সূচিপত্র

বিষয়বস্তু		প্রশ্নমালা		পৃষ্ঠা
প্রথম অধ্যায়	বাস্তব সংখ্যা	I	… … … … …	১
দ্বিতীয় অধ্যায়	যোগাশ্রয়ী প্রোগ্রাম	II	… … … … …	৩২
তৃতীয় অধ্যায়	জটিল সংখ্যা	III	… … … … …	৬৬
চতুর্থ অধ্যায়	বহপদী ও বহপদী সমীকরণ	IV	… … … … …	১৩১
পঞ্চম অধ্যায়	দ্বিপদী উপপাদ্য	V A	… … … … …	১৯৭
		V B	… … … … …	২১২
ষষ্ঠ অধ্যায়	কনিক	VI A (পরাবৃত্ত)	… … … … …	২৬৮
		VI B (উপবৃত্ত)	… … … … …	২৮৬
		VI C (অধিবৃত্ত)	… … … … …	৩০৯
সপ্তম অধ্যায়	বিপরীত ত্রিকোণমিতিক ফাংশন	VII A	… … … … …	৩৬৪
	ত্রিকোণমিতিক সমীকরণ	VII B	… … … … …	৩৮৫
অষ্টম অধ্যায়	স্থিতিবিদ্যা	VIII A	… … … … …	৪৪৭
		VIII B	… … … … …	৪৬৯
		VIII C	… … … … …	৪৯১
নবম অধ্যায়	সমতলে বস্তুকণার গতি	IX A	… … … … …	৫৪১
		IX B	… … … … …	৫৫১
		IX C	… … … … …	৫৫৪
		IX D	… … … … …	৫৭৬
		IX E	… … … … …	৫৮৯
দশম অধ্যায়	বিস্তার পরিমাপ ও সম্ভাবনা	X A	… … … … …	৬৪০
		X B	… … … … …	৬৪৯

বাস্তব সংখ্যা

প্রশ্নমালা I

1. মান নির্ণয় কর :

(a) $|-16+3|+|-1-4|-3-|-1-7|$ [চ. '০০]

$= |-13|+|-5|-3-|-8|$

$= -(-13)+(-(-5))-3-(-(-8))$

$= 13+5-3-8 = 18-11 = 7$ (Ans.)

(b) $|-1-8|+|3-1|$ [য.'০১; ব.'০৫]

$= |-9|+|2| = -(-9)+2 = 9+2 = 11$

(c) $||2-6|-|1-9||$ [কু.'০২;ব.'০৫]

$= ||-4|-|-8|| = |-(-4)-(-(-8))|$

$= |4-8| = |-4| = -(-4) = 4$ (Ans.)

(d) $|-3-5|$ [ঢা. বো.'০০]

$= |-8| = -(-8) = 8$

(e) $||-2|-|-6|| = |-(-2)-(-(-6))|$

$= |2-6| = |-4| = -(-4) = 4$ (Ans.)

(f) $13+|-1-4|-3-|-8|$ [য.'০৪ ; ব. '০৪; কু. '১০]

$= 13+|- \quad |-3-\{-(-8)\}$

$= 13+\{-(-5)\}-3-8$

$= 13+5-11 = 18-11 = 7$ (Ans.)

2. যথাযথ কারণ উল্লেখ করে মান নির্ণয় কর:

$||3-5|-|7-12||$ [কু.'০৬]

$= ||-2|-|-5||$

$= |-(-2)-(-(-5))|$ [$\because -2<0$ এবং $-5<0$]

$= |2-5| = |-3| = -(-3)$ [$\because -3<0$]

$= 3$ (Ans.)

3. নিম্নের অসমতাগুলির পরম মান চিহ্ন ব্যতীত প্রকাশ কর :

(a) $|x-2|<5$ [ব.'০২;ঢা.'০৩,'০৯; দি.'১১]

$\Rightarrow -5 < x-2 < 5$

[$\because |x|<\alpha$ iff $-\alpha<x<\alpha$]

সকল পক্ষে 2 যোগ করে পাই,

$\Rightarrow -5+2 < x-2+2 < 5+2$

$\Rightarrow -3 < x < 7$ (Ans.)

(b) $|2x+3|<7$ [ব.'০২; ঢা.'০৩; চ.'১২]

$\Rightarrow -7 < 2x+3 < 7$

$\Rightarrow -7-3 < 2x+3-3 < 7-3$

$\Rightarrow -10 < 2x < 4$

$\therefore -5 < x < 2$ (Ans.)

(c) $|x-3|<7$ [কু.'০৫]

$\Rightarrow -7 < x-3 < 7$

$\Rightarrow -7+3 < x-3+3 < 7+3$

$\Rightarrow -4 < x < 10$ (Ans.)

3(d) $|x|<3$ [ঢা.'০৩]

$\Rightarrow -3 < x < 3$ [$\because |x|<\alpha$ iff $-\alpha<x<\alpha$]

(e) $\frac{1}{|3x+1|} \geq 5$, এখানে $x \neq -\frac{1}{3}$ [চ.'০১;সি.'০৬; য.'০৮]

এখন, $\frac{1}{|3x+1|} \geq 5 \Rightarrow |3x+1| \leq \frac{1}{5}$

$\Rightarrow -\frac{1}{5} \leq 3x+1 \leq \frac{1}{5}$

$\Rightarrow -\frac{1}{5}-1 \leq 3x+1-1 \leq \frac{1}{5}-1$

$\Rightarrow -\frac{6}{5} \leq 3x \leq -\frac{4}{5} \Rightarrow -\frac{2}{5} \leq x \leq -\frac{4}{15}$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধানঃ $-\frac{2}{5} \leq x \leq -\frac{4}{15}$ কিন্তু $x \neq -\frac{1}{\ }$

3(f) $2 \leq \frac{1}{|x-1|}$ [বুয়েট'০৫; র. ' '

যদি $x-1=0$ *ie.* $x=1$ হয়, তবে প্রদত্ত অসম অসংজ্ঞায়িত হয়।

∴ $x \neq 1$

এখন, $2 \le \frac{1}{|x-1|} \Rightarrow |x-1| \le \frac{1}{2}$

$\Rightarrow -\frac{1}{2} \le x-1 \le \frac{1}{2}$

$\Rightarrow -\frac{1}{2}+1 \le x-1+1 \le \frac{1}{2}+1$

$\Rightarrow \frac{1}{2} \le x \le \frac{3}{2}$

∴ নির্ণেয় সমাধানঃ $\frac{1}{2} \le x < 1$ অথবা $1 < x \le \frac{3}{2}$

3(g) $\frac{1}{|x-1|} < 2$

$\Rightarrow 1 < 2|x-1|$, [$\because |x-1| > 0$]

$\Rightarrow |x-1| > \frac{1}{2}$

∴ $x-1 > \frac{1}{2}$, যখন $x-1 > 0$

$\Rightarrow x > 1+\frac{1}{2} \Rightarrow x > \frac{3}{2}$

আবার, $-(x-1) > \frac{1}{2}$, যখন $x-1 < 0$

$\Rightarrow x-1 < -\frac{1}{2} \Rightarrow x < -\frac{1}{2}+1$

$\Rightarrow x < \frac{1}{2}$

∴ নির্ণেয় সমাধানঃ $x < \frac{1}{2}$ অথবা $x > \frac{3}{2}$.

3(h) $3 \le |x-2| \le 7$

সমাধান: $(x-2)$ অঋণাত্মক হলে, $|x-2| = x-2$

∴ $3 \le |x-2| \le 7 \Rightarrow 3 \le x-2 \le 7$

$\Rightarrow 5 \le x \le 9$

আবার, $(x-2)$ ধনাত্মক হলে, $|x-2| = -(x-2)$

∴ $3 \le |x-2| \le 7 \Rightarrow 3 \le -(x-2) \le 7$

$\Rightarrow -7 \le x-2 \le -3$

$\Rightarrow -5 \le x \le -1$

∴ নির্ণেয় সমাধান: $-5 \le x \le -1$ অথবা $5 \le x \le 9$

3(i) $|5-2x| \ge 4$

সমাধান: $(5-2x) \ge 0$ হলে, $|5-2x| = 5-2x$

∴ $|5-2x| \ge 4 \Rightarrow 5-2x \ge 4 \Rightarrow -2x \ge -1$

$\Rightarrow x \le \frac{1}{2}$

আবার, $(5-2x) < 0$ হলে, $|5-2x| = -(5-2x)$

∴ $|5-2x| \ge 4 \Rightarrow -(5-2x) \ge 4$

$\Rightarrow -5+2x \ge 4 \Rightarrow 2x \ge 9 \Rightarrow x \ge \frac{9}{2}$

∴ নির্ণেয় সমাধান: $x \le \frac{1}{2}$ অথবা $x \ge \frac{9}{2}$.

4. নিম্নের অসমতাগুলির পরম মান চিহ্নের সাহায্যে প্রকাশ কর :

(a) $4 < x < 10$ [ব.'০১; রা.'০২; কু.'০৮]

সকল পক্ষে $-\frac{4+10}{2} = -7$ যোগ করে পাই,

$4-7 < x-7 < 10-7 \Rightarrow -3 < x-7 < 3$

$\Rightarrow |x-7| < 3$ [$\because |x| < \alpha$ iff $-\alpha < x < \alpha$]

(b) $-2 < x < 6$ [ব.'০১; রা.'০২; চ.'০৮]

সকল পক্ষে $-\frac{-2+6}{2} = -2$ যোগ করে পাই,

$-2-2 < x-2 < 6-2$

$\Rightarrow -4 < x-2 < 4$

$\Rightarrow |x-2| < 4$

(c) $-7 < x < -1$ [রা.'০০; কু.'০৫; ঢা.'০৬; চ.'০৯]

সকল পক্ষে $-\frac{-7-1}{2} = 4$ যোগ করে পাই,

$-7+4 < x+4 < -1+4$

$\Rightarrow -3 < x+4 < 3 \Rightarrow |x+4| < 3$

4(d) $2 \le x \le 8$ [কু.'০৩; য.'০৭]

সকল পক্ষে $-\frac{2+8}{2} = -5$ যোগ করে পাই,

$2-5 \le x-5 \le 8-5 \Rightarrow -3 \le x-5 \le 3$

$\Rightarrow |x-5| \le 3$

4(e) $-1 < 2x-3 < 5$ [সি.'০৫,'১৪; চ.'০৬,'১৩; দি.'০৯,'১৪; য.'১০,'১৪; ব.'১১ বুয়েট'১০-১১]

সকল পক্ষে $-\frac{-1+5}{2} = -2$ যোগ করে পাই,

$-1-2 < 2x-3-2 < 5-2$

$\Rightarrow -3 < 2x-5 < 3 \Rightarrow |2x-5| < 3$

(f) $-5 < x < 7$ [রা.'০৪,'১৩; য.'০৪; ব.'০৬]

সকল পক্ষে $-\frac{-5+7}{2} = -1$ যোগ করে পাই,

$-5-1 < x-1 < 7-1$

$\Rightarrow -6 < x-1 < 6$

$\Rightarrow |x-1| < 6$

(g) দেওয়া আছে, $-2 < 3-x < 8$ [ব.'০১]

$\Rightarrow -(-2) > -(3-x) > -8$

$\Rightarrow 2 > x-3 > -8 \Rightarrow -8 < x-3 < 2$

সকল পক্ষে $-\frac{-8+2}{2} = 3$ যোগ করে পাই,

$-8+3 < x-3+3 < 2+3$

$\Rightarrow -5 < x < 5 \Rightarrow |x| < 5$

5. নিম্নের অসমতাগুলি সমাধান কর এবং সমাধান সেট সংখ্যারেখায় দেখাও :

(a) $|3x+2| < 7$ [ঢা., রা.'০৪; সি. ০৭; চ.ব.'১০; রা.'১২]

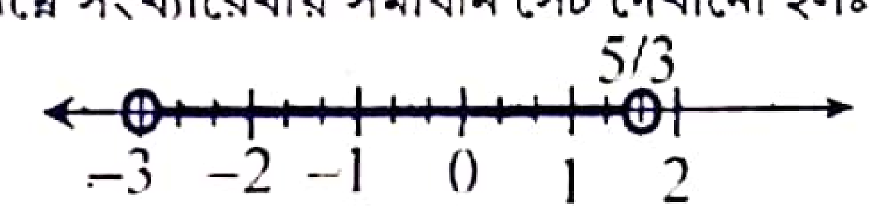
$\Rightarrow -7 < 3x+2 < 7$

$\Rightarrow -7-2 < 3x+2-2 < 7-2$

$\Rightarrow -9 < 3x < 5 \Rightarrow -3 < x < \frac{5}{3}$

∴ সমাধান সেট, $S = \{x \in \mathbb{R} : -3 < x < \frac{5}{3}\}$

নিম্নে সংখ্যারেখায় সমাধান সেট দেখানো হলঃ



(b) $|2x+1| < 3$ [সি.'০৪,'০৭; য.'০৯,'১২]

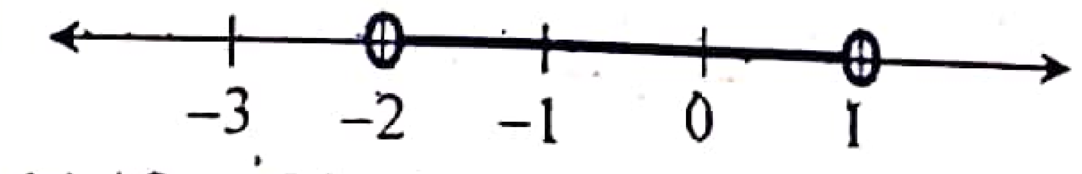
$\Rightarrow -3 < 2x+1 < 3$

$\Rightarrow -3-1 < 2x+1-1 < 3-1$

$\Rightarrow -4 < 2x < 2 \Rightarrow -2 < x < 1$

∴ সমাধান সেট, $S = \{x \in \mathbb{R} : -2 < x < 1\}$

নিম্নে সংখ্যারেখায় সমাধান সেট দেখানো হলঃ



(c) $|2x-5| < 3$

[ব.'০৪; চ.'০৫; রা.'০৬; ঢা.'০৭,'১৩,'১৫; কু.'০৮]

$\Rightarrow -3 < 2x-5 < 3$

$\Rightarrow -3+5 < 2x-5+5 < 3+5$

$\Rightarrow 2 < 2x < 8 \Rightarrow 1 < x < 4$

∴ সমাধান সেট, $S = \{x \in \mathbb{R} : 1 < x < 4\}$

নিম্নে সংখ্যারেখায় সমাধান সেট দেখানো হলঃ

(d) $|3x-4| < 2$ [ঢা.'০৫; রা.'০৮; দি.'০৯; বুয়েট'১১-১২]

$\Rightarrow -2 < 3x-4 < 2$

$\Rightarrow -2+4 < 3x-4+4 < 2+4$

$\Rightarrow 2 < 3x < 6 \Rightarrow \frac{2}{3} < x < 2$

∴ সমাধান সেট, $S = \{x \in \mathbb{R} : \frac{2}{3} < x < 2\}$

নিম্নে সংখ্যারেখায় সমাধান সেট দেখানো হলঃ

5(e) $|2x+5| < 1$ [সি.'০২; য.'০৫]

$\Rightarrow -1 < 2x+5 < 1$

$\Rightarrow -1-5 < 2x+5-5 < 1-5$

$\Rightarrow -6 < 2x < -4 \Rightarrow -3 < x < -2$

∴ সমাধান সেট, $S = \{x \in \mathbb{R} : -3 < x < -2\}$

নিম্নে সংখ্যারেখায় সমাধান সেট দেখানো হলঃ

(f) $\frac{1}{|3x-5|} > 2$ [ব.'০৫,'১৪; য.'০৩; চ.'০৭; ঢা.'১০; সি.'১০,'১৪; কু.'১৩]

$3x-5 = 0 \Rightarrow x = \frac{5}{3}$ হলে, প্রদত্ত অসমতাটি অসংজ্ঞায়িত হবে।

∴ $x \neq \frac{5}{3}$

এখন, $\frac{1}{|3x-5|} > 2 \Rightarrow |3x-5| < \frac{1}{2}$

$\Rightarrow -\frac{1}{2} < 3x-5 < \frac{1}{2}$

$\Rightarrow -\frac{1}{2} + 5 < 3x-5+5 < \frac{1}{2} + 5$

$\Rightarrow \frac{9}{2} < 3x < \frac{11}{2} \Rightarrow \frac{3}{2} < x < \frac{11}{6}$

∴ সমাধান সেট,

$S = \{x \in \mathbb{R}: \frac{3}{2} < x < \frac{5}{3}$ অথবা $\frac{5}{3} < x < \frac{11}{6}\}$

নিম্নে সংখ্যারেখায় সমাধান সেট দেখানো হলঃ

5(g) $|2x+3| > 9$ [চ.'০৩]

$2x+3$ অঋণাত্মক হলে, $|2x+3| = 2x+3$

∴ প্রদত্ত অসমতা হতে পাই, $2x+3 > 9$

$\Rightarrow 2x > 9-3 \Rightarrow 2x > 6 \Rightarrow x > 3$

$2x+3$ ঋণাত্মক হলে, $|2x+3| = -(2x+3)$

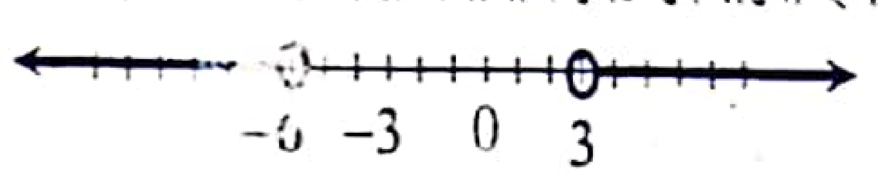
∴ প্রদত্ত অসমতা হতে পাই, $-(2x+3) > 9$

$\Rightarrow 2x+3 < -9 \Rightarrow 2x < -9-3 = -12$

$\Rightarrow x < -6$

∴ সমাধান সেট $S = \{x \in \mathbb{R}: x < -6$ অথবা $x > 3\}$

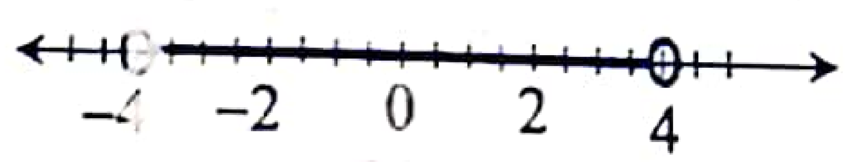
নিম্নে সংখ্যারেখায় সমাধান সেট দেখানো হলঃ



(h) $|x| < 4 \Rightarrow -4 < x < 4$ [রা.'০১]

∴ সমাধান সেট, $S = \{x \in \mathbb{R}: -4 < x < 4\}$

নিম্নে সংখ্যারেখায় সমাধান সেট দেখানো হলঃ



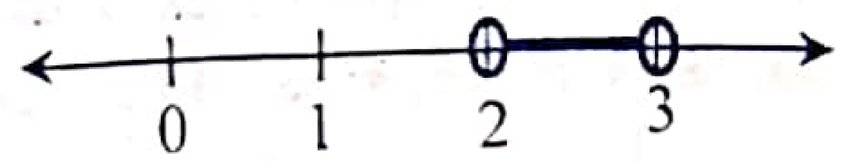
(i) $|2x-5| < 1 \Rightarrow -1 < 2x-5 < 1$ [চ.'০১]

$\Rightarrow -1+5 < 2x-5+5 < 1+5$

$\Rightarrow 4 < 2x < 6 \Rightarrow 2 < x < 3$

∴ সমাধান সেট, $S = \{x \in \mathbb{R}: 2 < x < 3\}$

নিম্নে সংখ্যারেখায় সমাধান সেট দেখানো হলঃ



5(j) $|x-5| > 4$

$x-5$ অঋণাত্মক হলে, $|x-5| = x-5$

∴ প্রদত্ত অসমতা হতে পাই, $x-5 > 4$

$\Rightarrow x > 4+5 = 9$

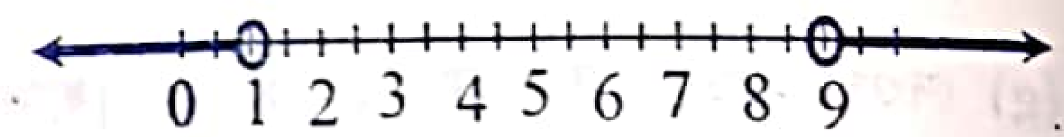
$x-5$ ঋণাত্মক হলে, $|x-5| = -(x-5)$

∴ প্রদত্ত অসমতা হতে পাই, $-(x-5) > 4$

$\Rightarrow x-5 < -4 \Rightarrow x < -4+5 = 1$

∴ সমাধান সেট, $S = \{x \in \mathbb{R}: x < 1$ অথবা $x > 9\}$

নিম্নে সংখ্যারেখায় সমাধান সেট দেখানো হলঃ



(k) $|2x+4| < 6$ [য.'০২]

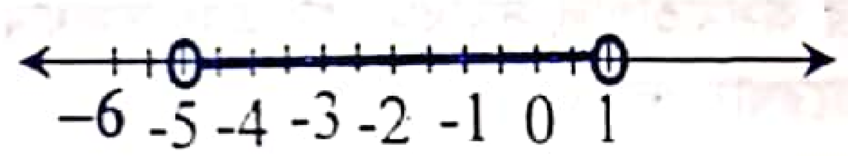
$\Rightarrow -6 < 2x+4 < 6$

$\Rightarrow -6-4 < 2x+4-4 < 6-4$

$\Rightarrow -10 < 2x < 2 \Rightarrow -5 < x < 1$

∴ সমাধান সেট, $S = \{x \in \mathbb{R}: -5 < x < 1\}$.

নিম্নে সংখ্যারেখায় সমাধান সেট দেখানো হলঃ



6. দেখাও যে, $a \in \mathbb{R}$ হলে $-|a| \le a \le |a|$

প্রমাণঃ $a \ge 0 \Rightarrow 0 \le a$ ……(i) হলে,

$|a| = a \ge 0 \Rightarrow |a| \ge 0$

∴ $-|a| \le 0$ ……(ii)

(i) ও (ii) হতে পাই, $-|a| \le 0 \le a$

∴ $-|a| \le a$ …… (iii)

$a < 0$ ……(iv) হলে,

$|a| = -a > 0$ [∵ $a < 0$, ∴ $-a > 0$]

$\Rightarrow 0 < |a|$ ………(v)

(iv) ও (v) হতে পাই,

$a < 0 < |a| \Rightarrow a < |a|$ …(vi)

$a = 0$ হলে, $0 = |0| \Rightarrow a = |a|$ ……(vii)

(vi) ও (vii) হতে পাই, $a \le |a|$ …… (viii)

(iii) ও (viii) হতে পাই, $-|a| \le a \le |a|$

7. যদি $a, b, c \in \mathbb{R}$, $ac = bc$ এবং $c \neq 0$ হয়, তবে প্রমাণ কর যে, $a = b$ [চ.'১৫; দি.'১০; ব.'১৩]

প্রমাণঃ $c \neq 0$ বলে c^{-1} বিদ্যমান।

এখন, $ac = bc$

$\Rightarrow (ac)c^{-1} = (bc)c^{-1}$ [গুণনের অনন্যতা অনুযায়ী]

$\Rightarrow a(cc^{-1}) = b(cc^{-1})$ [গুণনের সংযোজন বিধি অনুযায়ী]

$\Rightarrow a.1 = b.1$ [গুণনের বিপরীতকের অস্তিত্ব অনুযায়ী]

∴ $a = b$ [গুণনের অভেদকের অস্তিত্ব অনুযায়ী]

8. $a < b$ এবং $b < c$ হলে দেখাও যে, $a < c$. [য.'১২]

প্রমাণঃ দেওয়া আছে, $a < b$ এবং $b < c$।

মনে করি, $b = a + m$ এবং $c = b + n$; যেখানে $m, n \in \mathbb{R}$ এবং $m, n > 0$.

