**1. (a) মান নির্ণয় কর ঃ**

(i) $|-16+3|+|-1-4|-3-|-1-7|$ [চ. '০০]

$= |-13|+|-5|-3-|-8|$

$= -(-13)+(-(-5))-3-(-(-8))$

$= 13+5-3-8 = 18-11 = 7$ (Ans.)

(ii) $|-1-8|+|3-1|$ [য.'০১; ব.'০৫]

$= |-9|+|2| = -(-9)+2 = 9+2 = 11$

(iii) $||2-6|-|1-9||$ [কু.'০২;ব.'০৫]

$= ||-4|-|-8|| = |-(-4)-(-(-8))|$

$= |4-8| = |-4| = -(-4) = 4$ (Ans.)

(iv) $|-3-5|$ [ঢা. বো.'০০]

$= |-8| = -(-8) = 8$

(v) $||-2|-|-6|| = |-(-2)-(-(-6))|$

$= |2-6| = |-4| = -(-4) = 4$ (Ans.)

**(b) যথাযথ কারণ উল্লেখ করে মান নির্ণয় কর:**

$||3-5|-|7-12||$ [কু.'০৬]

$||3-5|-|7-12|| = ||-2|-|-5||$

$= |-(-2)-(-(-5))|$ [$\because -2<0$ এবং $-5<0$]

$= |2-5| = |-3| = -(-3)$ [$\because -3<0$]

$= 3$ (Ans.)

**2. নিম্নের অসমতাগুলো পরম মান চিহ্ন ব্যতীত প্রকাশ কর**

(a) $|x-2|<5$ [ব.'০২;ঢা.'০৩,'০৯; দি.'১১]

$\Rightarrow -5 < x-2 < 5$

[$\because |x|<\alpha$ iff $-\alpha<x<\alpha$]

সকল পক্ষে 2 যোগ করে পাই,

$\Rightarrow -5+2 < x-2+2 < 5+2$

$\Rightarrow -3 < x < 7$ (Ans.)

(b) $|2x+3|<7$ [ব.'০২; ঢা.'০৩; চ.'১২]

$\Rightarrow -7 < 2x+3 < 7$

$\Rightarrow -7-3 < 2x+3-3 < 7-3$

$\Rightarrow -10 < 2x < 4$

$\therefore -5 < x < 2$ (Ans.)

2(c) $|x-3|<7$ [কু.'০৫]

$\Rightarrow -7 < x-3 < 7$

$\Rightarrow -7+3 < x-3+3 < 7+3$

$\Rightarrow -4 < x < 10$ (Ans.)

(d) $|x|<3$ [ঢা.'০৩]

$\Rightarrow -3 < x < 3$ [$\because |x|<\alpha$ iff $-\alpha<x<\alpha$]

2(e) $\dfrac{1}{|3x+1|} \geq 5$, এখানে $x \neq -\dfrac{1}{3}$

[চ.'০১;সি.'০৬; য.'০৮]

এখন, $\dfrac{1}{|3x+1|} \geq 5 \Rightarrow |3x+1| \leq \dfrac{1}{5}$

$\Rightarrow -\dfrac{1}{5} \leq 3x+1 \leq \dfrac{1}{5}$

$\Rightarrow -\dfrac{1}{5}-1 \leq 3x+1-1 \leq \dfrac{1}{5}-1$

$\Rightarrow -\dfrac{6}{5} \leq 3x \leq -\dfrac{4}{5} \Rightarrow -\dfrac{2}{5} \leq x \leq -\dfrac{4}{15}$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান ঃ $-\dfrac{2}{5} \leq x \leq -\dfrac{4}{15}$ কিন্তু $x \neq -\dfrac{1}{3}$

2(f) $2 \leq \dfrac{1}{|x-1|}$ [বুয়েট'০৫]

যদি $x-1=0$ *ie.* $x=1$ হয়, তবে প্রদত্ত অসমতাটি অসংজ্ঞায়িত হয়।

$\therefore x \neq 1$

এখন, $2 \leq \dfrac{1}{|x-1|} \Rightarrow |x-1| \leq \dfrac{1}{2}$

$\Rightarrow -\dfrac{1}{2} \leq x-1 \leq \dfrac{1}{2}$

$\Rightarrow -\dfrac{1}{2}+1 \leq x-1+1 \leq \dfrac{1}{2}+1$

$\Rightarrow \dfrac{1}{2} \leq x \leq \dfrac{3}{2}$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান ঃ $\frac{1}{2} \le x < 1$ অথবা $1 < x \le \frac{3}{2}$

**2(g)** $\frac{1}{|x-1|} < 2$

$\Rightarrow 1 < 2|x-1|.\ [\because |x-1| > 0]$

$\Rightarrow |x-1| > \frac{1}{2}$

$\therefore\ x-1 > \frac{1}{2}$, যখন $x-1>0$

$\Rightarrow x > 1+\frac{1}{2} \Rightarrow x > \frac{3}{2}$

আবার, $-(x-1) > \frac{1}{2}$, যখন $x-1<0$

$\Rightarrow x-1 < -\frac{1}{2} \Rightarrow x < -\frac{1}{2}+1$

$\Rightarrow x < \frac{1}{2}$



$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান ঃ $x < \frac{1}{2}$ অথবা $x > \frac{3}{2}$.

**2(h)** $3 \le |x-2| \le 7$

**সমাধানঃ** $(x-2)$ অঋণাত্মক হলে, $|x-2| = x-2$

$\therefore\ 3 \le |x-2| \le 7 \Rightarrow 3 \le x-2 \le 7$

$\Rightarrow 5 \le x \le 9$

আবার, $(x-2)$ ধনাত্মক হলে, $|x-2| = -(x-2)$

$\therefore\ 3 \le |x-2| \le 7 \Rightarrow 3 \le -(x-2) \le 7$

$\Rightarrow -7 \le x-2 \le -3$

$\Rightarrow -5 \le x \le -1$.

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধানঃ $-5 \le x \le -1$ অথবা $5 \le x \le 9$

**2(i)** $|5-2x| \ge 4$

**সমাধানঃ** $(5-2x) \ge 0$ হলে, $|5-2x| = 5-2x$

$\therefore\ |5-2x| \ge 4 \Rightarrow 5-2x \ge 4 \Rightarrow -2x \ge -1$

$\Rightarrow x \le \frac{1}{2}$

আবার, $(5-2x) < 0$ হলে, $|5-2x| = -(5-2x)$

$\therefore\ |5-2x| \ge 4 \Rightarrow -(5-2x) \ge 4$

$\Rightarrow -5+2x \ge 4 \Rightarrow 2x \ge 9 \Rightarrow x \ge \frac{9}{2}$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধানঃ $x \le \frac{1}{2}$ অথবা $x \ge \frac{9}{2}$.

**3. নিম্নের অসমতাগুলো পরম মান চিহ্নের সাহায্যে প্রকাশ কর ঃ**

**(a)** $4 < x < 10$ **[ব.'০১; রা.'০২; কু.'০৪]**

সকল পক্ষে $-\frac{4+10}{2} = -7$ যোগ করে পাই,

$4-7 < x-7 < 10-7 \Rightarrow -3 < x-7 < 3$

$\Rightarrow |x-7| < 3\ [\because |x| < \alpha \text{ iff } -\alpha < x < \alpha]$

**3(b)** $-2 < x < 6$ **[ব.'০১; রা.'০২; চ.'০৪]**

সকল পক্ষে $-\frac{-2+6}{2} = -2$ যোগ করে পাই,

$-2-2 < x-2 < 6-2$

$\Rightarrow -4 < x-2 < 4$

$\Rightarrow |x-2| < 4$

**3(c)** $-7 < x < -1$ **[রা.'০০; কু'০৫ ; ঢা.'০৬; চ.'০৯]**

সকল পক্ষে $-\frac{-7-1}{2} = 4$ যোগ করে পাই.

$-7+4 < x+4 < -1+4$

$\Rightarrow -3 < x+4 < 3 \Rightarrow |x+4| < 3$

**3(d)** $2 \le x \le 8$ **[কু.'০৩; য.'০৭]**

সকল পক্ষে $-\frac{2+8}{2} = -5$ যোগ করে পাই.

$2-5 \le x-5 \le 8-5 \Rightarrow -3 \le x-5 \le 3$

$\Rightarrow |x-5| \le 3$

**3(e)** $-1 < 2x-3 < 5$

**[চ.'০১,'১৩ ;সি.'০৬; য.'০৮;রুয়েট'১০-১১]**

সকল পক্ষে $-\frac{-1+5}{2} = -2$ যোগ করে পাই.

