বোর্ড পরীক্ষার পশ্নপত্রের সমাধান -২০১৮

সৃজনশীল প্রশ্নের সমাধান:

ঢাকা বোর্ড, দিনাজপুর বোর্ড, যশোর বোর্ড, সিলেট বোর্ড

১। (ক) সমাধান: $\begin{pmatrix} x & 2 \\ x & 2 \end{pmatrix}$ ম্যাট্রিক্সটি ব্যতিক্রমী বলে,

$$\begin{vmatrix} x & 2 \\ x & 2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 2x - 2x = 0$$

$\Rightarrow x(2-2) = 0 \Rightarrow x.0 = 0$; যা x এর যেকোনো বাস্তব মানের জন্য সত্য।

$\therefore\ x \in \mathbb{R}.$

(খ) সমাধান: দেওয়া আছে, $f(x) = 3x^2 + 5x$

$\therefore\ f(A) = 3A^2 + 5A$

এখন, $A^2 = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 5 \\ -1 & 4 & 3 \\ 4 & -7 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 1 & 5 \\ -1 & 4 & 3 \\ 4 & -7 & 5 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} 4-1+20 & 2+4-35 & 10+3+25 \\ -2-4+12 & -1+16-21 & -5+12+15 \\ 8+7+20 & 4-28-35 & 20-21+25 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 23 & -29 & 38 \\ 6 & -6 & 22 \\ 35 & -59 & 24 \end{bmatrix}$$

$$\therefore\ f(A) = 3\begin{bmatrix} 23 & -29 & 38 \\ 6 & -6 & 22 \\ 35 & -59 & 24 \end{bmatrix} + 5\begin{bmatrix} 2 & 1 & 5 \\ -1 & 4 & 3 \\ 4 & -7 & 5 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 69 & -87 & 114 \\ 18 & -18 & 66 \\ 105 & -177 & 72 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 10 & 5 & 25 \\ -5 & 20 & 15 \\ 20 & -35 & 25 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 69+10 & -87+5 & 114+25 \\ 18-5 & -18+20 & 66+15 \\ 105+20 & -177-35 & 72+25 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 79 & -82 & 139 \\ 13 & 2 & 81 \\ 125 & -212 & 97 \end{bmatrix} \text{ (Ans.)}$$

(গ) প্রমাণ: দেওয়া আছে, $B = \begin{bmatrix} l & m & n \\ l^2 & m^2 & n^2 \\ l^3-1 & m^3-1 & n^3-1 \end{bmatrix}$

$$\therefore\ |B| = \begin{vmatrix} l & m & n \\ l^2 & m^2 & n^2 \\ l^3-1 & m^3-1 & n^3-1 \end{vmatrix}$$

অতপর প্রশ্নমালা IB এর উদাহরণ 1(c) দ্রষ্টব্য।

২। (ক) সমাধান: $(-4, -4)$ বিন্দুর পোলার স্থানাঙ্ক $(r\ ,\ \theta \pm 2n\pi),\ n \in \mathbb{Z}$; যেখানে, $r = \sqrt{(-4)^2+(-4)^2} = \sqrt{16+16} = 4\sqrt{2}$ এবং

$$\theta = \tan^{-1}\frac{-4}{-4} = \pi + \tan^{-1}(1) = \pi + \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{4}$$

$\therefore$ প্রদত্ত বিন্দুর পোলার স্থানাঙ্ক

$$\left(4\sqrt{2}\,,\ \frac{5\pi}{4} \pm 2n\pi\right),\ n \in \mathbb{Z}.$$

(খ) সমাধান: ধরি, $5x + 9y = 27$ অর্থাৎ

$5x + 9y - 27 = 0$ রেখার সমান্তরাল রেখার সমীকরণ $5x + 9y + k = 0$

এ রেখা দুইটির মধ্যবর্তী দূরত্ব $= \dfrac{|k+27|}{\sqrt{25+81}}$

প্রশ্নমতে, $\dfrac{|k+27|}{\sqrt{25+81}} = 4 \Rightarrow \dfrac{k+27}{\sqrt{106}} = \pm 4$

$\Rightarrow k = \pm 4\sqrt{106} - 27$

$\therefore$ নির্ণেয় রেখার সমীকরণ,

$5x + 9y \pm 4\sqrt{106} - 27 = 0$

(গ) সমাধান: ধরি, $(5\ ,\ 4)$ বিন্দুগামী রেখার সমীকরণ

$y - 4 = m(x - 5)\ \cdots\ (1)$

$5x + 9y = 27$ রেখার ঢাল $= -\dfrac{5}{9}$

প্রশ্নমতে, $\tan 45^0 = \pm\dfrac{m + \frac{5}{9}}{1 - \frac{5}{9}m}$

$\Rightarrow 1 = \pm\dfrac{9m+5}{9-5m} \Rightarrow 9 - 5m = \pm(9m + 5)$

'+' নিয়ে, $9 - 5m = 9m + 5 \Rightarrow m = \frac{2}{7}$

'' নিয়ে $9 - 5m = -9m - 5 \Rightarrow m = -\frac{7}{2}$

$\therefore$ রেখা দুইটির সমীকরণ, $y - 4 = \frac{2}{7}(x - 5)$

$\Rightarrow 7y - 28 = 2x - 10 \Rightarrow 2x - 7y + 18 = 0$

এবং $y - 4 = -\frac{7}{2}(x - 5)$

$\Rightarrow 2y - 8 = -7x + 35 \Rightarrow 7x + 2y - 43 = 0$

৩। (ক) সমাধানঃ $^nP_2 = 3\,^nC_2$

$$\Rightarrow \frac{n!}{(n-2)!} = 3\frac{n!}{3!(n-3)!}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{(n-2).(n-3)!} = 3\frac{1}{6(n-3)!}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{n-2} = \frac{1}{2} \Rightarrow n-2 = 2 \Rightarrow n = 4 \text{ (Ans.)}$$