∴ $c = b + n = (a+m) + n$, [প্রতিস্থাপন বিধি]

$\Rightarrow c = a + (m+n)$, [সংযোজন বিধি অনুযায়ী]

$m, n \in \mathbb{R}$ এবং $m, n > 0$ বলে, $m + n \in \mathbb{R}$ এবং $m + n > 0$

∴ $c > a$ অর্থাৎ, $a < c$ (Showed)

9. যদি $a < b$ হয়, তবে দেখাও যে, $a + c < b + c$; যেখানে $a, b, c \in \mathbb{R}$ [রা.'০০, '০৮; চ.'১২]

প্রমাণঃ দেওয়া আছে, $a < b$

ধরি, $b = a + m$; যেখানে $m \in \mathbb{R}$ এবং $m > 0$

এখন, $b + c = (a+m) + c$ [প্রতিস্থাপন বিধি]

$\Rightarrow b + c = (m+a) + c$ [বিনিময় বিধি]

$\Rightarrow b + c = m + (a+c)$ [সংযোজন বিধি]

$\Rightarrow b + c = (a+c) + m$ [বিনিময় বিধি]

$m \in \mathbb{R}$ এবং $m > 0$ বলে, $b + c < a + c$

10. $a \in \mathbb{R}$ হলে দেখাও যে, $(-1)a = -a$ এবং $-(-a) = a$.

প্রমাণঃ $1 \in \mathbb{R}$ বলে,

$1 + (-1) = 0$ [যোগের বিপরীতকের অস্তিত্ব অনুযায়ী]

$\Rightarrow (1 + (-1))a = 0.a$ [গুণনের অনন্যতা অনুযায়ী]

$\Rightarrow 1.a + (-1)a = 0$ [বণ্টন বিধি অনুযায়ী এবং সকল $a \in \mathbb{R}$ এর জন্য, $a.0 = 0.a = 0$]

$\Rightarrow a + (-1)a = 0$ [অভেদকের অস্তিত্ব অনুযায়ী]

∴ $(-)a = -a$ [বিপরীতকের অস্তিত্ব অনুযায়ী]

দ্বিতীয় অংশঃ

$-a + (-(-a)) = 0$ [যোগের বিপরীতকের অস্তিত্ব অনুযায়ী]

$\Rightarrow a + [-a + (-(-a))] = a + 0$ [যোগের অনন্যতা অনুযায়ী]

$\Rightarrow [a + (-a)] + (-(-a)) = a + 0$ [যোগের সংযোজন বিধি অনুযায়ী]

$\Rightarrow 0 + (-(-a)) = a + 0$ [যোগের বিপরীতকের অস্তিত্ব অনুযায়ী]

∴ $-(-a) = a$ [যোগের অভেদকের অস্তিত্ব অনুযায়ী]

11. $a, b \in \mathbb{R}$ হলে দেখাও যে, $(-a)(-b) = ab$ [কু.'০৭,;সি.'১১]

এবং $(ab)^{-1} = a^{-1}b^{-1}$ $(a \neq 0, b \neq 0)$ [কু.'১২]

প্রমাণঃ $(-a)(-b) = -(a(-b))$

[∵ $a, b \in \mathbb{R}$ হলে, $(-a)b = -(ab)$]

$= -((-b)a)$ [গুণনের সংযোজন বিধি অনুযায়ী]

$= -(-(ba))$

[∵ $a, b \in \mathbb{R}$ হলে, $(-b)a = -(ba)$]

$= ba$ [∵ $a \in \mathbb{R}$ হলে, $-(-a) = a$]

$= ab$ [গুণনের সংযোজন বিধি অনুযায়ী]

দ্বিতীয় অংশঃ

$(a^{-1}b^{-1})(ab)$

$= (ab)(a^{-1}b^{-1})$ [গুণনের সংযোজন বিধি অনুযায়ী]

$= (ab)(b^{-1}a^{-1})$ [ঐ]

$= ((ab)b^{-1})a^{-1}$ [ঐ]

$= (a(bb^{-1}))a^{-1}$ [ঐ]

$= (a.1).a^{-1}$ [গুণনের বিপরীতকের অস্তিত্ব অনুযায়ী]

$= a.a^{-1}$ [গুণনের অভেদকের অস্তিত্ব অনুযায়ী]

$= 1$ [গুণনের বিপরীতকের অস্তিত্ব অনুযায়ী]

অর্থাৎ $(a^{-1}b^{-1})(ab) = (ab)(a^{-1}b^{-1}) = 1$

$\therefore\ (ab)^{-1} = a^{-1}b^{-1}$

[গুণনের বিপরীতকের অস্তিত্ব অনুযায়ী]

12. দেখাও যে, $a\in\mathbb{R}$ হলে, $a.0 = 0$ [কু.'০৬,'১৫; ঢা.'০৯; রা.'১৪]

প্রমাণ : $1\in\mathbb{R}$ বলে,

$1 + 0 = 1$ [যোগের অভেদক বিধি অনুযায়ী ।]

$\Rightarrow a(1 + 0) = a.1$ [গুণনের অনন্যতা বিধি অনুযায়ী ।]

$\Rightarrow a.1 + a.0 = a.1$ [বন্টন বিধি অনুযায়ী ।]

$\Rightarrow a + a.0 = a$ [গুণনের অভেদকের অস্তিত্ব অনুযায়ী।]

$\Rightarrow (-a) + (a + a.0) = (-a) + a$ [যোগের অনন্যতা বিধি অনুযায়ী।]

$\Rightarrow \{(-a) + a\} + a.0 = 0$ [যোগের সংযোজন বিধি এবং বিপরীতকের অস্তিত্ব অনুযায়ী ।]

$\Rightarrow 0 + a.0 = 0$

[যোগের বিপরীতকের অস্তিত্ব অনুযায়ী ।]

$\therefore a.0 = 0$ [যোগের অভেদকের অস্তিত্ব অনুযায়ী ।]

13. দেখাও যে, যে কোনো বিজোড় সংখ্যার বর্গ বিজোড় সংখ্যা।

প্রমাণ : ধরি, $2n + 1$ একটি বিজোড় সংখ্যা, যেখানে $n\in\mathbb{N}$

$2n + 1$ এর বর্গ $= (2n + 1)^2 = 4n^2 + 4n + 1$

$= 4(n^2 + n) + 1 = 4(n^2 + n)$

যেহেতু $4(n^2 + n)$ এর একটি উৎপাদক 4 বলে $4(n^2 + n)$ একটি জোড় সংখ্যা ।

$\therefore 4(n^2 + n) + 1$ একটি বিজোড় সংখ্যা ।

14. যদি $a, b\in\mathbb{R}$ হয়, তবে দেখাও যে, (i) $-(a + b) = -a - b$; (ii) $(-a)b = -(ab)$ [ব.'১১]

প্রমাণঃ (i) $(-a - b) + (a + b)$

$= \{-a + (-b)\} + (b + a)$

[যোগের বিনিময় বিধি অনুযায়ী]

$= [\{-a + (-b)\} + b] + a$

[সংযোজন বিধি অনুযায়ী]

$= [-a + \{(-b) + b\}] + a$

[সংযোজন বিধি অনুযায়ী]

$= [-a + 0] + a$

[যোগের বিপরীতকের অস্তিত্ব অনুযায়ী]

$= (-a) + a$ [যোগের অভেদকের অস্তিত্ব অনুযায়ী]

$= 0$ [যোগের বিপরীতকের অস্তিত্ব অনুযায়ী]

$\therefore (-a - b) = -(a + b)$

[যোগের বিপরীতকের অস্তিত্ব অনুযায়ী]

$\Rightarrow -(a + b) = -a - b$

(ii) $(-a)b + (ab) = (-a)b + (a)b$

$= \{(-a) + a\}b$ [বন্টন বিধি অনুযায়ী]

$= 0.b$ [যোগের বিপরীতকের অস্তিত্ব অনুযায়ী]

$= 0$

$\therefore (-a)b = -(ab)$

15. দেখাও যে, $\sqrt{5}$ অমূলদ সংখ্যা। [য.'০৬; সি.'০৬ ; ব.'০৭; ঢা.'১৪]

প্রমাণঃ $2^2 = 4$, $(\sqrt{5})^2 = 5$, $3^2 = 9$

$\therefore 2 < \sqrt{5} < 3$

$\therefore \sqrt{5}$ পূর্ন (স্বভাবিক) সংখ্যা নয় ।

[$\because$ 2 এবং 3 এর মধ্যে কোন স্বভাবিক সংখ্যা নেই ।]

যদি সম্ভব হয় তবে মনে করি, $\sqrt{5}$ একটি মূলদ সংখ্যা অর্থাৎ মূলদ ভগ্নাংশ এবং

$\sqrt{5} = \frac{p}{q}$; যেখানে $p, q \in\mathbb{N}$ এবং p, q সহমৌলিক ।

[$\sqrt{5}$ ধনাত্মক সংখ্যা বলে $p, q \in \mathbb{Z}$ কে $p, q\in\mathbb{N}$ লিখা যায়]

বা, $5 = \frac{p^2}{q^2}$ [উভয় পক্ষকে বর্গ করে।]

বা, $5q = \frac{p}{q}\cdot p$

[উভয় পক্ষকে $q\ (q \neq 0)$ দ্বারা ভাগ করে।]

স্পষ্টত 5 এবং q স্বাভাবিক (পূর্ন) সংখ্যা বলে তাদের গুণফল 5q পূর্ন সংখ্যা । কিন্তু $\frac{p}{q}$ ভগ্নাংশ এবং p পূর্ণ সংখ্যা বলে তাদের গুণফল $\frac{p}{q}\cdot p$ একটি ভগ্নাংশ, অর্থাৎ পূর্ন সংখ্যা নয় ; কেননা p, q সহমৌলিক। আর একটি পূর্ণ সংখ্যা একটি প্রকৃত ভগ্নাংশের সমান হতে পারেনা ।

$\therefore 5q \neq \frac{p}{q}\cdot p$

$\therefore \sqrt{5}$ এর মান $\frac{p}{q}$ আকারের কোন সংখ্যা হতে পারেনা

$\therefore \sqrt{5}$ একটি মূলদ সংখ্যা । (প্রমাণিত)

16. a এবং b বাস্তব সংখ্যা হলে প্রমাণ কর যে,

(i) $|a - b| \geq |a| - |b|$ [ব.'০৮; মা.'০৯;ঢা.'১১]

(ii) $|a - b| \geq ||a| - |b||$ [রা.'০২; ব.'১৫]

(i) প্রমাণ : আমরা জানি,

$|a + b| \leq |a| + |b| \cdots\cdots\cdots(i)$

এখন, $|a| = |(a - b) + b| \leq |a - b| + |b|$

[(i) নং দ্বারা]

$\Rightarrow |a| - |b| \leq |a - b| \cdots\ \cdots (ii)$

$\therefore |a - b| \geq |a| - |b|$ (Proved)

(ii) $|a + b| \leq |a| + |b| \cdots\cdots\cdots(i)$

$|a| = |(a - b) + b| \leq |a - b| + |b|$

[(i) নং দ্বারা]

$\Rightarrow |a| - |b| \leq |a - b| \cdots\ \cdots (ii)$

$\therefore |b| - |a| \leq |b - a| = |a - b|$

$\Rightarrow -(|b| - |a|) \geq -|a - b|$

$\Rightarrow -|a - b| \leq |a| - |b| \cdots\cdots (iii)$

(ii) এবং (iii) হতে আমরা পাই,

$-|a - b| \leq |a| - |b| \leq |a - b|$

$\therefore |a - b| \geq ||a| - |b||$ (Proved)

17. প্রমাণ কর যে, $|a - c| \leq |a - b| + |b - c|$; যেখানে $a, b, c \in \mathbb{R}$.

প্রমাণ : আমরা জানি,

$|a + b| \leq |a| + |b| \cdots\cdots\cdots(i)$

$|a - c| = |(a-b) + (b-c)| \leq |a - b| + |b - c|$

$\therefore |a - c| \leq |a - b| + |b - c|$ (Proved)

18(a) $|x - 1| < 2$ হলে দেখাও যে, $|x^2 - 1| < 8$

প্রমাণ : দেওয়া আছে, $|x - 1| < 2 \cdots\cdots (i)$

$|x + 1| = |(x - 1) + 2| \leq |x - 1| + |2|$

[$\therefore |a + b| \leq |a| + |b|$]

$\Rightarrow |x + 1| \leq |x - 1| + |2| < 2 + 2$, [(i)নং দ্বারা]

$\therefore |x + 1| < 4 \cdots\cdots (ii)$

(i) $\times$ (ii) $\Rightarrow |x - 1||x + 1| < 2 \times 4$

$\therefore |x^2 - 1| < 8$ (Proved)

[বি.দ্র. : $-1 < x < 3$ সীমার মধ্যে x এর সকল মানের জন্য $(-1)^2 < x^2 < 3^2$ সত্য নয় । কেননা $-1 < -\frac{1}{2} < 3$ সত্য হলেও $(-1)^2 < (-\frac{1}{2})^2 < 3^2$ সত্য নয় । তাই, এক্ষেত্রে (8) এর নিয়মে প্রমাণ সঠিক হবেনা]

(b) $|x - 1| < 3$ হলে দেখাও যে, $|x^3 - 1| < 63$

দেওয়া আছে, $|x - 1| < 3 \Rightarrow -3 < x - 1 < 3$

$\Rightarrow -3 + 1 < x - 1 + 1 < 3 + 1$

$\Rightarrow -2 < x < 4 \Rightarrow -8 < x^3 < 64$

$\Rightarrow -8 - 1 < x^3 - 1 < 64 - 1$

$\Rightarrow -9 < x^3 - 1 < 63$

$\Rightarrow -63 < -9 < x^3 - 1 < 63$

$\Rightarrow -63 < x^3 - 1 < 63$

$\therefore |x^3 - 1| < 63$ (Proved)

19. $x \in \mathbb{R}$ এর সীমা নির্ণয় কর ; যেখানে $x^2 + 6x - 27 > 0$ এবং $3x - x^2 + 4 > 0$

সমাধানঃ $x^2 + 6x - 27 > 0$

$\Rightarrow (x + 9)(x - 3) > 0$

$\Rightarrow \{x - (-9)\}(x - 3) > 0$

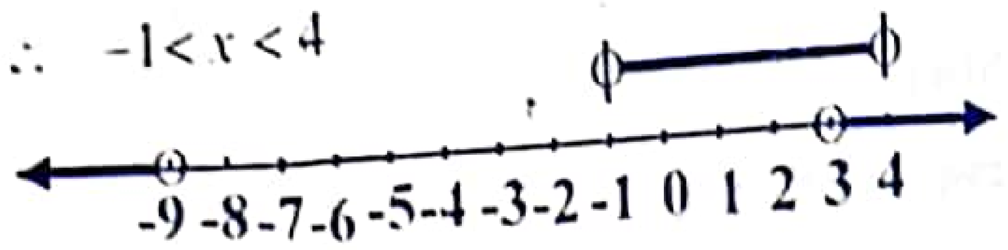
$\therefore x > 3$ অথবা $x < -9$

$3x - x^2 + 4 > 0 \Rightarrow x^2 - 3x - 4 < 0$

$\Rightarrow (x - 4)(x + 1) < 0$

$\Rightarrow (x - 4)\{x - (-1)\} < 0$

$\therefore\ -1 < x < 4$



সংখ্যা রেখা হতে আমরা পাই, $3 < x < 4$

20(a) $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ হলে এর ক্ষুদ্রতম ঊর্ধ্বসীমা কত? [টেক্সটাইল'০৯-১০]

সমাধান : এখানে, $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ এর ঊর্ধ্বসীমাগুলির সেট $\{x \in \mathbb{R} : x \geq 5\}$. কিন্তু $\{x \in \mathbb{R} : x \geq 5\}$ এর ক্ষুদ্রতম উপাদান 5.

$\therefore$ A এর ক্ষুদ্রতম ঊর্ধ্বসীমা 5.

(b) বাস্তব সংখ্যার সেট $\mathbb{R}$ এর উপসেট $S = \{x : 5x^2 - 16x + 3 < 0\}$ এর বৃহত্তম নিম্নসীমা (Inf S) এবং ক্ষুদ্রতম ঊর্ধ্বসীমা (SupS) নির্ণয় কর। [চ.'০০; কুয়েট'০৪-০৫]

সমাধানঃ আমাদের আছে, $5x^2 - 16x + 3 < 0$

$\Rightarrow 5x^2 - 15x - x + 3 < 0$

$\Rightarrow 5x(x-3) - 1(x-3) < 0$

$\Rightarrow (x-3)(5x-1) < 0$

$\Rightarrow (x-3)(x - \frac{1}{5}) < 0$

$\therefore \frac{1}{5} < x < 3$

$\therefore$ S এর বৃহত্তম নিম্নসীমা $\frac{1}{5}$ এবং ক্ষুদ্রতম ঊর্ধ্বসীমা 3

21. বাস্তব সংখ্যার সেট $\mathbb{R}$ এর উপসেট $S = \{n - 1 : n \in \mathbb{N}\}$ এর বৃহত্তম নিম্নসীমা (Inf S) এবং ক্ষুদ্রতম ঊর্ধ্বসীমা (Sup S) নির্ণয় কর।

সমাধানঃ $S = \{n - 1 : n \in \mathbb{N}\}$

$= \{0, 1, 2, 3, 4, \ldots\ldots\ldots\}$

এখানে, S সেটটি নিম্নেসীমিত এবং এর নিম্নসীমাগুলির সেট $\{x \in \mathbb{R} : x \leq 0\}$.

$\therefore$ S এর বৃহত্তম নিম্নসীমা (Inf S) = 0

আবার, S সেটটি ঊর্ধ্বসীমিত নয় বলে এর কোন ঊর্ধ্বসীমা নাই। সুতরাং, S এর ক্ষুদ্রতম ঊর্ধ্বসীমা (Sup S) নাই।

22. বাস্তব সংখ্যার সেট $\mathbb{R}$ এর উপসেট $S = \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$ এর বৃহত্তম নিম্নসীমা (Inf S) এবং ক্ষুদ্রতম ঊর্ধ্বসীম (Sup S) নির্ণয় কর।

সমাধানঃ $S = \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\} = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \cdots\}$

এখানে, S সেটটি নিম্নেসীমিত এবং এর নিম্নসীমাগুলির সেট $\{x \in \mathbb{R} : x \leq 0\}$.

$\therefore$ S এর বৃহত্তম নিম্নসীমা (Inf S) = 0

আবার, S সেটটি ঊর্ধ্বসীমিত এবং এর ঊর্ধ্বসীমাগুলির সেট $\{x \in \mathbb{R} : x \geq 1\}$.

$\therefore$ S এর ক্ষুদ্রতম ঊর্ধ্বসীমা (Sup S) = 1

23. বাস্তব সংখ্যার সেট $\mathbb{R}$ এর উপসেট $S = \{n : n \in \mathbb{Z}\}$ এর বৃহত্তম নিম্নসীমা (Inf S) এবং ক্ষুদ্রতম ঊর্ধ্বসীমা (Sup S) নির্ণয় কর।

সমাধানঃ $S = \{n : n \in \mathbb{Z}\}$

$= \{\cdots -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \cdots\}$

এখানে, S সেটটি নিম্নে বা ঊর্ধ্বে সীমিত নয় বলে এর বৃহত্তম নিম্নসীমা (Inf S) বা ক্ষুদ্রতম ঊর্ধ্বসীমা (Sup S) কোনোটিই নাই।

24. x এর মান কত হলে, $\frac{x+2}{|x+1|}$ এর মান বাস্তব হবে?

সমাধানঃ $\frac{x+2}{|x+1|} \in \mathbb{R}$ যদি ও কেবল যদি, $x \in \mathbb{R}$ এবং $x + 1 \neq 0$ ie $x \neq -1$

সুতরাং, x এর মান $= \mathbb{R} - \{-1\}$

25. সংখ্যারেখার সাহায্যে সমাধান কর :

(a) $\left|\frac{2x}{x-2}\right| \leq 1$ (b) $|x+1| \leq |x-1|$

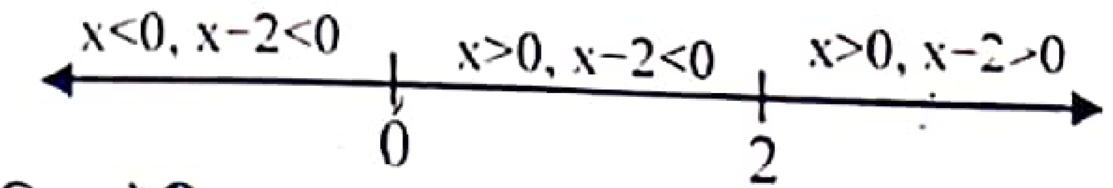
(c) $\frac{x^2(x-1)}{x+1} > 0$ (d) $\frac{3x+4}{5x+3} \leq \frac{x+2}{2x+3}$

25. সমাধান: (a) $\left|\frac{2x}{x-2}\right| \leq 1 \Rightarrow \frac{|2x|}{|x-2|} \leq 1$

$\Rightarrow |2x| \leq |x-2| \Rightarrow 2|x| - |x-2| \leq 0 \cdots (1)$

$x - 2 = 0$ হলে, $x = 2$.

সংখ্যারেখার উপর 0 ও 2 সংখ্যা দুইটির প্রতিরূপী বিন্দু চিহ্নিত করি।



বিন্দু দুইটি সংখ্যারেখাকে (i) $x < 0$ (ii) $0 < x < 2$ এবং (iii) $x > 2$ ব্যবধিতে বিভক্ত করে।

$x < 0$ হলে, $|x| = -x$ এবং $|x-2| = -(x-2)$

$\therefore$ (1) হতে পাই, $-2x + (x-2) \leq 0$

$\Rightarrow -2x + x - 2 \leq 0 \Rightarrow -x \leq 2$

$\Rightarrow x \geq -2$

$0 < x < 2$ হলে, $|x| = x$ এবং $|x-2| = -(x-2)$

$\therefore$ (1) হতে পাই, $2x + (x-2) \leq 0$

$\Rightarrow 2x + x - 2 \leq 0 \Rightarrow 3x \leq 2 \Rightarrow x \leq \frac{2}{3}$

$x > 2$ হলে, $|x| = x$ এবং $|x-2| = x - 2$

$\therefore$ (1) হতে পাই, $2x - (x-2) \leq 0$

$\Rightarrow 2x - x + 2 \leq 0 \Rightarrow x \leq -2$

এখন, $x \leq \frac{2}{3}$ এবং $x \leq -2 \Rightarrow x \leq \frac{2}{3}$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান: $x \geq -2$ এবং $x \leq \frac{2}{3}$

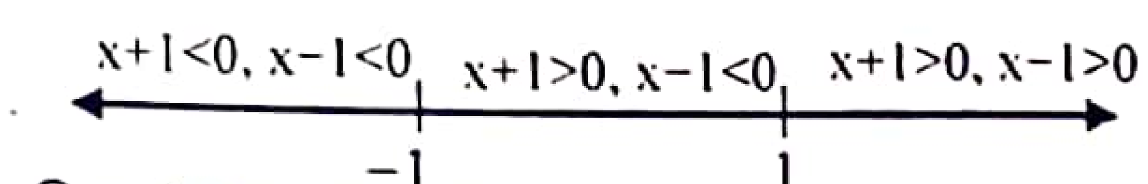
অর্থাৎ $-2 \leq x \leq \frac{2}{3}$

25(b) $|x+1| \leq |x-1|$

$\Rightarrow |x+1| - |x-1| \leq 0 \cdots (1)$

$x + 1 = 0$ হলে, $x = -1$ এবং $x - 1 = 0$ হলে, $x = 1$.