$-1-2 < 2x-3-2 < 5-2$

$\Rightarrow -3 < 2x-5 < 3 \Rightarrow |2x-5| < 3$

**3(f)** $-5 < x < 7$ **[রা.'০৪,'১৩; য.'০৪;ব.'০৬]**

সকল পক্ষে $-\frac{-5+7}{2}=-1$ যোগ করে পাই,

$-5-1<x-1<7-1$

$\Rightarrow -6<x-1<6$

$\Rightarrow |x-1|<6$

3(g) দেওয়া আছে, $-2<3-x<8$ [ব.'০১]

$\Rightarrow -(-2)>-(3-x)>-8$

$\Rightarrow 2>x-3>-8 \Rightarrow -8<x-3<2$

সকল পক্ষে $-\frac{-8+2}{2}=3$ যোগ করে পাই,

$-8+3<x-3+3<2+3$

$\Rightarrow -5<x<5 \Rightarrow |x|<5$

**4. নিম্নের অসমতাগুলি সমাধান কর এবং সমাধান সেট সংখ্যারেখায় দেখাও ঃ**

**(a)** $|3x+2|<7$ [ঢা., রা.'০৪; সি. ০৭; চ.ব.'১০; রা.'১২]

$\Rightarrow -7<3x+2<7$

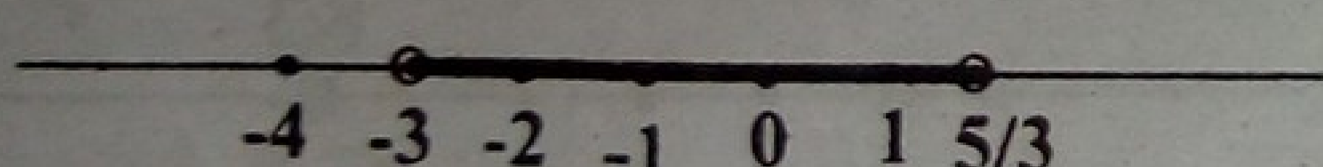
$\Rightarrow -7-2<3x+2-2<7-2$

$\Rightarrow -9<3x<5 \Rightarrow -3<x<\frac{5}{3}$



$\therefore$ সমাধান সেট, $S=\{x\in\mathbb{R}: -3<x<\frac{5}{3}\}$

নিম্নে সংখ্যারেখায় সমাধান সেট দেখানো হল ঃ




**4(b)** $|2x+1|<3$ [সি.'০৪,'০৭; য.'০৯,'১২]

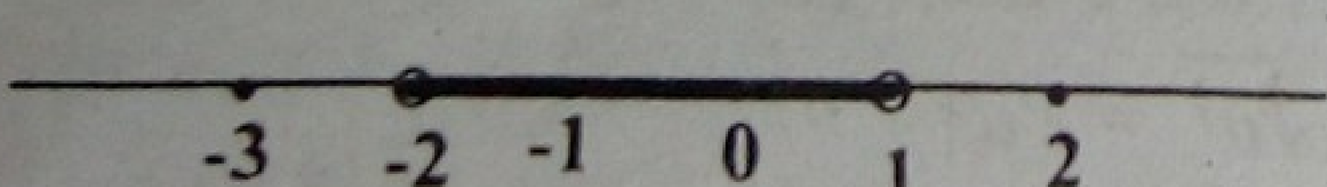
$\Rightarrow -3<2x+1<3$

$\Rightarrow -3-1<2x+1-1<3-1$

$\Rightarrow -4<2x<2 \Rightarrow -2<x<1$

$\therefore$ সমাধান সেট, $S=\{x\in\mathbb{R}: -2<x<1\}$

নিম্নে সংখ্যারেখায় সমাধান সেট দেখানো হল ঃ




**4(c)** $|2x-5|<3$

[ব.'০৪; চ.'০৫; রা.'০৬; ঢা.'০৭,'১৩; কু.'০৮]

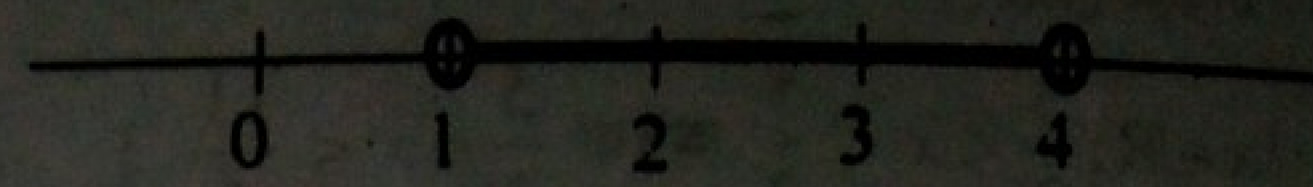
$\Rightarrow -3<2x-5<3$

$\Rightarrow -3+5<2x-5+5<3+5$

$\Rightarrow 2<2x<8 \Rightarrow 1<x<4$

$\therefore$ সমাধান সেট, $S=\{x\in\mathbb{R}: 1<x<4\}$

নিম্নে সংখ্যারেখায় সমাধান সেট দেখানো হল ঃ




**(d)** $|3x-4|<2$ [ঢা.'০৫; রা.'০৮; সি.'০৯; কুয়েট'১১-১২]

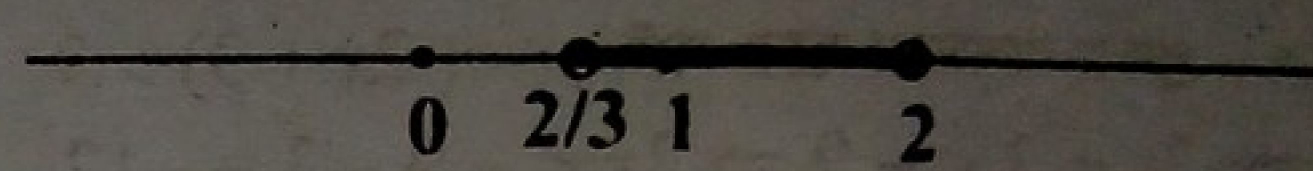
$\Rightarrow -2<3x-4<2$

$\Rightarrow -2+4<3x-4+4<2+4$

$\Rightarrow 2<3x<6 \Rightarrow \frac{2}{3}<x<2$

$\therefore$ সমাধান সেট, $S=\{x\in\mathbb{R}: \frac{2}{3}<x<2\}$

নিম্নে সংখ্যারেখায় সমাধান সেট দেখানো হল ঃ




**4(e)** $|2x+5|<1$ [সি.'০২; ব.'০৫]

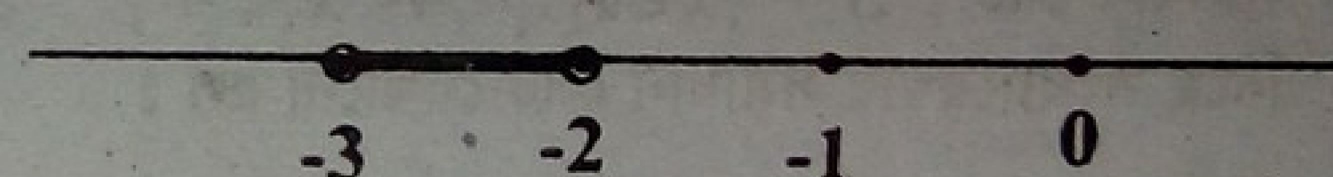
$\Rightarrow -1<2x+5<1$

$\Rightarrow -1-5<2x+5-5<1-5$

$\Rightarrow -6<2x<-4 \Rightarrow -3<x<-2$

$\therefore$ সমাধান সেট, $S=\{x\in\mathbb{R}: -3<x<-2\}$

নিম্নে সংখ্যারেখায় সমাধান সেট দেখানো হল ঃ




**4(f)** $\frac{1}{|3x-5|}>2$

[ব.'০৫; য.'০৩; চ.'০৭; ঢা., সি.'১০; কু.'১৩]

$3x-5=0 \Rightarrow x=\frac{5}{3}$ হলে, প্রদত্ত অসমতাটি অসংজ্ঞায়িত হবে।

$\therefore\ x\neq\frac{5}{3}$

এখন, $\frac{1}{|3x-5|}>2 \Rightarrow |3x-5|<\frac{1}{2}$

$\Rightarrow -\frac{1}{2}<3x-5<\frac{1}{2}$

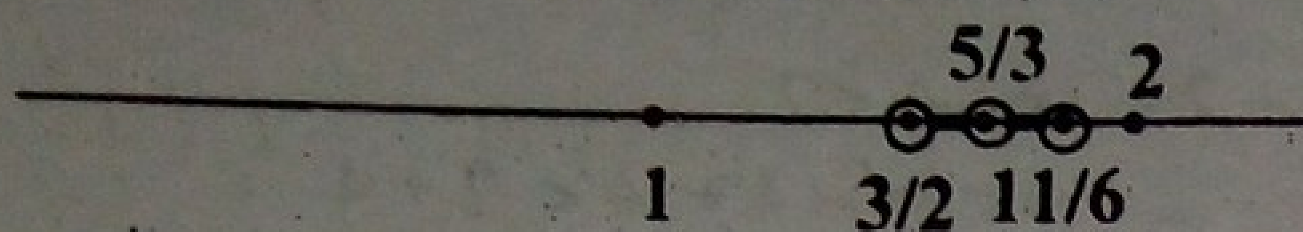
$\Rightarrow -\frac{1}{2}+5<3x-5+5<\frac{1}{2}+5$

