + 1$ হলে কোন বিন্দুতে y ও $\frac{dy}{dx}$ এর মান সমান? [IU 07-08]

$Sol^n.$ $\frac{dy}{dx} = 2x$ $\therefore y = \frac{dy}{dx} \Rightarrow x^2 + 1 = 2x$

$\Rightarrow (x-1)^2 = 0 \Rightarrow x = 1, y = 1 + 1 = 2$

$\therefore$ বিন্দুটি (1, 2)

11. কোন গতিশীল বস্তু t সেকেন্ডে $5t + 2t^2$ ফুট দূরত্ব অতিক্রম করলে 3 সেকেন্ড পর তার গতিবেগ কত হবে? [KU 06-08]

$Sol^n.$ $S = 5t + 2t^2 \Rightarrow \frac{ds}{dt} = v = 5 + 4t$

$\therefore$ 3 সেকেন্ড পর গতিবেগ = 5 + 12 = 17 ft/sec

বহুনির্বাচনি প্রশ্ন:

1. Sol^n : $\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{x^2}$ [DU 13-14]

$= \lim_{x\to 0}\frac{-\sin x}{2x} = \lim_{x\to 0}\frac{-\cos x}{2.1} = \frac{-\cos 0}{2} = \frac{-1}{2}$

$\therefore$ Ans. (b)

2. Sol^n : সব তথ্য সত্য। $\therefore$ Ans. (d)

3. Sol^n : $f(x) = y = \frac{1}{2}x^2 \Rightarrow f'(x) = x$

$\therefore f(x) \approx f(1) + f'(1)(x-1) = \frac{1}{2} + 1(x-1)$

$= x - \frac{1}{2} = x - 0.5$ $\therefore$ Ans. (d)

4. Sol^n : $\delta y = f(x+\delta x) - f(x)$

$= f(2+1) - f(2) = \frac{1}{2}(3^2 - 2^2)$

$= \frac{1}{2}(9-4) = \frac{5}{2} = 2.5$ $\therefore$ Ans.(b)

5. Sol^n : $dx = \delta x = 1$

$f'(x) = x$ $\therefore f'(1) = 1$

$dy = f'(1)\,dx = 1\times 1 = 1$ $\therefore$ Ans. (a)

6. Sol^n : $f(x) = 3x^2 - 6x + 4$

চরমবিন্দুর জন্য, $f'(x) = 6x - 6 = 0 \Rightarrow x = 1$

এখন, $f(1) = 3 - 6 + 4 = 1$

$\therefore$ চরমবিন্দু $(1, 1)$. $\therefore$ Ans. (d)

7. Sol^n : $\lim_{x\to 0}\frac{\sin(2x)^2}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin(4x^2)}{x}$

$= \lim_{x\to 0}\frac{\cos(4x^2)\times 8x}{1} = \cos 0\times 8\times 0 = 0$

$\therefore$ Ans. (b)

8. Sol^n : $\frac{d}{dx}(x^x) = x^x[x\frac{d}{dx}(\ln x) + \ln x\frac{d}{dx}(x)]$

$= x^x[x\times\frac{1}{x} + \ln x.1] = x^x(1+\ln x)$

$\therefore$ Ans. (d)

9. Sol^n : $f(x) = x + x^{-1}$ $\therefore f'(x) = 1 - x^{-2}$, $f''(x) = 2x^{-3}$.

$\therefore f'(x) = 0 \Rightarrow 1 - \frac{1}{x^2} = 0 \Rightarrow x = \pm 1$

$x = -1$ এর জন্য $f''(x) < 0$ এবং $f(x) = -2$

$\therefore$ Ans. (a)

10. Sol^n : $y = x^3 - 5x$ হলে $\frac{d^3y}{dx^3} = 3! = 6$.

$\therefore$ Ans. (c)

11. Sol^n : $y = x + x^{-1}$

$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = 1 - \frac{1}{x^2}$

রেখাটির ঢাল শূন্য হলে, $\frac{dy}{dx} = 1 - \frac{1}{x^2} = 0$

$\Rightarrow x = \pm 1$ $\therefore$ Ans. (b)

12. Sol^n : $\lim_{x\to\alpha}\frac{4+3x-x^2}{7+2x+3x^2}$ [দি.বো. ২০১৭]

$= \frac{\text{coefficient of } x^2}{\text{coefficient of } x^2} = \frac{-1}{3}$ $\therefore$ Ans. (c)

13. Sol^n : $y = x^2 - x + 1 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = 2x - 1$

(2,3) বিন্দুতে $\frac{dy}{dx} = 2\times 2 - 1 = 3$

$\therefore$ অভিলম্বের ঢাল $-\frac{1}{3}$ $\therefore$ Ans.(d) [দি.বো. '১৭]

14. Sol^n : $\frac{d^n}{dx^n}(x^n) = n!$

$\therefore$ Ans. (a) [দি.বো. ২০১৭]

15. Sol^n : $\int \sec^2\frac{1}{2}x\,dx = 2\tan\frac{1}{2}x + C$

$\therefore$ Ans.(b) [দি.বো. ২০১৭]

16. Sol^n : $\lim_{x\to\infty}\frac{3^{x+1} - 3^{-x}}{4.3^x + 3^{-x}}$ [সি. বো. ২০১৭]

$= \lim_{x\to\infty} \frac{3^x(3-3^{-2x})}{3^x(4+3^{-2x})} = \frac{(3-0)}{(4+0)} = \frac{3}{4}$

$\therefore$ Ans. (b)

17. Sol^n : $\frac{d}{dx}\log_2 x = \log_2 e.\frac{1}{x} = \frac{1}{x\ln 2}$

$\therefore$ Ans. (d) [সি. বো. ২০১৭]

18. Sol^n : $\frac{d}{dx}(5^x) = 5^x \ln 5$

$\therefore$ Ans. (c) [চট্টগ্রাম বোর্ড ২০১৭]

19. Sol^n : $\frac{d}{dx}(a^{10}) = 0$

$\therefore$ Ans. (d) [য .বো.'১৭]

20. Sol^n : সব তথ্যই সত্য।

$\therefore$ Ans.(d) [য .বো.'১৭]

21. Sol^n : $y = e^{\sqrt{x}} \therefore y_1 = e^{\sqrt{x}}\frac{d}{dx}(\sqrt{x})$

$= e^{\sqrt{x}}\frac{1}{2\sqrt{x}} \therefore$ Ans.(c) [রা.বো.'১৭]

22. Sol^n : $\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2}{3x^2-4} = \frac{2}{3}$ [রা.বো.'১৭]

$\therefore$ Ans. (c)

23. চরম মানের জন্য $f'(x) = x^2 - 5x + 6$

$= (x-3)(x-2) = 0 \Rightarrow x = 2,3$

$\therefore$ Ans. (d) [রা.বো.'১৭]

24. $\frac{d}{dx}(e^{\sin^2 x}) = e^{\sin^2 x}(2\sin x \cos x)$

$= e^{\sin^2 x}.\sin 2x \therefore$ Ans. (a) [কু.বো.'১৭]

25. $f(x) = \sin x \therefore f'(x) = \cos x$ [কু.বো.'১৭]

$f'(\frac{\pi}{4}) = \cos\frac{\pi}{4} > 0 \therefore$ Ans. (a)

26. $\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^3} = \infty \therefore$ Ans.(a) [ব.বো.'১৭]

27. $\frac{d}{dx}\left(\sqrt{1+\sin 2x}/\sin x+\cos x\right)$ [ব.বো.'১৭]

$\frac{d}{dx}(\frac{\sin x+\cos x}{\sin x+\cos x}) = \frac{d}{dx}(1) = 0$

$\therefore$ Ans. (b)

28. Sol^n : $\lim_{x\to 0}\frac{f(\frac{\pi}{2}-3x)}{3x}$ [চ. বো. ২০১৭]

$= \lim_{x\to 0}\frac{\cos(\frac{\pi}{2}-3x)}{3x} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{3x} = 1$

$\therefore$ Ans. (c)

29. Sol^n : $f(x) = \cos x \Rightarrow f'(x) = -\sin x$

$f''(x) = -\cos x \Rightarrow f'''(x) = \sin x$

$\Rightarrow f'''(\frac{\pi}{3}) = \sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ [চ.বো.২০১৭]

$\therefore$ Ans. (d)

সৃজনশীল প্রশ্ন

1. $f(x) = x + \frac{1}{x}$ এবং $g(x) = x^2$

(a) $x^{\cos^{-1}x}$ এর অন্তরজ নির্ণয় কর।

সমাধান: প্রশ্নমালা IXG এর 2(k) দ্রষ্টব্য।

(b) দেখাও যে, f(x) এর গুরুমান তার লঘুমান অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর।

সমাধান: প্রশ্নমালা IXK এর 7(a) দ্রষ্টব্য।

(c) g(x) এর স্কেচ অঙ্কন কর এবং তাতে δy ও dy চিহ্নিত কর।

সমাধান: প্রশ্নমালা IXK এর 10(a) দ্রষ্টব্য।

2. $y(x-2)(x-3) - x + 7 = 0$ ... ... (i)

এবং $y = \sqrt{(4+3\sin x)}$ ... ... (ii)

(a) $x = 1$ ও $\delta x = dx = 1$ হলে $f(x) = x + \frac{1}{x}$ এর জন্য δy ও dy নির্ণয় কর।

সমাধান: দেওয়া আছে, $f(x) = x + \frac{1}{x}$

$x = 1$ ও $\delta x = dx = 1$ হলে,

$\delta y = f(x+\delta x) - f(x) = f(1+1) - f(1)$

$= f(2) - f(1) = 2 + \frac{1}{2} - (1 + \frac{1}{1})$

$=2+\frac{1}{2}-2=\frac{1}{2}$ (Ans.)

এখন, $f(x)=y=x+\frac{1}{x} \Rightarrow f'(x)=1-\frac{1}{x^2}$

$\therefore dy=f'(x)\,dx=f'(1)\times 1=1-1=0$

(b) (ii) এর সাহায্যে দেখাও যে, $2y\frac{d^2y}{dx^2}+2\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+y^2=4$

সমাধান: প্রশ্নমালা IX I এর 9(b) দ্রষ্টব্য।

(c) (i) যে সমস্ত বিন্দুতে x-অক্ষকে ছেদ করে, ঐ বিন্দুগুলোতে স্পর্শক ও অভিলম্বের সমীকরণ নির্ণয় কর।

সমাধান: প্রশ্নমালা IX J এর 3 দ্রষ্টব্য।

3. $L=\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{x^3}$,

$y=a\cos(\ln x)+b\sin(\ln x)$

(a) $x^2\sin^{-1}(1-x)$ এর অন্তরজ নির্ণয় কর। [ব.'০৮; দি.'১২; ঢা.'১৪]

সমাধান: প্রশ্নমালা IX F এর 2(b) দ্রষ্টব্য।

(b) L এর মান নির্ণয় কর।

সমাধান: প্রশ্নমালা IX A এর 7(a) দ্রষ্টব্য।

(c) দৃশ্যকল্প-২ এর সাহায্যে দেখাও যে,

$x^2y_2+xy_1+y=0$

সমাধান: প্রশ্নমালা IX I এর 8(a) দ্রষ্টব্য।

4. $f(x)=17-15x+9x^2-x^3$ একটি ফাংশন।

(a) $x=1$ বিন্দুর সন্নিকটে $g(x)=x+\frac{1}{x}$ এর যোগাশ্রয়ী অসন্নমান নির্ণয় কর।

সমাধান: দেওয়া আছে, $g(x)=x+\frac{1}{x}$

$\Rightarrow g'(x)=1-\frac{1}{x^2}$

$\therefore g(1)=1+1=2,\ g'(1)=1-1=0$

$x=1$ বিন্দুর সন্নিকটে $g(x)$ এর যোগাশ্রয়ী অসন্নমান, $g(x)\approx 2+g'(1)(x-1)$

[$f(x)\approx f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$ সূত্র দ্বারা]

$\Rightarrow g(x)\approx 2$ (Ans.)