(খ) সমাধানঃ $|\overline{A}| = \sqrt{3^2+2^2+6^2} = \sqrt{49} = 7$

$\therefore \overline{A}\cdot\overline{B} = (3\hat{i}+2\hat{j}+6\hat{k})\cdot(\hat{i}-4\hat{j}-3\hat{k})$

$= 3\times1+2(-4)+6(-3) = 3-8-18 = -23$

$\therefore$ $\overline{A}$ বরাবর $\overline{B}$ এর উপাংশ$= \left(\frac{\overline{A}\cdot\overline{B}}{|\overline{A}|}\right)\left(\frac{\overline{A}}{|\overline{A}|}\right)$

$$= \frac{-23}{7}\left(\frac{\hat{i}-4\hat{j}-3\hat{k}}{7}\right)$$

$$= -\frac{23}{49}(3\hat{i}+2\hat{j}+6\hat{k}) \text{ (Ans.)}$$

(গ) সমাধানঃ সংখ্যাগুলির শেষে 0 অথবা 4 অথবা 6 থাকলে সংখ্যাগুলি জোড় হবে। আবার, সংখ্যার প্রথমে 0 থাকলে তা অর্থপূর্ণ সংখ্যা হবেনা।

$\therefore$ 4 শেষে রেখে অবশিষ্ট 5টি স্থান বাকি 5টি অঙ্ক দ্বারা 5! উপায়ে পূরণ করা যায়। আবার 0 প্রথমে এবং 4 শেষে রেখে অবশিষ্ট 4টি স্থান বাকি 4টি অঙ্ক দ্বারা 4! উপায়ে পূরণ করা যায়।

$\therefore$ 4 শেষে রেখে অর্থপূর্ণ জোড় সংখ্যা গঠন করার উপায় সংখ্যা $= 5! - 4! = 96$

অনুরূপভাবে, 6 শেষে রেখে অর্থপূর্ণ জোড় সংখ্যা গঠন করার উপায় সংখ্যা $= 96$

এখন 0 শেষে রেখে অর্থপূর্ণ জোড় সংখ্যা গঠন করার উপায় সংখ্যা $= 5! = 120$

$\therefore$ নির্ণেয় অর্থপূর্ণ জোড় সংখ্যা $(96 + 96 + 120)$ বা, 312 সংখ্যক।

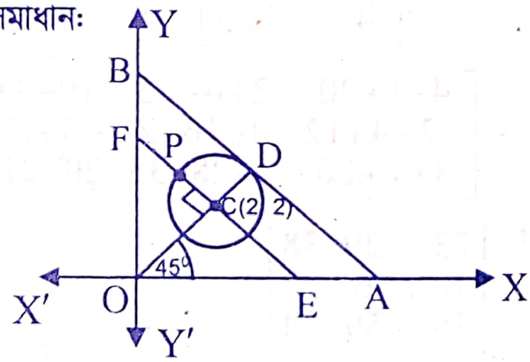
৪। (ক) সমাধানঃ দেওয়া আছে, $x^2 = 1 - t^2$ এবং $y = t$

$x^2 = 1 - t^2$ এ $t = y$ বসিয়ে পাই,

$x^2 = 1 - y^2 \Rightarrow x^2 + y^2 = 1$

$\therefore$ বৃত্তটির কেন্দ্র (0, 0)

(খ) সমাধানঃ



[বি.দ্র.: প্রশ্নে চিত্রটি সঠিক নয়। সঠিক চিত্র দেওয়া হলো।]

$OC = \sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}$

$\therefore$ EF রেখার সমীকরণ,

$x\cos 45^0 + y\sin 45^0 = 2\sqrt{2}$

$$\Rightarrow x\frac{1}{\sqrt{2}} + y\frac{1}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2} \Rightarrow x + y = 4$$

$$\Rightarrow \frac{x}{4} + \frac{y}{4} = 1$$

$\therefore E \equiv (4,0), F \equiv (0,4)$

P বিন্দু EF রেখাংশকে 2 : 1 অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত করে।

$$\therefore P \equiv \left(\frac{2\times0+1\times4}{2+1}, \frac{2\times4+1\times0}{2+1}\right) = \left(\frac{4}{3}, \frac{8}{3}\right)$$

$\therefore$ OP রেখার সমীকরণ, $y = \frac{8/3}{4/3}x$

$\Rightarrow y = 2x$ (Ans.)

(গ) যদি $OD = 3\sqrt{2}$ হয় তবে বৃত্তটির সমীকরণ নির্ণয় কর।

সমাধান: নির্ণেয় বৃত্তের ব্যাসার্ধ $= OD - OC$

$= 3\sqrt{2} - 2\sqrt{2} = \sqrt{2}$

$\therefore$ C(2, 2) কেন্দ্র ও $\sqrt{2}$ ব্যাসার্ধবিশিষ্ট বৃত্তের সমীকরণ, $(x-2)^2 + (y-2)^2 = (\sqrt{2})^2$

$\Rightarrow x^2 - 4x + 4 + y^2 - 4y + 4 = 2$

$\therefore x^2 + y^2 - 4x - 4y + 6 = 0$ (Ans.)