সংখ্যারেখার উপর -1 ও 1 সংখ্যা দুইটির প্রতিরূপী বিন্দু চিহ্নিত করি।



বিন্দু দুইটি সংখ্যারেখাকে (i) $x < -1$ (ii) $-1 < x < 1$ এবং (iii) $x > 1$ ব্যবধিতে বিভক্ত করে।

$x < -1$ হলে, $|x+1| = -(x+1)$ এবং $|x-1| = -(x-1)$

$\therefore$ (1) হতে পাই, $-(x+1) + (x-1) \leq 0$

$\Rightarrow -x - 1 + x - 1 \leq 0 \Rightarrow -2 \leq 0$, যা x বর্জিত।

$-1 < x < 1$ হলে, $|x+1| = (x+1)$ এবং $|x-1| = -(x-1)$

$\therefore$ (1) হতে পাই, $(x+1) + (x-1) \leq 0$

$\Rightarrow x + 1 + x - 1 \leq 0 \Rightarrow 2x \leq 0 \Rightarrow x \leq 0$

$x > 1$ হলে, $|x+1| = (x+1)$ এবং $|x-1| = (x-1)$

$\therefore$ (1) হতে পাই, $x + 1 - (x-1) \leq 0$

$\Rightarrow x + 1 - x + 1 \leq 0 \Rightarrow 2 \leq 0$, যা অসত্য।

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান: $x \leq 0$

25(c) $\frac{x^2(x-1)}{x+1} > 0 \Rightarrow \frac{x-1}{x+1} > 0 \cdots (1)$,

[$\because$ x এর যেকোনো বাস্তব মানের জন্য, $x^2 > 0$.

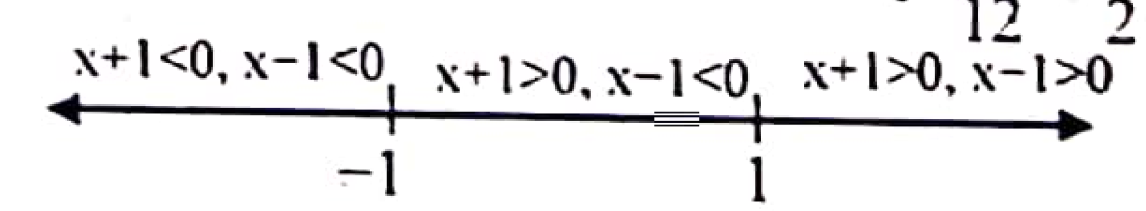
উভয় পক্ষকে $(x+1)^2$ দ্বারা গুণ করে পাই,

$\frac{(x-1)(x+1)^2}{x+1} > 0 \Rightarrow (x-1)(x+1) > 0$

$\Rightarrow (x-1)(x+1) > 0 \cdots\cdots (1)$

$x + 1 = 0$ হলে, $x = -1$ এবং $x - 1 = 0$ হলে, $x = 1$.

সংখ্যারেখার উপর -1 ও 1 সংখ্যা দুইটির প্রতিরূপী বিন্দু চিহ্নিত করি। [$\because \frac{7}{12} \leq \frac{5}{2}$]



বিন্দু দুইটি সংখ্যারেখাকে (i) $x < -1$ (ii) $-1 < x < 1$ এবং (iii) $x > 1$ ব্যবধিতে বিভক্ত করে।

$x < -1$ হলে, $x + 1 < 0$ এবং $x - 1 < 0$.

$\therefore (x-1)(x+1) > 0$, যা (1) এর সঙ্গে সঙ্গতিপূর্ণ।

$-1 < x < 1$ হলে, $x + 1 > 0$ এবং $x - 1 < 0$

$\therefore (x-1)(x+1) < 0$, যা (1) এর সঙ্গে সঙ্গতিপূর্ণ নয়।

$x > 1$ হলে, $x + 1 > 0$ এবং $x - 1 > 0$

$\therefore$ $(x-1)(x+1)>0$, যা (1) এর সঙ্গে সঙ্গতিপূর্ণ।

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান : $x<-1$ অথবা $x>1$

(d) $\dfrac{3x+4}{5x+3} \leq \dfrac{x+2}{2x+3}$

উভয় পক্ষকে $(5x+3)^2(2x+3)^2$ দ্বারা গুণ করে

পাই, $\dfrac{(3x+4)(5x+3)^2(2x+3)^2}{5x+3} \leq \dfrac{(x+2)(5x+3)^2(2x+3)^2}{2x+3}$

$\Rightarrow (3x+4)(5x+3)(2x+3)^2 \leq (x+2)(5x+3)^2(2x+3)$

$\Rightarrow (5x+3)(2x+3)\{(3x+4)(2x+3)-(x+2)(5x+3)\} \leq 0$

$\Rightarrow (5x+3)(2x+3)\{6x^2+17x+12-5x^2-13x-6\} \leq 0$

$\Rightarrow (5x+3)(2x+3)(x^2+4x+6) \leq 0$

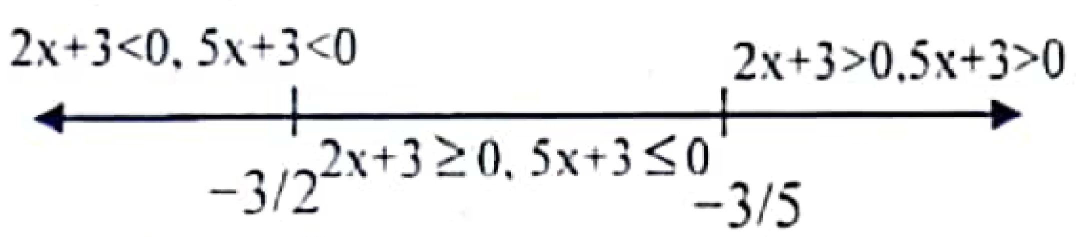
$\Rightarrow (5x+3)(2x+3)\{(x+2)^2+2\} \leq 0$

x এর যেকোনো বাস্তব মানের জন্য $(x+2)^2+2 \geq 0$

$\therefore$ $(5x+3)(2x+3) \leq 0 \cdots\cdots (1)$

$5x+3=0$ হলে, $x=-3/5$ এবং $2x+3=0$ হলে, $x=-3/2$. $-\dfrac{3}{5} > -\dfrac{3}{2}$

সংখ্যারেখার উপর $-3/5$ ও $-3/2$ সংখ্যা দুইটির প্রতিরূপী বিন্দু চিহ্নিত করি।



বিন্দু দুইটি সংখ্যারেখাকে (i) $x<-3/2$ (ii) $-3/2 \leq x \leq -3/5$ এবং (iii) $x>-3/5$ ব্যবধিতে বিভক্ত করে।

$x<-3/2$ হলে, $2x+3<0$ এবং $5x+3<0$.

$\therefore$ $(2x+3)(5x+3)>0$, যা (1) এর সঙ্গে সঙ্গতিপূর্ণ নয়।

$-3/2 \leq x \leq -3/5$ হলে, $2x+3 \geq 0$ এবং $5x+3 \leq 0$

$\therefore$ $(5x+3)(2x+3) \leq 0$, যা (1) এর সঙ্গে সঙ্গতিপূর্ণ।

$x>-3/5$ হলে, $5x+3>0$ এবং $2x+3>0$

$\therefore$ $(5x+3)(2x+3)>0$, যা (1) এর সঙ্গে সঙ্গতিপূর্ণ নয়।

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান : $-3/2 \leq x \leq -3/5$

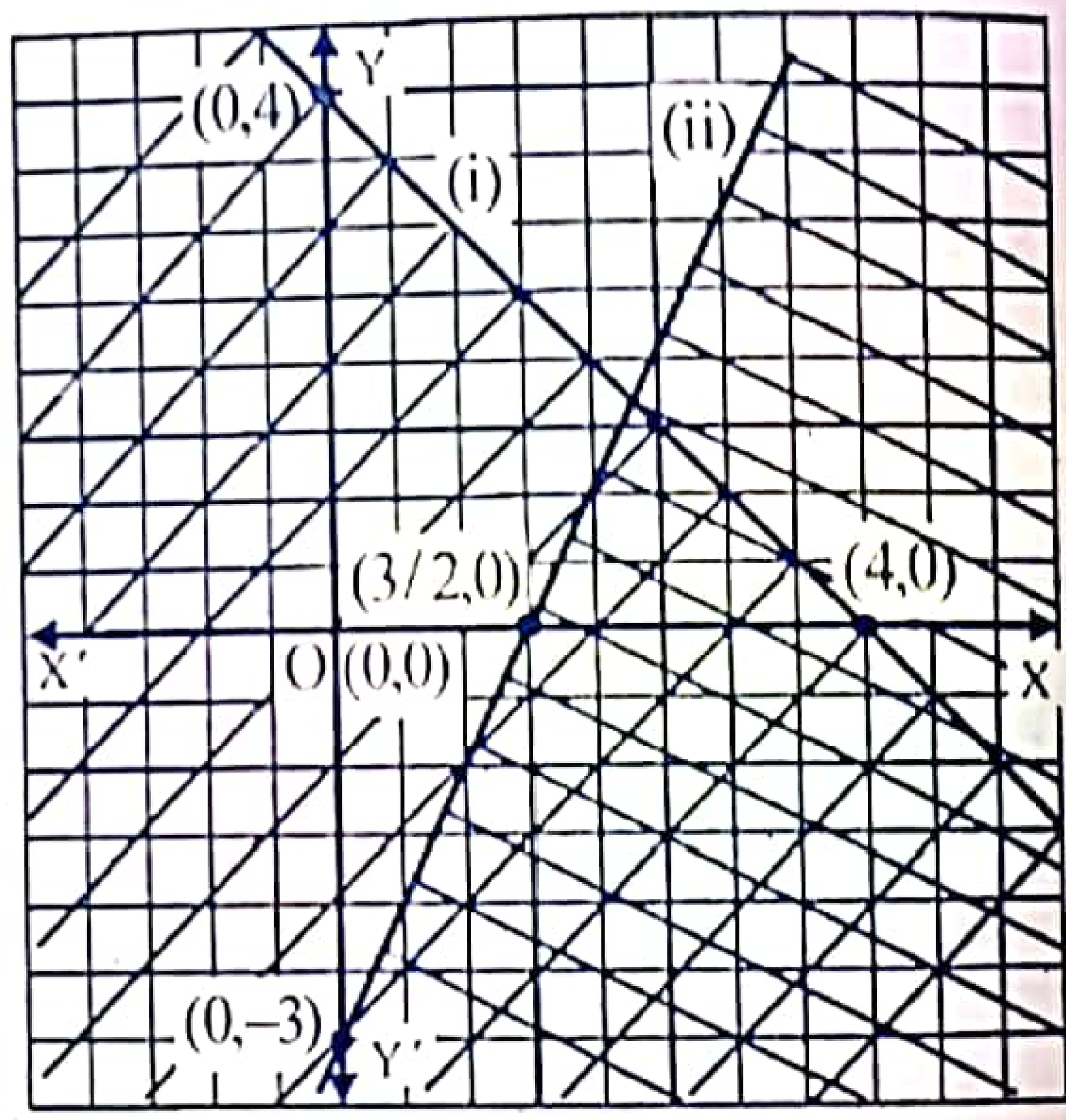
26. নিচের প্রত্যেক অসমতাযুগলের সমাধান সেটের লেখচিত্র অঙ্কন কর:

(a) $x+y-4 \leq 0$ এবং $2x-y-3 \geq 0$

সমাধানঃ প্রদত্ত অসমতাযুগলের অনুরূপ রৈখিক সমীকরণ,

$x+y=4 \Rightarrow \dfrac{x}{4}+\dfrac{y}{4}=1 \cdots\cdots$(i),

$2x-y=3 \Rightarrow \dfrac{x}{3/2}+\dfrac{y}{-3}=1 \cdots\cdots$ (ii)



একটি ছক কাগজে স্থানাঙ্কের অক্ষরেখা $X'OX$ ও YOY' অঙ্কন করি। x-অক্ষ ও y-অক্ষ বরাবর ছোট 2 বর্গের বাহুর দৈর্ঘ্য = 1 একক ধরে (i) ও (ii) রেখার লেখচিত্র রেখা অঙ্কন করি।

প্রদত্ত $x+y-4 \leq 0$ অসমতায় (0,0) বসিয়ে যাচাই করলে পাওয়া যায় $-4 \leq 0$, যা সত্য। সুতরাং (i) রেখাস্থ ও এর (0,0) বিন্দুর পার্শ্বস্থ সকল বিন্দুর সেট এই অসমতার লেখচিত্র। তদ্রূপ $2x-y-3 \geq 0$ অসমতায় (0,0) বসিয়ে যাচাই করলে পাওয়া যায় $-3 \geq 0$, যা অসত্য। সুতরাং (ii) রেখাস্থ ও এর যে পাশে মূলবিন্দু তার বিপরীত পার্শ্বস্থ সকল বিন্দুর সেট $2x-y-3 \geq 0$ অসমতার লেখচিত্র।

অতএব, এই রেখা দুইটির সংশিষ্ট অংশ সহ এই দুইভাবে চিহ্নিত অংশের ছেদাংশই অসমতা দুইটির যুগপৎসমাধানের লেখচিত্র। চিত্রে গাঢ়ভাবে চিহ্নিত অংশই (সীমারেখাসহ) এই লেখচিত্র।

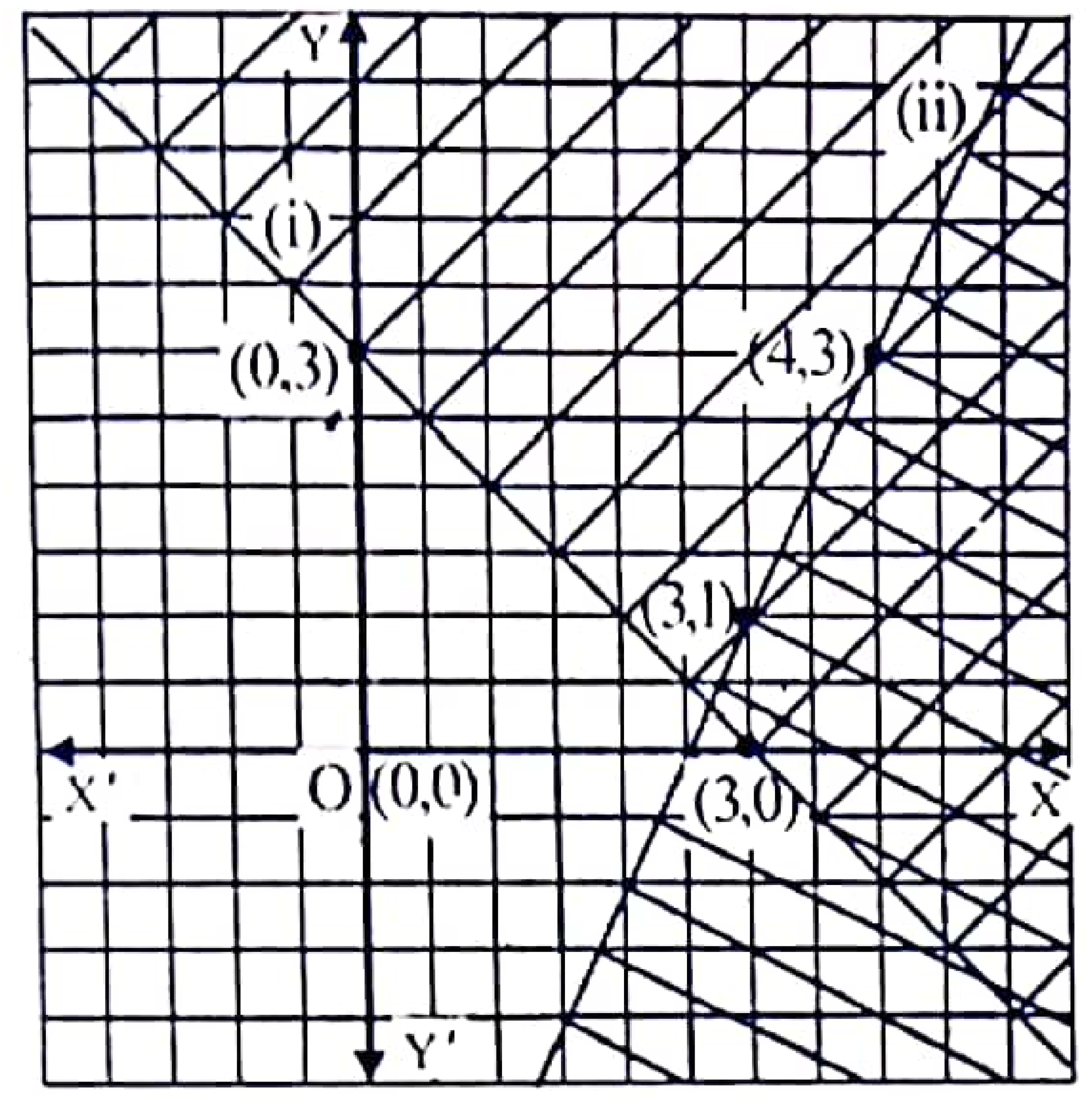
26(b) $x+y-3>0$ এবং $2x-y-5>0$

সমাধান : প্রদত্ত অসমতাযুগলের অনুরূপ রৈখিক সমীকরণ,

$x+y=3 \Rightarrow \dfrac{x}{3}+\dfrac{y}{3}=1 \cdots\cdots$(i),

$2x-y=5 \Rightarrow y=2x-5 \cdots\cdots$ (ii) .

(ii) – এর উপর যেকোনো দুইটি বিন্দু (3, 1) ও (4, 3) নির্ণয় করি।



একটি ছক কাগজে স্থানাঙ্কের অক্ষরেখা $X'OX$ ও YOY' অঙ্কন করি। x-অক্ষ ও y-অক্ষ বরাবর ছোট 2 বর্গের বাহুর দৈর্ঘ্য = 1 একক ধরে (i) ও (ii) রেখার লেখচিত্র রেখা অঙ্কন করি।

প্রদত্ত $x+y-3>0$ অসমতায় (0,0) বসিয়ে যাচাই করলে পাওয়া যায় $-3>0$, যা অসত্য। সুতরাং (i) এর যে পাশে মূলবিন্দু (0,0) তার বিপরীত পার্শ্বস্থ সকল বিন্দুর সেট এই অসমতার লেখচিত্র। তদ্রূপ $2x-y-5>0$ অসমতায় (0,0) বসিয়ে যাচাই করলে পাওয়া যায় $-5 \geq 0$, যা অসত্য। সুতরাং (ii) রেখার যে পাশে মূলবিন্দু তার বিপরীত পার্শ্বস্থ সকল বিন্দুর সেট এই অসমতার লেখচিত্র।

অতএব, এই রেখা দুইটির সংশিষ্ট অংশ সহ এই দুইভাবে চিহ্নিত অংশের ছেদাংশই অসমতা দুইটির যুগপৎসমাধানের লেখচিত্র। চিত্রে গাঢ়ভাবে চিহ্নিত অংশই এই লেখচিত্র।

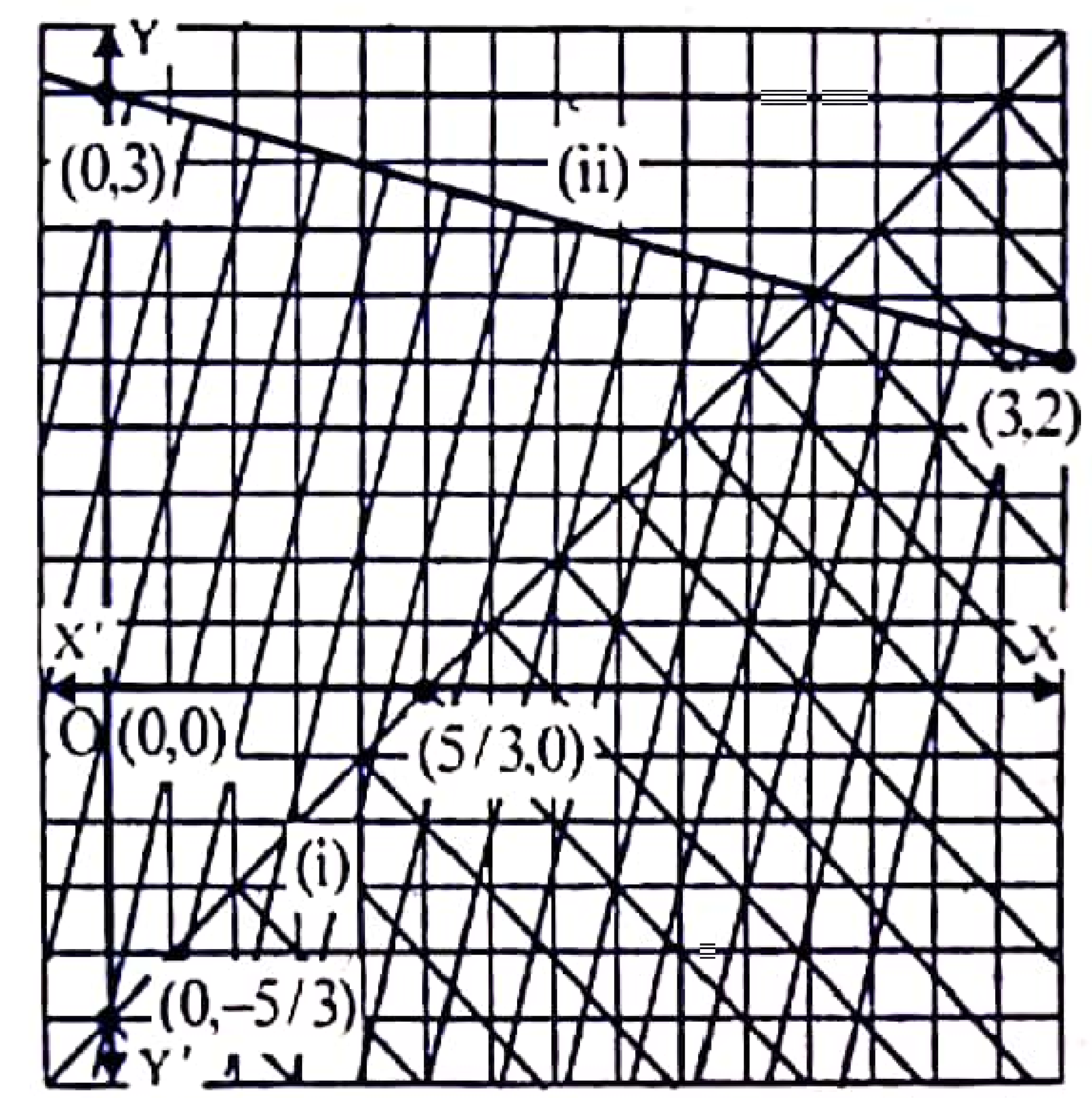
26(c) $3x-3y>5$ এবং $x+3y \leq 9$

সমাধান : প্রদত্ত অসমতাযুগলের অনুরূপ রৈখিক সমীকরণ,

$3x-3y=5 \Rightarrow \dfrac{x}{5/3}+\dfrac{y}{-5/3}=1 \cdots\cdots$(i),

$x+3y=9 \Rightarrow x=9-3y \cdots\cdots$ (ii) .