(b) f(x) কোন ব্যবধিতে হ্রাস পায় এবং কোন ব্যবধিতে বৃদ্ধি পায় নির্ণয় কর।

সমাধান: প্রশ্নমালা IX K এর উদাহরণ -3 দ্রষ্টব্য।

(c) f(x) এর সর্বোচ্চ ও সর্বনিম্ন মান নির্ণয় কর।

সমাধান: প্রশ্নমালা IX K এর উদাহরণ -3 দ্রষ্টব্য।

5. $f(x)=\text{coesc } x$

$g(x)=17-15x+9x^2-x^3$

(a) প্রমাণ কর যে, $\lim_{x\to 2}\frac{4-x^2}{3-\sqrt{x^2+5}}=6$

সমাধান: $\lim_{x\to 2}\frac{4-x^2}{3-\sqrt{x^2+5}}$

$=\lim_{x\to 2}\frac{(4-x^2)(3+\sqrt{x^2+5})}{(3-\sqrt{x^2+5})(3+\sqrt{x^2+5})}$

[রা.'০৯; ব.'১১,'১৪; কু.'১৪; সি.'১৯; মা.'১৩]

$=\lim_{x\to 2}\frac{(4-x^2)(3+\sqrt{x^2+5})}{3^2-(x^2+5)}$

$=\lim_{x\to 2}\frac{(4-x^2)(3+\sqrt{x^2+5})}{4-x^2}$

$=\lim_{x\to 2}(3+\sqrt{x^2+5})$

$=3+\sqrt{4+5}=6$ (Proved)

(b) মূল নিয়মে $f(\frac{\pi}{2}+x)$ এর অন্তরজ নির্ণয় কর।

$f(x)=\text{cosec } x$,

$f(\frac{\pi}{2}+x)=\text{cosec}(\frac{\pi}{2}+x)=\sec x.$

সমাধান: প্রশ্নমালা IX C এর ১২.৮ দ্রষ্টব্য।

(c) যে সকল ব্যবধিতে g(x) ক্রমবর্ধমান ও ক্রমহ্রাসমান তা নির্ণয় কর।

সমাধান: প্রশ্নমালা IX K এর উদাহরণ 3(ii) দ্রষ্টব্য।

6. $f(x) = e^x$ এবং $g(x) = e^{-x}$

(a) x-এর সাপেক্ষে $\frac{1-\cot x}{1+\cot x}$ এর অন্তরজ নির্ণয় কর।

সমাধান: $\frac{d}{dx}\left(\frac{1-\cot x}{1+\cot x}\right)$

$$= \frac{(1+\cot x)\frac{d}{dx}(1-\cot x) - (1-\cot x)\frac{d}{dx}(1+\cot x)}{(1+\cot x)^2}$$

$$= \frac{(1+\cot x)\operatorname{cosec}^2 x + (1-\cot x)\operatorname{cosec}^2 x}{(1+\cot x)^2}$$

$$= \frac{2\operatorname{cosec}^2 x}{(1+\cot x)^2}$$

(b) $\lim\limits_{y\to 0} \frac{f(y)-g(y)}{\sin y}$ নির্ণয় কর।

সমাধান: $f(x) = e^x$, $\therefore f(y) = e^y$,
$g(x) = e^{-x}$, $\therefore g(y) = e^{-y}$.

$$\therefore \lim_{y\to 0}\frac{f(y)-g(y)}{\sin y} = \lim_{y\to 0}\frac{e^y - e^{-y}}{\sin y}$$

$$= \lim_{y\to 0}\frac{e^{2y}-1}{e^y \sin y} = \frac{\lim\limits_{y\to 0}\frac{e^{2y}-1}{2y}}{e^0 \lim\limits_{y\to 0}\frac{\sin y}{y}}$$

$$= 2.\frac{1}{1.1} = 2 \text{ Ans.} \quad \left[\because \lim_{y\to 0}\frac{e^y-1}{y} = 1\right]$$

(c) $y = f(a\sin^{-1}x)$ হলে, দেখাও যে,

$$(1-x^2)y_2 - xy_1 = a^2 y$$

সমাধান: $f(x) = e^x$

$\therefore y = f(a\sin^{-1}x) = e^{a\sin^{-1}x}$.

অতপর প্রশ্নমালা IX I এর 10(a) দ্রষ্টব্য।

7. $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 3$ এবং

$g(x) = \tan x$

(a) $e^{-\sqrt{\tan 3x}}$ এর অন্তরজ নির্ণয় কর।

সমাধান: $\frac{d}{dx}(e^{-\sqrt{\tan 3x}})$

$$= -e^{-\sqrt{\tan 3x}}\frac{d}{dx}(\sqrt{\tan 3x})$$

$$= -e^{-\sqrt{\tan 3x}}.\frac{1}{2\sqrt{\tan 3x}}\frac{d}{dx}(\tan 3x)$$

$$= -\frac{3}{2}e^{-\sqrt{\tan 3x}}.\frac{\sec^2 3x}{\sqrt{\tan 3x}}.$$

(b) যে সকল ব্যবধিতে $f(x)$ বৃদ্ধি ও হ্রাস পায় তা নির্ণয় কর।

সমাধান: দেওয়া আছে,

$f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 3$

$\therefore f'(x) = 6x^2 - 18x + 12$

$= 6(x^2 - 3x + 2) = 6(x-1)(x-2)$

$f'(x) = 0$ হলে, $6(x-1)(x-2) = 0$

$\Rightarrow x = 1, 2$

$x = 1, 2$ মানদ্বয় সকল বাস্তব সংখ্যাকে $x<1$, $1<x<2$ এবং $x>2$ ব্যবধিতে বিভক্ত করে।

এখন, $x<1$ এর জন্য, $x-1<0$ ও $x-2<0$, কাজেই $f'(x)>0$.

$\therefore$ $-\infty<x<1$ ব্যবধিতে $f(x)$ ফাংশন বৃদ্ধি পায়।

আবার, $1<x<2$ এর জন্য $x-1>0$ ও $x-2<0$, কাজেই $f'(x)<0$.

$\therefore$ $1<x<2$ ব্যবধিতে $f(x)$ ফাংশন হ্রাস পায়।

অপরপক্ষে, $x>2$ এর জন্য $x-1>0$ ও $x-2>0$, কাজেই $f'(x)>0$.

$\therefore$ $2<x<\infty$ ব্যবধিতে $f(x)$ ফাংশন বৃদ্ধি পায়।

$\therefore$ $-\infty<x<1$ ও $2<x<\infty$ ব্যবধিতে $f(x)$ বৃদ্ধি পায় এবং $1<x<2$ ব্যবধিতে $f(x)$ হ্রাস পায়।

(c) $gof(x) + \{g(x)\}^{f(x)}$ এর অন্তরজ নির্ণয় কর।

সমাধান: $gof(x) = g\{f(x)\}$

$= g(2x^3 - 9x^2 + 12x - 3)$

$= \tan(2x^3 - 9x^2 + 12x - 3)$

$\therefore \frac{d}{dx}[gof(x) + \{g(x)\}^{f(x)}]$

$+\frac{d}{dx}(\tan x)^{2x^3-9x^2+12x-3}$

$=\frac{d}{dx}\{\tan(2x^3-9x^2+12x-3)\}$

$=\sec^2(2x^3-9x^2+12x-3)\times$
$(6x^2-18x+12)+(\tan x)^{2x^3-9x^2+12x-3}$
$[(2x^3-9x^2+12x-3)\frac{1}{\tan x}\sec^2 x+$
$\log(\tan x)\{6x^2-18x+12\}]$

$=(6x^2-18x+12)\sec^2 f(x)+g(x)^{f(x)}$
$[\frac{f(x)}{\sin x\cos x}+(6x^2-18x+12)\log(\tan x)]$

8. $f(x)=\sec 5x$

$g(x)=\frac{1}{3}x^3-3x-3$

(a) x-এর সাপেক্ষে $y=\frac{1-\sin x}{1+\sin x}$ এর অন্তরজ নির্ণয় কর।

সমাধান : প্রশ্নমালা IX D এর 3(d) দ্রষ্টব্য।

(b) লিমিট হিসাবে f(x) এর অন্তরজ নির্ণয় কর।

সমাধান : প্রশ্নমালা IX C এর ১২.৮ দ্রষ্টব্য।

(c) g(x) এর গুরুমান নির্ণয় কর।

সমাধান : $g(x)=\frac{1}{3}x^3-3x-3$

$\therefore$ $g'(x)=x^2-3$ এবং $g''(x)=2x$

$\therefore$ চরমবিন্দুর জন্য, $g'(x)=0$

$\Rightarrow x^2-3\Rightarrow x=\pm\sqrt{3}$

এখন, $g''(-\sqrt{3})=-2\sqrt{3}<0.$

$g''(\sqrt{3})=2\sqrt{3}>0$

$\therefore$ $x=-\sqrt{3}$ বিন্দুতে $g(x)$ এর সর্বোচ্চ মান আছে এবং ইহা

$\therefore$ $g(-\sqrt{3})=\frac{1}{3}(-\sqrt{3})^3-3(-\sqrt{3})-3$

$=2\sqrt{3}-3$ Ans.

9. $y=x^2+2x\cdots$(i) ,

$f(x)=\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2-6x+3$

(a) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{5.9^x-9^{-x}}{4.9^x+9^{-x}}$ এর মান নির্ণয় কর।

সমাধান: $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{5.9^x-9^{-x}}{4.9^x+9^{-x}}$

$=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{5.9^x-\frac{1}{9^x}}{4.9^x+\frac{1}{9^x}}$

$=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{9^x(5-\frac{1}{9^{2x}})}{9^x(4+\frac{1}{9^{2x}})}$

$=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{5-\frac{1}{9^{2x}}}{4+\frac{1}{9^{2x}}}=\frac{5-0}{4+0}=\frac{5}{4}$

(b) f(x) যে ব্যবধিতে হ্রাস বা বৃদ্ধি পায় তা নির্ণয় কর।

সমাধান: $f(x)=\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2-6x+3$

$\therefore$ $f'(x)=x^2+x-6=(x-2)(x+3)$

$x=2$ এবং $x=-3$ হলে $f'(x)=0$ হয়।

$x=-3,\ 2$ মানদ্বয় যেকোনো বাস্তব সংখ্যাকে $x<-3$, $-3<x<2$ এবং $x>2$ ব্যবধিতে বিভক্ত করে।

$x<-3$ এর জন্য $f'(x)>0.$

$\therefore$ $x<-3$ ব্যবধিতে f(x) ফাংশনটি বৃদ্ধি পায়।

$-3<x<2$ এর জন্য $f'(x)<0$

$\therefore$ $-3<x<2$ ব্যবধিতে f(x) ফাংশনটি হ্রাস পায়।

আবার, $x>2$ এর জন্য $f'(x)>0.$

$\therefore$ $x>2$ ব্যবধিতে f(x) ফাংশনটি বৃদ্ধি পায়।

(c) (i) নং বক্ররেখাটি x-অক্ষকে মূলবিন্দু O ও A বিন্দুতে ছেদ করে। আবার, বক্ররেখাটির লঘুমান B বিন্দুতে বিদ্যমান। AB এর নতি নির্ণয় কর।

সমাধান: $y=x^2+2x\cdots\cdots$ (i) বক্ররেখাটি x-অক্ষকে $A(x_1, 0)$ বিন্দুতে ছেদ করে।

$\therefore$ x^2+2x

$\therefore$ $x_1^2+2x_1=0, \therefore x_1=0,-2.$

$\therefore$ $A \equiv (-2, 0)$

এখন, $y_1 = 2x + 2$ এবং $y_2 = 2$

চরমবিন্দুর জন্য, $y_1 = 0$

$\Rightarrow 2x + 2 = 0 \Rightarrow x = -1$

$x = -1$ বিন্দুতে, $y_2 = 2 > 0$ এবং

$y = (-1)^2 + 2(-1) = -1$

$\therefore$ $x = -1$ বিন্দুতে প্রদত্ত বক্ররেখাটির লঘুমান বিদ্যমান। প্রশ্নমতে, $B \equiv (-1, -1)$

AB এর নতি $= \dfrac{0-(-1)}{-2-(-1)} = \dfrac{1}{-1} = -1.$

10. $f(x) = x^3 - 3x + 2$

(a) $(\sin x)^{\sin x}$ এর অন্তরজ নির্ণয় কর।

সমাধান: ধরি, $y = (\sin x)^{\sin x}$

$\therefore$ $\ln y = \sin x\,(\ln \sin x)$

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = \sin x \times \frac{1}{\sin x} \times \cos x + \ln \sin x \times \cos x$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = (\sin x)^{\sin x}[\cos x + \cos x \ln \sin x]$$