৫। (ক) প্রমাণ: L.H.S. $= \sin 44^0 + \cos 44^0$

$= \sqrt{2}\,(\frac{1}{\sqrt{2}}\cos 44^0 + \frac{1}{\sqrt{2}}\sin 44^0)$

$= \sqrt{2}\,(\cos 45^0 \cos 44^0 + \sin 45^0 \sin 44^0)$

$= \sqrt{2}\cos(45^0 - 44^0) = \sqrt{2}\cos 1^0$

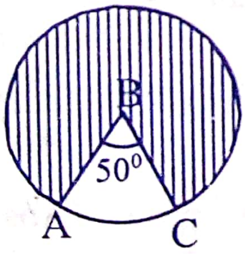
= R.H.S. (Proved)

(খ) m = 4 হলে h(x) এর লেখচিত্র অঙ্কন কর যখন $0^0 \le x \le 180^0$. 8

সমাধান: m = 4 হলে h(x) = sin 4x

অতপর প্রশ্নমালা VI B এর 1(b) দ্রষ্টব্য।

(গ) সমাধান:



এখানে, r = AB = 5 সে.মি.

$\theta = 50^0 = \frac{50\pi}{180} = \frac{5\pi}{18}$

$\therefore$ প্রদত্ত বৃত্তের ক্ষেত্রফল $= \pi r^2 = 5^2\pi$

$= 25\pi$ বর্গ সে.মি.

বৃত্তকলা ABC এর ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2}r^2\theta$

$= \frac{1}{2}(5^2 \times \frac{5\pi}{18}) = \frac{125\pi}{36}$ বর্গ সে.মি.

$\therefore$ ছায়াঘেরা অংশের ক্ষেত্রফল $= 25\pi - \frac{125\pi}{36}$

$= 25\pi(1 - \frac{5}{36}) = 25\pi(\frac{36-5}{36})$

$= \frac{775\pi}{36}$ বর্গ সে.মি.।

৬। (ক) প্রমাণ: L.H.S. $= \sec\frac{3x}{2} = \frac{1}{\cos\frac{3x}{2}}$

$$= \frac{2\sqrt{2}}{2\sqrt{2}\cos\frac{3x}{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{8\cos^2\frac{3x}{2}}}$$

$$= \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{4(1+\cos 3x)}} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{4+4\cos 3x}}$$

$$= \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{4+\sqrt{16\cos^2 3\theta}}}$$

$$= \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{4+\sqrt{8(1+\cos 6\theta)}}}$$

$$= \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{4+\sqrt{8+8\cos 6\theta}}} = \text{R.H.S.}$$

(খ) প্রমাণ: দেওয়া আছে, $p = \sin 2\alpha$, $q = \sin 2\beta$, $r = \cos 2\alpha$, $s = \cos 2\beta$.

$\therefore\ p + q = c \Rightarrow \sin 2\alpha + \sin 2\beta = c \cdots$ (i)

$r + s = d \Rightarrow \cos 2\alpha + \cos 2\beta = d \cdots$ (ii)

(ii) $\div$ (i) $\Rightarrow \frac{\cos 2\alpha + \cos 2\beta}{\sin 2\alpha + \sin 2\beta} = \frac{d}{c}$

$$\Rightarrow \frac{2\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)}{2\sin(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)} = \frac{d}{c}$$

$$\Rightarrow \frac{\cos(\alpha+\beta)}{\sin(\alpha+\beta)} = \frac{d}{c} \Rightarrow \frac{\cos^2(\alpha+\beta)}{\sin^2(\alpha+\beta)} = \frac{d^2}{c^2}$$

$$\Rightarrow \frac{\cos^2(\alpha+\beta)+\sin^2(\alpha+\beta)}{\cos^2(\alpha+\beta)-\sin^2(\alpha+\beta)} = \frac{d^2+c^2}{d^2-c^2}$$

[যোজন-বিয়োজন করে।]

$$\Rightarrow \frac{1}{\cos 2(\alpha+\beta)} = \frac{d^2+c^2}{d^2-c^2}$$

$$\therefore \cos(2\alpha+2\beta) = \frac{d^2-c^2}{d^2+c^2} \text{ (Proved)}$$

(গ) প্রমাণ: $p^2+q^2+t^2$

$= \sin^2 2\alpha + \sin^2 2\beta + \sin^2 2\gamma$

$= \frac{1}{2}(1-\cos 4\alpha + 1 - \cos 4\beta) + \sin^2 2\gamma$

$= \frac{1}{2}\{2-(\cos 4\alpha + \cos 4\beta)\} + \sin^2 2\gamma$

$= 1 - \frac{1}{2}.2\cos\frac{1}{2}(4\alpha+4\beta)\cos\frac{1}{2}(4\alpha - 4\beta) + \sin^2 2\gamma$

$= 1 - \cos(2\alpha+2\beta)\cos(2\alpha-2\beta) + \sin^2 2\gamma$

$= 1 - \cos(2\pi - 2\gamma)\cos(2\alpha-2\beta) + 1 - \cos^2 2\gamma$

$= 2 - \cos 2\gamma \cos(2\alpha-2\beta) - \cos^2 2\gamma$

$= 2 - \cos 2\gamma\{\cos(2\alpha-2\beta) - \cos 2\gamma\}$

$= 2 - \cos 2\gamma\ [\cos(2\alpha-2\beta) - \cos\{2\pi - (2\alpha+2\beta)\}]$

$= 2 - \cos 2\gamma\,[\cos(2\alpha-2\beta) + \cos(2\alpha+2\beta)]$

$= 2 - \cos 2\gamma .2\cos 2\alpha \cos B$

$\therefore p^2+q^2+t^2 = 2 - 2\cos 2\alpha \cos 2\beta \cos 2\gamma$

৭। (ক) সমাধান: $(-3, 2)$ বিন্দুতে $x^2 - y^2 = 5$ বক্ররেখার স্পর্শকের সমীকরণ,

$x.(-3) - y.(2) = 5 \Rightarrow -3x - 2y - 5 = 0$

$\Rightarrow 3x + 2y + 5 = 0$ (Ans.)