$\Rightarrow \frac{9}{2}<3x<\frac{11}{2} \Rightarrow \frac{3}{2}<x<\frac{11}{6}$

$\therefore$ সমাধান সেট ,

$S = \{x \in \mathbb{R}: \frac{3}{2} < x < \frac{5}{3}$ অথবা $\frac{5}{3} < x < \frac{11}{6}\}$

নিম্নে সংখ্যারেখায় সমাধান সেট দেখানো হল ঃ




4(g) $|2x + 3| > 9$ [চ.'০৩]

$2x + 3$ অঋণাত্মক হলে, $|2x + 3| = 2x + 3$

$\therefore$ প্রদত্ত অসমতা হতে পাই , $2x + 3 > 9$

$\Rightarrow 2x > 9 - 3 \Rightarrow 2x > 6 \Rightarrow x > 3$

$2x + 3$ ঋণাত্মক হলে, $|2x + 3| = -(2x + 3)$

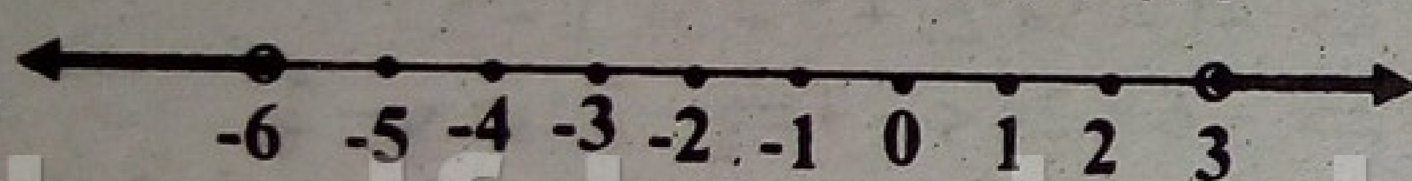
$\therefore$ প্রদত্ত অসমতা হতে পাই , $-(2x + 3) > 9$

$\Rightarrow 2x + 3 < -9 \Rightarrow 2x < -9 - 3 = -12$

$\Rightarrow x < -6$

$\therefore$ সমাধান সেট, $S = \{x \in \mathbb{R}: x < -6$ অথবা $x > 3\}$

নিম্নে সংখ্যারেখায় সমাধান সেট দেখানো হল ঃ

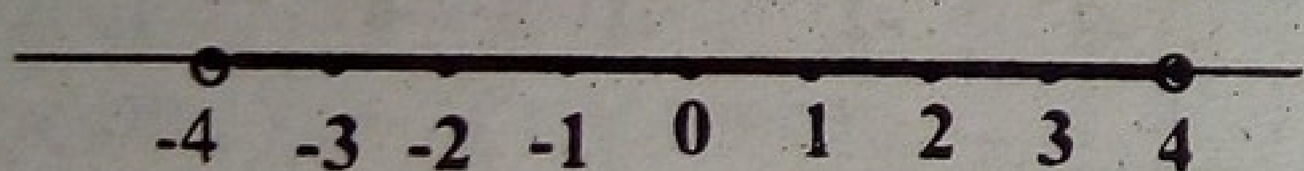





4(h) $|x| < 4 \Rightarrow -4 < x < 4$ [রা.'০১]

$\therefore$ সমাধান সেট , $S = \{x \in \mathbb{R}: -4 < x < 4\}$

নিম্নে সংখ্যারেখায় সমাধান সেট দেখানো হল ঃ



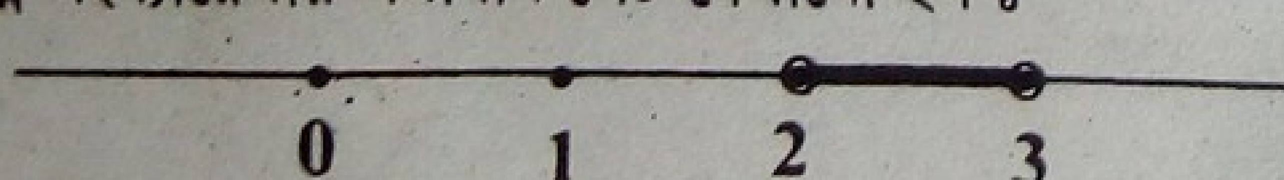

4(i) $|2x - 5| < 1 \Rightarrow -1 < 2x - 5 < 1$ [চ.'০১]

$\Rightarrow -1 + 5 < 2x - 5 + 5 < 1 + 5$

$\Rightarrow 4 < 2x < 6 \Rightarrow 2 < x < 3$

$\therefore$ সমাধান সেট , $S = \{x \in \mathbb{R}: 2 < x < 3\}$

নিম্নে সংখ্যারেখায় সমাধান সেট দেখানো হল ঃ




4(j) $|x - 5| > 4$

$x - 5$ অঋণাত্মক হলে , $|x - 5| = x - 5$

$\therefore$ প্রদত্ত অসমতা হতে পাই , $x - 5 > 4$

$\Rightarrow x > 4 + 5 = 9$

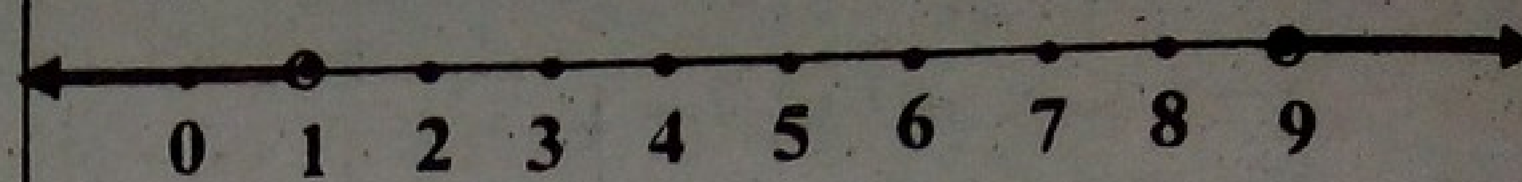
$x - 5$ ঋণাত্মক হলে , $|x - 5| = -(x - 5)$

$\therefore$ প্রদত্ত অসমতা হতে পাই , $-(x - 5) > 4$

$\Rightarrow x - 5 < -4 \Rightarrow x < -4 + 5 = 1$

$\therefore$ সমাধান সেট , $S = \{x \in \mathbb{R}: x < 1$ অথবা $x > 9\}$

নিম্নে সংখ্যারেখায় সমাধান সেট দেখানো হল ঃ




4(k) $|2x + 4| < 6$ [য.'০২]

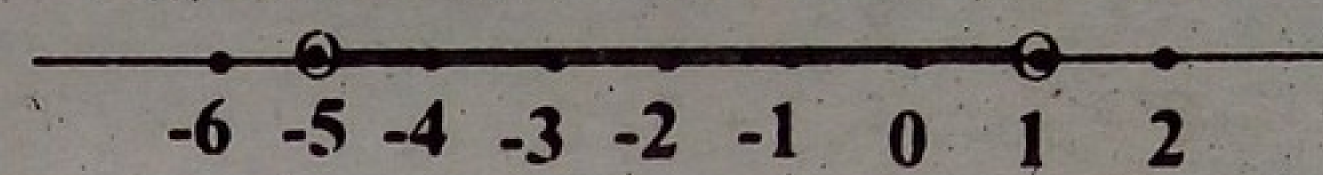
$\Rightarrow -6 < 2x + 4 < 6$

$\Rightarrow -6 - 4 < 2x + 4 - 4 < 6 - 4$

$\Rightarrow -10 < 2x < 2 \Rightarrow -5 < x < 1$

$\therefore$ সমাধান সেট , $S = \{x \in \mathbb{R} : -5 < x < 1\}$.