(b) মূলবিন্দু হতে f(x) বক্ররেখার (2, −2) বিন্দুতে অঙ্কিত স্পর্শকের দূরত্ব নির্ণয় কর।

সমাধান: $f(x) = x^3 - 3x + 2$

$\therefore f'(x) = 3x^2 - 3.$

$\therefore$ $(2, -2)$ বিন্দুতে $f'(x) = 3 \times 4 - 3 = 9$

f(x) বক্ররেখার (2, − 2) বিন্দুতে অঙ্কিত স্পর্শকের সমীকরণ,

$y - (-2) = 9(x - 2)$

$\Rightarrow 9x - y - 20 = 0$

$\therefore$ মূলবিন্দু হতে এ রেখার দূরত্ব $= \dfrac{|-20|}{\sqrt{9^2 + (-1)^2}}$

$= \dfrac{20}{\sqrt{82}}$ একক

(c) f(x) বক্ররেখার A বিন্দুতে গুরুমান ও B বিন্দুতে লঘুমান বিদ্যমান। AB নির্ণয় কর।

$y = x^3 - 3x + 2 \therefore \dfrac{dy}{dx} = 3x^2 - 3$ এবং

$\dfrac{d^2y}{dx^2} = 6x$

$\Rightarrow 3x^2 - 3 = 0 \Rightarrow x = \pm 1$

$x = 1$এর জন্য, $\dfrac{d^2y}{dx^2} = 6.1 = 6 > 0$ এবং

$y = 1^3 - 3.1 + 2 = 1 - 3 + 2 = 0$

আবার, $x = -1$ এর জন্য,

$\dfrac{d^2y}{dx^2} = 6.(-1) = -6 < 0$ এবং

$y = (-1)^3 - 3.(-1) + 2$

$= -1 + 3 + 2 = 4$

$\therefore$ f(x) বক্ররেখার (−1, 4) বিন্দুতে গুরুমান ও (1, 0) বিন্দুতে লঘুমান বিদ্যমান।

প্রশ্নমতে, $A \equiv (-1, 4), B \equiv (1, 0).$

$\therefore$ $AB = \sqrt{(-1-1)^2 + (4-0)^2} = 2\sqrt{5}.$

11. $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2+1} \cdots$ (i),

$x^2 + y^2 = 16 \cdots$ (ii)

(a) $\lim\limits_{x \to \infty} 5^x \tan\dfrac{a}{5^x}$ এর মান নির্ণয় কর।

সমাধান: ধরি, $\dfrac{a}{5^x} = \theta.$

এখানে $x \to \infty$ বলে $5^x \to \infty$

$\therefore$ $\theta = \dfrac{a}{5^x} \to 0$

$\therefore$ $\lim\limits_{x\to\infty} 5^x \sin\dfrac{a}{5^x} = \lim\limits_{\theta\to 0} \dfrac{a}{\theta}\sin\theta$

$= a \lim\limits_{\theta\to 0}\dfrac{\sin\theta}{\theta} = a\,.1 = a$ (Ans.)

(b) $\{f(x)\}^{\sin^{-1}x} + (\sin^{-1}x)^{f(x)}$ এর অন্তরজ নির্ণয় কর।

সমাধান: $\dfrac{d}{dx}[\{f(x)\}^{\sin^{-1}x} + (\sin^{-1}x)^{f(x)}]$

$= \{f(x)\}^{\sin^{-1}x} \times \dfrac{d}{dx}\{\sin^{-1}x \ln f(x)\} +$

$(\sin^{-1}x)^{f(x)} \times \dfrac{d}{dx}\{f(x)\ln(\sin^{-1}x)\}$

$= \{f(x)\}^{\sin^{-1}x}[\sin^{-1}x \frac{d}{dx}(\ln\frac{x^3}{x^2+1}) +$

$\ln f(x)\frac{d}{dx}\sin^{-1}x]$

$+(\sin^{-1}x)^{f(x)}[f(x)\frac{d}{dx}\ln(\sin^{-1}x) +$

$\ln(\sin^{-1}x)\frac{d}{dx}(\frac{x^3}{x^2+1})]$

$= \{f(x)\}^{\sin^{-1}x}[\sin^{-1}x \times \frac{x^2+1}{x^3} \times \frac{(x^2+1)3x^2 - x^3.2x}{(x^2+1)^2}$

$+\ln f(x) \times \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}] + (\sin^{-1}x)^{f(x)}[f(x)$

$\times \frac{1}{\sin^{-1}x}.\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} +$

$\ln(\sin^{-1}x).\frac{(x^2+1)3x^2 - x^3.2x}{(x^2+1)^2}]$

$= \{f(x)\}^{\sin^{-1}x}[\frac{x^2+3}{x(x^2+1)}\sin^{-1}x + \frac{\ln f(x)}{\sqrt{1-x^2}}] +$

$(\sin^{-1}x)^{f(x)}[\frac{f(x)}{\sin^{-1}x\sqrt{1-x^2}} +$

$\frac{x^2(x^2+3)\ln(\sin^{-1}x)}{(x^2+1)^2}]$

(c) (ii) নং বৃত্তের যে যে বিন্দুতে স্পর্শক x অক্ষের ধনাত্মক দিকের সাথে 60^0 কোণ উৎপন্ন করে অন্তরজের সাহায্যে বিন্দুগুলির স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

সমাধান: $x^2 + y^2 = 16 \cdots \cdots (i)$

ইহাকে x এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই, $2x + 2y\frac{dy}{dx} = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$

কিন্তু স্পর্শক x অক্ষের ধনাত্মক দিকের সাথে 60^0 কোণ উৎপন্ন করে।

$\therefore \frac{dy}{dx} = \sqrt{3} = -\frac{x}{y}$

$\therefore x = -\sqrt{3}y$........ (ii).

(i) হতে পাই, $(-\sqrt{3}y)^2 + y^2 = 16$

$\Rightarrow 3y^2 + y^2 = 16 \Rightarrow y^2 = 4 \Rightarrow y = \pm 2$

$\therefore$ (ii) হতে পাই, $x = \pm 2\sqrt{3}$

সমীকরণ (ii) হতে দেখা যায় x ও y এর মান বিপরীত চিহ্নযুক্ত।

$\therefore$ নির্ণেয় বিন্দুর স্থানাঙ্ক $(2\sqrt{3}, -2)$ ও $(-2\sqrt{3}, 2)$

12. $f(x) = \cot 3x$, $g(x) = \cos 3x$

(a) $f'(x)$ নির্ণয় কর।

সমাধান: $f(x) = \cot 3x$,

$\therefore f'(x) = \frac{d}{dx}\{f(x)\} = \frac{d}{dx}(\cot 3x)$

$= -\text{cosec}^2 3x \frac{d}{dx}(3x)$

$= -3\text{cosec}^2 3x$ (Ans.)

(b) $\lim_{x \to 0} \frac{f(\frac{\pi}{2}-x) + g(\frac{\pi}{2}-x)}{x^3}$ নির্ণয় কর।

সমাধান: $\lim_{x \to 0} \frac{f(\frac{\pi}{2}-x) + g(\frac{\pi}{2}-x)}{x^3}$

$= \lim_{x \to 0} \frac{\cot 3(\frac{\pi}{2}-x) + \cos 3(\frac{\pi}{2}-x)}{x^3}$

$= \lim_{x \to 0} \frac{\cot(\frac{3\pi}{2}-3x) + \cos(\frac{3\pi}{2}-3x)}{x^3}$

$= \lim_{x \to 0} \frac{\tan 3x - \sin 3x}{x^3}$

$= \lim_{x \to 0} \frac{\tan 3x(1-\cos 3x)}{x^3}$

$= \lim_{x \to 0} \frac{\tan 3x . 2\sin^2\frac{3x}{2}}{x^3}$

$= 2 \lim_{x \to 0} \frac{\tan 3x}{3x} \times 3 \times \lim_{x \to 0}\left(\frac{\sin\frac{3x}{2}}{\frac{3x}{2}}\right)^2 \times \frac{9}{4}$

$= 2 \times 1 \times 3 \times 1 \times \frac{9}{4} = \frac{27}{2}$ (Ans.)

(c) x এর সাপেক্ষে মূল নিয়মে f(x) এর অন্তরজ নির্ণয় কর।

সমাধান: মনে করি, $f(x) = A = \cot 3x$,

$\therefore$ $f(x+h) = \cot 3(x+h)$.

সজ্ঞানুযায়ী পাই,

$$\frac{d}{dx}\{f(x)\} = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dx}(\cot 3x) = \lim_{h\to 0}\frac{\cot 3(x+h)-\cot 3x}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left[\frac{\cos 3(x+h)}{\sin 3(x+h)}-\frac{\cos 3x}{\sin 3x}\right]$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{\sin 3x\cos 3(x+h)-\cos 3x\sin 3(x+h)}{h\sin 3(x+h)\sin 3x}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{\sin(3x-3x-3h)}{h\sin 3(x+h)\sin 3x}$$

$$= -3\lim_{h\to 0}\frac{\sin 3h}{3h}\times\lim_{h\to 0}\frac{1}{\sin 3(x+h)\sin 3x}$$

$$= -3.1.\frac{1}{\sin 3x.\sin 3x} = -3\operatorname{cosec}^2 3x.$$

13. $h(x) = \ln x$ এবং $h'(x) = g(x)$

(a) $(\log_{10} x)^{x^2}$ এর অন্তরজ নির্ণয় কর।

সমাধান: $\frac{d}{dx}\{(\log x)^{x^2}\}$

$$= (\log_{10} x)^{x^2}\left[\frac{d}{dx}\{x^2 \ln(\log_{10} x)\}\right]$$

$$= (\log_{10} x)^{x^2}\left[x^2.\frac{1}{\log_{10} x}.\frac{1}{x}\log_{10} e + \ln(\log_{10} x).2x\right]$$

$$= (\log x)^{x^2}\left[\frac{x\log_{10} e}{\log_{10} x} + 2x\ln(\log_{10} x)\right]$$

(b) প্রমাণ কর যে,

$$\frac{d^2}{dx^2}\{h(x)g(x)\} = \frac{2\ln x - 3}{x^3}$$

সমাধান: $h(x) = \ln x$,

$\therefore$ $h'(x) = \frac{1}{x} = g(x)$.

ধরি, $y = h(x)g(x) = \frac{\ln x}{x}$.

অতপর প্রশ্নমালা IX(I) এর উদাহরণ 1 দ্রষ্টব্য।

(c) $x^2g'(x) + h'(\tan 2x) = 0$ হলে প্রমাণ কর যে, $\operatorname{cosec} 4x = 1$

সমাধান: $x^2g'(x) + h'(\tan 2x) = 0$

$$\Rightarrow x^2.\frac{-1}{x^2} + \frac{1}{\tan 2x} = 0$$

$$\Rightarrow -1 + \cot 2x = 0 \Rightarrow \cot 2x = 1$$

$$\Rightarrow \frac{\cos 2x}{\sin 2x} = 1 \Rightarrow \cos 2x = \sin 2x$$

আবার, $\cot 2x = 1 \Rightarrow \cot^2 2x = 1$

$$\Rightarrow \operatorname{cosec}^2 2x - 1 = 1 \Rightarrow \frac{1}{\sin^2 2x} = 2$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sin 2x\sin 2x} = 2$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sin 2x\cos 2x} = 2 \Rightarrow \frac{2}{\sin 4x} = 2$$

$\therefore$ $\operatorname{cosec} 4x = 1$. (Showed.)

14. $f(x) = e^x$

(a) $\tan^{-1}\frac{1-x}{1+x}$ এর অন্তরজ নির্ণয় কর।

সমাধান: প্রশ্নমালা IX(F) এর 3(a) দ্রষ্টব্য।

(b) $f(x) = e^x$ বক্ররেখার যে বিন্দুতে y অক্ষ ছেদ করে সে বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ নির্ণয় কর।

সমাধান: $y = f(x) = e^x$ বক্ররেখা যে বিন্দুতে y অক্ষকে ছেদ করে সে বিন্দুর x - স্থানাঙ্ক শূন্য।

$\therefore$ $y = e^0 = 1$.

আবার, $\frac{dy}{dx} = e^x$.

$\therefore$ (0, 1) বিন্দুতে স্পর্শকের ঢাল $= e^0 = 1$.