(খ) সমাধান: $\int \frac{xdx}{f(x)\{g(x)+4\}}$

$= \int \frac{xdx}{(x+6)(x^2+4)}$

ধরি, $\frac{x}{(x+6)(x^2+4)} \equiv \frac{A}{x+6} + \frac{Bx+C}{x^2+4}$

$\therefore x \equiv A(x^2+4) + (Bx+C)(x+6) \cdots (1)$

(1) এ $x = -6$ বসিয়ে আমরা পাই,

$-6 = A(36+4) \Rightarrow A = -\frac{6}{40} = -\frac{3}{20}$

(1) এ $x = 0$ বসিয়ে আমরা পাই, $4A + 6C = 0$

$\Rightarrow 6C = -4A \Rightarrow C = \frac{4\times 3}{6\times 20} = \frac{1}{10}$

(1) এর উভয়পক্ষ থেকে x^2 এর সহগ সমীকৃত করে পাই, $A + B = 0 \Rightarrow B = -A = \frac{3}{20}$

$\therefore \int \frac{xdx}{f(x)\{g(x)+4\}}$

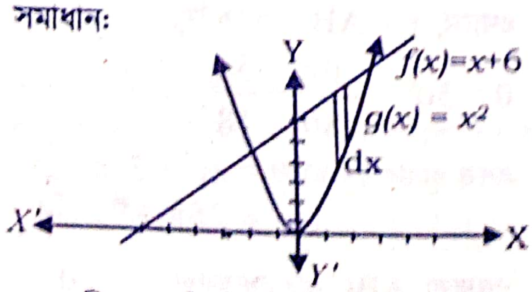
$= \int\{-\frac{3}{20}\frac{1}{x+6} + \frac{3}{20}\frac{x}{x^2+4} + \frac{1}{10}\frac{1}{x^2+4}\}dx$

$= -\frac{3}{20}\int\frac{dx}{x+6} + \frac{3}{2\times 20}\int\frac{2x}{x^2+4} + \frac{1}{10}\int\frac{dx}{x^2+2^2}$

$= -\frac{3}{20}\ln|x+6| + \frac{3}{40}\ln(x^2+4) + \frac{1}{10}.\frac{1}{2}\tan^{-1}\frac{x}{2} + c$

$= -\frac{3}{20}\ln|x+6| + \frac{3}{40}\ln(x^2+4) + \frac{1}{20}\tan^{-1}\frac{x}{2} + c$ (Ans.)

(গ) সমাধান:



x এর সীমা : $x^2 = x + 6$

$\Rightarrow x^2 - x - 6 = 0 \Rightarrow (x-3)(x+2) = 0$

$\Rightarrow x = -2, 3$

$\therefore$ x এর সীমা –2 থেকে 3

এবং $y_1 = x + 6$, $y_2 = x^2$

$\therefore$ নির্ণেয় ক্ষেত্রফল $= \int_{-2}^{3} (y_1 - y_2)\, dx$

$= \int_{-2}^{3} (x + 6 - x^2)\, dx = \left[\frac{x^2}{2} + 6x - \frac{x^3}{3}\right]_{-2}^{3}$

$= \frac{9}{2} + 18 - \frac{27}{3} - (\frac{4}{2} - 12 + \frac{8}{3})$

$= \frac{9}{2} + 18 - 9 - 2 + 12 - \frac{8}{3}$

$= 19 + \frac{9}{2} - \frac{8}{3} = \frac{114 + 27 - 16}{6} = \frac{125}{6}$ বর্গএকক

৮। (ক) সমাধানঃ ধরি, $\frac{m}{5^x} = \theta$. এখানে $x \to \infty$ বলে

$5^x \to \infty$

$\therefore \theta = \frac{m}{5^x} \to 0$

$\therefore \underset{x\to\infty}{\text{Lt}}\, 5^x \sin(\frac{m}{5^x}) = \underset{\theta\to 0}{\text{Lt}}\, \frac{m}{\theta} \sin\theta$

$= m \underset{\theta\to 0}{\text{Lt}}\, \frac{\sin\theta}{\theta} = m \,.\, 1 = m$

(খ) সমাধানঃ ধরি, $f(x) = \tan px = \tan 4x$, $[\because p = 4]$.

$\therefore f(x+h) = \tan 4(x+h) = \tan(4x + 4h)$

অন্তরক সহগের সংজ্ঞা হতে পাই,

$\frac{d}{dx}\{f(x)\} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$

$\therefore \frac{d}{dx}(\tan 4x) = \lim_{h\to 0} \frac{\tan(4x+4h) - \tan 4x}{h}$

$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}[\frac{\sin(4x+4h)}{\cos(4x+4h)} - \frac{\sin 4x}{\cos 4x}]$

$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}[\frac{\sin(4x+4h)\cos 4x - \sin 4x \cos(4x+4h)}{\cos(4x+4h)\cos 4x}]$

$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \frac{\sin(4x + 4h - 4x)}{\cos(4x+4h)\cos 4x}$

$= \lim_{h\to 0} \frac{\sin 4h}{4h} \times 4 \times \lim_{h\to 0} \frac{1}{\cos(4x+4h)\cos 4x}$

$= 1 \times 4 \times \frac{1}{\cos(4x+0)\cos 4x} = \frac{4}{\cos^2 4x}$

$= 4\sec^2 4x$

(গ) প্রমাণঃ $y = f(x) + g(x) = \tan px + \sec px$

$\Rightarrow y = \tan x + \sec x$, $[\because p = 1]$

অতপর প্রশ্নমালা IX(I) এর 6(b) দ্রষ্টব্য।

কুমিল্লা বোর্ড, রাজশাহী বোর্ড, বরিশাল বোর্ড, চট্টগ্রাম বোর্ড

১। (ক) সমাধানঃ $f(x) = \frac{x^2 - 3}{x - \sqrt{3}} \in \mathbb{R}$ যদি ও কেবল

যদি $x \in \mathbb{R}$ এবং $x \neq \sqrt{3}$.