নিম্নে সংখ্যারেখায় সমাধান সেট দেখানো হল ঃ




4(*l*) $|x - 5| = |2x - 3|$

$\Rightarrow x^2 - 10x + 25 = 4x^2 - 12x + 9$

[উভয় পক্ষকে বর্গ করে]

$\Rightarrow 3x^2 - 2x - 16 = 0$

$\Rightarrow 3x^2 - 8x + 6x - 16 = 0$

$\Rightarrow x(3x - 8) + 2(3x - 8) = 0$

$\Rightarrow (3x - 8)(x + 2) = 0 \quad \therefore x = -2, \frac{8}{3}$

$\therefore$ সমাধান সেট , $S = \{-2, \frac{8}{3}\}$

নিম্নে সংখ্যারেখায় সমাধান সেট দেখানো হল ঃ


5. প্রমাণ কর যে, $\sqrt{a^2} = |a|$ [সি.'০৩]

প্রমাণ ঃ আমরা জানি ,

$|a| = a$ , যখন $a \geq 0$ …… (1) এবং

$|a| = -a$ , যখন $a < 0$ ……(2)

এখন , $a \geq 0$ হলে , $\sqrt{a^2} = a$

$\therefore \sqrt{a^2} = |a|$

$a < 0$ হলে , ধরি $a = -n$ , যেখনে $n > 0$

$\therefore \sqrt{a^2} = \sqrt{(-n)^2} = \sqrt{n^2} = n = -a$

$\therefore \sqrt{a^2} = |a|$

$\therefore$ সকল $a \in \mathbb{R}$ এর জন্য , $\sqrt{a^2} = |a|$

**6. প্রমাণ কর যে, $|x| < a$ হলে, $-a < x < a$ ; যেখানে $a > 0$** [রা.'০১]

**প্রমাণ ঃ** $x \geq 0$ হলে, $|x| = x < a \cdots\cdots$ (i)

$x < 0$ হলে, $|x| = -x < a \Rightarrow x > -a$

$\therefore \; -a < x \cdots\cdots$(ii)

(i) ও (ii) হতে পাই, $-a < x < a$.

**7. দেখাও যে, $a \in \mathbb{R}$ হলে $-|a| \leq a \leq |a|$**

**প্রমাণ ঃ** $a \geq 0 \Rightarrow 0 \leq a \cdots\cdots$(i) হলে,

$|a| = a \geq 0 \Rightarrow |a| \geq 0$

$\therefore \; -|a| \leq 0 \cdots\cdots$(ii)

(i) ও (ii) হতে পাই, $-|a| \leq 0 \leq a$

$\therefore \; -|a| \leq a \cdots\cdots$(iii)

$a < 0 \cdots\cdots$(iv) হলে,

$|a| = -a > 0$ [$\because a < 0$, $\therefore -a > 0$]

$\Rightarrow 0 < |a| \cdots\cdots\cdots$(v)

(iv) ও (v) হতে পাই,

$a < 0 < |a| \Rightarrow a < |a| \cdots$(vi)

$a = 0$ হলে, $0 = |0| \Rightarrow a = |a| \cdots \cdots$(vii)

(vi) ও (vii) হতে পাই, $a \leq |a| \cdots$ viii)

(iii) ও (viii) হতে পাই, $-|a| \leq a \leq |a|$

**8. যদি $a, b, c \in \mathbb{R}$, $ac = bc$ এবং $c \neq 0$ হয়, তবে প্রমাণ কর যে, $a = b$** [কু.'০৯; চ.'১০; দি.'১০; ব.'১৩]

**প্রমাণ ঃ** $c \neq 0$ বলে $c^{-1}$ বিদ্যমান।

এখন, $ac = bc$

$\Rightarrow (ac)c^{-1} = (bc)c^{-1}$ [গুণনের অনন্যতা অনুযায়ী]

$\Rightarrow a(cc^{-1}) = b(cc^{-1})$[গুণনের সংযোজন বিধি অনুযায়ী]

$\Rightarrow a.1 = b.1$[গুণনের বিপরীতকের অস্তিত্ব অনুযায়ী]

$\therefore \; a = b$ [গুণনের অভেদকের অস্তিত্ব অনুযায়ী]

**9. $a < b$ এবং $b < c$ হলে দেখাও যে, $a < c$.** [য.'১২]

**প্রমাণ ঃ** দেওয়া আছে, $a < b$ এবং $b < c$ ।

মনে করি, $b = a + m$ এবং $c = b + n$ ; যেখানে $m, n \in \mathbb{R}$ এবং $m.n > 0$.

$\therefore \; c = b + n = (a + m) + n$, [প্রতিস্থাপন বিধি]

$\Rightarrow c = a + (m + n)$, [সংযোজন বিধি অনুযায়ী]

$m.n \in \mathbb{R}$ এবং $m.n > 0$ বলে, $m + n \in \mathbb{R}$ এবং $m + n > 0$

$\therefore \; c > a$ অর্থাৎ, $a < c$ (Showed)

**10. যদি $a < b$ হয়, তবে দেখাও যে, $a + c < b + c$ ; যেখানে $a, b, c \in \mathbb{R}$** [রা.'০০, '০৮; চ.'১২]

**প্রমাণ ঃ** দেওয়া আছে, $a < b$

ধরি, $b = a + m$ ; যেখানে $m \in \mathbb{R}$ এবং $m > 0$

এখন, $b + c = (a + m) + c$ [প্রতিস্থাপন বিধি]

$\Rightarrow b + c = (m + a) + c$ [বিনিময় বিধি]

$\Rightarrow b + c = m + (a + c)$ [সংযোজন বিধি]

$\Rightarrow b + c = (a + c) + m$ [বিনিময় বিধি]

$m \in \mathbb{R}$ এবং $m > 0$ বলে, $b + c < a + c$

**11. $a \in \mathbb{R}$ হলে দেখাও যে, $(-1)a = -a$ এবং $-(-a) = a$.**

**প্রমাণ ঃ** $1 \in \mathbb{R}$ বলে,

$1 + (-1) = 0$ [যোগের বিপরীতকের অস্তিত্ব অনুযায়ী]

$\Rightarrow (1 + (-1))\,a = 0.\,a$ [গুণনের অনন্যতা অনুযায়ী]

$\Rightarrow 1.\,a + (-1)\,a = 0$ [বন্টন বিধি অনুযায়ী এবং সকল $a \in \mathbb{R}$ এর জন্য, $a.0 = 0.\,a = 0$]

$\Rightarrow a + (-1)\,a = 0$ [অভেদকের অস্তিত্ব অনুযায়ী]

$\therefore \; (-1)\,a = -a$ [বিপরীতকের অস্তিত্ব অনুযায়ী]

**দ্বিতীয় অংশ ঃ**

$-a + (-(-a)) = 0$

[যোগের বিপরীতকের অস্তিত্ব অনুযায়ী]

$\Rightarrow a + [-a + (-(-a))] = a + 0$

[যোগের অনন্যতা অনুযায়ী]

$\Rightarrow [a + (-a)] + (-(-a)) = a + 0$

[যোগের সংযোজন বিধি অনুযায়ী]

$\Rightarrow 0 + (-(-a)) = a + 0$

[যোগের বিপরীতকের অস্তিত্ব অনুযায়ী]

$\therefore -(-a) = a$ [যোগের অভেদকের অস্তিত্ব অনুযায়ী]

**12. $a, b \in \mathbb{R}$ হলে দেখাও যে,**

$(-a)(-b) = ab$ [কু.'০৭,;সি.'১১]

এবং $(ab)^{-1} = a^{-1}b^{-1}$ $(a \neq 0, b \neq 0)$ [কু.'১২]

**প্রমাণ ঃ** $(-a)(-b) = -(a(-b))$

[$\because a \, . \, b \in \mathbb{R}$ হলে, $(-a)b = -(ab)$ ]

$= -((-b)a)$ [ গুণনের সংযোজন বিধি অনুযায়ী ]

$= -(-(ba))$

[$\because a \, . \, b \in \mathbb{R}$ হলে , $(-b)\,a = -(b\,a)$]

$= b\,a$ [ $\because a \in \mathbb{R}$ হলে , $-(-a) = a$]

$= ab$ [গুণনের সংযোজন বিধি অনুযায়ী ]

**দ্বিতীয় অংশ ঃ**

$(a^{-1}b^{-1})(ab)$

$= (ab)(a^{-1}b^{-1})$ [গুণনের সংযোজন বিধি অনুযায়ী ]

$= (ab)(b^{-1}a^{-1})$ [ঐ ]

$= ((ab)b^{-1})a^{-1}$ [ ঐ ]

$= (a(bb^{-1}))a^{-1}$ [ ঐ ]

$= (a.1).a^{-1}$ [গুণনের বিপরীতকের অস্তিত্ব অনুযায়ী ]

$= a.\,a^{-1}$ [ গুণনের অভেদকের অস্তিত্ব অনুযায়ী ]

$=1$ [ গুণনের বিপরীতকের অস্তিত্ব অনুযায়ী ]

অর্থাৎ $(a^{-1}b^{-1})(ab) = (ab)(a^{-1}b^{-1}) = 1$

$\therefore \ (ab)^{-1} = a^{-1}b^{-1}$

[ গুণনের বিপরীতকের অস্তিত্ব অনুযায়ী ]

**13. দেখাও যে, $a \in \mathbb{R}$ হলে, $a.0 = 0$ [কু.'০৬,ঢা.'০৯]**

**প্রমাণ ঃ** $1 \in \mathbb{R}$ বলে ,

$1 + 0 = 1$ [ যোগের অভেদক বিধি অনুযায়ী ।]

$\Rightarrow a(1+0) = a.1$ [গুণনের অনন্যতা বিধি অনুযায়ী ।]

$\Rightarrow a.1 + a.0 = a.1$ [বন্টন বিধি অনুযায়ী ।]