$\therefore$ নির্ণেয় স্পর্শকের সমীকরণ,

$y - 1 = 1(x - 0) \Rightarrow x - y + 1 = 0$.

(c) দেখাও যে, $4f(x) + 9f(-x)$ এর লঘুমান 12।

প্রমাণ : মনে করি, $y = 4f(x) + 9g(x)$

$\Rightarrow y = 4e^x + 9e^{-x}$

$\therefore \frac{dy}{dx} = 4e^x - 9e^{-x}$ এবং $\frac{d^2y}{dx^2} = 4e^x + 9e^{-x}$

চরম মানের জন্য, $\frac{dy}{dx} = 0$

$\therefore 4e^x - 9e^{-x} = 0$

$\Rightarrow 4e^x = \frac{9}{e^x} \Rightarrow (e^x)^2 = \frac{9}{4} \therefore e^x = \pm\frac{3}{2}$

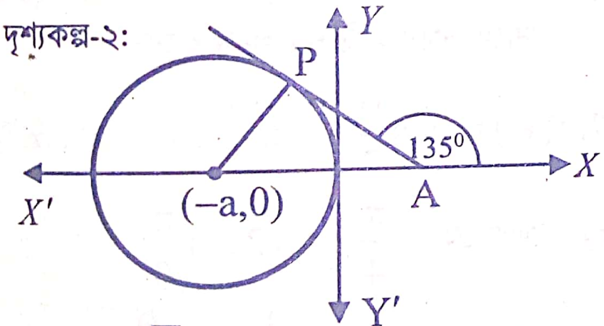
$e^x = \frac{3}{2}$ হলে, $\frac{d^2y}{dx^2} = 4.\frac{3}{2} + 9 \times \frac{2}{3} > 0$

$\therefore e^x = \frac{3}{2}$ এর জন্য $4e^x + 9e^{-x}$ এর লঘুমান আছে।

$\therefore$ লঘুমান $= 4.\frac{3}{2} + 9 \times \frac{2}{3} = 6 + 6 = 12$

15. দৃশ্যকল্প-১: $f(x) = x^2e^{2x}\log_e 2x$

দৃশ্যকল্প-২:



(a) $\tan^{-1}\frac{4\sqrt{x}}{1-4x}$ এর অন্তরজ নির্ণয় কর।

সমাধান: প্রশ্নমালা IX(F) এর 4(e) দ্রষ্টব্য।

(b) দৃশ্যকল্প-১ এর সাহায্যে $f'(2)$ নির্ণয় কর।

সমাধান: $f(x) = x^2e^{2x}\log_e 2x$

$\therefore f'(x) = x^2e^{2x}\frac{d}{dx}(\log_e 2x) +$

$x^2\log_e 2x\frac{d}{dx}(e^{2x}) + e^{2x}\log_e 2x\frac{d}{dx}(x^2)$

$= x^2e^{2x} \times \frac{1}{2x}.2 + x^2\log_e 2x.(2e^{2x})$

$+ e^{2x}\log_e 2x.(2x)$

$= xe^{2x} + 2x^2e^{2x}\log_e 2x + 2xe^{2x}\log_e 2x$

$\therefore f'(2) = 2e^4 + 8e^4\log_e 4 + 4e^4\log_e 4$

$= 2e^4 + 12e^4\log_e 4$

(c) দৃশ্যকল্প-২ এ প্রদত্ত বৃত্তের AP স্পর্শকের সমীকরণ নির্ণয় কর (অন্তরজের সাহায্যে)।

সমাধান: দৃশ্যকল্প-২ এ প্রদত্ত বৃত্তের সমীকরণ,

$(x + a)^2 + (y - 0)^2 = a^2$

$\Rightarrow x^2 + 2ax + a^2 + y^2 = a^2$

$\Rightarrow x^2 + 2ax + y^2 = 0$

ইহাকে x এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই,

$2x + 2a + 2y\frac{dy}{dx} = 0$

$\Rightarrow y\frac{dy}{dx} = -(x + a) \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{x + a}{y}$

$\therefore$ প্রদত্ত বৃত্তের P(x, y) বিন্দুতে স্পর্শকের ঢাল,

$\frac{dy}{dx} = -\frac{x + a}{y}$

আবার, PQ রেখার ঢাল $= \tan 135^0$

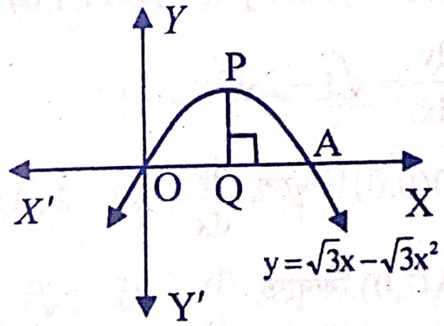
$= \tan(180^0 - 45^0) = -\tan 45^0 = -1$

PQ রেখা প্রদত্ত বৃত্তের স্পর্শক বলে,

$\frac{dy}{dx} = -\frac{x + a}{y} = -1 \Rightarrow x + a = y$

$\therefore$ AP স্পর্শকের সমীকরণ, $y = x + a$

16.



(a) $\tan^{-1}\frac{2\sqrt{x}}{1-x}$ এর অন্তরজ নির্ণয় কর।

সমাধান: প্রশ্নমালা IX(F) এর 4(i) দ্রষ্টব্য।

(b) উদ্দীপকে উল্লেখিত বক্ররেখার চরমবিন্দু P হলে PQ নির্ণয় কর।

সমাধান: $y = \sqrt{3}x - \sqrt{3}x^2$.

$\therefore \frac{dy}{dx} = \sqrt{3} - 2\sqrt{3}x$.

চরম মানের জন্য, $\frac{dy}{dx} = 0$

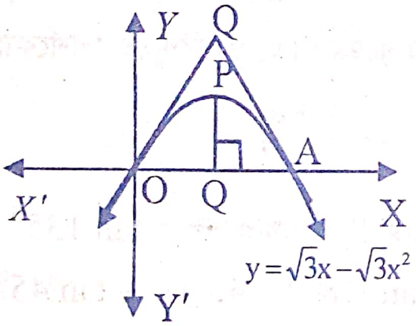
$\Rightarrow \sqrt{3} - 2\sqrt{3}x = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$

$x = \frac{1}{2}$ বিন্দুতে, $y = \sqrt{3}.\frac{1}{2} - \sqrt{3}.\frac{1}{4} = \frac{\sqrt{3}}{4}$

প্রদত্ত বক্ররেখার চরমবিন্দু P বলে $PQ = y = \frac{\sqrt{3}}{4}$

(c) উদ্দীপকের আলোকে প্রমাণ কর যে, O ও P বিন্দুতে অঙ্কিত স্পর্শক x- অক্ষের সাথে সমবাহু ত্রিভুজ গঠন করে।

প্রমাণ:



এখানে, P বিন্দুর স্থানাঙ্ক $(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{4})$.

$OA \perp PQ$ বলে $Q \equiv (\frac{1}{2}, 0)$ এবং Q, OA এর মধ্যবিন্দু বলে $A \equiv (1,0)$

$\frac{dy}{dx} = \sqrt{3} - 2\sqrt{3}x$

O(0,0) বিন্দুতে, $\frac{dy}{dx} = \sqrt{3} - 2\sqrt{3} \times 0 = \sqrt{3}$

A(1,0) বিন্দুতে, $\frac{dy}{dx} = \sqrt{3} - 2\sqrt{3} \times 1 = -\sqrt{3}$

$\therefore$ O(0,0) বিন্দুতে অঙ্কিত স্পর্শক OQ এর সমীকরণ, $y = \sqrt{3}x \cdots\cdots$ (i)

A(1,0) বিন্দুতে অঙ্কিত স্পর্শক AQ এর সমীকরণ, $y - 0 = -\sqrt{3}(x - 1)$

$\Rightarrow y = -\sqrt{3}x + \sqrt{3} \cdots\cdots$ (ii)

(i) ও (ii) হতে পাই,

$\sqrt{3}x = -\sqrt{3}x + \sqrt{3} \Rightarrow 2x = 1$

$\Rightarrow x = \frac{1}{2}$ এবং $y = \sqrt{3} \times \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\therefore$ স্পর্শকদ্বয়ের ছেদ বিন্দু $Q(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$

এখন, OA = 1,

$OQ = \sqrt{(\frac{1}{2})^2 + (\frac{\sqrt{3}}{2})^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}} = \sqrt{\frac{4}{4}} = 1$

$AQ = \sqrt{(1 - \frac{1}{2})^2 + (0 - \frac{\sqrt{3}}{2})^2}$

$= \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}} = \sqrt{\frac{4}{4}} = 1$

$\therefore$ OAQ একটি সমবাহু ত্রিভুজ।

$\therefore$ O ও P বিন্দুতে অঙ্কিত স্পর্শক x- অক্ষের সাথে সমবাহু ত্রিভুজ গঠন করে।

17. $f(\theta) = \cos\frac{\theta}{2} - \sin\frac{\theta}{2}$, $y = x^x . x^{\cos^{-1}x}$

(a) দেখাও যে, $f(\frac{\pi}{4}) = \sqrt{2}\sin\frac{\pi}{8}$

প্রমাণ: $f(\theta) = \cos\frac{\theta}{2} - \sin\frac{\theta}{2}$

$\therefore f(\frac{\pi}{4}) = \cos\frac{\pi}{8} - \sin\frac{\pi}{8}$

$= \sqrt{2}(\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\frac{\pi}{8} - \frac{1}{\sqrt{2}}\sin\frac{\pi}{8})$

$= \sqrt{2}(\sin\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{8} - \cos\frac{\pi}{4}\sin\frac{\pi}{8})$

$= \sqrt{2}\sin(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{8}) = \sqrt{2}\sin\frac{2\pi - \pi}{8}$

$\therefore f(\frac{\pi}{4}) = \sqrt{2}\sin\frac{\pi}{8}$

(b) লেখচিত্রের সাহায্যে $f(\theta) = 0$ এর সমাধান কর; যেখানে $45^0 \le \theta \le 135^0$.

সমাধান : দেওয়া আছে , $\cos\frac{\theta}{2} - \sin\frac{\theta}{2} = 0$

$\Rightarrow \cos\frac{\theta}{2} = \sin\frac{\theta}{2}$

মনে করি , $y = \cos\frac{\theta}{2} = \sin\frac{\theta}{2}$

$\therefore\ y = \sin\frac{\theta}{2}$ এবং $y = \cos\frac{\theta}{2}$

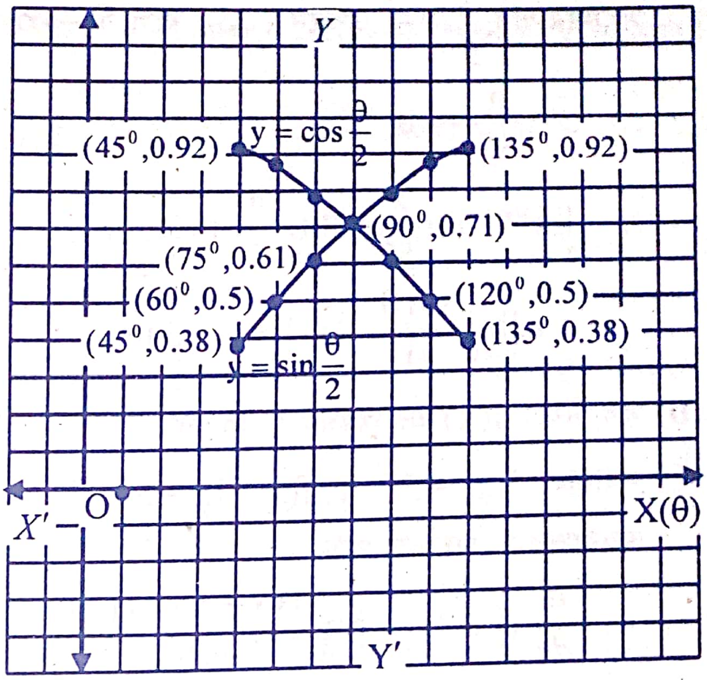
নিচের তালিকায় $\theta \in [\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}]$ এর জন্য $y = \sin\frac{\theta}{2}$ ও $y = \cos\frac{\theta}{2}$ এর প্রতিরূপী মান নির্ণয় করি:

θ	45^0	60^0	75^0	90^0
$y = \sin\frac{\theta}{2}$	0.38	0.5	0.61	0.71
$y = \cos\frac{\theta}{2}$	0.92	0.87	0.79	0.71
x	105^0	120^0	135^0	
$y = \sin\frac{\theta}{2}$	0.79	0.87	0.92	
$y = \cos\frac{\theta}{2}$	0.61	0.5	0.38	

একটি ছক কাগজে স্থানাঙ্কের অক্ষরেখা X′OX ও YOY′ আঁকি।

স্কেল নির্ধারণ : x-অক্ষ বরাবর ছোট বর্গক্ষেত্রের এক বাহু $=15^0$ এবং y- অক্ষ বরাবর ছোট বর্গক্ষেত্রের 10 বাহু = 1একক।

এখন নির্ধারিত স্কেল অনুযায়ী তালিকাভুক্ত বিন্দুগুলি ছক কাগজে স্থাপন করে $y = \sin\frac{\theta}{2}$ ও $y = \cos\frac{\theta}{2}$ ফাংশনদ্বয়ের লেখচিত্র দুইটি অঙ্কন করি। লেখচিত্র থেকে দেখা যাচ্ছে যে , প্রদত্ত সীমার মধ্যে ছেদ বিন্দুর ভূজ হচ্ছে 90^0. সুতরাং , নির্ণেয় সমাধান , $\theta = 90^0$.