আবার, $f(x) = \frac{x^2 - 3}{x - \sqrt{3}} = \frac{x^2 - (\sqrt{3})^2}{x - \sqrt{3}}$

$= \frac{(x - \sqrt{3})(x + \sqrt{3})}{x - \sqrt{3}} = x + \sqrt{3}$

$x = \sqrt{3}$ হলে $f(x) = \sqrt{3} + \sqrt{3} = 2\sqrt{3}$

$\therefore$ রেঞ্জ $= \mathbb{R} - \{2\sqrt{3}\}$ (Ams.)

(খ) সমাধানঃ দেওয়া আছে, $M = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

$|M| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix}$

$= 2(2-0) - 1(-1-0) + 1(-0-6)$

$= 4 + 1 - 6 = -1$

$\therefore \text{Adj}(M) = \begin{bmatrix} 2-0 & -(-1-0) & 0-6 \\ -(1-0) & 2-3 & -(0-3) \\ 0-2 & -(0+1) & 4+1 \end{bmatrix}^T$

$= \begin{bmatrix} 2 & 1 & -6 \\ -1 & -1 & 3 \\ -2 & -1 & 5 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 1 & -1 & -1 \\ -6 & 3 & 5 \end{bmatrix}$

$\therefore M^{-1} = \frac{1}{|M|} \text{Adj}(M)$

$$=\frac{1}{-1}\begin{bmatrix}2 & -1 & -2\\ 1 & -1 & -1\\ -6 & 3 & 5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2 & 1 & 2\\ -1 & 1 & 1\\ 6 & -3 & -5\end{bmatrix} \text{ (Ans.)}$$

(গ) সমাধান: $M^tX=\begin{bmatrix}-1\\0\\2\end{bmatrix}$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix}2 & 1 & 1\\ -1 & 2 & 0\\ 3 & 0 & 1\end{bmatrix}^t\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1\\0\\2\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix}2 & -1 & 3\\ 1 & 2 & 0\\ 1 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1\\0\\2\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix}2x+y+z\\ -x+2y+0z\\ x+0y+z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1\\0\\2\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix}2x+y+z\\ -x+2y+0z\\ x+0y+z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1\\0\\2\end{bmatrix}$$

$\therefore\ 2x+y+z=-1$

$-x+2y+0z=0$

$x+0y+z=2$

এখন, ক্রেমারের নিয়ম ব্যবহার করে আমরা পাই,

$$D=\begin{vmatrix}2 & -1 & 3\\ 1 & 2 & 0\\ 1 & 0 & 1\end{vmatrix}=-1$$

$$D_x=\begin{vmatrix}-1 & -1 & 3\\ 0 & 2 & 0\\ 2 & 0 & 1\end{vmatrix}=-1(2-0)+2(0-6)$$

$$=-2-12=-14$$

$$D_y=\begin{vmatrix}2 & -1 & 3\\ 1 & 0 & 0\\ 1 & 2 & 1\end{vmatrix}=-1(-1-6)=7$$

$$D_z=\begin{vmatrix}2 & -1 & -1\\ 1 & 2 & 0\\ 1 & 0 & 2\end{vmatrix}=1(0+2)+2(4+1)$$

$$=2+10=12$$

$$\therefore\ x=\frac{D_x}{D}=\frac{-14}{-1}=14,$$

$$y=\frac{D_y}{D}=\frac{7}{-1}=-7,$$

$$z=\frac{D_z}{D}=\frac{12}{-1}=-12$$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান, $(x, y, z)=(14, -7, -12)$

২। (ক) সমাধান: প্রদত্ত ভেক্টরদ্বয় পরস্পর লম্ব বলে,

$\vec{A}\cdot\vec{B}=0$

$(2\hat{i}-3\hat{j}+r\hat{k}).(-\hat{i}+2\hat{j}-3\hat{k})=0$

$\Rightarrow -2-6-3r=0 \Rightarrow -3r=8$

$\therefore\ r=-\frac{8}{3}$ (Ans.)

(খ) সমাধান: $3x+2y-6=0$ ও $2x+3y-8=0$ রেখাদ্বয়ের ছেদবিন্দুগামী যেকোনো রেখার সমাকরণ,

$3x+2y-6+k(2x+3y-8)=0$

$\Rightarrow (3+2k)x+(2+3k)y-6-8k=0 \cdots$ (i)

(i) নং রেখাটি উভয় অক্ষের ধনাত্মক দিক থেকে সমান অংশ ছেদ করলে x ও y এর সহগ সমান হবে।

$\therefore\ 3+2k=2+3k \Rightarrow k=1$

$\therefore$ (i) হতে, $(3.1+2)x+(2+3.1)y=6+8.1$

$\Rightarrow 5x+5y=14$ (Ans.)