(ii) – এর উপর যেকোনো দুইটি বিন্দু (0, 3) ও (3, 2) নির্ণয় করি।



একটি ছক কাগজে স্থানাঙ্কের অক্ষরেখা $X'OX$ ও YOY' অঙ্কন করি। x-অক্ষ ও y-অক্ষ বরাবর ছোট 3 বর্গের বাহুর দৈর্ঘ্য = 1 একক ধরে (i) ও (ii) রেখার লেখচিত্র রেখা অঙ্কন করি।

প্রদত্ত $3x-3y>5$ অসমতায় (0,0) বসিয়ে যাচাই করলে পাওয়া যায় $0>5$, যা অসত্য। সুতরাং (i) এর যে পাশে মূলবিন্দু (0,0) তার বিপরীত পার্শ্বস্থ সকল বিন্দুর সেট এই অসমতার লেখচিত্র। তদ্রূপ $x+3y \leq 9$ অসমতায় (0,0) বসিয়ে যাচাই করলে পাওয়া যায় $0 \leq 9$, যা সত্য। সুতরাং (ii) রেখাস্থ ও এর (0,0) বিন্দুর পার্শ্বস্থ সকল বিন্দুর সেট এই অসমতার লেখচিত্র।

অতএব, এই রেখা দুইটির সংশিষ্ট অংশ সহ এই দুইভাবে চিহ্নিত অংশের ছেদাংশই অসমতা দুইটির যুগপৎসমাধানের লেখচিত্র। চিত্রে (ii) নং রেখাস্থ বিন্দুসহ গাঢ়ভাবে চিহ্নিত অংশই এই লেখচিত্র।

26(d) $5x - 3y - 9 > 0$ এবং $3x - 2y \geq 5$

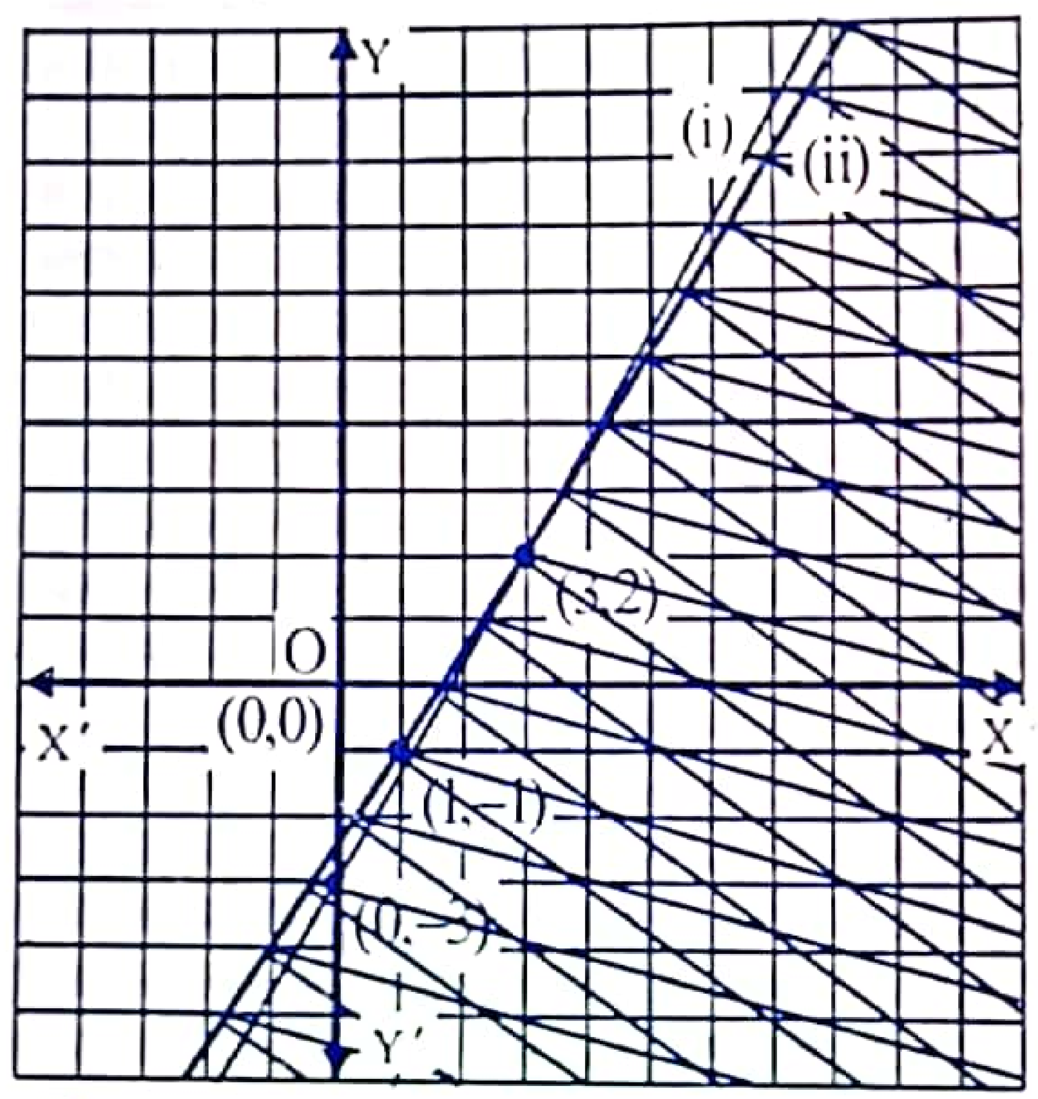
সমাধান : প্রদত্ত অসমতাযুগলের অনুরূপ রৈখিক সমীকরণ,

$5x - 3y = 9 \Rightarrow 3y = 5x - 9$

$\Rightarrow y = \frac{5}{3}x - 3 \cdots\cdots$ (i), যা (0, −3), (3,2) দিয়ে অতিক্রম করে।

এবং $3x - 2y = 5 \Rightarrow 2y = 3x - 5$

$\Rightarrow y = \frac{3x-5}{2} \cdots\cdots$ (ii), যা (1, −1) , (3, 2) দিয়ে অতিক্রম করে।



একটি ছক কাগজে স্থানাঙ্কের অক্ষরেখা $X'OX$ ও YOY' অঙ্কন করি। x-অক্ষ ও y-অক্ষ বরাবর ছোট 1 বর্গের বাহুর দৈর্ঘ্য = 1 একক ধরে (i) ও (ii) রেখার লেখচিত্র রেখা অঙ্কন করি।

প্রদত্ত $5x - 3y - 9 > 0$ অসমতায় .(0,0) বসিয়ে যাচাই করলে পাওয়া যায় $-9 > 0$, যা অসত্য। সুতরাং (i) এর যে পাশে মূলবিন্দু (0,0) তার বিপরীত পার্শ্বস্থ সকল বিন্দুর সেট এই অসমতার লেখচিত্র। তদ্রূপ $3x - 2y \geq 5$ অসমতায় (0,0) বসিয়ে যাচাই করলে পাওয়া যায় $0 \geq 5$, যা অসত্য। সুতরাং (ii) রেখাস্থ ও এর (0,0) বিন্দুর বিপরীত পার্শ্বস্থ সকল বিন্দুর সেট এই অসমতার লেখচিত্র।

অতএব, এই রেখা দুইটির সংশিষ্ট অংশ সহ এই দুইভাবে চিহ্নিত অংশের ছেদাংশই অসমতা দুইটির যুগপৎসমাধানের লেখচিত্র। চিত্রে (ii) নং রেখাস্থ বিন্দুসহ গাঢ়ভাবে চিহ্নিত অংশই এই লেখচিত্র।

সম্ভাব্য ধাপসহ প্রশ্ন:

1. সম্পূর্ণতা ধর্ম বলতে কি বুঝ? প্রমাণ কর যে, মূলদ সংখ্যার সেটে সম্পূর্ণতা ধর্ম খাটে না ।

সম্পূর্ণতা ধর্ম ঃ বাস্তব সংখ্যার একটি অশূন্য (*non-empty*) উর্ধ্বসীমিত উপসেটের একটি অনন্য ক্ষুদ্রতম উর্ধ্বসীমা বা সুপ্রিমাম থাকবে যা বাস্তব সংখ্যা এবং বাস্তব সংখ্যার একটি অশূন্য নিম্নে সীমিত উপসেটের একটি অনন্য বৃহত্তম নিম্নসীমা বা ইনফিমাম থাকবে যা বাস্তব সংখ্যা। (১)

মনে করি, মূলদ সংখ্যার সেট $\mathbb{Q}$ এর উপসেট, $S = \{x \in \mathbb{Q} : x^2 < 2\}$. এ সেটটি উর্ধ্বসীমিত । S সেটে ক্ষুদ্রতম উর্ধ্বসীমা অর্থাৎ sup $S = \sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$. কিন্তু ইহা বাস্তব সংখ্যার সেট $\mathbb{R}$ -এর একটি উপাদান। সুতরাং, $\mathbb{Q}$ সেটে S এর কোনো ক্ষুদ্রতম উর্ধ্বসীমা (Sup S) নেই। অতএব, মূলদ সংখ্যার সেটে সম্পূর্ণতা ধর্ম খাটে না । (১)

2. $a < b$ এবং k ধনাত্মক মূলদ সংখ্যা হলে প্রমাণ কর যে, $a < \frac{a+bk}{1+k} < b$

প্রমাণ ঃ দেওয়া আছে , $a < b$

$\therefore\ ak < bk$, [$\because$ k ধনাত্মক সংখ্যা] (১)

$\Rightarrow a + ak < a + bk$, [উভয় পক্ষে a যোগ করে ।] (১)

$\Rightarrow a(1 + k) < a + bk$

$\Rightarrow a < \frac{a+bk}{1+k} \cdots(1)$ [উভয় পক্ষকে $1 + k > 0$ দ্বারা ভাগ করে] (১)

আবার , $ak < bk$

$\Rightarrow ak + b < bk + b$,[উভয় পক্ষে b যোগ করে ।]

$\Rightarrow ak + b < b(k + 1)$

$\Rightarrow \frac{a+bk}{1+k} < b \cdots(2)$,[উভয় পক্ষকে $1 + k > 0$ দ্বারা ভাগ করে]

(1) ও (2) হতে পাই, $a < \frac{a+bk}{1+k} < b$ (১)

3. $A = \{x : x = 3n , n \in \mathbb{N}\}$ হলে দেখাও যে, A গুণ প্রক্রিয়ার জন্য আবদ্ধ।

প্রমাণ ঃ ধরি , $x_1 = 3p$ এবং $x_2 = 3q$ প্রদত্ত সেট A এর যেকোনো দুইটি উপাদান; যেখানে $p, q \in \mathbb{N}$

এখন , $x_1 x_2 = 3p \times 3q = 9pq$

$= 3(3pq) = 3r$; যেখানে $3pq = r$

যেহেতু $3, p, q \in \mathbb{N}$, সেহেতু $r = 3pq \in \mathbb{N}$

$\therefore\ 3r \in A$ (১)

$\therefore$ A গুনন প্রক্রিয়ার জন্য আবদ্ধ । (প্রমাণিত) (১)

ভর্তি পরীক্ষার MCQ ঃ

1. $|7 - 3x| \leq 5$ এর সমাধান – [DU 06-07; JU 09-10]

Sol^n.: $|7 - 3x| \leq 5 \Rightarrow |3x - 7| \leq 5$

$\Rightarrow -5 \leq 3x - 7 \leq 5 \Rightarrow 2 \leq 3x \leq 12$

$\therefore\ 2/3 \leq x \leq 4$

2. $-7 < x < -1$ কে পরম মানের সাহায্যে লিখলে দাঁড়ায়- [DU 04-05; CU 08-09; JU 09-10]

Sol^n.: $-7 + 4 < x + 4 < -1 + 4$

$\Rightarrow\ -3 < x + 4 < 3\ \therefore |x + 4| < 3$

3. $|x| \geq 3$ অসমতার সমাধান হবে- [CU 07-08]

Sol^n.: $|x| \geq 3 \Rightarrow x \leq -3$ অথবা $x \geq 3$

$\Rightarrow\ (-\infty, -3] \cup [3, \infty)$

4. কোন সংখ্যাটি অমূলদ– [HSTU 05-06; SUST 04-05; SAU 07-08; JU 09-10]

Sol^n.: A. $\frac{11}{6}$ B. –3.3 C. 20200...D.1.1212..

Ans. C

5. সমাধান কর: $|x - 5| - 2x > 4$ [SUST 08-09]

Sol^n.: $x - 5 >$ হলে, $x - 5 - 2x > 4$

$\Rightarrow -x > 9 \Rightarrow x < -9$

$x - 5 < 0$ হলে, $-(x - 5) - 2x > 4$

$\Rightarrow -x + 5 - 2x > 4 \Rightarrow -3x > -1 \Rightarrow x < \frac{1}{3}$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান : $x < \frac{1}{3}$

6. বাস্তব সংখ্যায় $\frac{1}{|2x-3|} > 5$ অসমতাটির সমাধান– [DU 09-10; SUST 08-09]

Sol^n.: $\frac{1}{|2x-3|} > 5 \Rightarrow |2x - 3| < \frac{1}{5}$

$\Rightarrow -\frac{1}{5} < 2x - 3 < \frac{1}{5} \Rightarrow -\frac{1}{5} + 3 < 2x < \frac{1}{5} + 3$

$\Rightarrow \frac{14}{5} < 2x < \frac{16}{5} \Rightarrow \frac{7}{5} < x < \frac{8}{5}$

কিন্তু $2x - 3 = 0$ ie. $x = \frac{3}{2}$ হলে, প্রদত্ত অসমতাটি অসংজ্ঞায়িত হয়।

$\therefore$ সমাধান $(\frac{7}{5}, \frac{3}{2}) \cup (\frac{3}{2}, \frac{8}{5})$

7. $X = \{x : x < 0\}$ হলে X এর ক্ষুদ্রতম উর্ধ্বসীমা– [JU 10-11, 09-10]

Sol^n.: X এর উর্ধ্বসীমার সেট $= \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$

$\therefore$ X এর ক্ষুদ্রতম উর্ধ্বসীমা = 0.

8. $|\pi - 2|$ কে পরমমান চিহ্ন ব্যতিত লিখলে দাঁড়ায়– [JU 09-10]

Sol^n.: $|\pi - 2| = \pi - 2$, [$\because \pi > 2$]

9. বাস্তব সংখ্যায় $\frac{1}{|3x+1|} \geq 5$ অসমতাটির সমাধান- DU 13-14

A. $\left(-\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}\right) \cup \left(-\frac{1}{3}, -\frac{4}{5}\right)$ B. $\left(-\frac{2}{3}, -\frac{4}{15}\right)$

C. $\left[-\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}\right) \cup \left(-\frac{1}{3}, -\frac{4}{15}\right]$ D. None

Sol^n.: $\frac{1}{|3x+1|} \geq 5 \Rightarrow |3x + 1| \leq \frac{1}{5}$

⇒ $-\frac{1}{5} \le 3x+1 \le \frac{1}{5}$

⇒ $-\frac{1}{5}-1 \le 3x \le \frac{1}{5}-1 \Rightarrow -\frac{6}{5} \le 3x \le -\frac{4}{5}$

⇒ $-\frac{2}{5} \le x \le -\frac{4}{15}$. কিন্তু $3x + 1 = 0$ অর্থাৎ

$x = -\frac{1}{3}$ হলে, প্রদত্ত অসমতাটি অসংজ্ঞায়িত হয়।

∴ নির্ণেয় সমাধান: $\left[-\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}\right) \cup \left(-\frac{1}{3}, -\frac{4}{15}\right]$

বহু নির্বাচনী প্রশ্ন (Multiple Choice Questions):

1. Solⁿ.: বাস্তব সংখ্যায় উপসেটের জন্য $N\subset Z\subset Q\subset R$ প্রযোজ্য? ∴ উ: খ.

2. Solⁿ.: $\sqrt{0\cdot\dot{1}} = \sqrt{\frac{1}{9}} = \frac{1}{3}$. উ: ঘ.

3. Solⁿ.: $\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{63}} = \sqrt{\frac{7}{63}} = \sqrt{\frac{1}{9}} = \frac{1}{3}$ একটি মূলদ সংখ্যা। ∴ উ: ঘ.

4. Solⁿ.: $\sqrt[3]{9}$ একটি অমূলদ সংখ্যা। ∴ উ: গ.

5. Solⁿ.: $5(e^{\ln 2} \div e^{\ln 5}) = 5(\frac{2}{5}) = 2$ একটি মৌলিক ও স্বাভাবিক সংখ্যা। উ: ঘ.

6. Solⁿ.: $\frac{7}{21}(\dot{2}\dot{1}+\pi)$ একটি অঋণাত্মক সংখ্যা। ∴ উ: ক.

7. Solⁿ.: $R - Q = Q'$ এবং $5 \notin Q'$ ∴ উ: খ.

8. Solⁿ.: বাস্তব সংখ্যায় অভেদকের অস্তিত্ব স্বীকার্য $3 + 0 = 3$ ∴ উ: গ.

9. Solⁿ.: $Z\cup N = Z$ সেট ভাগ প্রক্রিয়ায় আবদ্ধ নয়। ∴ উ: খ.

10. Solⁿ.: স্বাভাবিক সংখ্যার সেট N যোগ ও গুণের প্রক্রিয়ায় আবদ্ধ কিন্তু বিয়োগ ও ভাগের প্রক্রিয়ায় আবদ্ধ নয়। ∴ উ: গ.

11. Solⁿ.: $-3\le x<4$ অসমতাটির ব্যবধিরূপ $[-3,4)$ ∴ উ: গ.

12. Solⁿ.: $]-\infty, b]$ ব্যবধিটির অসমতারূপ $\{x\in R: -\infty < x \le b\}$ ∴ উ: ক.

13. Solⁿ.: $[1, 0) \cup (0, 7] = [1, 7]$ ব্যবধিটির অসমতারূপ $\{x\in R: 1\le x\le 7, x\ne 0\}$ ∴ উ: ঘ.

14. Solⁿ.: $A = \{0, \pm1, \pm2, \pm3, \pm4\}$ এর নিম্নসীমাগুলির সেট $(-\infty, -4]$. ∴ উ: ঘ.

15. Solⁿ.: $S = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots\}$ সেটটির ক্ষুদ্রতম ঊর্ধ্বসীমা (Sup S) ও বৃহত্তম নিম্নসীমা (Inf S) যথাক্রমে 1 ও 0 ∴ উ: ঘ.

16. Solⁿ.: $-2 < -\frac{3}{2}$, প্রদত্ত ধারার n তম পদ $\frac{-(n+1)}{n}$ এবং $\lim_{n\to\infty}\{-\frac{n+1}{n}\} = \lim_{n\to\infty}\{-\frac{n+1}{n}\}$

$= -\lim_{n\to\infty}\frac{n(1+\frac{1}{n})}{n} = -\frac{1+0}{1} = -1$.

∴ সেটটির ক্ষুদ্রতম ঊর্ধ্বসীমা ও বৃহত্তম নিম্নসীমা যথাক্রমে -1 ও -2. ∴(উ: ঘ).

17. Solⁿ.: $\frac{1}{2} < \frac{2}{3}$ এবং $\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1} = \lim_{n\to\infty}\frac{n}{n(1+1/n)}$

$= \lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1} = \lim_{n\to\infty}\frac{n}{n(1+1/n)} = \frac{1}{1+0} = 1$

∴ সেটটির ক্ষুদ্রতম ঊর্ধ্বসীমা ও বৃহত্তম নিম্নসীমা যথাক্রমে $\frac{1}{2}$ ও 1 ∴ উ: গ.

18. Solⁿ.: 2 এর গুণাত্মক বিপরীত $u = \frac{1}{2}$.

∴ $2(u + 2) = 2(\frac{1}{2} + 2) = 5$, যা মৌলিক সংখ্যা ; $2 + (-u) = 2 - \frac{1}{2} \ne 0$;

$-3u = -\frac{3}{2}$, $-4u = -2$. ∴ $-\frac{3}{2} > -2$

∴ উ: গ.

19. Solⁿ.: $-2 < -\frac{3}{2}$ বলে S এর একটি ঊর্ধ্বসীমা 0 ∴ উ: ক.

20. Solⁿ.: ঋণাত্মক (c<0) মান দ্বারা গুণ বা ভাগ করলে অসমতার দিক পরিবর্তিত হয়। সুতরাং ii ও iii সত্য, কেননা $a > b \Rightarrow -a < -b$

⇒ $c - a < c - b$ ∴ উ: গ.

21. Solⁿ.: সব তথ্যই সত্য। ∴ উ: ঘ.

22. Solⁿ.: $10^{50} \ge 3$ বলে 10^{50} একটি ঊর্ধ্বসীমা এবং সুপ্রিমাম 3. ∴ উ: ক.

23. Solⁿ.: $||7-12|-|3-5||$

$= ||-5|-|-2|| = |5-2| = 3$ ∴ উ: ক.

24. Solⁿ.: $|xyz| = |x||y||z| = (-x)(-y)(-z)$

$= -xyz$ ∴ উ: গ.

25. Solⁿ.: $|3-2x| = 5 \Rightarrow |2x-3| = 5$

⇒ $2x - 3 = \pm5 \Rightarrow x = 4, -1$ ∴ উ: খ.

26. Solⁿ.: $23 \ge -1-3x \Rightarrow 24 \ge -3x$

⇒ $-3x \le 24 \Rightarrow x \ge -8$ ∴ উ: ক.

27. Solⁿ.: $-1 + 2x < 15 \Rightarrow 2x < 16$

⇒ $x < 8$ ∴ উ: গ.

28. Solⁿ.: $-3 < f(x) < 10 \Rightarrow -3 < x + 2 < 10$

⇒ $-5 < x < 8$ ∴ বৃহত্তম নিম্নসীমা -5.

∴ উ: গ.

29. Solⁿ.: $-1 < f(x) \le 1 \Rightarrow -1 < x + 2 \le 1$

⇒ $-3 < x \le -1 = (-3, -1]$ ∴ উ: গ.

30. Solⁿ.: $-2 \le 3 - x \le 8$

⇒ $-2-3 \le -x \le 8-3$

⇒ $-5 \le -x \le 5 \Rightarrow -5 \le x \le 5$

⇒ $|x| \le 5 \Rightarrow x\in[-5, 5]$; কিন্তু Inf S = -5

∴ উ: গ.

31. Solⁿ.: $|7-x| \le 2 \Rightarrow -2 \le 7 - x \le 2$

⇒ $-9 \le -x \le -5 \Rightarrow 5 \le x \le 9$

∴ বৃহত্তম নিম্নসীমা 5 ∴ উ: ঘ.

32. Solⁿ.: $4x - 3 > 1 \Rightarrow 4x > 4 \Rightarrow x > 1$

আবার, $-(4x-3) > 1 \Rightarrow 4x - 3 < -1$

⇒ $4x < 2 \Rightarrow x < \frac{1}{2}$ [DU 14-15]

∴ সমাধান সেট $= (-\infty, \frac{1}{2}) \cup (1, \infty)$ ∴ উ: গ.