(c) $\frac{dy}{dx}$ নির্ণয় কর।

সমাধান: $y = x^x \cdot x^{\cos^{-1}x}$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(x^x \cdot x^{\cos^{-1}x})$$

$$= x^x \frac{d}{dx}(x^{\cos^{-1}x}) + x^{\cos^{-1}x}\frac{d}{dx}(x^x)$$

$$= x^x . x^{\cos^{-1}x}[\cos^{-1}x\frac{d}{dx}(\ln x) + \ln x$$

$$\frac{d}{dx}(\cos^{-1}x)] + x^{\cos^{-1}x}.x^x[x\frac{d}{dx}(\ln x)$$

$$+ \ln x\frac{d}{dx}(x)]$$

$$= x^x . x^{\cos^{-1}x}[\frac{\cos^{-1}x}{x} + \frac{-\ln x}{\sqrt{1-x^2}}]$$

$$+ x^{\cos^{-1}x}.x^x[x.\frac{1}{x} + \ln x.1]$$

$$= x^x . x^{\cos^{-1}x}[\frac{\cos^{-1}x}{x} - \frac{\ln x}{\sqrt{1-x^2}} + 1 + \ln x]$$

18. (i) $f(x) = 5^{2x}$

(ii) $g(x) = 2x^3 - 24x + 11$

(a) $\lim\limits_{x \to \infty} 5^x \tan\frac{a}{5^x}$ এর মান নির্ণয় কর।

সমাধান: ধরি, $\frac{a}{5^x} = \theta$. এখানে $x \to \infty$ বলে $5^x \to \infty$

$$\therefore \quad \theta = \frac{a}{5^x} \to 0$$

$$\therefore \quad \lim_{x\to\infty} 5^x \sin\frac{a}{5^x} = \lim_{\theta\to 0} \frac{a}{\theta}\sin\theta$$

$$= a\lim_{\theta\to 0}\frac{\sin\theta}{\theta} = a\,.1 = a \text{ (Ans.)}$$

(b) মূল নিয়মে f(x) এর অন্তরজ নির্ণয় কর।

সমাধান: $f(x) = 5^{2x}$. $\therefore f(x+h) = 5^{2(x+h)}$

অন্তরজের সংজ্ঞা হতে পাই,

$$\frac{d}{dx}\{f(x)\} = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$$\therefore \quad \frac{d}{dx}(5^{2x}) = \lim_{h\to 0}\frac{5^{2x+2h}-5^{2x}}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}(5^{2x}.5^{2h}-5^{2x}) = \lim_{h\to 0}\frac{5^{2x}}{h}(5^{2h}-1)$$

$$= 5^{2x}\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\Big[\Big\{1+2h\ln 5+\frac{(2h)^2}{2!}(ln5)^2 + \cdots\cdots\Big\}-1\Big]$$

$$= 5^{2x}\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\Big[\,2h\ ln5 + \frac{2^2h^2}{2!}(ln5)^2 + \frac{2^3h^3}{3!}(ln5)^3 + \cdots\cdots\Big]$$

$$= 5^{2x}\lim_{h\to 0}\Big[2ln5 + \frac{2^2h}{2!}(ln5)^2 + \frac{2^3h^2}{3!}(ln5)^3 + h\text{-এর উচ্চঘাত সম্বলিত পদসমূহ}\Big]$$

$$= 5^{2x}.[\,2ln5 + 0 + 0 + \cdots\,] = 2.5^{2x}\,ln5$$

$\therefore$ f(x) এর অন্তরজ $= 2.5^{2x}\,ln5$

(c) যে সকল ব্যবধিতে g(x) ক্রমবর্ধমান তা নির্ণয় কর।

সমাধান : দেওয়া আছে,

$$g(x) = 2x^3 - 24x + 11$$

$$\therefore \quad g'(x) = 6x^2 - 24x = 6x(x-4)$$

$g'(x) = 0$ হলে $6x(x-4) = 0 \Rightarrow x = 0, 4$

$x = 0, 4$ মানদ্বয় সকল বাস্তব সংখ্যাকে $x<0$, $0<x<4$ এবং $x > 4$ ব্যবধিতে বিভক্ত করে।

এখন, $x < 0$ এর জন্য $x< 0$ ও $(x-4) < 0$, কাজেই $g'(x) > 0.$

$\therefore -\infty < x < 0$ ব্যবধিতে g(x) ফাংশন বৃদ্ধি পায়।

আবার, $0 < x < 4$ এর জন্য $x > 0$ ও $(x-4) < 0$, কাজেই $g'(x) < 0.$

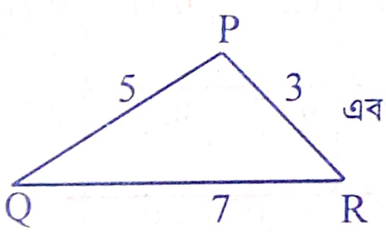
$\therefore \quad 0 < x < 4$ ব্যবধিতে g(x) ফাংশন হ্রাস পায়।

অপরপক্ষে $x > 4$ এর জন্য $x>0$ ও $(x-4)>0$, কাজেই $g'(x) > 0.$

$\therefore \quad 4<x<\infty$ ব্যবধিতে g(x) ফাংশন বৃদ্ধি পায়।

$\therefore \quad -\infty < x < 0$ ও $4 < x < \infty$ ব্যবধিতে g(x) ক্রমবর্ধমান।

19.



এবং $y = \frac{\cos x}{1+\sin^2 x}$

(a) $\tan x = \frac{b}{a}$ হলে $(a^2 + b^2)\sin 2x$ এর মান নির্ণয় কর।

সমাধান: $(a^2 + b^2)\sin 2x$

$$= (a^2+b^2)\frac{2\tan x}{1+\tan^2 x}$$

$$= (a^2+b^2)\frac{2\times\frac{b}{a}}{1+(\frac{b}{a})^2} = (a^2+b^2)\frac{\frac{2b}{a}}{\frac{a^2+b^2}{a^2}}$$

$$= (a^2+b^2)\times\frac{2b}{a}\times\frac{a^2}{a^2+b^2} = 2ab \text{ (Ans.)}$$

(b) প্রমাণ কর যে, $\frac{dy}{dx} = \frac{-\sin x(2+\cos^2 x)}{(1+\sin^2 x)^2}$

প্রমাণ: $y = \frac{\cos x}{1+\sin^2 x}$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = \frac{(1+\sin^2 x)\frac{d}{dx}(\cos x) - \cos x\frac{d}{dx}(1+\sin^2 x)}{(1+\sin^2 x)^2}$$

$$=\frac{(1+\sin^2 x)(-\sin x)-\cos x(0+2\sin x\cos x)}{(1+\sin^2 x)^2}$$

$$=\frac{-\sin x-\sin^3 x-2\sin x\cos^2 x}{(1+\sin^2 x)^2}$$

$$=\frac{-\sin x-\sin^3 x-2\sin x(1-\sin^2 x)}{(1+\sin^2 x)^2}$$

$$=\frac{-\sin x-\sin^3 x-2\sin x+2\sin^3 x)}{(1+\sin^2 x)^2}$$

$$=\frac{\sin^3 x-3\sin x}{(1+\sin^2 x)^2}=\frac{-\sin x(3-\sin^2 x)}{(1+\sin^2 x)^2}$$

$$=\frac{-\sin x(2+1-\sin^2 x)}{(1+\sin^2 x)^2}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{-\sin x(2+\cos^2 x)}{(1+\sin^2 x)^2}$$

(c) দেখাও যে, PQR ত্রিভুজের বৃহত্তম কোণ 120^0.

প্রমাণ: PQR ত্রিভুজের বৃহত্তম বাহু QR বলে এর বৃহত্তম কোণ P.

ত্রিভুজের কোসাইন সূত্র হতে পাই,

$$\cos P=\frac{PQ^2+PR^2-QR^2}{2PQ\times PR}=\frac{5^2+3^2-7^2}{2\times5\times3}$$

$$=\frac{25+9-49}{30}=\frac{34-49}{30}=\frac{-15}{30}$$

$$\therefore \cos P=\frac{-1}{2}=\cos 120^0$$

$\therefore$ বৃহত্তম কোণ $P=120^0$

20. $f(x)=e^x$ এবং $g(x)=e^{-x}$

(a) x-এর সাপেক্ষে $x^3\sin(\ln x)$ এর অন্তরজ নির্ণয় কর।

সমাধান: ধরি, $y=x^3\sin(\ln x)$

$$\therefore \frac{dy}{dx}=x^3\frac{d}{dx}\{\sin(\ln x)\}+\sin(\ln x)\frac{d}{dx}(x^3)$$

$$=x^3\cos(\ln x)\frac{1}{x}+\sin(\ln x).3x^2$$

$$=x^2\cos(\ln x)+\sin(\ln x).3x^2$$

$$=x^2\{\cos(\ln x)+3\sin(\ln x)\}\text{ (Ans.)}$$

(b) $\lim\limits_{y\to0}\dfrac{f(y)-g(y)}{\sin y}$ নির্ণয় কর।

সমাধান: দেওয়া আছে, $f(x)=e^x$ এবং $g(x)=e^{-x}$

$\therefore\ f(y)=e^y,\ g(y)=e^{-y}$

$$\therefore \lim_{y\to0}\frac{f(y)-g(y)}{\sin y}=\lim_{y\to0}\frac{e^y-e^{-y}}{\sin y}$$

$$=\lim_{y\to0}\frac{(1+\frac{y}{1!}+\frac{y^2}{2!}+\cdots)-(1-\frac{y}{1!}+\frac{y^2}{2!}-\cdots)}{y-\frac{y^3}{3!}+\frac{y^5}{5!}-\cdots\cdots}$$

$$=\lim_{y\to0}\frac{2(\frac{y}{1!}+\frac{y^3}{3!}+\cdots\cdots)}{y-\frac{y^3}{3!}+\frac{y^5}{5!}-\cdots\cdots}$$

$$=\lim_{y\to0}\frac{2y(\frac{1}{1!}+\frac{y^2}{3!}+\cdots\cdots)}{y(1-\frac{y^2}{3!}+\frac{y^4}{5!}-\cdots\cdots)}$$

$$=\lim_{y\to0}\frac{2(\frac{1}{1!}+\frac{y^2}{3!}+\cdots\cdots)}{1-\frac{y^2}{3!}+\frac{y^4}{5!}-\cdots\cdots}$$

$$=\frac{2(1+\frac{0^2}{3!}+0\cdots\cdots)}{1-\frac{0^2}{3!}+\frac{0^4}{5!}-\cdots\cdots}=\frac{2\times1}{1}=2\text{ (Ans.)}$$

(c) দেখাও যে, $16f(x)+25g(x)$ এর লঘুমান 40

প্রমাণ : মনে করি, $y=16f(x)+25g(x)$

$\Rightarrow y=16e^x+25e^{-x}$

$\therefore \dfrac{dy}{dx}=16e^x-25e^{-x}$ এবং

$\dfrac{d^2y}{dx^2}=16e^x+25e^{-x}$

চরম মানের জন্য, $\dfrac{dy}{dx}=0\ \therefore 16e^x-25e^{-x}=0$

$\Rightarrow 16e^x = \frac{25}{e^x} \Rightarrow (e^x)^2 = \frac{25}{16} \quad \therefore e^x = \pm\frac{5}{4}$.