$\Rightarrow a + a.0 = a$ [গুণনের অভেদকের অস্তিত্ব অনুযায়ী ।]

$\Rightarrow (-a) + (a + a.0) = (-a) + a$

[যোগের অনন্যতা বিধি অনুযায়ী ।]

$\Rightarrow \{(-a) + a\} + a.0 = 0$ [ যোগের সংযোজন বিধি এবং বিপরীতকের অস্তিত্ব অনুযায়ী ।]

$\Rightarrow 0 + a.0 = 0$

[যোগের বিপরীতকের অস্তিত্ব অনুযায়ী ।]

$\therefore \ a.0 = 0$ [যোগের অভেদকের অস্তিত্ব অনুযায়ী ।]

**14. দেখাও যে, যে কোনো বিজোড় সংখ্যার বর্গ বিজোড় সংখ্যা।**

**প্রমাণ ঃ** মনে করি , $2n + 1$ একটি বিজোড় সংখ্যা , যেখানে $n \in \mathbb{N}$ .

$2n + 1$ এর বর্গ $= (2n+1)^2 = 4n^2 + 4n + 1$

$= 4(n^2 + n) + 1 = 4(n^2 + n)$

যেহেতু $4(n^2 + n)$ এর একটি উৎপাদক 4 বলে $4(n^2 + n)$ একটি জোড় সংখ্যা ।

$\therefore \ 4(n^2 + n) + 1$ একটি বিজোড় সংখ্যা ।

**15. যদি a, b $\in \mathbb{R}$ হয়, তবে দেখাও যে, (i) $-(a + b) = -a - b$; (ii) $(-a)\,b = -(ab)$ [ব.'১১]**

**প্রমাণ ঃ** (i) $(-a-b) + (a+b)$

$= \{-a + (-b)\} + (b + a)$

[ যোগের বিনিময় বিধি অনুযায়ী ]

$= [\{-a + (-b)\} + b] + a$

[ সংযোজন বিধি অনুযায়ী ]

$= [-a + \{(-b) + b\}] + a$

[ সংযোজন বিধি অনুযায়ী ]

$= [-a + 0] + a$

[ যোগের বিপরীতকের অস্তিত্ব অনুযায়ী ]

$= (-a) + a$ [ যোগের অভেদকের অস্তিত অনুযায়ী ]

$= 0$ [ যোগের বিপরীতকের অস্তিত অনুযায়ী ]

$\therefore \ (-a-b) = -(a+b)$

[ যোগের বিপরীতকের অস্তিত্ব অনুযায়ী ]

$\Rightarrow -(a+b) = -a - b$

(ii) $(-a)\,b + (ab) = (-a)\,b + (a)\,b$

$= \{(-a) + a\}b$ [বন্টন বিধি অনুযায়ী ]

$= 0.b$ [ যোগের বিপরীতকের অস্তিত অনুযায়ী ]

$= 0$

$\therefore \ (-a)\,b = -(ab)$

[ যোগের বিপরীতকের অস্তিত্ব অনুযায়ী ]

16. উদাহরণসহ মূলদ সংখ্যার সংজ্ঞা দাও। দেখাও যে, $\sqrt{2}$ মূলদ সংখ্যা নয়। [কু.'০৭; ঢা.'০৮; সি.'১৩]

সংজ্ঞা ঃ যে সমস্ত সংখ্যা দুইটি পূর্ন সংখ্যার অনুপাত (ভাজক শূন্য ব্যতীত ) আকারে প্রকাশ করা যায় তাদের সেটকে মূলদ সংখ্যার সেট বলা হয় । সকল পূর্ণ সংখ্যা (2) , ভগ্নাংশ$(-\frac{3}{5})$. সসীম দশমিক ভগ্নাংশ (3·1). পৌন:পোনিক অসীম দশমিক ভগ্নাংশ $(\cdot\dot{3})$ মূলদ সংখ্যা।

দ্বিতীয় অংশ ঃ

$1^2 = 1 , (\sqrt{2})^2 = 2 . 2^2 = 4$

$\therefore\ 1 < \sqrt{2} < 2$

$\therefore\ \sqrt{2}$ পূর্ন ( স্বভাবিক ) সংখ্যা নয় ।

যদি সম্ভব হয় তবে মনে করি , $\sqrt{2}$ একটি মূলদ সংখ্যা অর্থাৎ মূলদ ভগ্নাংশ এবং

$\sqrt{2} = \frac{p}{q}$. যেখানে $p . q \in \mathbb{N}$ এবং p . q সহমৌলিক।

[ $\sqrt{2}$ ধনাত্মক সংখ্যা বলে $p . q \in \mathbb{Z}$ কে $p. q \in \mathbb{N}$ লিখা যায় এবং $1 < \sqrt{2} < 2$ বলে $q > 1$ ]

বা, $2 = \frac{p^2}{q^2}$ [ উভয় পক্ষকে বর্গ করে ।]

বা, $2q = \frac{p}{q} \cdot p$ [উভয় পক্ষকে $q \neq 0$ দ্বারা ভাগ করে ।]

স্পষ্টত 2 এবং q স্বাভাবিক (পূর্ন ) সংখ্যা বলে তাদের গুণফল 2q পূর্ন সংখ্যা । কিন্তু $\frac{p}{q}$ ভগ্নাংশ এবং p পূর্ণ সংখ্যা বলে তাদের গুণফল $\frac{p}{q} \cdot p$ একটি ভগ্নাংশ , অর্থাৎ পূর্ন সংখ্যা নয় ; কেননা p. q সহমৌলিক। আর একটি পূর্ণ সংখ্যা একটি প্রকৃত ভগ্নাংশের সমান হতে পারেনা ।

$\therefore\ 2q \neq \frac{p}{q} \cdot p$

$\therefore\ \sqrt{2}$ এর মান $\frac{p}{q}$ আকারের কোন সংখ্যা হতে পারেনা

$\therefore\ \sqrt{2}$ একটি মূলদ সংখ্যা । (প্রমাণিত )

17. দেখাও যে, $\sqrt{5}$ অমূলদ সংখ্যা।

[য.'০৬; সি .'০৬ ; ব.'০৭]

প্রমাণ ঃ $2^2 = 4 . (\sqrt{5})^2 = 5 . 3^2 = 9$

$\therefore\ 2 < \sqrt{5} < 3$

$\therefore\ \sqrt{5}$ পূর্ন ( স্বভাবিক ) সংখ্যা নয় ।

[ $\because$ 2 এবং 3 এর মধ্যে কোন স্বভাবিক সংখ্যা নেই ।]

যদি সম্ভব হয় তবে মনে করি , $\sqrt{5}$ একটি মূলদ সংখ্যা অর্থাৎ মূলদ ভগ্নাংশ এবং

$\sqrt{5} = \frac{p}{q}$ ; যেখানে $p. q \in \mathbb{N}$ এবং p . q সহমৌলিক ।

[ $\sqrt{5}$ ধনাত্মক সংখ্যা বলে $p . q \in \mathbb{Z}$ কে $p. q \in \mathbb{N}$ লিখা যায় ]

বা, $5 = \frac{p^2}{q^2}$ [উভয় পক্ষকে বর্গ করে।]

বা, $5q = \frac{p}{q} \cdot p$

[ উভয় পক্ষকে $q\ (q \neq 0)$ দ্বারা ভাগ করে ।]

স্পষ্টত 5 এবং q স্বাভাবিক (পূর্ন ) সংখ্যা বলে তাদের গুণফল 5q পূর্ন সংখ্যা । কিন্তু $\frac{p}{q}$ ভগ্নাংশ এবং p পূর্ণ সংখ্যা বলে তাদের গুণফল $\frac{p}{q} \cdot p$ একটি ভগ্নাংশ . অর্থাৎ পূর্ন সংখ্যা নয় ; কেননা p. q সহমৌলিক। আর একটি পূর্ণ সংখ্যা একটি প্রকৃত ভগ্নাংশের সমান হতে পারেনা ।

$\therefore\ 5q \neq \frac{p}{q} \cdot p$

$\therefore\ \sqrt{5}$ এর মান $\frac{p}{q}$ আকারের কোন সংখ্যা হতে পারেনা

$\therefore\ \sqrt{5}$ একটি মূলদ সংখ্যা । (প্রমাণিত )

18. $a$ এবং $b$ বাস্তব সংখ্যা হলে প্রমাণ কর যে,

(i) $|a - b| \geq |a| - |b|$ [ব.'০৮; মা.'০৯;ঢা.'১১]

(ii) $|a - b| \geq ||a| - |b||$ [রা.'০২]

(i) প্রমাণ ঃ আমরা জানি .