33. Solⁿ.: $5 - 2x \ge 4 \Rightarrow -2x \ge -1 \Rightarrow x \le \frac{1}{2}$

আবার, $-(5-2x) \ge 4 \Rightarrow -5 + 2x \ge 4$

⇒ $2x \ge 9 \Rightarrow x \ge \frac{9}{2}$. [NU 14-15]

∴ সমাধান সেট $= -\infty < x \le \frac{1}{2}$ or $\frac{9}{2} \le x < \infty$

∴ উ: খ.

34. Solⁿ : $5x - x^2 - 6 > 0 \Rightarrow x^2 - 5x + 6 < 0$

⇒ $(x-3)(x-2) < 0 \Rightarrow x < 3$ এবং $x > 2$

⇒ $2 < x < 3$ ∴ উ: গ.

35. Solⁿ.: $x^2 - 7x + 6 > 0 \Rightarrow (x-6)(x-1) > 0$

⇒ $x > 6$ অথবা $x < 1$ ∴ উ: ক.

36. Solⁿ.: $x^2 + x - 20 < 0 \Rightarrow (x+5)(x-4) < 0$

⇒ $x > 4$ এবং $x < -5$ ∴ উ: গ.

37. Solⁿ.: $-1 < x + 2 \le 4 \Rightarrow -3 < x \le 2$

∴ উ: গ.

38. Solⁿ.: $f(x) \le 7 \Rightarrow |x - 3| \le 7$

⇒ $-7 \le x - 3 \le 7 \Rightarrow -4 \le x \le 10$

⇒ $x \in [-4, 10]$ ∴ উ: খ.

39. Solⁿ.: $x = -10$ হলে, $f(x) = |-10-3|$

⇒ $f(x) = |-13| = 13$ ∴ উ: খ.

40. Solⁿ.: $x < 3 \Rightarrow x - 3 < 0$

এখন, $f(x) > 4 \Rightarrow |x-3| > 4$

$\Rightarrow x-3 > 4 \Rightarrow x > 7$ ∴ উ: খ.

41. Sol^n.: $-5 < x < 9$

$\Rightarrow -5-2 < x-2 < 9-2$

$\Rightarrow -7 < x-2 < 7 \Rightarrow |x-2| < 7$

∴ উ: গ.

42. Sol^n.: $-3 > x > -7 \Rightarrow -7 < x < -3$

$\Rightarrow -7+5 < x+5 < -3+5$

$\Rightarrow -2 < x+5 < 2 \Rightarrow |x+5| < 2$

∴ উ: গ.

43. Sol^n.: $(x+1)(x+3) < 0$

$\Rightarrow -3 < x < -1 \Rightarrow -3+2 < x+2 < -1+2$

$\Rightarrow -1 < x+2 < 1 \Rightarrow |x+2| < 1$ ∴ উ: খ.

44. Sol^n.: $|x-3| \le 4 \Rightarrow -4 < x-3 < 4$

$\Rightarrow -1 < x < 7$. কিন্তু $x = 3$ হলে $|x-3| = 0$ হয়।

∴ সমাধান সেট

$= \{x \in \mathbb{R} : -1 < x < 3\} \cup x \in \mathbb{R} : 3 < x < 7\}$

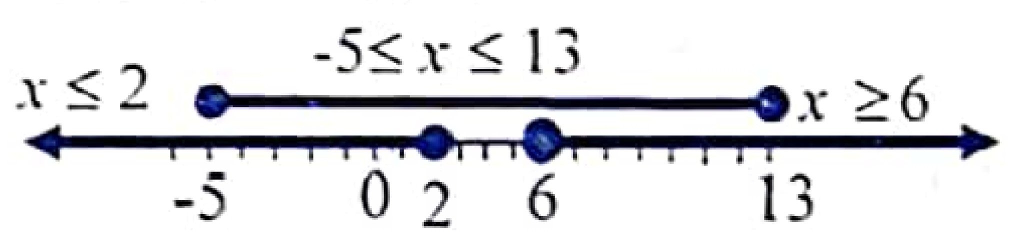
∴ উ: ঘ.

45. Sol^n.: $|x-4| \le 9 \Rightarrow -9 \le x-4 \le 9$

$\Rightarrow -9 \le x-4 \le 9 \Rightarrow -5 \le x \le 13$

$|x-4| \ge 2 \Rightarrow x-4 \ge 2$ অথবা $x-4 \le -2$

$\Rightarrow x \ge 6$ অথবা $x \le 2$



∴ অসমতাটির সমাধান $= [-5, 2] \cup [6, 13]$

∴ উ: ঘ.

46. Sol^n.: $2x - 3y = -6 \Rightarrow \frac{x}{-3} + \frac{y}{2} = 1$ রেখা x-অক্ষকে $(-3, 0)$ বিন্দুতে ও y- অক্ষকে $(0, 2)$ বিন্দুতে ছেদ করে। তাছাড়া $(0, 0)$ বিন্দু প্রদত্ত অসমতাকে সিদ্ধ করে। ∴ উ: ক.

47. Sol^n.: $y > 0$ অসমতা ১ম ও ২য় চতুর্ভাগের বিন্দু দ্বারা সিদ্ধ হয় কিন্তু $-4x + 3y < 0$ অসমতা ২য় চতুর্ভাগের কোনো বিন্দু দ্বারা সিদ্ধ হয় না। সুতরাং, প্রদত্ত অসমতাযুগলের সমাধান সেট ১ম চতুর্ভাগে অবস্থিত। ∴ উ: ক.

48. Sol^n.: $x > 0$ অসমতা ১ম ও ৪র্থ চতুর্ভাগের বিন্দু দ্বারা সিদ্ধ হয় এবং $x - y - 2 < 0$ অসমতা ১ম চতুর্ভাগের $(1, 1)$ বিন্দু দ্বারা ও ৪র্থ চতুর্ভাগের $(\frac{1}{2}, -1)$ বিন্দু দ্বারা সিদ্ধ হয়। সুতরাং, অসমতাযুগলের সমাধান সেট ১ম ও ৪র্থ চতুর্ভাগে অবস্থিত। ∴ উ: ঘ.

49. Sol^n.: $ax+by+c=0$ রেখাস্থ বিন্দুসমূহ $S_1 \cap S_2$ সেটের সদস্য। ∴ উ: খ.

50. Sol^n.: $(0, 0)$ ও $(1, 0)$ বিন্দুদ্বয় প্রদত্ত অসমতাযুগলকে সিদ্ধ করে। ∴ উ: ক.

51. Sol^n.: $2x-5=0$ হলেই $(2x-5)^2 \le 0$ সম্ভব। ∴ $x = 2.5$ ∴ উ: (ক) [দি.বো.'১৭]

52. Sol^n.: $-2 \le x \le 3$ এর মধ্যে পূর্ণসংখ্যা অনুপস্থিত। ∴ উ: (খ) [দি.বো.'১৭]

53. Sol^n.: $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{C} \subset \mathbb{R}$ সঠিক সম্পর্ক?

∴ উ: (ক) [চ.বো.'১৭]

54. Sol^n.: $\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{125}} = \frac{\sqrt{5}}{5\sqrt{5}} = \frac{1}{5}$ মূলদ সংখ্যা।

∴ উ: (ঘ) [চ.বো.'১৭]

55. Sol^n.: $|2x-1| = -(2x-1)$, যখন $2x-1<0$

$\Rightarrow 1-2x$, $x < \frac{1}{2}$ ∴ উ: (ক) [চ.বো.'১৭]

56. Sol^n.: যোগ, বিয়োগ ও গুণের প্রক্রিয়ায় সেট $\mathbb{Z}$ অবদ্ধ। ∴ উ: (ঘ) [ঢা.বো.'১৭]

57. Sol^n.: p ও q দুইটি বাস্তব সংখ্যার ক্ষেত্রে, $|p+q| \le |p| - |q|$ সত্য নয়। ∴ উ: (ক) [রা.বো.'১৭]

58. Sol^n.: $|2x-7| \le 3 \Rightarrow -3 \le 2x-7 \le 3$

$\Rightarrow 4 \le 2x \le 10 \Rightarrow 2 \le x \le 5$

∴ উ: (গ) [রা.বো.'১৭]

59. Sol^n.: (1,3) ব্যবধির অসমতা রূপ $1 < x < 3$

∴ উ: (ক) [কু.বো.'১৭]

60. Sol^n.: $a = 3, b = -7$ এবং $c = -9$ হলে

$||a-b|-c| = ||3+7|+9| = |10+9| = 19$

∴ উ: (ঘ) [কু.বো.'১৭]

61. Sol^n.: a ও b ধনাত্মক বাস্তবসংখ্যা হলে, $|a+b| = |a| + |b|$. ∴ উ: (গ) [কু.বো.'১৭]

62. Sol^n.: $x + y > 0$ অসমতাটি $(1, 1)$ বিন্দুতে সত্য। ∴ উ: (ক) [সি.বো.'১৭]

63. Sol^n.: $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ সঠিক। ∴ উ: (ঘ) [সি.বো.'১৭]

64. Sol^n.: $\pm(2x-7) > 5$

$\Rightarrow 2x > 7+5, 2x < 7-5$

$\Rightarrow x > 6$ অথবা $x < 1$ ∴ উ: (গ) [সি.বো.'১৭]

65. Sol^n.: $Q = \{\pi, 1, c..........\}$ সঠিক নয়।

∴ উ: (ক) [সি.বো.'১৭]

66. Sol^n.: যোগ ও গুণের ক্ষেত্রে স্বাভাবিক সংখ্যার সেট $\mathbb{N}$ আবদ্ধ। ∴ উ: (ক) [সি.বো.'১৭]

67. Sol^n.: $(x-4)(x-5) > 0$

$\Rightarrow x > 5$ এবং $x < 4$. উ: (গ). [য.বো.'১৭]

68. Sol^n.: $-3 \le 2x < 8 \Rightarrow -\frac{3}{2} \le 2x < 4$ সীমার মধ্যে 3 বিদ্যমান। ∴ উ: (ক) [য.বো.'১৭]

সৃজনশীল প্রশ্ন (Creative Questions)

1. $f(x) = x - 1$

ক. $|x-1| \le \frac{1}{2}$ অসমতাটি পরম মান চিহ্ন ব্যতীত প্রকাশ কর যখন $x \ne 1$.

সমাধান: $|x-1| \le \frac{1}{2} \Rightarrow -\frac{1}{2} < x-1 < \frac{1}{2}$

$\Rightarrow -\frac{1}{2} + 1 < x - 1 + 1 < \frac{1}{2} + 1$

$\Rightarrow \frac{1}{2} < x < \frac{3}{2}$ (Ans.)

খ. $\frac{1}{|3f(x)-2|} > 2$ অসমতাটির সমাধান সেট সংখ্যারেখায় দেখাও।

সমাধান: $\frac{1}{|3f(x)-2|} > 2$

$\Rightarrow \frac{1}{|3(x-1)-2|} > 2 \Rightarrow \frac{1}{|3x-5|} > 2$

$3x - 5 = 0 \Rightarrow x = \frac{5}{3}$ হলে, প্রদত্ত অসমতাটি অসংজ্ঞায়িত হবে।

এখন, $\frac{1}{|3x-5|} > 2 \Rightarrow |3x-5| < \frac{1}{2}$

$\Rightarrow -\frac{1}{2} < 3x - 5 < \frac{1}{2}$

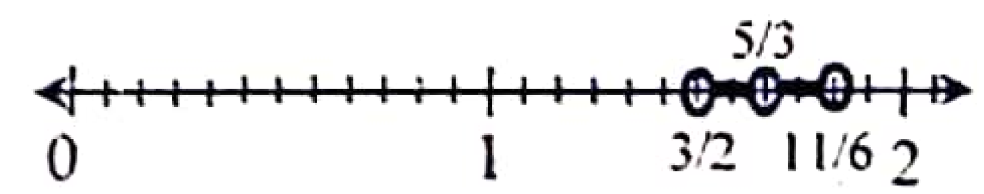
$\Rightarrow -\frac{1}{2} + 5 < 3x - 5 + 5 < \frac{1}{2} + 5$

$\Rightarrow \frac{9}{2} < 3x < \frac{11}{2} \Rightarrow \frac{3}{2} < x < \frac{11}{6}$

∴ সমাধান সেট,

$S = \{x \in \mathbb{R} : \frac{3}{2} < x < \frac{5}{3}$ অথবা $\frac{5}{3} < x < \frac{11}{6}\}$

নিম্নে সংখ্যারেখায় সমাধান সেট দেখানো হল;



গ. $5|f(x-2)| < 1$ হলে দেখাও যে $25|f(x-2) \times f(x+2)| < 21$

প্রমাণ: $5|f(x-2)| < 1 \Rightarrow |f(x-2)| < \frac{1}{5}$

$\Rightarrow |x-2-1| < \frac{1}{5} \Rightarrow |x-3| < \frac{1}{5}$

∴ $|f(x-2)| = |x-3| < \frac{1}{5}$ ...... (1)

∴ $|f(x+2)| = |x+2-1|$

$= |(x-3)+4| \le |x-3| + 4 < \frac{1}{5} + 4$.

[∵ $|a+b| \le |a| + |b|$]

$\Rightarrow |f(x+2)| < \frac{21}{5}$ ...... (2)

(1) ও (2) গুণ করে পাই,

$|f(x-2)| \times |f(x+2)| < \frac{1}{5} \times \frac{21}{5}$

$\Rightarrow |f(x-2) \times f(x+2)| < \frac{21}{25}$.

$[\because |a \times b| = |a| \times |b|]$

$\therefore\ 25\,|f(x-2)\times f(x+2)| < 21$

2. $f(x) = 3x - x^2 + 4$ এবং

$g(x) = x^2 + 6x - 27$

ক. $|x - 5| = |2x - 3|$ এর সমাধান সেট নির্ণয় কর।

সমাধান: $|x - 5| = |2x - 3|$

$\Rightarrow |x-5|^2 = |2x-3|^2$

$\Rightarrow (x-5)^2 = (2x-3)^2$, $[\because |x|^2 = x^2]$

$\Rightarrow x^2 - 10x + 25 = 4x^2 - 12x + 9$

$\Rightarrow 3x^2 - 2x - 16 = 0$

$\Rightarrow 3x^2 - 8x + 6x - 16 = 0$

$\Rightarrow x(3x-8) + 2(3x-8) = 0$

$\Rightarrow (3x-8)(x+2) = 0 \Rightarrow x = -2, \frac{8}{3}$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান সেট $= \{-2, \frac{8}{3}\}$

খ. $f(x+1) > 0$ অসমতাকে পরমমান চিহ্নের সাহায্যে প্রকাশ কর।

সমাধান: $f(x+1) > 0$

$\Rightarrow 3(x+1) - (x+1)^2 + 4 > 0$

$\Rightarrow 3x + 3 - x^2 - 2x - 1 + 4 > 0$

$\Rightarrow -x^2 + x + 6 > 0 \Rightarrow x^2 - x - 6 > 0$

$\Rightarrow (x-3)(x+2) < 0$

$\therefore\ -2 < x < 3$

সকল পক্ষে $-\frac{-2+3}{2} = -\frac{1}{2}$ যোগ করে পাই,

$-2 - \frac{1}{2} < x - \frac{1}{2} < 3 - \frac{1}{2}$

$\Rightarrow -\frac{5}{2} < x - \frac{1}{2} < \frac{5}{2}$ $\therefore\ |x - \frac{1}{2}| < \frac{5}{2}$

গ. $x \in \mathbb{R}$ এর সীমা নির্ণয় কর; যেখানে $f(x) \geq 0$ এবং $g(x) > 0$.

সমাধান: $f(x) > 0 \Rightarrow 3x - x^2 + 4 > 0$

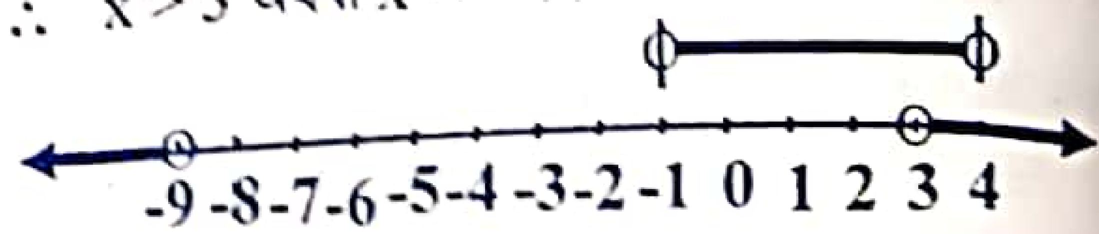
$\Rightarrow x^2 - 3x - 4 < 0 \Rightarrow (x-4)(x+1) < 0$

$\therefore\ -1 < x < 4$

$g(x) < 0 \Rightarrow x^2 + 6x - 27 > 0$

$\Rightarrow (x-3)(x+9) > 0$

$\therefore\ x > 3$ অথবা $x < -9$.



যেহেতু $f(x) > 0$ এবং $g(x) > 0$, সুতরাং সংখ্যারেখা হতে $x \in \mathbb{R}$ এর নির্ণেয় সীমা, $3 < x < 4$.

3. $f(x) = 5x - 1$, $g(x) = (x+1)^2$ ও $h(x) = 7x - 3$

ক. মান নির্ণয় কর: $|-1-8| + |3-1|$

সমাধান: $|-1-8| + |3-1|$

$= |-9| + |2| = -(-9) + 2$

$= 9 + 2 = 11$ (Ans.)

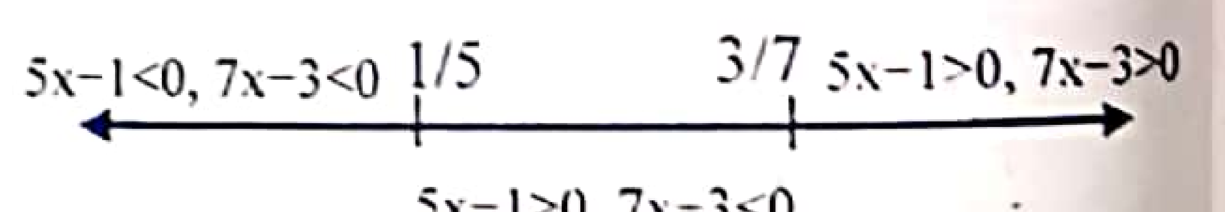
খ. সংখ্যারেখার সাহায্যে সমাধান কর: $|f(x)| + |h(x)| \leq 3$

সমাধান: $|f(x)| + |h(x)| \leq 3$

$\Rightarrow |5x - 1| + |7x - 3| \leq 3$

$5x - 1 = 0$ হলে, $x = 1/5$ এবং $7x - 3 = 0$ হলে, $x = 3/7$.

সংখ্যারেখার উপর $1/5$ ও $3/7$ সংখ্যা দুইটির প্রতিরূপী বিন্দু চিহ্নিত করি।



বিন্দু দুইটি সংখ্যারেখাকে (i) $x < 1/5$ (ii) $1/5 < x < 3/7$ এবং (iii) $x > 3/7$ ব্যবধিতে বিভক্ত করে।

$x < 1/5$ হলে, $|5x - 1| = -(5x - 1)$ এবং $|7x - 3| = -(7x - 3)$

$\therefore$ প্রদত্ত অসমতা হতে পাই,

$-(5x-1) - (7x-3) \leq 3$

$\Rightarrow -5x + 1 - 7x + 3 \leq 3$

$\Rightarrow -12x \leq -1 \Rightarrow x \geq \frac{1}{12}$

$1/5 < x < 3/7$ হলে, $|5x - 1| = -(5x - 1)$ এবং $|7x - 3| = (7x - 3)$

$\therefore$ প্রদত্ত অসমতা হতে পাই,

$-(5x-1) + (7x-3) \leq 3$

$\Rightarrow -5x + 1 + 7x - 3 \leq 3$

$\Rightarrow 2x \leq 5 \Rightarrow x \leq \frac{5}{2}$

$x > 3/7$ হলে, $|5x - 1| = 5x - 1$ এবং $|7x - 3| = 7x - 3$

$\therefore$ প্রদত্ত অসমতা হতে পাই, $5x - 1 + 7x - 3 \leq 3$

$\Rightarrow 12x \leq 7 \Rightarrow x \leq \frac{7}{12}$.

এখন, $x \leq \frac{5}{2}$ এবং $x \leq \frac{7}{12} \Rightarrow x \leq \frac{7}{12}$,

$[\because \frac{7}{12} \leq \frac{5}{2}]$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান: $x \geq \frac{1}{12}$ এবং $x \leq \frac{7}{12}$

অর্থাৎ $\frac{1}{12} \leq x \leq \frac{7}{12}$

গ. সমাধান সেট নির্ণয় কর: $f(x) < g(x) < h(x)$

সমাধান: $f(x) < g(x) < h(x)$

$\Rightarrow 5x - 1 < (x+1)^2 < 7x - 3$

$\therefore\ 5x - 1 < (x+1)^2$ এবং $(x+1)^2 < x - 3$

এখন, $5x - 1 < (x+1)^2$

$\Rightarrow 5x - 1 < x^2 + 2x + 1$

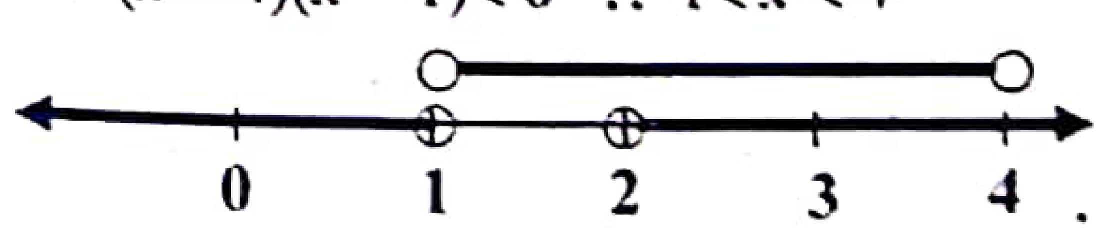
$\Rightarrow x^2 - 3x + 2 > 0 \Rightarrow (x-2)(x-1) > 0$

$\therefore\ x > 2$ অথবা $x < 1$

আবার, $(x+1)^2 < 7x - 3$

$\Rightarrow x^2 + 2x + 1 < 7x - 3 \Rightarrow x^2 - 5x + 4 < 0$

$\Rightarrow (x-4)(x-1) < 0$ $\therefore\ 1 < x < 4$



সংখ্যা রেখা হতে আমরা পাই, $2 < x < 4$

$\therefore$ সমাধান সেট, $S = \{x \in \mathbb{R}: 2 < x < 4\}$.

4. (i) $|5 - 2x| \geq 4$ (ii) $x + y - 4 \leq 0$ এবং $2x - y - 3 \geq 0$

ক. প্রমাণ কর যে, $|a - c| \leq |a - b| + |b - c|$; যেখানে $a, b, c \in \mathbb{R}$.