$e^x = \frac{5}{4}$ হলে, $\frac{d^2y}{dx^2} = 16.\frac{5}{4} + 25\times\frac{5}{4} \square 0$

$\therefore \quad e^x = \frac{5}{4}$ এর জন্য 16 f(x) + 25g(x) এর লঘুমান আছে।

$\therefore$ লঘুমান $= 16.\frac{5}{4} + 25\times\frac{4}{5} = 20 + 20 = 40$

21. $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 3$ এবং

$g(x) = x^3 - 3x^2 - 45x + 13$

(a) $e^{\sqrt{x}} + e^{-\sqrt{x}}$ এর অন্তরজ নির্ণয় কর।

সমাধান: $\frac{d}{dx}(e^{\sqrt{x}} + e^{-\sqrt{x}})$

$= \frac{d}{dx}(e^{\sqrt{x}}) + \frac{d}{dx}(e^{-\sqrt{x}})$

$= e^{\sqrt{x}}\frac{d}{dx}(\sqrt{x}) + e^{-\sqrt{x}}\frac{d}{dx}(-\sqrt{x})$

$= e^{\sqrt{x}}\frac{1}{2\sqrt{x}} - e^{-\sqrt{x}}\frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{e^{\sqrt{x}} - e^{-\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}$

(b) যে সকল ব্যবধিতে f(x) বৃদ্ধি ও হ্রাস পায় তা নির্ণয় কর।

সমাধান : দেওয়া আছে, $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 3$

$\therefore \ f'(x) = 6x^2 - 18x + 12$

$= 6(x^2 - 3x + 2) = 6(x-1)(x-2)$

$f'(x) = 0$ হলে, $6(x-1)(x-2) = 0$

$\Rightarrow x = 1, 2$

x = 1, 2 মানদ্বয় সকল বাস্তব সংখ্যাকে $x<1$, $1<x<2$ এবং $x > 2$ ব্যবধিতে বিভক্ত করে।

এখন, $x < 1$ এর জন্য, $x - 1 < 0$ ও $x - 2 < 0$, কাজেই $f'(x) > 0$.

$\therefore -\infty < x < 1$ ব্যবধিতে f(x) ফাংশন বৃদ্ধি পায়।

আবার, $1 < x < 2$ এর জন্য $x - 1 > 0$ ও $x - 2 < 0$, কাজেই $f'(x) < 0$.

$\therefore \ 1 < x < 2$ ব্যবধিতে f(x) ফাংশন হ্রাস পায়।

অপরপক্ষে, $x > 2$ এর জন্য $x - 1 > 0$ ও $x - 2 > 0$, কাজেই $f'(x) > 0$.

$\therefore \ 2 < x < \infty$ ব্যবধিতে f(x) ফাংশন বৃদ্ধি পায়।

$\therefore \ -\infty < x < 1$ ও $2 < x < \infty$ ব্যবধিতে f(x) বৃদ্ধি পায় এবং $1 < x < 2$ ব্যবধিতে f(x) হ্রাস পায়।

(c) g(x) ফাংশনের গুরুমান ও লঘুমান নির্ণয় কর।

সমাধানঃ দেওয়া আছে,

$g(x) = x^3 - 3x^2 - 45x + 13$

$\therefore \quad g'(x) = 3x^2 - 6x - 45$ এবং

$g''(x) = 6x - 6$

চরমবিন্দুর জন্য, $g'(x) = 0$

$\Rightarrow 3x^2 - 6x - 45 = 0$

$\Rightarrow x^2 - 2x - 15 = 0$

$\Rightarrow x^2 - 5x + 3x - 15 = 0$

$\Rightarrow x(x-5) + 3(x-5) = 0$

$\Rightarrow (x-5)(x+3) = 0 \Rightarrow x = 5, -3$

এখন, $g''(5) = 6(5-1) = 24 > 0$

$\therefore \quad x = 5$ বিন্দুতে $g(x)$ এর সর্বনিম্ন মান আছে এবং ইহা $g(5) = 5^3 - 3\times5^2 - 45\times5 + 13$

$= 125 - 75 - 225 + 13 = -162$

আবার, $g''(-3) = 6(-3-1) = -24 < 0$

$\therefore \quad x = -3$ বিন্দুতে $g(x)$ এর সর্বোচ্চ মান আছে এবং ইহা

$g(-3) = (-3)^3 - 3\times(-3)^2 - 45\times(-3) + 13$

$= -27 - 27 + 135 + 13 = 94$

22. (i) $f(x) = \sec 5x$

(ii) $g(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 6x + 3$

(a) x-এর সাপেক্ষে $y = \log_x 3$ এর অন্তরজ নির্ণয় কর।

সমাধান: $y = \log_x 3 = \log_x e \times \log_e 3$

$$=\ln 3\frac{1}{\log_e x}=\ln 3\frac{1}{\ln x}=\ln 3(\ln x)^{-1}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx}=\ln 3(-1)(\ln x)^{-1-1}\frac{d}{dx}(\ln x)$$

$$=-\ln 3\,(\ln x)^{-2}\frac{1}{x}$$

$\therefore$ x-এর সাপেক্ষে $y = \log_x 3$ এর অন্তরজ

$$=\frac{-\ln 3}{x(\ln x)^2}$$

(b) লিমিট হিসাবে f(x) এর অন্তরজ নির্ণয় কর।

সমাধান: লিমিট হিসাবে f(x) এর অন্তরজ

$$\frac{d}{dx}\{f(x)\}=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$$\therefore \frac{d}{dx}(\sec 2x)=\lim_{h\to 0}\frac{\sec 5(x+h)-\sec 5x}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\sec(5x+5h)-\sec 5x}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}[\frac{1}{\cos(5x+5h)}-\frac{1}{\cos 5x}]$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\cos 5x-\cos(5x+5h)}{h\cos(5x+5h)\cos 5x}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{2\sin\frac{5x+5x+5h}{2}\sin\frac{5x+5h-5x}{2}}{h\cos(5x+5h)\cos 5x}$$

$$=2\lim_{h\to 0}\frac{\sin(5x+\frac{5}{2}h)}{\cos(5x+5h)\cos 5x}\times\lim_{h\to 0}\frac{\sin\frac{5}{2}h}{\frac{5}{2}h}\times\frac{5}{2}$$

$$=5\frac{\sin(5x+\frac{5}{2}\times 0)}{\cos(5x+5\times 0)\cos 5x}\times 1$$

$$=\frac{5\sin 5x}{\cos 5x\cos 5x}=5\tan 5x\ \sec 5x$$

(c) g(x) এর গুরুমান ও লঘুমান নির্ণয় কর।

সমাধান: $g(x)=\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2-6x+3$

$\therefore\ g'(x)=x^2+2x-6$ এবং

$$g''(x)=2x+2$$

চরমবিন্দুর জন্য, $g'(x)=0 \Rightarrow x^2+2x-6=0$

$\Rightarrow x^2+3x-2x-6=0$

$\Rightarrow x(x+3)-2(x+3)=0$

$\Rightarrow (x+3)(x-2)=0 \Rightarrow x=-3, 2$

এখন, $g''(-3)=2(-3+1)=-4<0$

$\therefore\ x=-3$ বিন্দুতে $g(x)$ এর সর্বোচ্চ মান আছে এবং ইহা

$$g(-3)=\frac{1}{3}(-3)^3+\frac{1}{2}(-3)^2-6(-3)+3$$

$$=-9+\frac{9}{2}+18+3=12+\frac{9}{2}=\frac{33}{2}$$

আবার, $g''(2)=2(2+1)=6>0$

$\therefore\ x=2$ বিন্দুতে $g(x)$ এর সর্বনিম্ন মান আছে এবং

ইহা $g(2)=\frac{1}{3}(2)^3+\frac{1}{2}(2)^2-6(2)+3$

$$=\frac{8}{3}+2-12+3=\frac{8}{3}-7=\frac{8-21}{3}$$

$$=-\frac{13}{3}$$

23. $y=x^2+2x\cdots$ (i), $f(x)=\frac{1}{3}x^3-3x-3$

(a) $\lim_{x\to\infty}\frac{5.9^x-9^{-x}}{4.9^x+9^{-x}}$ এর মান নির্ণয় কর।

সমাধান: $\lim_{x\to\infty}\frac{5.9^x-9^{-x}}{4.9^x+9^{-x}}$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{5.9^x-\frac{1}{9^x}}{4.9^x+\frac{1}{9^x}}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{9^x(5-\frac{1}{9^{2x}})}{9^x(4+\frac{1}{9^{2x}})}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{5-\frac{1}{9^{2x}}}{4+\frac{1}{9^{2x}}}=\frac{5-0}{4+0}=\frac{5}{4}$$

(b) (i) নং বক্ররেখাটি x-অক্ষকে যে বিন্দুতে ছেদ করে সে বিন্দুতে স্পর্শকের নতি নির্ণয় কর।

সমাধান: $y = x^2 + 2x \cdots \cdots$ (i)

$\therefore \frac{dy}{dx} = 2x + 2$

(i) নং বক্ররেখাটি x-অক্ষকে যে বিন্দুতে ছেদ করে তার কোটি $y = 0$. (1) এ $y = 0$ বসিয়ে পাই,

$x^2 + 2x = 0 \Rightarrow x(x+2) = 0$

$\Rightarrow x = 0, -2$

$\therefore$ $x = 0$ বিন্দুতে স্পর্শকের নতি,

$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{(0,0)} = 2\times 0 + 2 = 2$

এবং $x = 2$ বিন্দুতে স্পর্শকের নতি,

$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{(2,0)} = 2\times 2 + 2 = 6$

(c) f(x) এর গুরুমান নির্ণয় কর।

সমাধান: দেওয়া আছে, $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 3x - 3$

$\therefore$ $f'(x) = x^2 - 3$ এবং $f''(x) = 2x$

চরমবিন্দুর জন্য, $f'(x) = 0 \Rightarrow x^2 - 3 = 0$

$\Rightarrow x = \pm\sqrt{3}$

এখন, $f''(\sqrt{3}) = 2\times\sqrt{3} = 2\sqrt{3} > 0$

$\therefore$ $x = 5$ বিন্দুতে $f(x)$ এর লঘুমান আছে।

আবার, $f''(-\sqrt{3}) = 2\times(-\sqrt{3}) = -2\sqrt{3} < 0$

$\therefore$ $x = -3$ বিন্দুতে $f(x)$ এর গুরুমান আছে এবং

ইহা $f(-\sqrt{3}) = \frac{1}{3}(-\sqrt{3})^3 - 3(-\sqrt{3}) - 3$

$= -\frac{1}{3}(3\sqrt{3}) + 3\sqrt{3} - 3$

$= -\sqrt{3} + 3\sqrt{3} - 3 = 2\sqrt{3} - 3$

24. $f(x) = \frac{\cos x}{1+\sin^2 3x}$

$g(x) = \operatorname{cosec} x - \sqrt{3}\sec x$

(a) g(x) এর অন্তরজ নির্ণয় কর।

সমাধান: $g'(x) = -\operatorname{cosec} x \cot x - \sqrt{3}\sec x \tan x$

$\therefore$ g(x) এর অন্তরজ $= -\operatorname{cosec} x \cot x - \sqrt{3}\sec x \tan x$

(b) f(x) এর অন্তরজ নির্ণয় কর।

সমাধান: $f(x) = \frac{\cos x}{1+\sin^2 3x}$

$\therefore f'(x)$

$= \frac{(1+\sin^2 3x)\frac{d}{dx}(\cos x) - \cos x\frac{d}{dx}(1+\sin^2 3x)}{(1+\sin^2 3x)^2}$

$= \frac{(1+\sin^2 3x)(-\sin x) - \cos x(0 + 2\sin 3x\cos 3x.3)}{(1+\sin^2 3x)^2}$

$\therefore$ g(x) এর অন্তরজ

$= \frac{-(1+\sin^2 3x)\sin x - 6\cos x\sin 3x\cos 3x}{(1+\sin^2 3x)^2}$

(c) প্রমাণ কর যে, $g(10^0) = 4$

প্রমাণ: L.H.S. $= g(10^0)$

$= \operatorname{cosec} 10^0 - \sqrt{3}\sec 10^0$

$= \frac{1}{\sin 10^0} - \frac{\sqrt{3}}{\cos 10^0}$

$= \frac{\cos 10^0 - \sqrt{3}\sin 10^0}{\sin 10^0\cos 10^0}$

$= \frac{\frac{1}{2}\cos 10^0 - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin 10^0}{\frac{1}{2}\sin 10^0\cos 10^0}$

$= \frac{\cos 60^0\cos 10^0 - \sin 60^0\sin 10^0}{\frac{1}{4}\sin 20^0}$

$= \frac{4\cos(60^0 + 10^0)}{\sin(90^0 - 70^0)} = \frac{4\cos 70^0}{\cos 70^0}$

$= 4 =$ R.H.S.