$|a+b| \le |a| + |b|$ ..........(i)

এখন, $|a| = |(a-b)+b| \le |a-b| + |b|$

[(i) নং দ্বারা ]

$\Rightarrow |a| - |b| \le |a-b|$ ... ... (ii)

$\therefore |a-b| \ge |a| - |b|$ (Proved)

**(ii)** $|a+b| \le |a| + |b|$ ..........(i)

$|a| = |(a-b)+b| \le |a-b| + |b|$

[(i) নং দ্বারা ]

$\Rightarrow |a| - |b| \le |a-b|$ ... ... (ii)

$\therefore |b| - |a| \le |b-a| = |a-b|$

$\Rightarrow -(|b| - |a|) \ge -|a-b|$

$\Rightarrow -|a-b| \le |a| - |b|$ ...... (iii)

(ii) এবং (iii) হতে আমরা পাই,

$-|a-b| \le |a| - |b| \le |a-b|$

$\therefore |a-b| \ge ||a| - |b||$ (Proved)



**19.** $a$ এবং $b$ বাস্তব সংখ্যা হলে প্রমাণ কর যে, $|a-b| \le |a| + |b|$ [চ.'০৯; য.'১০; কুয়েট'১২-১৩]

প্রমাণ : $|-ab| \ge -ab$ [$\because |x| \ge x$]

$\Rightarrow 2|ab| \ge -2ab$, [$\because |-x| = |x|$]

$\Rightarrow a^2 + b^2 + 2|a||b| \ge a^2 + b^2 - 2ab$

[$\because |ab| = |a||b|$]

$\Rightarrow |a|^2 + |b|^2 + 2|a||b| \ge (a-b)^2$

$\Rightarrow (|a| + |b|)^2 \ge |a-b|^2$

যেহেতু $|a| + |b| \ge 0$ এবং $|a-b| \ge 0$, সুতরাং উভয় পক্ষকে বর্গমূল করে পাই,

$|a-b| \le |a| + |b|$ (Proved)

বিকল্প পদ্ধতি : আমরা জানি,

$-|a| \le a \le |a|$ ... ... (i) এবং

$-|b| \le b \le |b| \Rightarrow |b| \ge -b \ge -|b|$

$\Rightarrow -|b| \le -b \le |b|$ ... ... (ii)

(i) এবং (ii) যোগ করে আমরা পাই,

$-(|a| + |b|) \le a - b \le (|a| + |b|)$

$\therefore |a-b| \le |a| + |b|$ (Proved)

**20.** প্রমাণ কর যে, $|a-c| \le |a-b| + |b-c|$; যেখানে $a, b, c \in \mathbb{R}$.

প্রমাণ : আমরা জানি,

$|a+b| \le |a| + |b|$ ..........(i)

$|a-c| = |(a-b) + (b-c)| \le |a-b| + |b-c|$

$\therefore |a-c| \le |a-b| + |b-c|$ (Proved)

**21(a)** $|x-1| < 2$ হলে দেখাও যে, $|x^2-1| < 8$

প্রমাণ : দেওয়া আছে, $|x-1| < 2$ ... ... (i)

$|x+1| = |(x-1)+2| \le |x-1| + |2|$

[$\therefore |a+b| \le |a| + |b|$ ]

$\Rightarrow |x+1| \le |x-1| + |2| < 2 + 2$. [(i)নং দ্বারা ]

$\therefore |x+1| < 4$ ... ... (ii)

$(i) \times (ii) \Rightarrow |x-1||x+1| < 2 \times 4$

$\therefore |x^2-1| < 8$ (Proved)

[বি.দ্র. : $-1 < x < 3$ সীমার মধ্যে $x$ এর সকল মানের জন্য $(-1)^2 < x^2 < 3^2$ সত্য নয়। কেননা $-1 < -\frac{1}{2} < 3$ সত্য হলেও $(-1)^2 < (-\frac{1}{2})^2 < 3^2$ সত্য নয়। তাই, এক্ষেত্রে (8) এর নিয়মে প্রমাণ সঠিক হবেনা ]

**21(b)** $|x-1| < \frac{1}{2}$ হলে দেখাও যে,

$|x^2-1| < \frac{5}{4}$

প্রমাণ : দেওয়া আছে, $|x-1| < \frac{1}{2}$

$\Rightarrow -\frac{1}{2} < x - 1 < \frac{1}{2}$

$\Rightarrow -\frac{1}{2} + 1 < x - 1 + 1 < \frac{1}{2} + 1$

$\Rightarrow \frac{1}{2} < x < \frac{3}{2} \Rightarrow \frac{1}{4} < x^2 < \frac{9}{4}$ [$\because x > 0$]

$\Rightarrow \frac{1}{4} - 1 < x^2 - 1 < \frac{9}{4} - 1 \Rightarrow -\frac{3}{4} < x^2 - 1 < \frac{5}{4}$

$\Rightarrow -\frac{5}{4} < -\frac{3}{4} < x^2 - 1 < \frac{5}{4}$

$\Rightarrow -\frac{5}{4} < x^2 - 1 < \frac{5}{4}$

$\therefore \ |x^2 - 1| < \frac{5}{4}$ (Proved)

**(c) $|x-1|<3$ হলে দেখাও যে, $|x^3-1|<63$**

দেওয়া আছে, $|x-1|<3 \Rightarrow -3<x-1<3$

$\Rightarrow -3+1<x-1+1<3+1$

$\Rightarrow -2<x<4 \Rightarrow -8<x^3<64$

$\Rightarrow -8-1<x^3-1<64-1$

$\Rightarrow -9<x^3-1<63$

$\Rightarrow -63<-9<x^3-1<63$

$\Rightarrow -63<x^3-1<63$

$\therefore \ |x^3-1|<63$ (Proved)

**(d) $|x-1|<\frac{1}{2}$ হলে, দেখাও যে $|x^3-1|<\frac{19}{8}$**



দেওয়া আছে, $|x-1|<\frac{1}{2} \Rightarrow -\frac{1}{2}<x-1<\frac{1}{2}$

$\Rightarrow -\frac{1}{2}+1<x-1+1<\frac{1}{2}+1$

$\Rightarrow \frac{1}{2}<x<\frac{3}{2} \Rightarrow \frac{1}{8}<x^3<\frac{27}{8}$

$\Rightarrow \frac{1}{8}-1<x^3-1<\frac{27}{8}-1$

$\Rightarrow -\frac{7}{8}<x^3-1<\frac{19}{8}$

$\Rightarrow -\frac{19}{8}<-\frac{7}{8}<x^3-1<\frac{19}{8}$

$\Rightarrow -\frac{19}{8}<x^3-1<\frac{19}{8}$

$\therefore \ |x^3-1|<\frac{19}{8}$ (Proved)