(গ) সমাধান: উদ্দীপকে বর্ণিত রেখাদ্বয়ের ক্ষেত্রে,

$a_1=3, b_1=2, a_2=2, b_2=3$

$\therefore\ a_1a_2+b_1b_2=3\times2+2\times3=12>0$

উদ্দীপকে বর্ণিত রেখাদ্বয়ের অন্তর্গত স্থূলকোণের সমদ্বিখন্ডকের সমীকরণ,

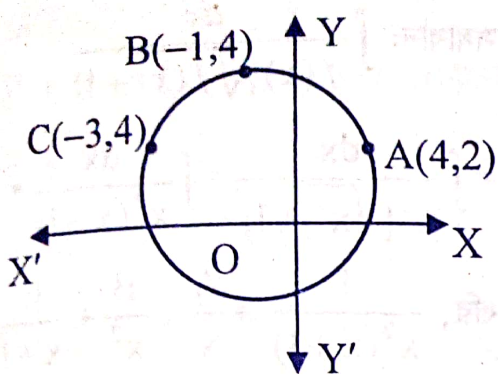
$$\frac{3x+2y-6}{\sqrt{3^2+2^2}}=\frac{2x+3y-8}{\sqrt{2^2+3^2}}$$

$\Rightarrow 3x+2y-6=2x+3y-8$

$\Rightarrow x-y+2=0 \Rightarrow y=x+2$, যা x-অক্ষের ধনাত্মক দিকের সাথে θ কোণ উৎপন্ন করলে,

$\tan\theta=1=\tan 45^0\ \therefore\ \theta=45^0$ (Ans.)

৩। বি.দ্র.: প্রশ্নের চিত্রটি সঠিক নয়। প্রশ্নে উল্লেখিত বিন্দুগুলি দ্বারা সঠিক চিত্র দেওয়া হলো:



(ক) সমাধানঃ AC জ্যা এর সমীকরণ,

$(x-4)(2-4)-(y-2)(4+3)=0$

$\Rightarrow (x-4)(-2)-(y-2)(7)=0$

$\Rightarrow -2x+8-7y+14=0$

$\therefore 2x+7y-22=0$ (Ans.)

(খ) সমাধানঃ A(4,2) ও B(−1,4) বিন্দুগামী যেকোনো বৃত্তের সমীকরণ,

$(x-4)(x+1)+(y-2)(y-4)+$
$k\{(x-4)(2-4)-(y-2)(4+1)\}=0 \cdot\cdot (i)$

(i) নং বৃত্তটি C(−3, 4) বিন্দুগামী।

$\therefore (-3-4)(-3+1)+(4-2)(4-4)+$
$k\{(-3-4)(-2)-(4-2)(5)\}=0$

$\Rightarrow (-7)(-2)+2.0+k\{(-7)(-2)-(2)(5)\}=0$

$\Rightarrow 14+k(14-10) \Rightarrow k=-\frac{14}{4}=-\frac{7}{2}$

k এর মান (i) নং সমীকরণে বসিয়ে পাই,

$x^2-3x-4+y^2-6y+8-$
$\frac{7}{2}(-2x+8-5y+10=0$

$\Rightarrow 2x^2-6x+2y^2-12y+8+14x+35y$
$-126=0$

$\Rightarrow 2x^2+2y^2+8x+23y-118=0$ (Ans.)

(গ) সমাধানঃ প্রদত্ত বৃত্তের কেন্দ্র (3, 4) এবং

ব্যাসার্ধ $=\sqrt{3^2+4^2-9}=4$

ধরি, C(−3, 4) বিন্দুগামী স্পর্শকের সমীকরণ,

$y-4=m(x+3)$

$\Rightarrow mx-y+3m+4=0 \cdot\cdot\cdot (i)$

বৃত্তের কেন্দ্র (3, 4) হতে স্পর্শক (i) এর লম্ব দূরত্ব $=\frac{|3m-4+3m+4|}{\sqrt{m^2+1^2}}=\frac{|6m|}{\sqrt{m^2+1}}$ হবে বৃত্তের ব্যাসার্ধ 4 এর সমান।

$\therefore \frac{|6m|}{\sqrt{m^2+1}}=4 \Rightarrow 36m^2=16(m^2+1)$

$\Rightarrow 36m^2-16m^2=16 \Rightarrow 20m^2=16$

$\Rightarrow m^2=\frac{4}{5} \Rightarrow m=\pm\frac{2}{\sqrt{5}}$

$\therefore$ নির্ণেয় স্পর্শকের সমীকরণ,

$y-4=\pm\frac{2}{\sqrt{5}}(x+3)$ (Ans.)

৪। (ক) সমাধানঃ পাঠ্য বই দ্রষ্টব্য।

(খ) সমাধানঃ ‘ THESIS ’ শব্দটিতে 2টি S সহ মোট 6টি বর্ণ আছে যাদের মধ্যে 2টি স্বরবর্ণ ।

প্রদত্ত শব্দটির সবগুলি বর্ণ একত্রে নিয়ে বিন্যাস সংখ্যা $=\frac{6!}{2!}=360.$

স্বরবর্ণ দুইটিকে একক বর্ণ বিবেচনা করলে শব্দটিতে মোট বর্ণ হবে 5টি যাদের মধ্যে 2টি S. এক্ষেত্রে বিন্যাস সংখ্যা $=\frac{5!}{2!}=60$. আবার, 2টি ভিন্ন স্বরবর্ণ নিজেদের মধ্যে $2!=2$ উপায়ে বিন্যস্ত হয়।

$\therefore$ স্বরবর্ণ দুইটি একত্রে রেখে বিন্যাস সংখ্যা $=60\times 2=120$

$\therefore$ স্বরবর্ণগুলো একত্রে না রেখে সাজানোর উপায় $=360-120=240$ (Ans.)