প্রমাণ: 17 নম্বর প্রশ্নের সমাধান দ্রষ্টব্য।

খ. (i) এ উল্লেখিত অসমতাটির সমাধান সেট সংখ্যারেখায় দেখাও।

প্রমাণ: $|5 - 2x| \geq 4$

$5 - 2x$ অঋণাত্মক হলে, $|5 - 2x| = 5 - 2x$

$\therefore$ প্রদত্ত অসমতা হতে পাই, $5 - 2x \geq 4$

$\Rightarrow -2x \geq 4 - 5 \Rightarrow -2x \geq -1$

$\Rightarrow 2x \leq 1 \Rightarrow x \leq \frac{1}{2}$

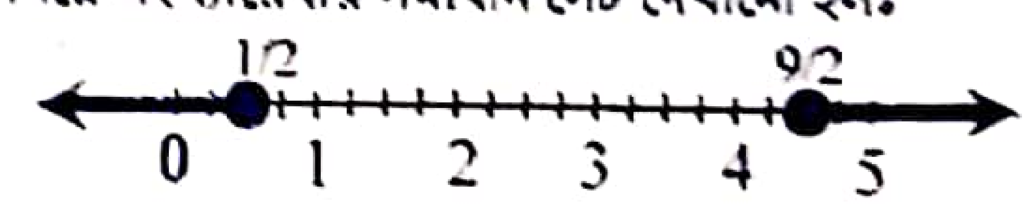
$5 - 2x$ ঋণাত্মক হলে, $|5 - 2x| = -(5 - 2x)$

$\therefore$ প্রদত্ত অসমতা হতে পাই, $-(5 - 2x) \geq 4$

$\Rightarrow -5 + 2x \geq 4 \Rightarrow 2x \geq 9 \Rightarrow x \geq \frac{9}{2}$

$\therefore$ সমাধান সেট, $S = \{x \in \mathbb{R}: x \leq \frac{1}{2}$ অথবা $x \geq \frac{9}{2}\}$

নিম্নে সংখ্যারেখায় সমাধান সেট দেখানো হলঃ



গ. (ii) এ উল্লেখিত অসমতাযুগলের সমাধান সেটের লেখচিত্র অঙ্কন কর।

সমাধান: 26(a) নম্বর প্রশ্নের সমাধান দ্রষ্টব্য।

5. (i) $|x - 1| < \frac{1}{2}$ (ii) সকল $a, b \in \mathbb{R}$ এর জন্য, $|a + b| \leq |a| + |b|$

ক. বাস্তব সংখ্যার সেট $\mathbb{R}$ এর উপসেট $S = \{x: 5x^2 - 16x + 3 < 0\}$ এর বৃহত্তম নিম্নসীমা (Inf S) নির্ণয় কর।

সমাধান: 20(b) নম্বর প্রশ্নের সমাধান দ্রষ্টব্য।

খ. (i) এর সাহায্যে দেখাও যে, $|x^3 - 1| < \frac{19}{8}$

প্রমাণ: $|x-1|<\frac{1}{2} \Rightarrow -\frac{1}{2}<x-1<\frac{1}{2}$

$\Rightarrow -\frac{1}{2}+1<x-1+1<\frac{1}{2}+1$

$\Rightarrow \frac{1}{2}<x<\frac{3}{2} \Rightarrow \frac{1}{8}<x^3<\frac{27}{8}$

$\Rightarrow \frac{1}{8}-1<x^3-1<\frac{27}{8}-1$

$\Rightarrow -\frac{7}{8}<x^3-1<\frac{19}{8}$

$\Rightarrow -\frac{19}{8}<-\frac{7}{8}<x^3-1<\frac{19}{8}$

$\Rightarrow -\frac{19}{8}<x^3-1<\frac{19}{8}$

$\therefore |x^3-1|<\frac{19}{8}$ (Proved)

গ. (ii) এ উল্লেখিত বাস্তব সংখ্যার পরমমানের ধর্মটি প্রমাণ কর।

প্রমাণ: বাস্তব সংখ্যার পরমমানের ধর্ম 5 দ্রষ্টব্য।

6. $f(x) = 2 + 5x$, $g(x) = x - 1$

ক. $5x^2 - 19x - 4 < 0$ এর সমাধান নির্ণয় কর।

সমাধান: $5x^2 - 19x - 4 < 0$

$\Rightarrow 5x^2 - 20x + x - 4 < 0$

$\Rightarrow 5x(x-4) + 1(x-4) < 0$

$\Rightarrow (x-4)(5x+1) < 0$

$\Rightarrow (x-4)(x+\frac{1}{5}) < 0$

$\therefore -\frac{1}{5} < x < 4$ (Ans.)

খ. $\frac{1}{|g(x+2)|} \geq 3$ অসমতাটির সমাধান সেট সংখ্যারেখায় দেখাও।

সমাধান: $g(x) = x - 1 \Rightarrow \frac{1}{|x+2-1|} \geq 3$

$\Rightarrow \frac{1}{|x+1|} \geq 3$

যদি $x + 1 = 0$ *ie.* $x = -1$ হয়, তবে প্রদত্ত অসমতাটি অসংজ্ঞায়িত হয়।

$\therefore x \neq -1$

এখন, $\frac{1}{|x+1|} \geq 3 \Rightarrow |x+1| \leq \frac{1}{3}$

$\Rightarrow -\frac{1}{3} \leq x+1 \leq \frac{1}{3}$

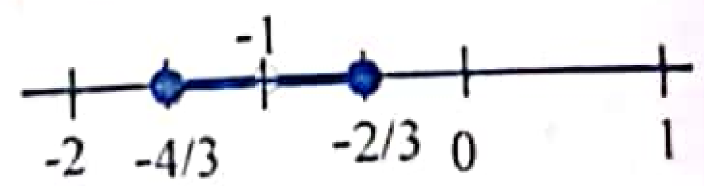
$\Rightarrow -\frac{1}{3} - 1 \leq x+1-1 \leq \frac{1}{3} - 1$

$\Rightarrow -\frac{4}{3} \leq x \leq -\frac{2}{3}$

$\therefore$ সমাধান সেট,

$S = \{x \in \mathbb{R}: -\frac{4}{3} \leq x < -1 \text{ or } -1 < x \leq -\frac{2}{3}\}$

নিম্নে সংখ্যারেখায় সমাধান সেট দেখানো হল :



গ. সংখ্যারেখার সাহায্যে $|f(x)| \leq |g(x)|$ এর সমাধান নির্ণয় কর।

$f(x) = 2 + 5x$, $g(x) = x - 1$

সমাধান: দেওয়া আছে, $f(x) = 2 + 5x$, $g(x) = x - 1$

এখন, $|f(x)| \leq |g(x)|$

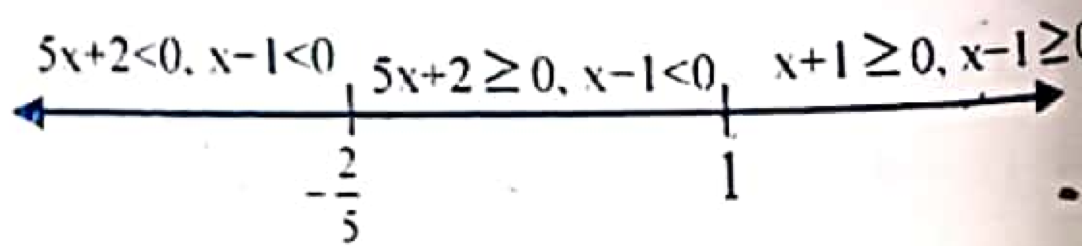
$\Rightarrow |2 + 5x| \leq |x - 1|$

$\Rightarrow |2 + 5x| - |x - 1| \leq 0 \cdots (1)$

$2 + 5x = 0$ হলে, $x = -\frac{2}{5}$ এবং

$x - 1 = 0$ হলে, $x = 1$.

সংখ্যারেখার উপর -1 ও 1 সংখ্যা দুইটির প্রতিরূপী বিন্দু চিহ্নিত করি:



বিন্দু দুইটি সংখ্যারেখাকে (i) $x<-\frac{2}{5}$ (ii) $-\frac{2}{5} \leq x < 1$ এবং (iii) $x \geq 1$ ব্যবধিতে বিভক্ত করে।

$x < -1$ হলে, $|5x + 2| = -(5x + 2)$

এবং $|x - 1| = -(x - 1)$

$\therefore$ (1) হতে, $-(5x + 2) + (x - 1) \leq 0$

$\Rightarrow -5x - 2 + x - 1 \leq 0 \Rightarrow -4x - 3 \leq 0$

$\Rightarrow -4x \leq 3 \Rightarrow 4x \geq -3 \Rightarrow x \geq -\frac{3}{4}$

$-\frac{2}{5} \leq x < 1$ হলে, $|5x + 2| = (5x + 2)$

এবং $|x - 1| = -(x - 1)$

$\therefore$ (1) হতে, $5x + 2 + x - 1 \leq 0$

$\Rightarrow 6x + 1 \leq 0 \Rightarrow 6x \leq -1 \Rightarrow x \leq -\frac{1}{6}$

$x \geq 1$ হলে, $|5x + 2| = (5x + 2)$ এবং

$|x - 1| - (x - 1)$

$\therefore$ (1) হতে, $5x + 2 - (x - 1) \leq 0$

$\Rightarrow 5x + 2 - x + 1 \leq 0 \Rightarrow 4x + 3 \leq 0$

$\Rightarrow 4x \leq -3 \Rightarrow x \leq -\frac{3}{4}$

$x > -\frac{3}{4}$ এর যেকোনো মান (1) অসমতাকে সিদ্ধ করে না।

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান: $-\frac{3}{4} \leq x \leq -\frac{1}{6}$.

7. $f(x) = x + 1$, $g(y) = y - 1$

ক. $|g(y)| \leq \frac{1}{2}$ অসমতাটি পরম মান চিহ্ন ব্যতীত প্রকাশ কর।

সমাধান: $|g(y)| \leq \frac{1}{2} \Rightarrow |y-1| \leq \frac{1}{2}$

$\Rightarrow -\frac{1}{2} \leq y-1 \leq \frac{1}{2}$

$\Rightarrow -\frac{1}{2}+1 \leq y-1+1 \leq \frac{1}{2}+1 \Rightarrow \frac{1}{2} \leq y \leq \frac{3}{2}$

খ. $|g(x)| < \frac{1}{9}$ হলে দেখাও যে, $|x^2 - 1| < \frac{19}{81}$

প্রমাণ: দেওয়া আছে, $|x - 1| < \frac{1}{9} \cdots \cdots$ (i)

$\therefore |x + 1| = |x - 1 + 2| \leq |x - 1| + |2|$

$\Rightarrow |x + 1| < \frac{1}{9} + 2 = \frac{19}{9} \cdots \cdots$ (ii)

(i) $\times$ (ii) $\Rightarrow |x - 1| \times |x + 1| < \frac{1}{9} \times \frac{19}{9}$

$\Rightarrow |(x-1)(x+1)| < \frac{19}{81}$

$\Rightarrow |x^2 - 1| < \frac{19}{81}$ (Showed)

গ. $g(x) + f(y - 3) > 0$ ও $2f(x) + g(y-6) > 0$ অসমতাযুগলের সমাধান সেটের লেখচিত্র অঙ্কন কর।

সমাধান: দেওয়া আছে, $f(x) = x + 1$, $g(y) = y - 1$

$\therefore g(x) + f(y - 3) > 0$

$\Rightarrow x - 1 + y - 3 + 1 > 0$

$\Rightarrow x + y - 3 > 0 \cdots \cdots$ (i)

$2f(x) + g(y - 6) > 0$

$\Rightarrow 2(x + 1) + y - 6 - 1 > 0$

$\Rightarrow 2x + 2 + y - 7 > 0$

$\Rightarrow 2x + y - 5 > 0 \cdots \cdots \cdots$ (ii)

প্রদত্ত অসমতাযুগলের অনুরূপ রৈখিক সমীকরণ,

$x + y = 3 \Rightarrow \frac{x}{3} + \frac{y}{3} = 1 \cdots$ (iii),

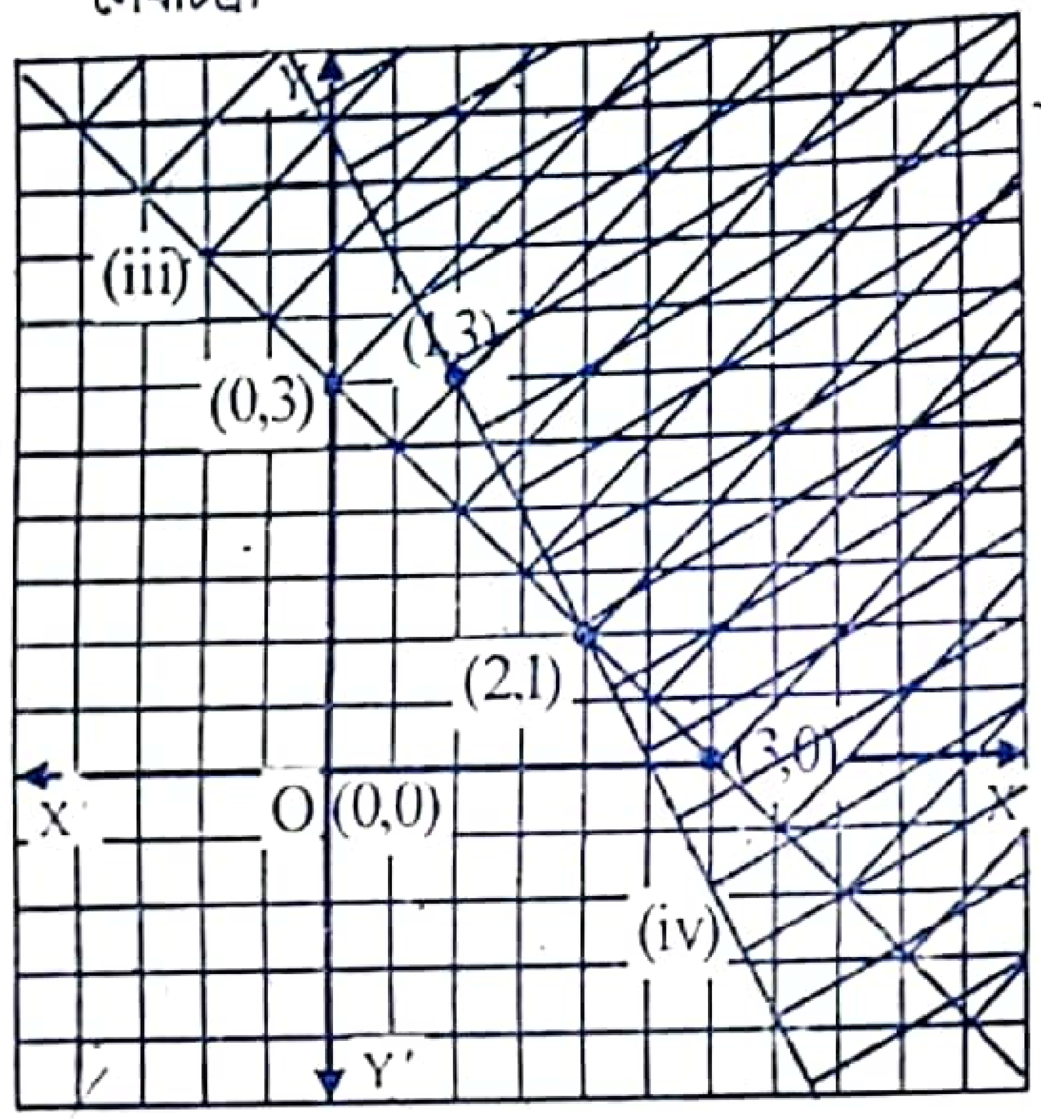
$2x + y = 5 \Rightarrow y = 5 - 2x \cdots \cdots$ (iv);

যা (1, 3) ও (2, 1) বিন্দুগামী।

একটি ছক কাগজে স্থানাঙ্কের অক্ষরেখা $X'OX$ ও YOY' অঙ্কন করি। x-অক্ষ ও y-অক্ষ বরাবর ছোট 2 বর্গের বাহুর দৈর্ঘ্য = 1 একক ধরে (i) ও (ii) রেখার লেখচিত্র রেখা অঙ্কন করি।

প্রদত্ত $x + y - 3 > 0$ অসমতায় (0,0) বসিয়ে যাচাই করলে পাওয়া যায় $-3 > 0$, যা সত্য নয়। সুতরাং (i) রেখাস্থ ও এর (0,0) বিন্দুর বিপরীত

পার্শ্বস্থ সকল বিন্দুর সেট এই অসমতার লেখচিত্র। তদ্রূপ (ii) এর মূলবিন্দুর বিপরীত পার্শ্বস্থ সকল বিন্দুর সেট $2x + y - 5 > 0$ অসমতার লেখচিত্র।



অতএব, চিত্রে দুইভাবে চিহ্নিত অংশের ছেদাংশই অসমতা দুইটির যুগপৎ সমাধানের লেখচিত্র।

8. $f(x) = 3x - 4,\ g(x) = 5x + 6$

ক. যদি $a<b$ হয়, তবে দেখাও যে, $a + c < b + c$; যেখানে $a, b, c \in \mathbb{R}$.

প্রমাণ: প্রশ্নমালা I এর 9 নং প্রশ্নের উত্তর দ্রষ্টব্য।

খ. $\dfrac{1}{|f(x)|} \geq 5$ অসমতাটির সমাধান সেট সংখ্যারেখায় দেখাও।

সমাধান: $\dfrac{1}{|f(x)|} \geq 5 \Rightarrow \dfrac{1}{|3x-4|} \geq 5$

যদি $3x - 4 = 0$ ie, $x = \dfrac{4}{3}$ হয়, তবে প্রদত্ত অসমতাটি অসংজ্ঞায়িত হয়।

$\therefore\ x \neq \dfrac{4}{3}$

এখন, $\dfrac{1}{|3x-4|} \geq 5 \Rightarrow |3x - 4| \leq \dfrac{1}{5}$

$\Rightarrow -\dfrac{1}{5} \leq 3x - 4 \leq \dfrac{1}{5}$

$\Rightarrow -\dfrac{1}{5} + 4 \leq 3x - 4 + 4 \leq \dfrac{1}{5} + 4$

$\Rightarrow \dfrac{-1+20}{5} \leq 3x \leq \dfrac{1+20}{5}$

$\Rightarrow \dfrac{19}{5} \leq 3x \leq \dfrac{21}{5} \Rightarrow \dfrac{19}{15} \leq x \leq \dfrac{7}{5}$

নির্ণেয় সমাধান: $\dfrac{19}{15} \leq x < \dfrac{4}{3}$ অথবা $\dfrac{4}{3} < x \leq \dfrac{7}{5}$

গ. $\dfrac{(x-1)f(x)}{g(x)} < 0$ অসমতাটির সমাধান নির্ণয় কর।

সমাধান: $\dfrac{(x-1)f(x)}{g(x)} < 0$

$\Rightarrow \dfrac{(x-1)(3x-4)}{5x+6} < 0$

$\Rightarrow \dfrac{(x-1)(3x-4)}{5x+6} < 0 \quad \cdots\cdots \text{(i)}$

যদি $5x + 6 = 0$ ie, $x = -\dfrac{6}{5}$ হয়, তবে প্রদত্ত অসমতাটি অসংজ্ঞায়িত হয়।

(i) নং অসমতা সত্য হবে যদি $(x - 1)$, $(3x - 4)$ ও $(5x + 6)$ এর চিহ্ন ঋণাত্মক হয় অথবা এদের যেকোনো দুইটির চিহ্ন ধনাত্মক ও একটির চিহ্ন ঋণাত্মক হয়।

x এর সীমা	(5x +6) এর চিহ্ন	(x − 1) এর চিহ্ন	(3x−4) এর চিহ্ন
$x < -\dfrac{6}{5}$	−	−	−
$-\dfrac{6}{5} < x < 1$	+	−	−
$1 < x < 4/3$	+	+	−
$x > 4/3$	+	+	+

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান: $x < -\dfrac{6}{5}$ or $1 < x < 4/3$

9. $f(x) = x - 2$ এবং $a = 7$

ক. $|f(y)| \leq \dfrac{1}{a}$ অসমতাটি পরম মান চিহ্ন ব্যতীত প্রকাশ কর।

সমাধান: দেওয়া আছে, $f(x) = x - 2$ এবং $a = 7$

$\therefore\ |f(y)| \leq \dfrac{1}{a} \Rightarrow |y - 2| \leq \dfrac{1}{7}$

$\Rightarrow -\dfrac{1}{7} \leq y - 2 \leq \dfrac{1}{7}$

$\Rightarrow -\dfrac{1}{7} + 2 \leq y - 2 + 2 \leq \dfrac{1}{7} + 2$

$\Rightarrow \dfrac{13}{7} \leq y \leq \dfrac{15}{7}$ (Ans.)

খ. $|f(x)| < \dfrac{1}{5}$ হলে, $|f(x) \times f(x + 4)|$ এর মান নির্ণয় কর।

সমাধান: $|f(x)| < \dfrac{1}{5} \Rightarrow |x - 2| < \dfrac{1}{5} \cdots \text{(i)}$

এখন, $f(x + 4) = x + 4 - 2 = x + 2$

$\Rightarrow |f(x + 4)| = |x + 2| = |(x - 2) + 6|$

$\leq |x - 2| + |6| < \dfrac{1}{5} + 6$

$\Rightarrow |f(x + 4)| < \dfrac{31}{5} \quad \cdots\cdots \text{(ii)}$

$\therefore\ |f(x) \times f(x + 4)| = |f(x)|\,|f(x + 4)|$

$< \dfrac{1}{5} \times \dfrac{31}{5}$

$\Rightarrow |f(x) \times f(x + 4)| < \dfrac{31}{25}$ (Ans.)

গ. প্রমাণ কর যে, $\sqrt{a}$ একটি অমূলদ সংখ্যা।

প্রমাণ: $\sqrt{a} = \sqrt{7}$

$2^2 = 1$, $(\sqrt{7})^2 = 7$, $3^2 = 9$

$\therefore\ 2 < \sqrt{7} < 3$

$\therefore\ \sqrt{7}$ পূর্ণ (স্বাভাবিক) সংখ্যা নয়। [$\because$ 2 এবং 3 এর মাঝে কোনো স্বাভাবিক সংখ্যা নাই।]

যদি সম্ভব হয় তবে মনে করি, $\sqrt{7}$ একটি মূলদ সংখ্যা অর্থাৎ মূলদ ভগ্নাংশ এবং $\sqrt{7} = \dfrac{p}{q}$; যেখানে $p, q \in \mathbb{N}$ এবং p, q সহমৌলিক।

[$\sqrt{7}$ ধনাত্মক সংখ্যা বলে $p, q \in \mathbb{Z}$ কে $p, q \in \mathbb{N}$ লিখা যায় এবং $2 < \sqrt{7} < 3$ বলে $q > 1$]

$\therefore\ 7 = \dfrac{p^2}{q^2} \Rightarrow 7q = \dfrac{p}{q} \cdot p$

[উভয় পক্ষকে q দ্বারা গুণ করে]

স্পষ্টত 7 এবং q স্বাভাবিক (পূর্ণ) সংখ্যা বলে তাদের গুণফল 7q স্বাভাবিক (পূর্ণ) সংখ্যা। কিন্তু $\dfrac{p}{q}$ ভগ্নাংশ এবং p পূর্ণ (স্বাভাবিক) সংখ্যা বলে তাদের গুণফল $\dfrac{p}{q} \cdot p$ একটি ভগ্নাংশ, অর্থাৎ পূর্ণ (স্বাভাবিক) সংখ্যা নয় ; কেননা p, q সহমৌলিক। আর একটি পূর্ণ (স্বাভাবিক) সংখ্যা একটি প্রকৃত ভগ্নাংশের সমান হতে পারে না।

$\therefore\ 7q \neq \dfrac{p}{q} \cdot p$

$\therefore\ \sqrt{7}$ এর মান $\dfrac{p}{q}$ আকারের কোনো সংখ্যা হতে পারেনা।

$\therefore\ \sqrt{7}$ মূলদ সংখ্যা হতে পারেনা।

$\therefore\ \sqrt{7}$ একটি অমূলদ সংখ্যা। (প্রমাণিত)

10. $f(x) = x^2 + 2x + 2,\ g(x) = x - 5$

ক. $-1 < x + 2 \leq 5$ অসমতাটির সমাধান সেট সংখ্যারেখায় দেখাও।

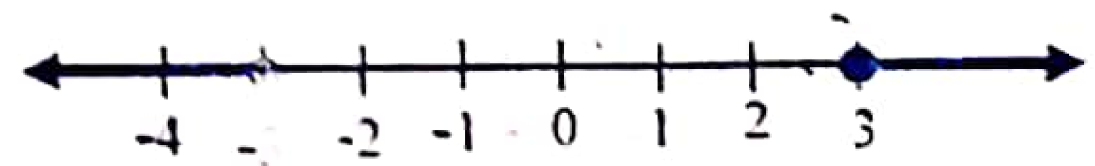
সমাধান: $-1 < x + 2 \leq 5$

$\Rightarrow -1 - 2 < x + 2 - 2 \leq 5 - 2$

$\Rightarrow -3 < x \leq 3$

$\therefore$ সমাধান সেট, $S = \{x \in \mathbb{R}: -3 < x \leq 3\}$

নিম্নে সংখ্যারেখায় সমাধান সেট দেখানো হল :



খ. $f(x) < 10$ অসমতাকে পরমমান চিহ্নের সাহায্যে প্রকাশ কর।

সমাধান: $f(x) < 10 \Rightarrow x^2 + 2x + 2 < 10$

$\Rightarrow x^2 + 2x + 2 - 10 < 0$

$\Rightarrow x^2 + 2x - 8 < 0 \Rightarrow x^2 + 4x - 2x - 8 < 0$

$\Rightarrow x(x + 4) - 2(x + 4) < 0$

$\Rightarrow (x + 4)(x - 2) < 0$

$\Rightarrow \{x - (-4)\}(x - 2) < 0$

$\Rightarrow -4 < x < 2$

সকল পক্ষে $-\frac{-4+2}{2} = 1$ যোগ করে পাই,

$-4 + 1 < x + 1 < 2 + 1$

$\Rightarrow -3 < x + 1 < 3$

$\therefore |x + 1| < 3$ (Ans.)