**22.** $x \in \mathbb{R}$ এর সীমা নির্ণয় কর ; যেখানে $x^2+6x-27>0$ এবং $3x-x^2+4>0$

সমাধান ঃ $x^2+6x-27>0$

$\Rightarrow (x+9)(x-3)>0$

$\Rightarrow \{x-(-9)\}(x-3)>0$

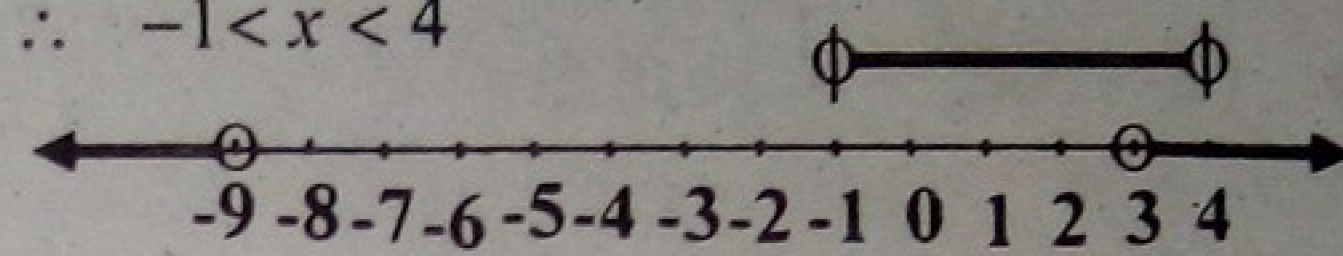
$\therefore \ x>3$ অথবা $x<-9$

$3x-x^2+4>0 \Rightarrow x^2-3x-4<0$

$\Rightarrow (x-4)(x+1)<0$

$\Rightarrow (x-4)\{x-(-1)\}<0$

$\therefore \ -1<x<4$




সংখ্যা রেখা হতে আমরা পাই , $3<x<4$

**23. $x \in \mathbb{R}$ এর সীমা নির্ণয় কর ; যেখানে $5x-1<(x+1)^2<7x-3$**

সমাধান ঃ দেওয়া আছে , $5x-1<(x+1)^2<7x-3$

$\therefore \ 5x-1<(x+1)^2$ এবং $(x+1)^2<7x-3$

এখন , $5x-1<(x+1)^2 \Rightarrow 5x-1<x^2+2x+1$

$\Rightarrow x^2-3x+2>0 \Rightarrow (x-2)(x-1)>0$

$\therefore \ x>2$ অথবা $x<1$

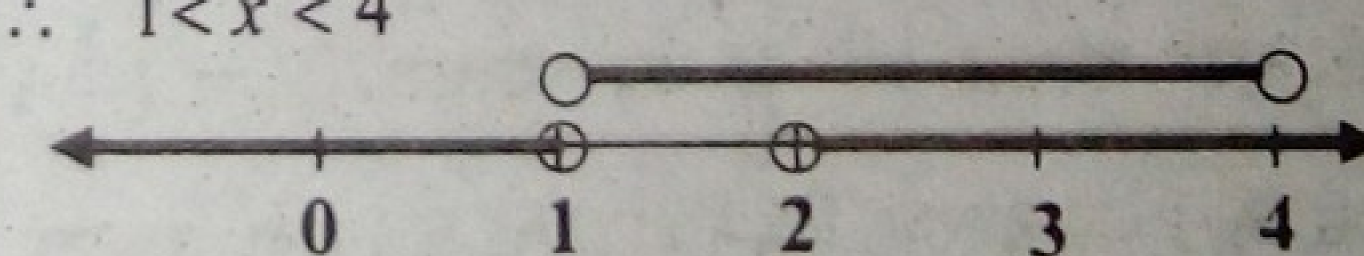
আবার , $(x+1)^2<7x-3$

$\Rightarrow x^2+2x+1<7x-3$

$\Rightarrow x^2-5x+4<0$

$\Rightarrow (x-4)(x-1)<0$

$\therefore \ 1<x<4$




সংখ্যা রেখা হতে আমরা পাই , $2<x<4$

**24(a) A = { 0, 1, 2, 3, 4, 5} হলে এর ক্ষুদ্রতম উর্ধ্বসীমা কত ?** **[টেক্সটাইল'০৯-১০]**

সমাধান : এখানে, $A=\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ এর উর্ধ্বসীমাগুলির সেট $\{x \in \mathbb{R} : x \geq 5\}$. কিন্তু $\{x \in \mathbb{R} : x \geq 5\}$ এর ক্ষুদ্রতম উপাদান 5 .

$\therefore$ A এর ক্ষুদ্রতম উর্ধ্বসীমা 5.

**(b) বাস্তব সংখ্যার সেট $\mathbb{R}$ এর উপসেট $S=\{x : 5x^2-16x+3<0\}$ এর বৃহত্তম নিম্নসীমা (Inf S)**

এবং ক্ষুদ্রতম উর্ধ্বসীমা (SupS) নির্ণয় কর।

[চ.'০০; কুয়েট'০৪-০৫]

সমাধান ঃ আমাদের আছে , $5x^2-16x+3<0$

$\Rightarrow 5x^2-15x-x+3<0$

$\Rightarrow 5x(x-3)-1(x-3)<0$

$\Rightarrow (x-3)(5x-1)<0$

$\Rightarrow (x-3)(x-\frac{1}{5})<0$

$\therefore \frac{1}{5}<x<3$

$\therefore$ S এর বৃহত্তম নিম্নসীমা $\frac{1}{5}$ এবং ক্ষুদ্রতম উর্ধ্বসীমা 3

**25. বাস্তব সংখ্যার সেট $\mathbb{R}$ এর উপসেট $S=\{n-1: n\in\mathbb{N}\}$ এর বৃহত্তম নিম্নসীমা ( Inf S ) এবং ক্ষুদ্রতম উর্ধ্বসীমা ( Sup S ) নির্ণয় কর।**

সমাধান ঃ $S=\{n-1: n\in\mathbb{N}\}$

$=\{0, 1, 2, 3, 4, \ldots\ldots\ldots\}$



এখানে, S সেটটি নিম্নেসীমিত এবং এর নিম্নসীমাগুলির সেট $\{x\in\mathbb{R}: x\le 0\}$.

$\therefore$ S এর বৃহত্তম নিম্নসীমা (Inf S) = 0

আবার, S সেটটি উর্ধ্বসীমিত নয় বলে এর কোন উর্ধ্বসীমা নাই। সুতরাং, S এর ক্ষুদ্রতম উর্ধ্বসীমা (Sup S) নাই।

**26. বাস্তব সংখ্যার সেট $\mathbb{R}$ এর উপসেট $S=\{\frac{1}{n}: n\in\mathbb{N}\}$ এর বৃহত্তম নিম্নসীমা (Inf S ) এবং ক্ষুদ্রতম উর্ধ্বসীম ( Sup S ) নির্ণয় কর।**

সমাধান ঃ $S=\{\frac{1}{n}: n\in\mathbb{N}\}=\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \cdots\}$

এখানে, S সেটটি নিম্নেসীমিত এবং এর নিম্নসীমাগুলির সেট $\{x\in\mathbb{R}: x\le 0\}$.

$\therefore$ S এর বৃহত্তম নিম্নসীমা (Inf S) = 0

আবার, S সেটটি উর্ধ্বসীমিত এবং এর উর্ধ্বসীমাগুলির সেট $\{x\in\mathbb{R}: x\ge 1\}$.

$\therefore$ S এর ক্ষুদ্রতম উর্ধ্বসীমা (Sup S) = 1

**27. বাস্তব সংখ্যার সেট $\mathbb{R}$ এর উপসেট $S=\{n: n\in\mathbb{Z}\}$ এর বৃহত্তম নিম্নসীমা ( Inf S ) এবং ক্ষুদ্রতম উর্ধ্বসীমা ( Sup S ) নির্ণয় কর।**

সমাধান ঃ $S=\{n: n\in\mathbb{Z}\}$

$=\{\cdots -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \cdots\}$

এখানে, S সেটটি নিম্নে বা উর্ধ্বে সীমিত নয় বলে এর বৃহত্তম নিম্নসীমা (Inf S) বা ক্ষুদ্রতম উর্ধ্বসীমা (Sup S) কোনোটিই নাই।

**31. নিচের প্রত্যেক অসমতাযুগলের সমাধান সেটের লেখচিত্র অঙ্কন কর:**

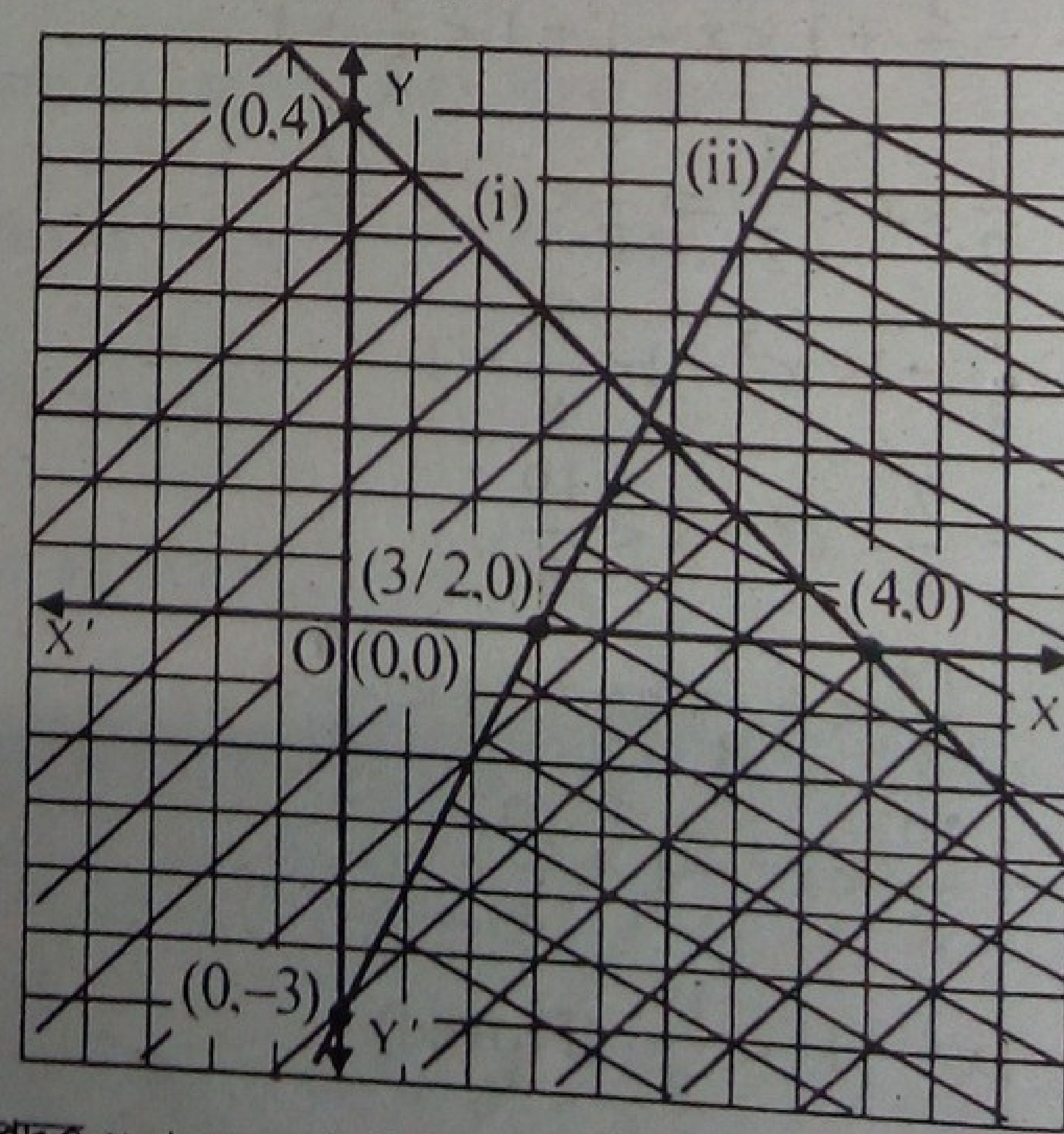
**(a)** $x+y-4\le 0$ এবং $2x-y-3\ge 0$

সমাধান ঃ প্রদত্ত অসমতাযুগলের অনুরূপ রৈখিক সমীকরণ,

$x+y=4 \Rightarrow \frac{x}{4}+\frac{y}{4}=1\cdots\cdots$(i).