25. $A = \tan 3x$, $B = \sin 3x$

(a) $\frac{dA}{dx}$ নির্ণয় কর।

সমাধান : $A = \tan 3x$

$$\therefore \frac{dA}{dx} = \sec^2 3x \frac{d}{dx}(3x)$$
$$= \sec^2 3x \,.(3) = 3\sec^2 3x$$

(b) $\lim_{x\to 0}\frac{A-B}{x^3}$ নির্ণয় কর।

সমাধান :

$$\lim_{x\to 0}\frac{A-B}{x^3} = \lim_{x\to 0}\frac{\tan 3x - \sin 3x}{x^3}$$
$$= \lim_{x\to 0}\frac{\tan 3x(1-\cos 3x)}{x^3}$$
$$= \lim_{x\to 0}\frac{\tan 3x . 2\sin^2\frac{3x}{2}}{x^3}$$
$$= 2\lim_{3x\to 0}\frac{\tan 3x}{3x}\times 3\times \lim_{3x\to 0}\left\{\frac{\sin(3x/2)}{3x/2}\right\}^2\times\frac{9}{4}$$
$$= 2\times 1\times 3\times 1\times\frac{9}{4} = \frac{27}{2} \quad \text{(Ans.)}$$

(c) x এর সাপেক্ষে মূল নিয়মে A এর অন্তরজ নির্ণয় কর।

সমাধান : মনে করি, $f(x) = A = \tan 3x$.

$\therefore f(x+h) = \tan 3(x+h) = \tan(3x+3h)$

অন্তরক সহগের সংজ্ঞা হতে পাই,

$$\frac{d}{dx}\{f(x)\} = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$
$$\therefore \frac{d}{dx}(\tan 3x) = \lim_{h\to 0}\frac{\tan(3x+3h)-\tan 3x}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left[\frac{\sin(3x+3h)}{\cos(3x+3h)} - \frac{\sin 3x}{\cos 3x}\right]$$
$$= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left[\frac{\sin(3x+3h)\cos 3x - \sin 3x\cos(3x+3h)}{\cos(3x+3h)\cos 3x}\right]$$
$$= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\frac{\sin(3x+3h-3x)}{\cos(3x+3h)\cos 3x}$$
$$= \lim_{h\to 0}\frac{\sin 3h}{3h}\times 3\times\lim_{h\to 0}\frac{1}{\cos(3x+3h)\cos 3x}$$
$$= 1\times 3\times\frac{1}{\cos(3x+0)\cos 3x} = \frac{3}{\cos^2 3x}$$
$$= 3\sec^2 3x$$

26. দৃশ্যকল্প-I: $y(x+1)(x+2) - x + 4 = 0$

দৃশ্যকল্প-II: $h(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 1$.

(a) $y = \sec x$ হলে, প্রমাণ কর যে, $y_2 = y(2y^2 - 1)$. ২

প্রশ্নমালা IX(I) এর 6(a) দ্রষ্টব্য।

(b) দৃশ্যকল্প-I এর বক্ররেখাটি যে বিন্দুতে x অক্ষকে ছেদ করে, ঐ বিন্দুতে অভিলম্বের সমীকরণ নির্ণয় কর। ৪

সমাধান ঃ $y(x+1)(x+2) - x + 4 = 0$ ......(i)

যে সব বিন্দুতে স্পর্শক x- অক্ষকে ছেদ করে ঐ সব বিন্দুর y –স্থানাঙ্ক = 0

(1) এ $0.(x+1)(x+2) - x + 4 = 0$

$\Rightarrow x = 4$

x এর সাপেক্ষে (i) নং সমীকরণ অন্তরীকরণ করে পাই,

$$(x^2+3x+2)\frac{dy}{dx} + y(2x+3) - 1 = 0$$
$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1-y(2x+3)}{x^2+3x+2}$$
$$\therefore \frac{dy}{dx}_{(4,0)} = \frac{1}{4^2+3.4+2} = \frac{1}{30}$$

$\therefore$ প্রদত্ত ব্রকরেখার (4, 0) বিন্দুতে অভিলম্বের সমীকরণ, $y - 0 = -30(x-4)$

$\Rightarrow 30x + y - 120 = 0$

(c) দৃশ্যকল্প-II এর ফাংশনের চরমমান নির্ণয় কর। ৪

সমাধান ঃ $h(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 1$.

$\therefore h'(x) = 6x^2 - 6x - 12$,

$\therefore h''(x) = 12x - 6$

চরমবিন্দুর জন্য, $\frac{dy}{dx} = 0$

$\Rightarrow 6x^2 - 6x - 12 = 0$

$\Rightarrow (x+1)(x-2)=0, \therefore x=-1, 2.$

$x=-1$ বিন্দুতে, $h''(x)=-12-6=-18<0$

$\therefore$ $x=-1$ বিন্দুতে $h(x)$ লঘুমান বিদ্যমান এবং এর মান $=2(-1)-3.1-12(-1)+1=8.$

আবার, $x=2$ বিন্দুতে, $h''(x)=24-6=18>0$

$\therefore$ $x=2$ বিন্দুতে $h(x)$ গুরুমান বিদ্যমান এবং এর মান $=2.8-3.4-12.2+1=-19.$

27. $f(u)=\sin^{-1}u$ এবং $g(u)=\ln u$ দুইটি ফাংশন। **[সিলেট বোর্ড ২০১৭]**

(a) $\lim\limits_{\theta\to 0}\dfrac{\cot\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)-\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)}{\theta^2}$ এর মান নির্ণয় কর। ২

সমাধান : $\lim\limits_{\theta\to 0}\dfrac{\cot(\frac{\pi}{2}-\theta)-\cos(\frac{\pi}{2}-\theta)}{\theta^2}$

$=\lim\limits_{\theta\to 0}\dfrac{\tan\theta-\sin\theta}{\theta^2}=\lim\limits_{\theta\to 0}\dfrac{\tan\theta(1-\cos\theta)}{\theta^2}$

$=\lim\limits_{\theta\to 0}\dfrac{\tan\theta.2\sin^2\frac{\theta}{2}}{\theta^2}$

$=2\lim\limits_{\theta\to 0}\dfrac{\tan\theta}{\theta}.\lim\limits_{\theta\to 0}\dfrac{\sin\frac{\theta}{2}}{\frac{\theta}{2}}.\dfrac{1}{2}.\lim\limits_{\theta\to 0}\sin\dfrac{\theta}{2}$

$=2.1.1.\dfrac{1}{2}.\sin 0=0$

(b) $y=\{f(2x)\}^2$ হলে দেখাও যে,

$(1-4x^2)y_2-4xy_1-8=0$ ৪

সমাধান : $f(u)=\sin^{-1}u$

$\therefore$ $f(2x)=\sin^{-1}(2x)$

এখন, $y=\{\sin^{-1}(2x)\}^2$

অতপর প্রশ্নমালা IX-I এর 11(e) দ্রষ্টব্য।

(c) দেখাও যে, $\dfrac{g(2x)}{x}$ ফাংশনের সর্বোচ্চ মান $\dfrac{2}{e}$ ।৪

প্রমাণ : $g(u)=\ln u$ $\therefore$ $g(2x)=\ln(2x)$

$\therefore$ $\dfrac{g(2x)}{x}=\dfrac{\ln(2x)}{x}$

অতপর প্রশ্নমালা IX-k এর 6(d) দ্রষ্টব্য।

28. $f(x)=x^{\tan^{-1}x}, g(x)=\log_x a,$

$h(x)=\sqrt{a+b\cos x}.$ [য.বো.'১৭]

(a) $\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{1-\cos y}{y}$ এর মান নির্ণয় কর।

সমাধান : $\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{1-\cos y}{y}=\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{2\sin^2\frac{y}{2}}{y}$

$=2\lim\limits_{y\to 0}\left(\dfrac{\sin\frac{y}{2}}{\frac{y}{2}}\right)^2.\dfrac{y}{4}=2.1.\dfrac{0}{4}=0$

(b) $f(x)$ এবং $g(x)$ এর অন্তরজ নির্ণয় কর।

সমাধান : প্রশ্নমালা IX E এর 2(e) এবং প্রশ্নমালা IX G এর 2(k) দ্রষ্টব্য।

(c) $y=h(x)$ হলে, দেখাও যে,

$2y.\dfrac{d^2y}{dx^2}+2.\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2+y^2=a.$

সমাধান : $y=h(x)=\sqrt{a+b\cos x}\cdots$ (i)

x -এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই,

$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1}{2\sqrt{a+b\cos x}.}\dfrac{d}{dx}(a+b\cos x)$

$\Rightarrow \dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1}{2y}(0-b\sin x)$

$\Rightarrow 2y\dfrac{dy}{dx}=-b\sin x$

x -এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই,

$2y\dfrac{d^2y}{dx^2}+\dfrac{dy}{dx}.2\dfrac{dy}{dx}=-b\cos x$

$\Rightarrow 2y\dfrac{d^2y}{dx^2}.+\dfrac{dy}{dx}.2\dfrac{dy}{dx}=-b\cos x\cdots$(ii)

(i) হতে পাই, $a+b\cos x=y^2$

$\Rightarrow b\cos x=y^2-a$

(ii) হতে, $2y\frac{d^2y}{dx^2}+2(\frac{dy}{dx})^2=a-y^2$

$\therefore 2y.\frac{d^2y}{dx^2}+2.\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+y^2=a.$

29. $f(x)=\frac{1}{\sin x}, g(x)=\frac{1}{\tan x}, h(x)=x.$ [রা.বো.'১৭]

(a) মান নির্ণয় কর : $\lim_{x\to 2}\frac{4-x^2}{3-\sqrt{x^2+5}}$

সমাধান : $\lim_{x\to 2}\frac{4-x^2}{3-\sqrt{x^2+5}}$

$=\lim_{x\to 2}\frac{(4-x^2)(3+\sqrt{x^2+5})}{(3-\sqrt{x^2+5})(3+\sqrt{x^2+5})}$

$=\lim_{x\to 2}\frac{(4-x^2)(3+\sqrt{x^2+5})}{3^2-(x^2+5)}$

$=\lim_{x\to 2}\frac{(4-x^2)(3+\sqrt{x^2+5})}{9-x^2-5}$

$=\lim_{x\to 2}\frac{(4-x^2)(3+\sqrt{x^2+5})}{4-x^2}$

$=\lim_{x\to 2}(3+\sqrt{x^2+5}) = 3+\sqrt{2^2+5}$

$=3+3 = 6$ (Ans.)

(b) মূল নিয়মে x এর সাপেক্ষে $\frac{f(x)}{g(x)}$ এর অন্তরজ নির্ণয় কর।

সমাধান : $\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{1/\sin x}{1/\tan x}=\frac{\tan x}{\sin x}=\frac{1}{\cos x}$

$=\sec x$

অতপর প্রশ্নমালা IX C এর ১২.৮ দ্রষ্টব্য।

(c) দেখাও যে, $h(x)+\frac{1}{h(x)}$ এর গুরুমান তার লঘুমান অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর।

সমাধান : $h(x)+\frac{1}{h(x)}=x+\frac{1}{x}$

অতপর প্রশ্নমালা IX K এর 6(a) দ্রষ্টব্য।

30. $y=4x(6-x)^2$ এবং $f(x)=e^{\tan^{-1}x}$ [কু.বো.'১৭]

(a) $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 2x}{x}$ এর মান নির্ণয় কর।

সমাধান : $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 2x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2 x}{x}$

$=2.\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}.\lim_{x\to 0}(\sin x)$

$=2.1.\sin 0=2\times 0=0$ (Ans.)