গ. $|g(x)| - 2x > 4$ অসমতাটির সমাধান সেট নির্ণয় কর।

সমাধান: $|g(x)| - 2x > 4$

$\Rightarrow |x - 5| - 2x > 4 \cdots\cdots (i)$

$x - 5 \geq 0$ হলে, $|x - 5| = x - 5$

$\therefore (i) \Rightarrow x - 5 - 2x > 4$

$\Rightarrow -x > 4 + 5 \Rightarrow -x > 9 \Rightarrow x < -9$

$x - 5 < 0$ হলে, $|x - 5| = -(x - 5)$

$\therefore (i) \Rightarrow -(x - 5) - 2x > 4$

$\Rightarrow -x + 5 - 2x > 4 \Rightarrow -3x > 4 - 5$

$\Rightarrow -3x > -1 \Rightarrow 3x < 1 \Rightarrow x < \frac{1}{3}$.

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান, $S = \{x \in \mathbb{R}: x < \frac{1}{3}\}$

11. $L = a + b$, $\frac{M}{a} = \frac{N}{b} = 1$, $a, b \in \mathbb{R}$ এবং $f(x) = 3x - 5$

ক. $[-4, 4)$ সেটটিকে অসমতা আকারে প্রকাশ করে সুপ্রিমাম নির্ণয় কর।

সমাধান: $[-4, 4)$ এর অসমতা আকার $-4 \leq x < 4$.

$\therefore$ সুপ্রিমাম (ক্ষুদ্রতম ঊর্ধ্বসীমা) $= 4$

খ. $\frac{1}{|f(x)|} > 2$ অসমতাটির সমাধান সেট সংখ্যারেখায় দেখাও; যেখানে $f(x) \neq 0$.

সমাধান: $\frac{1}{|f(x)|} > 2 \Rightarrow \frac{1}{|3x-5|} > 2$

$\Rightarrow 2|3x - 5| < 1, [\because |(3x - 5)| > 0]$

$\Rightarrow |3x - 5| < \frac{1}{2} \Rightarrow -\frac{1}{2} < 3x - 5 < \frac{1}{2}$

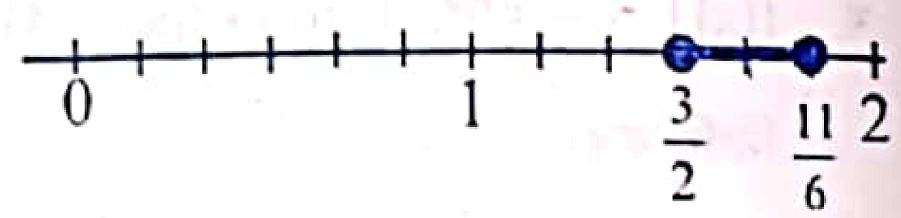
$\Rightarrow -\frac{1}{2} + 5 < 3x < \frac{1}{2} + 5$

$\Rightarrow \frac{9}{2} < 3x < \frac{11}{2} \Rightarrow \frac{3}{2} < x < \frac{11}{6}$

$\therefore$ প্রদত্ত অসমতার সমাধান সেট,

$S = \{x \in \mathbb{R}: \frac{3}{2} < x < \frac{11}{6}\}$

নিম্নে সংখ্যারেখায় সমাধান সেট দেখানো হল :



গ. প্রমাণ কর যে, $|L| \leq |M| + |N|$

প্রমাণ: দেওয়া আছে, $L = a + b$ এবং

$\frac{M}{a} = \frac{N}{b} = 1$

$\therefore \frac{M}{a} = 1 \Rightarrow M = a, \frac{N}{b} = 1 \Rightarrow N = b$

এখন, $|L| \leq |M| + |N|$

$\Rightarrow |a + b| \leq |a| + |b|$

অতপর শিখনফল ১.৪ এর 5 দ্রষ্টব্য।

12. $f(x) = x^2 - 19$

ক. $S = \{x \in \mathbb{R} : -3 < x - 2 \leq 5\}$ কে ব্যবধি আকারে প্রকাশ কর।

সমাধান: $-3 < x - 2 \leq 5$

$\Rightarrow -3 + 2 < x - 2 + 2 < 5 + 2$

$\Rightarrow -1 < x < 7$ এর ব্যবধি আকার $]-1, 7[$

খ. $f(x) < 5x - 13$ অসমতাকে পরমমান চিহ্নের সাহায্যে প্রকাশ কর।

সমাধান: $f(x) < 5x - 13$

$\Rightarrow x^2 - 19 < 5x - 13 \Rightarrow x^2 - 5x - 6 < 0$

$\Rightarrow (x - 6)(x + 1) < 0 \Rightarrow -1 < x < 6$

সকল পক্ষে $-\frac{-1+6}{2} = -\frac{5}{2}$ যোগ করে পাই,

$-1 - \frac{5}{2} < x - \frac{5}{2} < 6 - \frac{5}{2}$

$\Rightarrow -\frac{7}{2} < \frac{2x-5}{2} < \frac{7}{2} \Rightarrow -7 < 2x - 5 < 7$

$\Rightarrow |2x - 5| < 7$ (Ans.)

গ. $|f(x)| \leq 5(x - 1)$ এর সমাধান সেট সংখ্যারেখার সাহায্যে প্রকাশ কর।

সমাধান: $|f(x)| \leq 5(x - 1)$

$\Rightarrow |x^2 - 19| \leq 5(x - 1) \cdots\cdots (i)$

$(x^2 - 19)$ অঋণাত্মক হলে (i) হতে পাই,

$x^2 - 19 \leq 5x - 5 \Rightarrow x^2 - 5x - 14 \leq 0$

$\Rightarrow (x - 7)(x + 2) \leq 0 \Rightarrow -2 \leq x \leq 7$

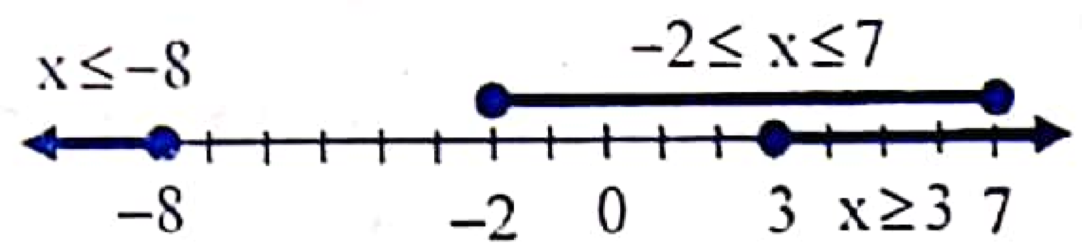
$(x^2 - 19)$ ঋণাত্মক হলে (i) হতে পাই,

$-(x^2 - 19) \leq 5x - 5$

$\Rightarrow x^2 - 19 \geq -5x + 5 \Rightarrow x^2 + 5x - 24 \geq 0$

$\Rightarrow (x + 8)(x - 3) \geq 0$

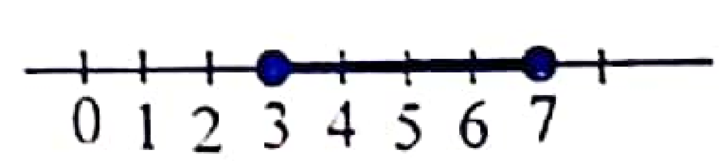
$\Rightarrow x \geq 3$ অথবা $x \leq -8$



সংখ্যা রেখা হতে প্রদত্ত অসমতার সমাধান সেট,

$S = \{x \in \mathbb{R}: 3 \leq x \leq 7\}$

নিম্নে সংখ্যারেখায় সমাধান সেট দেখানো হল :



13. $a \in \mathbb{R}, b \in Q'$ এবং $\frac{M}{a} = \frac{N}{b} = 1$

ক. x এর বাস্তব মানের জন্য $1 \leq |x - 3| \leq 8$ অসমতাটির সমাধান নির্ণয় কর।

সমাধান: $1 \leq |x - 3| \leq 8 \cdots\cdots (i)$

$x - 3$ অঋণাত্মক হলে (i) হতে পাই,

$1 \leq x - 3 \leq 8 \Rightarrow 1 + 3 \leq x - 3 + 3 \leq 8 + 3$

$\Rightarrow 4 \leq x \leq 11$

$x - 3$ ঋণাত্মক হলে (i) হতে পাই,

$1 \leq -(x - 3) \leq 8 \Rightarrow -8 \leq x - 3 \leq -1$

$\Rightarrow -8 + 3 \leq x - 3 + 3 \leq -1 + 3$

$\Rightarrow -5 \leq x \leq 2$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান,

$S = \{x \in \mathbb{R}: -5 \leq x \leq 2\} \cup \{x \in \mathbb{R}: 4 \leq x \leq 11\}$

খ. প্রমাণ কর যে, $|M - N| \geq ||a| - |b||$

প্রমাণ: $\frac{M}{a} = \frac{N}{b} = 1 \Rightarrow \frac{M}{a} = 1 \Rightarrow M = a$,

$\frac{N}{b} = 1 \Rightarrow N = b$.

এখন, $|M - N| \geq ||a| - |b||$

$\Rightarrow |a - b| \geq ||a| - |b||$

অতপর প্রশ্নমালার 16(ii) দ্রষ্টব্য।

গ. স্বীকার্যের সাহায্যে প্রমাণ কর যে, $M + N \in Q'$

প্রমাণ: দেওয়া আছে, $a \in \mathbb{R}$, $b \in Q'$. প্রমাণ করতে হবে যে, $M + N \in Q' \Rightarrow a + b \in Q'$

যদি সম্ভব হয় মনে করি, $a + b \in Q$

এখন, $(-a) + (a + b) = (-a + a) + b$ [সংযোজন বিধি অনুযায়ী]

$= 0 + b$, [বিপ্রতীতকের অস্তিত্ব অনুযায়ী]

$= b$, [অভেদকের অস্তিত্ব অনুযায়ী]

যোগ প্রক্রিয়ায় Q আবদ্ধ বলে,

$(-a) + (a + b) = b \in Q$

কিন্তু দেওয়া আছে $b \in Q'$.

$\therefore a + b \in Q$ সম্ভব নয়।

$\therefore a + b \in Q'$ (প্রমাণিত)

14. $a \in \mathbb{R}, b \in Q'$ এবং $P = x - 1$

ক. x এর বাস্তব মানের জন্য $0 < |x - 2| < 5$ অসমতাটির সমাধান নির্ণয় কর।

সমাধান: $0 < |x - 2| < 5 \cdots\cdots (i)$

$x - 2$ অঋণাত্মক হলে (i) হতে পাই,

$0 < x - 2 < 5 \Rightarrow 0 + 2 < x - 2 + 2 < 5 + 2$

$\Rightarrow 2 < x < 7$

$x - 2$ ঋণাত্মক হলে (i) হতে পাই,

$0 < -(x - 2) < 5 \Rightarrow -5 < x - 2 < 0$

$\Rightarrow -5 + 2 < x - 2 + 2 < 0 + 2$

$\Rightarrow -3 < x < 2$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান,

$S = \{x \in \mathbb{R}: -3 \leq x \leq 2\} \cup \{x \in \mathbb{R}: 2 \leq x \leq 7\}$

খ. স্বীকার্যের সাহায্যে প্রমাণ কর যে, $MN \in Q'$

প্রমাণ: দেওয়া আছে, $a \in \mathbb{R}$, $b \in Q'$. প্রমাণ করতে হবে যে, $MN \in Q' \Rightarrow ab \in Q'$

যদি সম্ভব হয় মনে করি, $ab \in Q$

এখন, $a^{-1}(ab) = (a^{-1}a)b$ [গুণের সংযোজন বিধি অনুযায়ী]

$= 1.b$, [বিপ্রতীতকের অস্তিত্ব অনুযায়ী]

$= b$, [অভেদকের অস্তিত্ব অনুযায়ী]

গুণ প্রক্রিয়ায় Q আবদ্ধ বলে,

$a^{-1}(ab) = b \in Q$

কিন্তু দেওয়া আছে, $b \in Q'$.

$\therefore$ $ab \in Q$ সম্ভব নয়।

$\therefore$ $ab \in Q'$ (প্রমাণিত)

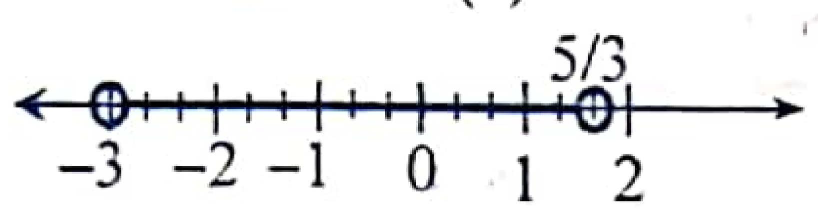
গ. সংখ্যারেখার সাহায্যে $|P + 2| \leq |P|$ এর সমাধান নির্ণয় কর।

সমাধান: $|P + 2| \leq |P|$

$\Rightarrow |x - 1 + 2| \leq |x - 1|$

$\Rightarrow |x + 1| \leq |x - 1|$

অতপর প্রশ্নমালার 25(b) দ্রষ্টব্য।

15. 

এবং $f(x) = |x - 1| - \frac{1}{7}$

ক. $f(x)$ এর সর্বনিম্ন মান নির্ণয় কর।

সমাধান: x এর সকল বাস্তব মানের জন্য $|x - 1|$ সব সময় অঋণাত্মক।

$\therefore$ $|x - 1|$ এর সবনিম্ণ মান $= 0$

$\therefore$ $f(x)$ এর সর্বনিম্ন মান $= -\frac{1}{7}$

খ. সংখ্যারেখায় নির্দেশিত অংশটির সমাধান সেটকে পরমমান চিহ্নের সাহায্যে প্রকাশ কর।

সমাধান: সংখ্যারেখায় নির্দেশিত অংশটির সমাধান সেট, $S = x \in \mathbb{R}: -3 \leq x \leq \frac{5}{3}\}$

এখন, $-3 \leq x \leq \frac{5}{3}$

সকল পক্ষে $-\dfrac{-3+\frac{5}{3}}{2} = -\dfrac{-9+5}{6} = -\dfrac{-4}{6}$

$= \frac{2}{3}$ যোগ করে পাই,

$-3 + \frac{2}{3} \leq x + \frac{2}{3} \leq \frac{5}{3} + \frac{2}{3}$

$\Rightarrow -\frac{7}{3} \leq \frac{3x+2}{3} \leq \frac{7}{3}$

$\Rightarrow -7 \leq 3x + 2 \leq 7 \Rightarrow |3x + 2| < 7$

গ. $f(x) < 0$ হলে প্রমাণ কর যে, $|x^2 - 1| < \frac{15}{49}$

প্রমাণ: $f(x) < 0 \Rightarrow |x - 1| - \frac{1}{7} < 0$

$\Rightarrow |x - 1| < \frac{1}{7}$ ⋯ ⋯ (i)

এখন, $|x + 1| = |x - 1 + 2| \leq |x - 1| + |2|$

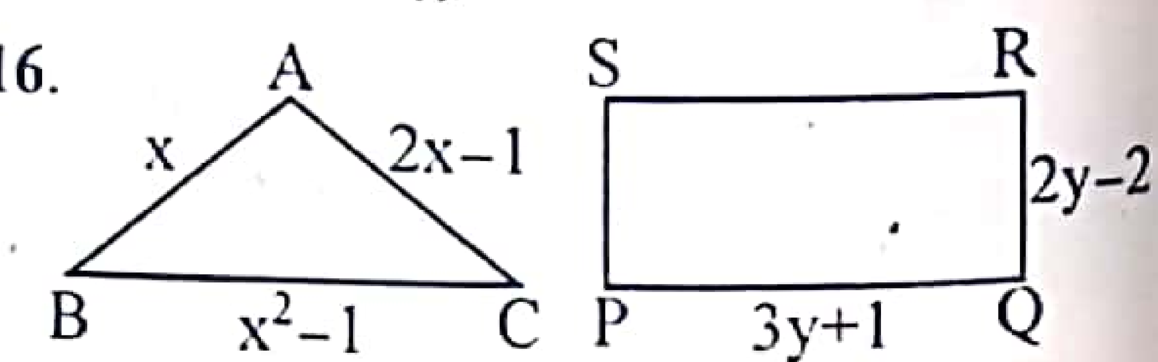
$< \frac{1}{7} + 2$

$\Rightarrow |x + 1| < \frac{15}{7}$ ⋯ ⋯ (ii)

(i) $\times$ (ii) $\Rightarrow |x - 1||x + 1| < \frac{1}{7}.\frac{15}{7}$

$\Rightarrow |(x - 1)(x + 1)| < \frac{15}{49}$

$\therefore$ $|x^2 - 1| < \frac{15}{49}$

16. 

ক. প্রমাণ কর যে, $|x + a| + |x - a| \geq |2x|$

প্রমাণ: আমরা জানি, $|a| + |b| \geq |a + b|$

$\therefore$ $|x + a| + |x - a| \geq |x + a + x - a|$

$\Rightarrow |x + a| + |x - a| \geq |2x|$

খ. PQRS আয়তক্ষেত্রটির ক্ষেত্রফল 8 বর্গ এককের অধীক না হওয়ার শর্তকে পরমমান চিহ্নের সাহায্যে প্রকাশ কর।

সমাধান: PQRS আয়তক্ষেত্রটির ক্ষেত্রফল

$= (3y + 1)(2y - 2)$

প্রশ্নমতে, $(3y + 1)(2y - 2) \leq 8$

$\Rightarrow (3y + 1)(y - 1) \leq 4 \Rightarrow 3y^2 - 2y - 1 \leq 4$

$\Rightarrow 3y^2 - 2y - 5 \leq 0 \Rightarrow 3y^2 - 5y + 2y - 5 \leq 0$

$\Rightarrow y(3y - 5) + 1(2y - 5) \leq 0$

$\Rightarrow (3y - 5)(y + 1) \leq 0$

$\Rightarrow (y - \frac{5}{3})\{y - (-1)\} \leq 0$

$\Rightarrow -1 \leq y \leq \frac{5}{3}$

সকল পক্ষে $-\dfrac{-1+\frac{5}{3}}{2} = -\dfrac{-3+5}{6} = -\dfrac{2}{6}$

$= -\frac{1}{3}$ যোগ করে পাই,

$-1 - \frac{1}{3} \leq y - \frac{1}{3} \leq \frac{5}{3} - \frac{1}{3}$

$\Rightarrow -\frac{4}{3} \leq \frac{3y-1}{3} \leq \frac{4}{3}$

$\Rightarrow -4 \leq 3y - 1 \leq 4 \Rightarrow |3y - 1| \leq 4$

গ. $AB \leq AC \leq BC$ হলে, ABC ত্রিভুজটি অঙ্কনের শর্তে x এর মান সংখ্যারেখার সাহায্যে নির্ণয় কর।

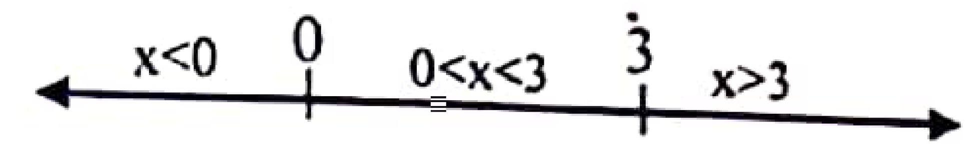
সমাধান: ABC ত্রিভুজটি অঙ্কন করা যাবে যদি $AB + AC > BC$ হয়। [ত্রিভুজের যেকোনো দুই বাহুর সমষ্টি তৃতীয় বাহু অপেক্ষা বৃহত্তর।]

$\Rightarrow x + 2x - 1 > x^2 - 1 \Rightarrow 3x > x^2$

$\Rightarrow x^2 - 3x < 0 \Rightarrow x(x - 3) < 0$ ⋯ ⋯ (i)

$x = 0$ এবং $x - 3 = 0$ হলে, $x = 3$

সংখ্যারেখার উপর 0 ও 3 সংখ্যা দুইটির প্রতিরূপী বিন্দু চিহ্নিত করি।



বিন্দু দুইটি সংখ্যারেখাকে (i) $x < 0$ (ii) $0 < x < 3$ এবং (iii) $x > 3$ ব্যবধিতে বিভক্ত করে।

$x < 0$ হলে, $x - 3 < 0$

$\therefore$ $x(x - 3) > 0$, যা (i) এর সঙ্গে সঙ্গতিপূর্ণ নয়।

$0 < x < 3$ হলে, $x > 0, x - 1 < 0$

$\therefore$ $x(x - 3) < 0$, যা (i) এর সঙ্গে সঙ্গতিপূর্ণ।

$x > 3$ হলে, $x > 0$ ও $x - 3 > 0$

$\therefore$ $x(x - 3) > 0$, যা (i) এর সঙ্গে সঙ্গতিপূর্ণ নয়।

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান: $0 < x < 3$

17. $f(x) = x - 1$, $g(x) = x + 1$, $h(x) = x^2$

ক. দেখাও যে, $f(x)g(x) + h(x) + 1 < 0$ এর কোনো বাস্তব সমাধান নাই।

সমাধান: $f(x)g(x) + h(x) + 1 < 0$

$\Rightarrow (x - 1)(x + 1) + x^2 + 1 < 0$

$\Rightarrow x^2 - 1 + x^2 + 1 < 0 \Rightarrow 2x^2 < 0$

$\Rightarrow x^2 < 0$

x এর এমন কোনো বাস্তব মান পাওয়া যায় না যার বর্গ ঋণাত্মক হবে। সুতরাং, প্রদত্ত অসমতার কোনো বাস্তব সমাধান নাই।