(গ) প্রমাণ : প্রশ্নমালা VB এর উদাহরণ 3 দ্রষ্টব্য।

৫। (ক) প্রমাণ : $\sin^2\alpha-\cos\alpha=0$

$\Rightarrow \sin^2\alpha=\cos\alpha \cdot\cdot\cdot (i)$

L.H.S. $=\tan^4\alpha-\sec^2\alpha$

$=\frac{\sin^4\alpha}{\cos^4\alpha}-\frac{1}{\cos^2\alpha}$

$= \frac{\cos^2\alpha}{\cos^4\alpha} - \frac{1}{\cos^2\alpha}$, [(i) দ্বারা]

$= \frac{1}{\cos^2\alpha} - \frac{1}{\cos^2\alpha} = 0 = \text{R.H.S.}$

(খ) প্রমাণ : প্রশ্নমালা VI A এর 2(h) দ্রষ্টব্য।

(গ) সমাধান: $g(x) = \cos x$

$\therefore\ g(3x) = \cos 3x$

অতপর প্রশ্নমালা VI B এর 1(c) দ্রষ্টব্য।

৬। (ক) প্রমাণ: প্রশ্নমালা VII B এর সৃজনশীল প্রশ্ন 1(b) দ্রষ্টব্য।

(খ) প্রমাণ: প্রশ্নমালা VII G এর উদাহরণ- 2 দ্রষ্টব্য।

(গ) প্রমাণ: প্রশ্নমালা VII D এর সম্ভাব্য ধাপসহ প্রশ্ন নং 9 দ্রষ্টব্য।

৭। (ক) সমাধান: $\frac{d}{d\theta}(\theta^0 \sin\theta^0)$

$= \frac{d}{d\theta}\left(\frac{\theta\pi}{180}\sin\frac{\theta\pi}{180}\right)$, $[180^0 = \pi]$

$= \frac{\pi}{180}\left\{\sin\frac{\theta\pi}{180}\frac{d}{d\theta}(\theta) + \theta\frac{d}{d\theta}\left(\sin\frac{\theta\pi}{180}\right)\right\}$

$= \frac{\pi}{180}\left(\sin\frac{\theta\pi}{180}.1 + \theta\frac{\pi}{180}\cos\frac{\theta\pi}{180}\right)$

$= \frac{\pi}{180}(\sin\theta^0 + \theta^0\cos\theta^0)$ (Ans.)

(খ) সমাধান: $\frac{2\ln(g(x))}{\{g(x)\}^2} = \frac{2\ln(\sqrt{x})}{(\sqrt{x})^2}$

$= \frac{2\ln(x)^{1/2}}{x} = \frac{2.\frac{1}{2}\ln x}{x} = \frac{\ln x}{x}$

অতপর, প্রশ্নমালা IX K এর 6(d) দ্রষ্টব্য।

(গ) প্রমাণ: $g(x) + g(y) = g(b)$

$\Rightarrow \sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{b}$

অতপর, প্রশ্নমালা IX J এর 3(b) দ্রষ্টব্য।

৮। (ক) সমাধান: প্রশ্নমালা X C এর উদাহরণ-3 দ্রষ্টব্য।

(খ) সমাধান: $\int \frac{dx}{f(x)\{\sqrt{f(x)}+1\}}$

$= \int \frac{dx}{x^2\{\sqrt{x^2}+1\}} = \int \frac{dx}{x^2(x+1)}$

ধরি, $\frac{1}{x^2(x+1)} \equiv \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x+1}$

$\Rightarrow 1 = Ax(x+1) + B(x+1) + Cx^2 \cdots(1)$

(1) এ $x = 0$ বসিয়ে পাই, $1 = B \Rightarrow B = 1$

(1) এ $x = -1$ বসিয়ে পাই, $1 = C \Rightarrow C = 1$

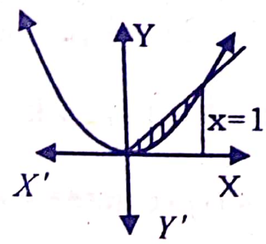
(1) এর উভয়পক্ষ থেকে x^2 এর সহগ সমীকৃত করে পাই, $0 = A + C \Rightarrow A = -C = -1$

$\therefore \int \frac{1}{x^2(x+1)}dx = \int\left\{-\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x+1}\right\}dz$

$= -\ln|x| + \left(-\frac{1}{x}\right) + \ln|x+1| + c$

$= \ln\left|\frac{x+1}{x}\right| - \frac{1}{x} + c$

(গ) প্রমাণ: ধরি, $y = f(x) = x^2$ এবং y



$x - y = 0 \Rightarrow y = x$ হতে y এর মান $y^2 = x$ সমীকরণে বসিয়ে পাই,

$x^2 = x \Rightarrow x = 0, 1$

$\therefore$ নির্ণেয় ক্ষেত্রফল $= \int_0^2 (x - x^2)dx$

$= \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1^3}{2} - \frac{1^{32}}{3} - 0$

$= \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$ বর্গ একক। (Proved)

বহুনির্বাচনি অভীক্ষা-২০১৮

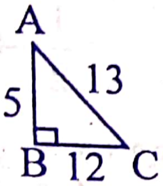
ঢাকা বোর্ড, দিনাজপুর বোর্ড, যশোর বোর্ড, সিলেট বোর্ড, কুমিল্লা বোর্ড, রাজশাহী বোর্ড, বরিশাল বোর্ড, চট্টগ্রাম বোর্ড

১। $2x^2+2y^2-4x+2y-6=0$

$\Rightarrow x^2+y^2-2x+y-3=0$ বৃত্তের কেন্দ্রের স্থানাঙ্ক $=(1,-\frac{1}{2})$ $\therefore$ উ: (ঘ)

২। $0!$ এর মান $=1$ $\therefore$ উ: (গ)

৩। $\text{cosec}\,\theta=\frac{13}{5}$ এবং $\frac{\pi}{2}<\theta<\pi$



বলে, $\tan\theta=-\frac{5}{12}$. $\therefore$ উ: (খ)

4। কোসাইন ফাংশন এর রেঞ্জ $=[-1, 1]$. $\therefore$ উ: (ঘ)

৫। বিন্দু বৃত্তের ব্যাসার্ধ শূন্য। $\therefore$ উ: (খ)

৬। $(-2, 1)$ কেন্দ্রবিশিষ্ট বৃত্ত x-অক্ষকে স্পর্শ করলে বৃত্তের ব্যাস $=2|$ কেন্দ্রের y-স্থানাঙ্ক$|=2\times1=2$