(b) y-এর গরিষ্ঠ মান নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ $y=4x(6-x)^2$

$\therefore \frac{dy}{dx}=4x.2(6-x)(-1)+4(6-x)^2.1$

$=4(6-x)(-2x+6-x)$

$=4(6-x)(6-3x)=12(6-x)(2-x)$

এবং $\frac{d^2y}{dx^2}=12\{(6-x)(-1)+(2-x)(-1)\}$

$=12(-6+x-2+x)=24(x-4)$

চরম মানের জন্য, $f'(x)=0$

$\Rightarrow 12(6-x)(2-x)=0 \quad \therefore x=2, 6$

এখন, $f''(2)=24(2-4)=-48<0$

$\therefore$ $f(x)$ গরিষ্ঠ মান হবে যখন $x=2$ এবং

এর মান $= f(2)=8(6-2)^2=128$

আবার, $f''(6)=24(6-4)>0$

$\therefore$ $f(x)$ লঘুমান হবে যখন $x=6$ ।

$\therefore$ y-এর গরিষ্ঠ মান 128

(c) প্রমাণ কর যে,

$(1+x^2)f''(x)+(2x-1)f'(x)=0$

সমাধান : প্রশ্নমালা IX I এর 10(c) এর অনুরূপ।

31. দৃশ্যকল্প-১: ABC ত্রিভুজে $a=\sqrt{3}\,b$ এবং $A=2B$ [ব.বো.'১৭]

দৃশ্যকল্প-২: $\ln y = bz$

(a) $\lim_{x\to 0}(\operatorname{cosec}x-\cot x)$ এর মান নির্ণয় কর।

সমাধান : প্রশ্নমালা IX A এর 8(f) দ্রষ্টব্য।

(b) দৃশ্যকল্প-১ এর আলোকে ABC এর কোণগুলি নির্ণয় কর।

সমাধান : দেওয়া আছে, $a=\sqrt{3}\,b$ ……(1)

এবং $A = 2B \cdots\cdots\cdots (2)$

(1) হতে, $2R \sin A = \sqrt{3}\ .2R \sin B$

$\Rightarrow \sin A = \sqrt{3}\ \sin B$

$\Rightarrow \sin 2B = \sqrt{3} \sin B$; (2) দ্বারা।

$\Rightarrow 2 \sin B \cos B = \sqrt{3}\ \sin B$

$\Rightarrow \sin B\ (2 \cos B - \sqrt{3}) = 0$

$\sin B = 0$ হলে, $B = 0^0$ এবং $A = 0^0$

কিন্তু ABC একটি ত্রিভুজ বলে $A = B = 0$ অসম্ভব। কাজেই, $\sin B \neq 0$

$2 \cos B - \sqrt{3} = 0$ হলে,

$\cos B = \dfrac{\sqrt{3}}{2} = \cos 30^0$

$\therefore B = 30°$ এবং $A = 2B = 60°$

$\therefore \sin B = \dfrac{1}{2} = \sin 30° \Rightarrow B = 30°$

$\therefore A = 2B = 2 \times 30° = 60°$ এবং

$C = 180° - (30° + 60°)$

$= 180° - 90° = 90°$

$\therefore$ ত্রিভুজের কোণ তিনটি $30°, 60°, 90°$

(c) দৃশ্যকল্প-২ এর আলোকে $\cos z = x$ হলে প্রমাণ কর যে, $(1-x^2)y_2 - xy_1 = b^2y$

সমাধান : দেওয়া আছে,

$\cos z = x \Rightarrow z = \cos^{-1} x$ এবং

$\ln y = b \cos^{-1} x$

ইহাকে x-এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই,

$\dfrac{1}{y} y_1 = b \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} \Rightarrow \sqrt{1-x^2}\ y_1 = bx$

$\Rightarrow (1-x^2)\ y_1^{\,2} = b^2y^2$, [উভয় পক্ষকে বর্গ করে।]

ইহাকে x-এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই,

$(1-x^2)\ 2y_1y_2 + y_1^{\,2}(-2x) = b^2.2yy_1$

উভয় পক্ষকে $2y_1$ দ্বারা ভাগ করে পাই,

$(1-x^2)\ y_2 - xy_1 = b^2y$

শ্রেণির কাজ

1. $x = 0$ বিন্দুর সন্নিকটে $f(x) = \sin x$ ফাংশনের লেখকে অসন্নভাবে ঐ বিন্দুতে স্পর্শকের লেখ দ্বারা স্থানীয়ভাবে প্রতিস্থাপন কর।

পরীক্ষণের নাম ঃ $x = 0$ বিন্দুর সন্নিকটে $f(x) = \sin x$ ফাংশনের লেখকে অসন্নভাবে ঐ বিন্দুতে স্পর্শকের লেখ দ্বারা স্থানীয়ভাবে প্রতিস্থাপন।

মূলতত্ত্ব ঃ $x = x_0$ বিন্দুর সন্নিকটে $f(x)$ ফাংশনকে অসন্নভাবে ঐ বিন্দুতে স্পর্শক দ্বারা স্থানীয়ভাবে প্রতিস্থাপন করার সূত্র, $f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$

প্রয়োজনীয় উপকরণ ঃ (i) পেন্সিল (ii) স্কেল (iii) গ্রাফ পেপার (iv) ইরেজার (v) শার্পনার (vi) সায়েন্টিফিক ক্যালকুলেটর।

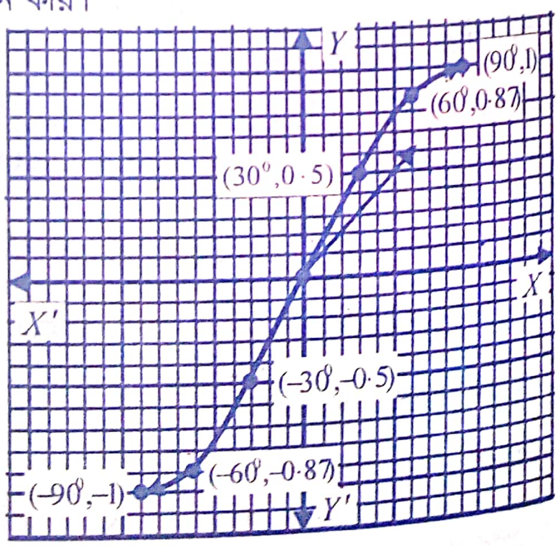
কার্যপদ্ধতি ঃ

1. একটি ছক কাগজে স্থানাঙ্কের অক্ষ রেখা $X'OX$ ও YOY' আঁকি।

2. নিচের তালিকায় x এর ভিন্ন ভিন্ন মানের জন্য $f(x) = \sin x$ এর প্রতিরূপী মান নির্ণয় করি ঃ

x	$0°$	$\pm 30°$	$\pm 60°$	$\pm 90°$
y	0	$\pm \cdot 5$	$\pm \cdot 87$	± 1

3. x - অক্ষ বরাবর ক্ষুদ্রতম বর্গের 1 বাহু $= 10^0$ ও y - অক্ষ বরাবর ক্ষুদ্রতম বর্গের 10 বাহু $= 1$ একক ধরে তালিকাভুক্ত বিন্দুগুলি ছক কাগজে স্থাপন করি এবং সরু পেন্সিলের সাহায্যে স্থাপিত বিন্দুগুলি মুক্ত হস্তে বক্রাকারে যোগ করে $y = f(x) = \sin x$ এর লেখ অঙ্কন করি।



4. $x = 0$ বিন্দুতে স্পর্শক অঙ্কন করি।

হিসাব ঃ $f(x) = \sin x \Rightarrow f'(x) = \cos x$

$\therefore \quad f(0) = \sin 0 = 0, \ f'(0) = \cos 0 = 1$

$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ হতে পাই,

$\sin x \approx 0 + 1(x - 0) = x$

ফলাফল ঃ $x = 0$ বিন্দুর সন্নিকটে $y = f(x) = \sin x$ ফাংশনের লেখকে অসন্নভাবে ঐ বিন্দুতে স্পর্শক $y = x$ এর লেখ দ্বারা স্থানীয়ভাবে প্রতিস্থাপন করা হল। অন্যভাবে বলা যায়, x এর মান 0 এর সন্নিকটে হলে $\sin x$ এর পরিমাণ x এর কাছাকাছি হবে।

2. $x = 2$ তে $y = x^2$ ফাংশনের লেখ অঙ্কন করে dy ও δy নির্ণয় করে লেখচিতে প্রদর্শন কর, যেখানে $dx = \delta x = 1$.

পরীক্ষণের নাম ঃ $y = x^2$ ফাংশনের জন্য, $x = 2$ বিন্দুতে dy ও δy নির্ণয় , যেখানে $dx = \delta x = 1$ এবং লেখচিতে dy ও δy প্রদর্শন ।

মূলতত্ত্ব ঃ স্বাধীন চলক ও অধীন চলকের অন্তরকের মধ্যকার সম্পর্ক $dy = f'(x)dx$ এবং স্বাধীন চলকের অতি ক্ষুদ্র পরিবর্তন δx এর জন্য অধীন চলকের অতি ক্ষুদ্র পরিবর্তন $\delta y = f(x + \delta x) - f(x)$

প্রয়োজনীয় উপকরণ ঃ (i) পেন্সিল (ii) স্কেল (iii) গ্রাফ পেপার (iv) ইরেজার (v) শার্পনার (vi) চাঁদা (vii) পেন্সিল কম্পাস (viii) সায়েন্টিফিক ক্যালকুলেটর।

কার্যপদ্ধতি ঃ

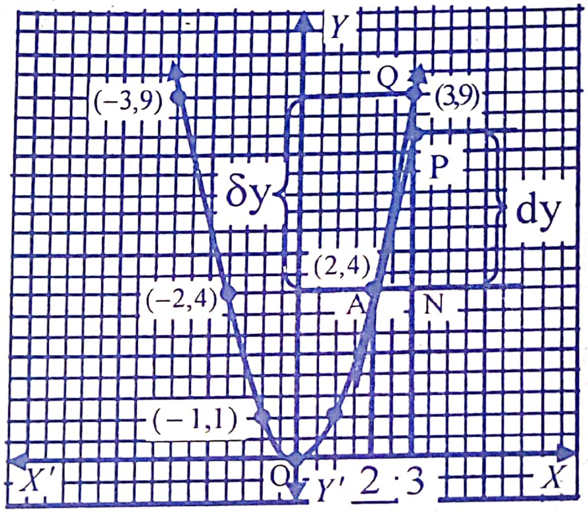
1. একটি ছক কাগজে স্থানাঙ্কের অক্ষ রেখা $X'OX$ ও YOY' আঁকি ।

2. নিচের তালিকায় x এর ভিন্ন ভিন্ন মানের জন্য $f(x) = x^2$ এর প্রতিরূপী মান নির্ণয় করি ঃ

x	0	± 1	± 2	± 3
$f(x) = x^2$	0	1	4	9

3. x - অক্ষ ও y - অক্ষ বরাবর ক্ষুদ্রতম বর্গের 2 বাহু = 1 একক ধরে তালিকাভুক্ত বিন্দুগুলি ছক কাগজে স্থাপন করি এবং সরূ পেন্সিলের সাহায্যে স্থাপিত বিন্দুগুলি মুক্ত হস্তে বক্রাকারে যোগ করে $y = f(x) = x^2$ এর লেখ অঙ্কন করি।

4. $A(2, 4)$ বিন্দুতে স্পর্শক অঙ্কন করি । $x = 3$ সরলরেখাকে স্পর্শকটি ও ফাংশনটি যথাক্রমে P ও Q বিন্দুতে ছেদ করে।



হিসাবঃ $y = x^2$ হতে পাই , $\frac{dy}{dx} = 2x$.

সুতরাং $dy = 2x\,dx = 2 \times 2 \times 1 = 4$

এবং $\delta y = f(x + \delta x) - f(x)$

$= (x + \delta x)^2 - (x)^2 = (2 + 1)^2 - 2^2$

$= 9 - 4 = 5$

চিত্র হতে পাই, $AN = dx = \delta x = 1$, $PN = dy$ ও $QN = \delta y$

ফলাফল ঃ $PN = dy = 4$ ও $QN = \delta y = 5$ লেখচিত্রে পদর্শন করা হলো।