খ. $f(x) + g(y) - 3 > 0$ এবং $2f(x) - g(y) - 2 > 0$ অসমতাযুগলের সমাধান সেটের লেখচিত্র অঙ্কন কর।

সমাধান: $f(x) + g(y) - 3 > 0$

$\Rightarrow x - 1 + y + 1 - 3 > 0$

$\Rightarrow x + y - 3 > 0$ ⋯ ⋯ (i)

$2f(x) - g(y) - 2 > 0$

$\Rightarrow 2(x - 1) - (y + 1) - 2 > 0$

$\Rightarrow 2x - y - 5 > 0$ ⋯ ⋯ (ii)

অতপর প্রশ্নমালার 26(b) দ্রষ্টব্য।

গ. সংখ্যারেখার সাহায্যে $\frac{h(x)f(x)}{g(x)} > 0$ এর সমাধান নির্ণয় কর।

সমাধান: $\frac{h(x)f(x)}{g(x)} > 0 \Rightarrow \frac{x^2(x-1)}{x+1} > 0$

অতপর প্রশ্নমালার 25(c) দ্রষ্টব্য।

18. $x = a+5, a\in\mathbb{R}$

ক. $S = \{x\in\mathbb{R} : x^2-7x-6>0\}$ কে ব্যবধি আকারে প্রকাশ কর।

সমাধান: $x^2-7x-6=0$ হলে,

$$x = \frac{7\pm\sqrt{49-4.1.(-6)}}{2.1} = \frac{7\pm\sqrt{73}}{2}$$

এখন, $x^2-7x-6>0$

$\Rightarrow (x-\frac{7+\sqrt{73}}{2})(x-\frac{7-\sqrt{73}}{2})>0$

$\Rightarrow x > \frac{7+\sqrt{73}}{2}$ অথবা, $x<\frac{7-\sqrt{73}}{2}$

$\Rightarrow x\in]-\infty, \frac{7-\sqrt{73}}{2}[\cup]\frac{7+\sqrt{73}}{2}, \infty[$

খ. $|a|<\frac{1}{13}$ হলে দেখাও যে, $|a(a+10)|<\frac{131}{169}$

প্রমাণ: দেওয়া আছে, $x=a+5 \Rightarrow a = x-5$

$|a|<\frac{1}{13} \Rightarrow |x-5|<\frac{1}{13}$ …… (i)

$|a+10| = |x-5+10| \le |x-5|+|10|$

$\Rightarrow |a+10| < \frac{1}{13}+10$

$\Rightarrow |a+10|<\frac{131}{13}$ … (ii)

এখন, $|a(a+10)| = |a|\,|a+10| < \frac{1}{13}.\frac{131}{13}$

$\Rightarrow |a(a+10)|<\frac{131}{169}$

গ. $\frac{a+5}{a^2+10a+26} < \frac{1}{a+6}$ হলে, উদ্দীপকের আলোকে x এর মান নির্ণয় করে সমাধান সেট সংখ্যারেখায় দেখাও।

সমাধান: $\frac{a+5}{a^2+10a+26} < \frac{1}{a+6}$

$\Rightarrow \frac{a+5}{(a+5)^2+1} < \frac{1}{(a+5)+1}$

$\Rightarrow \frac{x}{x^2+1}<\frac{1}{x+1}$

অতপর উদাহরণ 2 এর (ii) দ্রষ্টব্য।

19. $a = 5x-3$

ক. $A=\{x\in\mathbb{R}: -1<x+2\le 1\}$ সেটটিকে ব্যবধিতে প্রকাশ কর।

সমাধান: $-1<x+2\le1$

$\Rightarrow -1-2<x+2-2\le 1-2$

$\Rightarrow -3<x\le -1 \Rightarrow x\in(-3,-1]$

খ. $|\sqrt{a}-5|<2$ এর সমাধান সেট নির্ণয় কর

সমাধান: $|\sqrt a -5|<2 \Rightarrow -2<\sqrt a-5<2$

$\Rightarrow -2+5<\sqrt a-5+5<2+5$

$\Rightarrow 3<\sqrt a<7 \Rightarrow 9<a<49$

$\Rightarrow 9<5x-3<49$

$\Rightarrow 9+3<5x-3+3<49+3$

$\Rightarrow 12<5x<52 \Rightarrow \frac{12}{5}<x<\frac{52}{5}$

গ. x = 1 হলে প্রমাণ কর যে, $\sqrt a$ একটি অমূলদ সংখ্যা।

প্রমাণ: x = 1 হলে $\sqrt a = \sqrt{5.1-3} = \sqrt2$

$1^2=1$, $(\sqrt2)^2 = 2$, $2^2=4$

∴ $1<\sqrt2<2$

∴ $\sqrt2$ পূর্ণ (স্বাভাবিক) সংখ্যা নয়। [∵ 1 এবং 2 এর মাঝে কোনো স্বাভাবিক সংখ্যা নাই।]

যদি সম্ভব হয় তবে মনে করি, $\sqrt2$ একটি মূলদ সংখ্যা অর্থাৎ মূলদ ভগ্নাংশ এবং $\sqrt2 = \frac{p}{q}$; যেখানে $p, q\in\mathbb{N}$ এবং p, q সহমৌলিক।

[$\sqrt2$ ধনাত্মক সংখ্যা বলে $p,q\in\mathbb{Z}$ কে p, $q\in\mathbb{N}$ লিখা যায় এবং $1<\sqrt2<2$ বলে $q>1$]

∴ $2 = \frac{p^2}{q^2} \Rightarrow 2q = \frac{p}{q}.p$

[উভয় পক্ষকে q দ্বারা গুণ করে]

স্পষ্টত 2 এবং q স্বাভাবিক (পূর্ণ) সংখ্যা বলে তাদের গুণফল 2q স্বাভাবিক (পূর্ণ) সংখ্যা। কিন্তু $\frac pq$ ভগ্নাংশ এবং p পূর্ণ (স্বাভাবিক) সংখ্যা বলে তাদের গুণফল $\frac pq.p$ একটি ভগ্নাংশ, অর্থাৎ পূর্ণ (স্বাভাবিক) সংখ্যা নয়; কেননা p, q সহমৌলিক। আর একটি পূর্ণ (স্বাভাবিক) সংখ্যা একটি প্রকৃত ভগ্নাংশের সমান হতে পারে না।

∴ $2q \ne \frac pq.p$

∴ $\sqrt2$ এর মান $\frac pq$ আকারের কোনো সংখ্যা হতে পারেনা।

∴ $\sqrt2$ মূলদ সংখ্যা হতে পারেনা।

∴ $\sqrt2$ একটি অমূলদ সংখ্যা। (প্রমাণিত)

20. $f(x)=x$

ক. $a,b\in\mathbb R$ হলে, প্রমাণ কর যে, $|ab|=|a|\,|b|$

প্রমাণ: শিখনফল ১.৪ এর 3 দ্রষ্টব্য।

খ. $f(x)>\frac{2}{f(x)}$ এর সমাধান নির্ণয় কর।

সমাধান: $f(x)>\frac{2}{f(x)} \Rightarrow x>\frac2x$ …… (i)

x = 0 হলে, (i) ⇒ $0>\frac20$, যা সম্ভব নয়।

x > 0 হলে, (i) ⇒ $x^2>2$

$\Rightarrow x^2 > (\sqrt2)^2 \Rightarrow x>\pm\sqrt2$

কিন্তু $x>0$ ∴ $x>\sqrt2$

আবার, $x<0$ হলে, (i) ⇒ $x^2<2$

$\Rightarrow x<\pm\sqrt2$; কিন্তু $x<0$ ∴ $x<-\sqrt2$

∴ নির্ণেয় সমাধান, $x<-\sqrt2$ অথবা $x>\sqrt2$.

গ. $|f(x)-1|<3$ হলে দেখাও যে, $|x^3-1|<63$

প্রমাণ: $|f(x)-1|<3 \Rightarrow |x-1|<3$

অতপর প্রশ্নমালার 18(b) দ্রষ্টব্য।

21. $f(x)=x$ এবং $a,b\in\mathbb R$

ক. $|f(x)|<a$ হলে, প্রমাণ কর যে, $-a<f(x)<a$; যেখানে $a>0$. [রা.'০১]

প্রমাণ: $f(x)=x\ge0$ হলে, $|x|=x<a$ ⋯ (i)

$f(x)=x<0$ হলে,

$|x|=-x<a \Rightarrow x>-a$

∴ $-a<x$ ……(ii)

(i) ও (ii) হতে পাই, $-a<x<a$

⇒ $-a<f(x)<a$

খ. প্রমাণ কর যে, $\sqrt{\{f(a)\}^2}=|f(a)|$ [সি.'০৩]

প্রমাণ: $f(x)=x$ ∴ $f(a)=a$

আমরা জানি,

$|a|=a$, যখন $a\ge0$ …… (1) এবং

$|a|=-a$, যখন $a<0$ ……(2)

এখন, $a\ge0$ হলে, $\sqrt{a^2}=a$

∴ $\sqrt{a^2}=|a|$

$a<0$ হলে, ধরি $a=-n$, যেখনে $n>0$

∴ $\sqrt{a^2}=\sqrt{(-n)^2}=\sqrt{n^2}=n=-a$

∴ $\sqrt{a^2}=|a|$

∴ সকল $a\in\mathbb R$ এর জন্য, $\sqrt{a^2}=|a|$

∴ $\sqrt{\{f(a)\}^2}=|f(a)|$

গ. প্রমাণ কর যে, $|f(a)-f(b)|\le|f(a)|+|f(b)|$

[চ.'০৯; য.'১০; দি.'১৪; রুয়েট'১২-১৩]

প্রমাণ: $f(x)=x$ ∴ $f(a)=a$ এবং $f(b)=b$

এখন, $|-ab| \geq -ab$ $\quad [\because |x| \geq x]$

$\Rightarrow 2|ab| \geq -2ab,$ $\quad [\because |-x| = |x|]$

$\Rightarrow a^2 + b^2 + 2|a||b| \geq a^2 + b^2 - 2ab$

$[\because |ab| = |a||b|]$

$\Rightarrow |a|^2 + |b|^2 + 2|a||b| \geq (a-b)^2$

$\Rightarrow (|a| + |b|)^2 \geq |a-b|^2$

যেহেতু $|a| + |b| \geq 0$ এবং $|a-b| \geq 0$, সুতরাং উভয় পক্ষকে বর্গমূল করে পাই,

$|a-b| \leq |a| + |b|$

$\therefore \ |f(a) - f(b)| \leq |f(a)| + |f(b)|$ (Proved)

বিকল্প পদ্ধতি : $f(x) = x \ \therefore f(a) = a$ এবং $f(b) = b$

আমরা জানি,

$-|a| \leq a \leq |a| \cdots\cdots$ (i) এবং

$-|b| \leq b \leq |b| \Rightarrow |b| \geq -b \geq -|b|$

$\Rightarrow -|b| \leq -b \leq |b| \cdots\cdots$ (ii)

(i) এবং (ii) যোগ করে আমরা পাই ,

$-(|a| + |b|) \leq a - b \leq (|a| + |b|)$

$\therefore \ |a-b| \leq |a| + |b|$

$|f(a) - f(b)| \leq |f(a)| + |f(b)|$ (Proved)

22. $f(x) = x - 1$, যেখানে $x \in R$ [ঢা.বো.'১৭]

ক) $-2 < 2 - f(x) < 8$ অসমতাকে পরমমান চিহ্নের সাহায্যে প্রকাশ কর। ২

সমাধান: $-2 < 2 - f(x) < 8$

$\Rightarrow -2 < 2 - (x-1) < 8$

$\Rightarrow -2 < 2 - x + 1 < 8 \Rightarrow -2 < 3 - x < 8$

অতপর প্রশ্নমালার 4(g) দ্রষ্টব্য।

খ) $f(x) < \frac{1}{10}$ হলে, দেখাও যে,

$f(x).f(x+2) < \frac{21}{100}$ ৪

প্রমাণ: উদাহরণ 7(b) দ্রষ্টব্য।

গ) $|3f(x) - 1| < 2$ অসমতাকে সমাধান কর এবং সমাধান সেট সংখ্যারেখায় দেখাও। ৪

সমাধান: $|3f(x) - 1| < 2$

$\Rightarrow |3(x-1) - 1| < 2 \Rightarrow |3x - 3 - 1| < 2$

$\Rightarrow |3x - 4| < 2$

অতপর প্রশ্নমালার 5(d) দ্রষ্টব্য।

23. $f(x) = ax + by + c, g(x) = lx + my + n$ [কু.বো.'১৭]

ক) $|2x - 1| < \frac{1}{3}$ এর সমাধান সেট সংখ্যারেখায় দেখাও। ২

সমাধান: $|2x-1| < \frac{1}{3} \Rightarrow -\frac{1}{3} < 2x - 1 < \frac{1}{3}$

$\Rightarrow -\frac{1}{3} + 1 < 2x - 1 + 1 < \frac{1}{3} + 1$

$\Rightarrow \frac{2}{3} < 2x < \frac{4}{3} \Rightarrow \frac{1}{3} < x < \frac{2}{3}$

খ) উদ্দীপকে $a = 1, b = c = 0, |f(x) - 1| < \frac{1}{11}$ হলে প্রমাণ কর যে, $|\{f(x)\}^2 - 1| < \frac{23}{121}$ ৪

প্রমাণ: $a = 1, b = c = 0$ হলে, $f(x) = x$

$\therefore \ |f(x) - 1| < \frac{1}{11} \Rightarrow |x - 1| < \frac{1}{11} \cdots\cdots$ (i)

এখন, $|x+1| = |x - 1 + 2| \leq |x-1| + |2|$

$\Rightarrow |x+1| < \frac{1}{11} + 2 \Rightarrow |x+1| < \frac{23}{11} \cdots$ (ii)

(i) $\times$ (ii) $\Rightarrow |x-1||x+1| < \frac{1}{11} \times \frac{23}{11}$

$\Rightarrow |(x-1)(x+1)| < \frac{23}{121} \Rightarrow |x^2 - 1| < \frac{23}{121}$

$\therefore \ |\{f(x)\}^2 - 1| < \frac{23}{121}$ (Proved)

গ) $a = 1, b = -1, c = 2, f(x) \geq 0, l = 1, m = 1, n = -4, g(x) \leq 0$ এবং $x, y \geq 0$ হলে, $z = x + 2y$ এর সর্বোচ্চ মান নির্ণয় কর।

সমাধান: $a = 1, b = -1, c = 2$ হলে,

$f(x) = ax + by + c = x - y + 2$

$\therefore \ x - y + 2 \geq 0 \ \cdots\cdots$ (i)

$l = 1, m = 1, n = -4$ হলে,

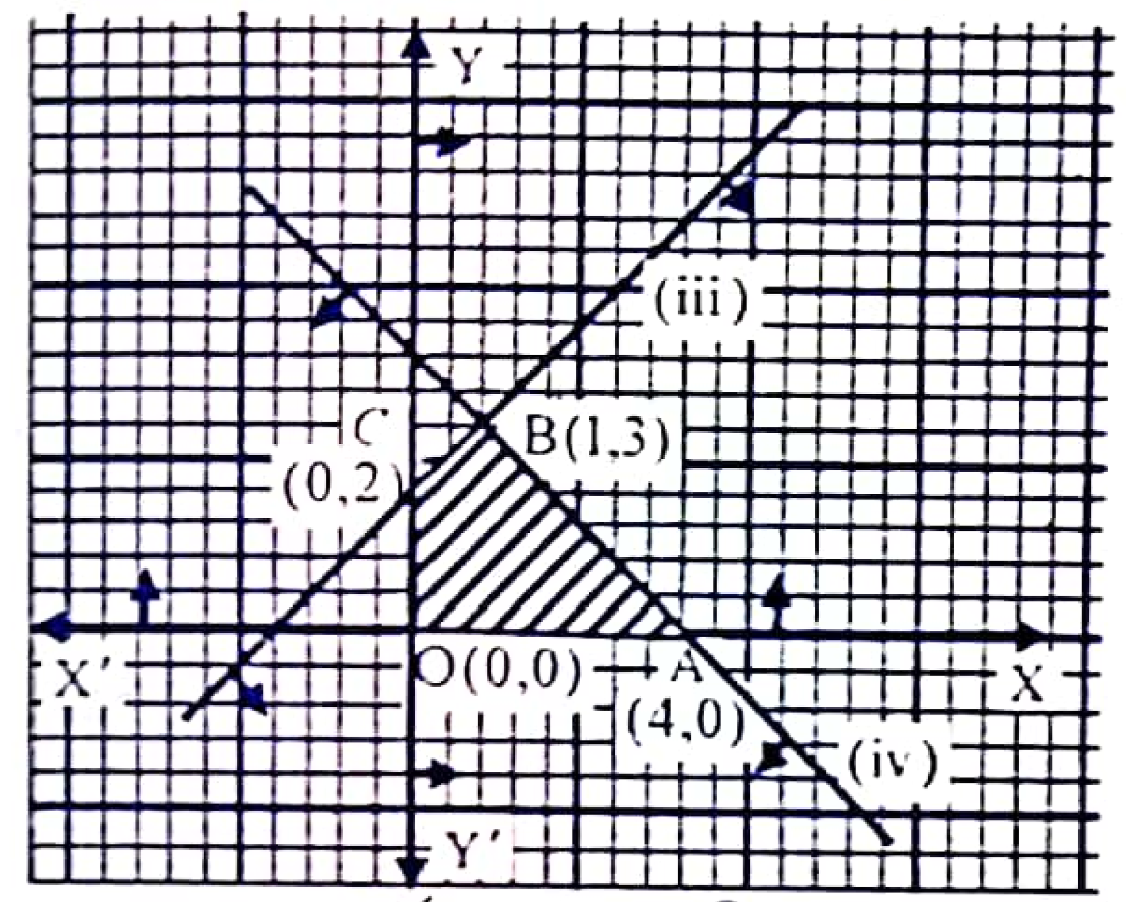
$g(x) = lx + my + n = x + y - 4$

$\therefore \ x + y - 4 \leq 0 \ \cdots\cdots$ (ii)

(i) ও (ii) অসমতার অনুরূপ রৈখিক সমীকরণ যথাক্রমে, $x - y = -2 \Rightarrow \frac{x}{-2} + \frac{y}{2} = 1 \cdots$(iii),

$x + y = 4 \Rightarrow \frac{x}{4} + \frac{y}{4} = 1 \cdots\cdots$ (iv)

একটি ছক কাগজে স্থানাঙ্কের অক্ষরেখা X'OX ও YOY' অঙ্কন করি। x-অক্ষ ও y-অক্ষ বরাবর ছোট 2 বর্গের বাহুর দৈর্ঘ্য = 1 একক ধরে (iii) ও (iv) রেখার লেখচিত্র অঙ্কন করি।



OABC চতুর্ভুজ দ্বারা সীমাবদ্ধ এলাকার বিন্দুসমূহের সেট প্রদত্ত সকল শর্তকে সিদ্ধ করে। অতএব এই ক্ষেত্রটিই সমাধানের অনুকূল এলাকা।

এখানে, A(4,0) , $x + y = 4$ ও $x - y = -2$ এর ছেদবিন্দু B(1,3) এবং C(0, 2)।

O(0,0) বিন্দুতে $z = 0 + 2 \times 0 = 0$,

A(4,0) বিন্দুতে $z = 4 + 2 \times 0 = 4$,

B(1,3) বিন্দুতে $z = 1 + 2 \times 3 = 7$ এবং

C(0,2) বিন্দুতে $z = 0 + 2 \times 2 = 4$

$\therefore$ B(1, 3) বিন্দুতে অভিষ্ট ফাংশন z এর সর্বোচ্চ মান = 7

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান, x = 1, y = 3 এবং $Z_{max} = 7$

24. দৃশ্যকল্প-১ : $L = \{x \in R : 2x^2 + 5x < 0\}$

দৃশ্যকল্প-২ : $f(x) = x^2 - x$. [য.বো.'১৭]

ক) সমাধান কর : $|2x - 7| > 5$.

সমাধান: $|2x - 7| > 5 \cdots\cdots$ (i)

$2x - 7$ অঋণাত্মক হলে $|2x - 7| = 2x - 7$

$\therefore$ (i) $\Rightarrow 2x - 7 > 5 \Rightarrow 2x > 12 \Rightarrow x > 6$

$2x - 7$ ঋণাত্মক হলে $|2x - 7| = -(2x-7)$

$\therefore$ (i) $\Rightarrow -(2x - 7) > 5 \Rightarrow 2x - 7 < -5$

$\Rightarrow 2x < 2 \Rightarrow x < 1$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান: $x < 1$ অথবা $x > 6$

খ) L এর সমাধান সেটের অসমতাটিকে পরমমান চিহ্নের সহায়ে প্রকাশ কর।

সমাধান: $L = \{x \in R : 2x^2 + 5x < 0\}$ এর অসমতা, $2x^2 + 5x < 0$

$\Rightarrow x(2x + 5) < 0 \Rightarrow x(x + \frac{5}{2}) < 0$

$\Rightarrow (x - 0)\{x - (-\frac{5}{2})\} < 0 \Rightarrow -\frac{5}{2} < x < 0$

সকল পক্ষে $-\frac{-\frac{5}{2} + 0}{2} = \frac{5}{4}$ যোগ করে পাই,

$-\frac{5}{4} < x + \frac{5}{4} < \frac{5}{4} \Rightarrow |x + \frac{5}{4}| < \frac{5}{4}$

$\Rightarrow |\frac{4x + 5}{4}| < \frac{5}{4} \Rightarrow |4x + 5| < 5$ (Ans.)

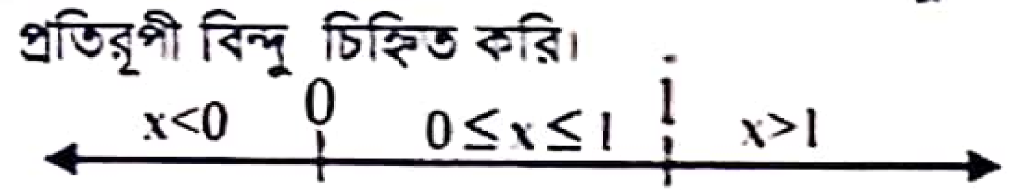
গ) সংখ্যারেখার সাহায্যে $f(x) \leq 0$ এর সমাধান কর।

সমাধান: $f(x) \leq 0 \Rightarrow x^2 - x \leq 0$

$\Rightarrow x(x - 1) \leq 0 \cdots\cdots$ (i)

$x = 0$ এবং $x - 1 = 0$ হলে, x = 1

সংখ্যারেখার উপর 0 ও 1 সংখ্যা দুইটির প্রতিরূপী বিন্দু চিহ্নিত করি।



বিন্দু দুইটি সংখ্যারেখাকে (i) $x < 0$ (ii) $0 \leq x \leq 1$ এবং (iii) $x > 1$ ব্যবধিতে বিভক্ত করে।

$x < 0$ হলে, $(x - 1) < 0$

$\therefore \ x(x - 1) > 0$, যা (i) এর সঙ্গে সঙ্গতিপূর্ণ নয়।

$0 \leq x \leq 1$ হলে, $x \geq 0, x - 1 \leq 0$

$\therefore \ x(x - 1) \leq 0$, যা (i) এর সঙ্গে সঙ্গতিপূর্ণ।

$x > 1$ হলে, $x > 0$ ও $x - 1 > 0$

$\therefore \ x(x - 1) > 0$, যা (i) এর সঙ্গে সঙ্গতিপূর্ণ নয়।

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান: $0 \leq x \leq 1$