$\therefore$ উ: (গ)

৭। সব তথ্যই সত্য। $\therefore$ উ: (ঘ)

৮। $\frac{dy}{dx}=ax(-1)+(1-x).a=-ax+a-ax$

$=a-2ax$. মূল বিন্দুতে $\frac{dy}{dx}=a$

$\therefore$ বক্ররেখাটির মূল বিন্দুতে ঢাল $=a$, $\therefore$ উ: (খ)

৯। মূলবিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ, $y=ax$. উ: (ক)

১০। $f(25)=\ln 25=\ln 5^2=2\ln5$ $\therefore$ উ: (ঘ)

১১। $\int\frac{dx}{1+\cos x}=\int\frac{dx}{2\cos^2\frac{x}{2}}=\frac{1}{2}\int\sec^2\frac{x}{2}dx$

$=\frac{1}{2}\frac{\tan\frac{x}{2}}{\frac{1}{2}}+c=\tan\frac{x}{2}+c$ $\therefore B=\tan\frac{x}{2}$

$\therefore$ উ: (গ)

১২। $I=\int_1^e\frac{dx}{x(1+\ln x)}=\int_1^e\frac{d(1+\ln x)}{(1+\ln x)}$

$=[\ln(1+\ln x)]_1^e=\ln(1+\ln e)-\ln(1+\ln 1)$

$=\ln2-0=\ln2.$ $\therefore$ উ: (ঘ)

১৩। $\lim_{x\to\infty}\frac{5^x-5^{-x}}{5^x+5^{-x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{5^x(1-5^{-2x})}{5^x(1+5^{-2x})}$

$=\lim_{x\to\infty}\frac{1-\frac{1}{5^{2x}}}{1+\frac{1}{5^{2x}}}=\frac{1-0}{1+0}=1$ $\therefore$ উ: (গ)

১৪। ${}^{12}C_0=\frac{12!}{0!(12-0)!}=\frac{12!}{1.12!}=1.$ $\therefore$ উ: (খ)

১৫। $y=e^{-x}$ $\therefore$ $y_5=(-1)^5e^{-x}=-e^{-x}$ $\therefore$ উ: (ক)

১৬। অভেদক ম্যাট্রিক্সের প্রধান কর্ণের ভূক্তিগুলি 1 হয়।

$\therefore$ উ: (খ)

১৭। $\begin{bmatrix}p+1 & 6\\ 4 & -8\end{bmatrix}$ ম্যাট্রিক্সটি ব্যতিক্রমী হলে,

$-8(p+1)-24=0\Rightarrow p+1=-3$

$\Rightarrow p=-4$ $\therefore$ উ: (খ)

১৮। $\begin{vmatrix}2 & 3 & -1\\ 5 & 6 & 0\\ -2 & 1 & 4\end{vmatrix}$ নির্ণায়কটির (2, 3) তম সহগুণক

$=(-1)^{2+3}(2+6)=-8$ $\therefore$ উ: (ক)

১৯। $-2\hat{i}+2\hat{j}-\hat{k}$ ভেক্টরটি y-অক্ষের সাথে যে কোণ উৎপন্ন করে তার মান $=$

$\cos^{-1}\frac{(-2\hat{i}+2\hat{j}-\hat{k})\cdot\hat{j}}{\sqrt{4+4+1}}=\cos^{-1}(\frac{2}{3})$

$\therefore$ উ: (গ)

২০। $\overline{A}=2\hat{i}-\hat{j}+\hat{k}$ ভেক্টরের ওপর $\overline{B}=\hat{i}+2\hat{j}+\hat{k}$ ভেক্টরের অভিক্ষেপ $=$

$\frac{\overline{A}\cdot\overline{B}}{|\overline{A}|}=\frac{2-2+1}{\sqrt{2^2+1^2+1^2}}=\frac{1}{\sqrt{6}}$ $\therefore$ উ: (ঘ)

২১। $(-1, \sqrt{3})$ বিন্দুটির পোলার স্থানাঙ্ক

$=(\sqrt{1+3},\tan^{-1}\frac{\sqrt{3}}{-1})=(2,\pi-\frac{\pi}{3})=(2,\frac{2\pi}{3})$

$\therefore$ উ: (ঘ)

২২। x ও y এর সহগের অনুপাত সমান কিন্তু ধ্রুবপদের অনুপাত অসমান বলে তারা পরস্পর সমান্তরাল।

$\therefore$ উ: (ঘ)

২৩। রেখাদ্বয়ের মধ্যবর্তী লম্ব দূরত্ব $= \frac{|-6-8|}{\sqrt{1^2+2^2}} = \frac{14}{\sqrt{5}}$

$\therefore$ উ: (ঘ)

২৪। ভরকেন্দ্রের স্থানাঙ্ক $\left(\frac{-2-4+8}{3}, \frac{3+2+6}{3}\right)$

$= \left(\frac{2}{3}, \frac{11}{3}\right)$, AB বহুর মধ্যবিন্দুর স্থানাঙ্ক $\left(\frac{-2-4}{2}, \frac{3+2}{2}\right) = \left(-3, \frac{5}{2}\right)$ এবং ΔABC এর ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2}|(-2+4)(2-6)-(3-2)(-4-8)|$

$= \frac{1}{2}|-8+12| = 2$ বর্গ একক $\therefore$ উ: (ক)

২৫। $x + y = 5$ এবং $y - x = 3$ সরলরেখাদ্বয়ের ছেদবিন্দু $= (1, 4)$ গামী y-অক্ষের সমান্তরাল রেখার সমীকরণ, $x = 1 \Rightarrow x - 1 = 0$. উ: (গ)