$2x-y=3 \Rightarrow \frac{x}{3/2}+\frac{y}{-3}=1\cdots\cdots$ (ii)

একটি ছক কাগজে স্থানাঙ্কের অক্ষরেখা X'OX ও YOY' অঙ্কন করি। $x$-অক্ষ ও $y$-অক্ষ বরাবর ছোট 2 বর্গের বাহুর দৈর্ঘ্য = 1 একক ধরে (i) ও (ii) রেখার লেখচিত্র রেখা অঙ্কন করি।




প্রদত্ত $x+y-4\le 0$ অসমতায় (0.0) বসিয়ে যাচাই করলে পাওয়া যায় $-4\le 0$. যা সত্য। সুতরাং (i) রেখাস্থ ও এর (0.0) বিন্দুর পার্শ্বস্থ সকল বিন্দুর সেট এই

অসমতার লেখচিত্র। তদ্রূপ $2x - y - 3 \geq 0$ অসমতায় $(0,0)$ বসিয়ে যাচাই করলে পাওয়া যায় $-3 \geq 0$, যা অসত্য। সুতরাং (ii) রেখাস্থ ও এর যে পাশে মূলবিন্দু তার বিপরীত পার্শ্বস্থ সকল বিন্দুর সেট $2x - y - 3 \geq 0$ অসমতার লেখচিত্র।

অতএব, এই রেখা দুইটির সংশিষ্ট অংশ সহ এই দুইভাবে চিহ্নিত অংশের ছেদাংশই অসমতা দুইটির যুগপৎসমাধানের লেখচিত্র। চিত্রে গাঢ়ভাবে চিহ্নিত অংশই (সীমারেখাসহ) এই লেখচিত্র।

**(b)** $x + y - 3 > 0$ এবং $2x - y - 5 > 0$

**সমাধান :** প্রদত্ত অসমতাযুগলের অনুরূপ রৈখিক সমীকরণ,

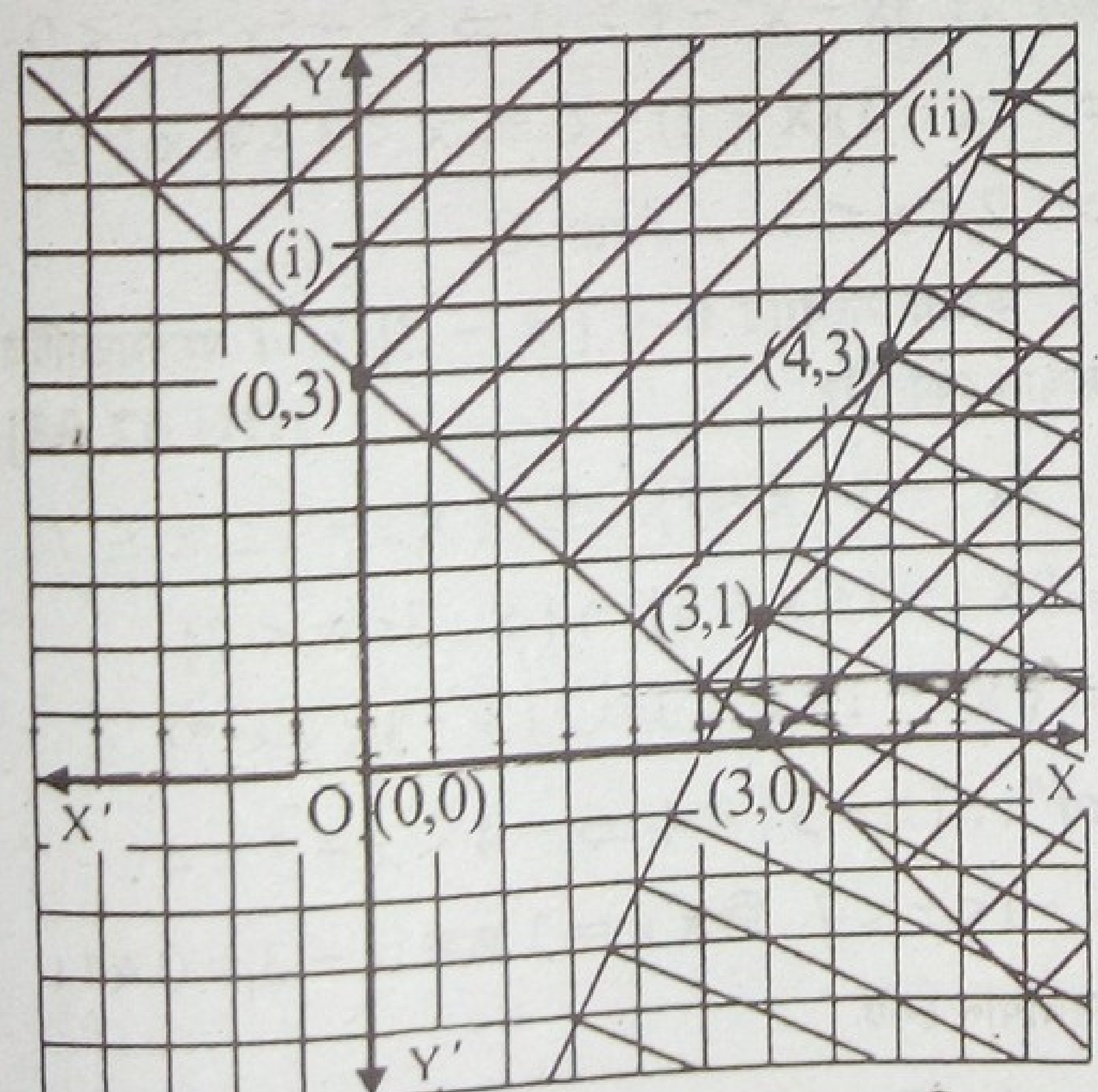
$$x + y = 3 \Rightarrow \frac{x}{3} + \frac{y}{3} = 1 \cdots \cdots \text{(i)},$$

$$2x - y = 5 \Rightarrow y = 2x - 5 \cdots \cdots \text{(ii)}.$$

(ii) – এর উপর যেকোনো দুইটি বিন্দু $(3, 1)$ ও $(4, 3)$ নির্ণয় করি।



একটি ছক কাগজে স্থানাঙ্কের অক্ষরেখা $X'OX$ ও $YOY'$ অঙ্কন করি। $x$-অক্ষ ও $y$-অক্ষ বরাবর ছোট 2 বর্গের বাহুর দৈর্ঘ্য = 1 একক ধরে (i) ও (ii) রেখার লেখচিত্র রেখা অঙ্কন করি।




প্রদত্ত $x + y - 3 > 0$ অসমতায় $(0,0)$ বসিয়ে যাচাই করলে পাওয়া যায় $-3 > 0$, যা অসত্য। সুতরাং (i) এর যে পাশে মূলবিন্দু $(0,0)$ তার বিপরীত পার্শ্বস্থ সকল বিন্দুর সেট এই অসমতার লেখচিত্র। তদ্রূপ $2x - y - 5 > 0$ অসমতায় $(0,0)$ বসিয়ে যাচাই করলে পাওয়া যায় $-5 \geq 0$, যা অসত্য। সুতরাং (ii) রেখার যে পাশে মূলবিন্দু তার বিপরীত পার্শ্বস্থ সকল বিন্দুর সেট এই অসমতার লেখচিত্র।

অতএব, এই রেখা দুইটির সংশিষ্ট অংশ সহ এই দুইভাবে চিহ্নিত অংশের ছেদাংশই অসমতা দুইটির যুগপৎসমাধানের লেখচিত্র। চিত্রে গাঢ়ভাবে চিহ্নিত অংশই এই লেখচিত্র।

**(c)** $3x - 3y > 5$ এবং $x + 3y \leq 9$

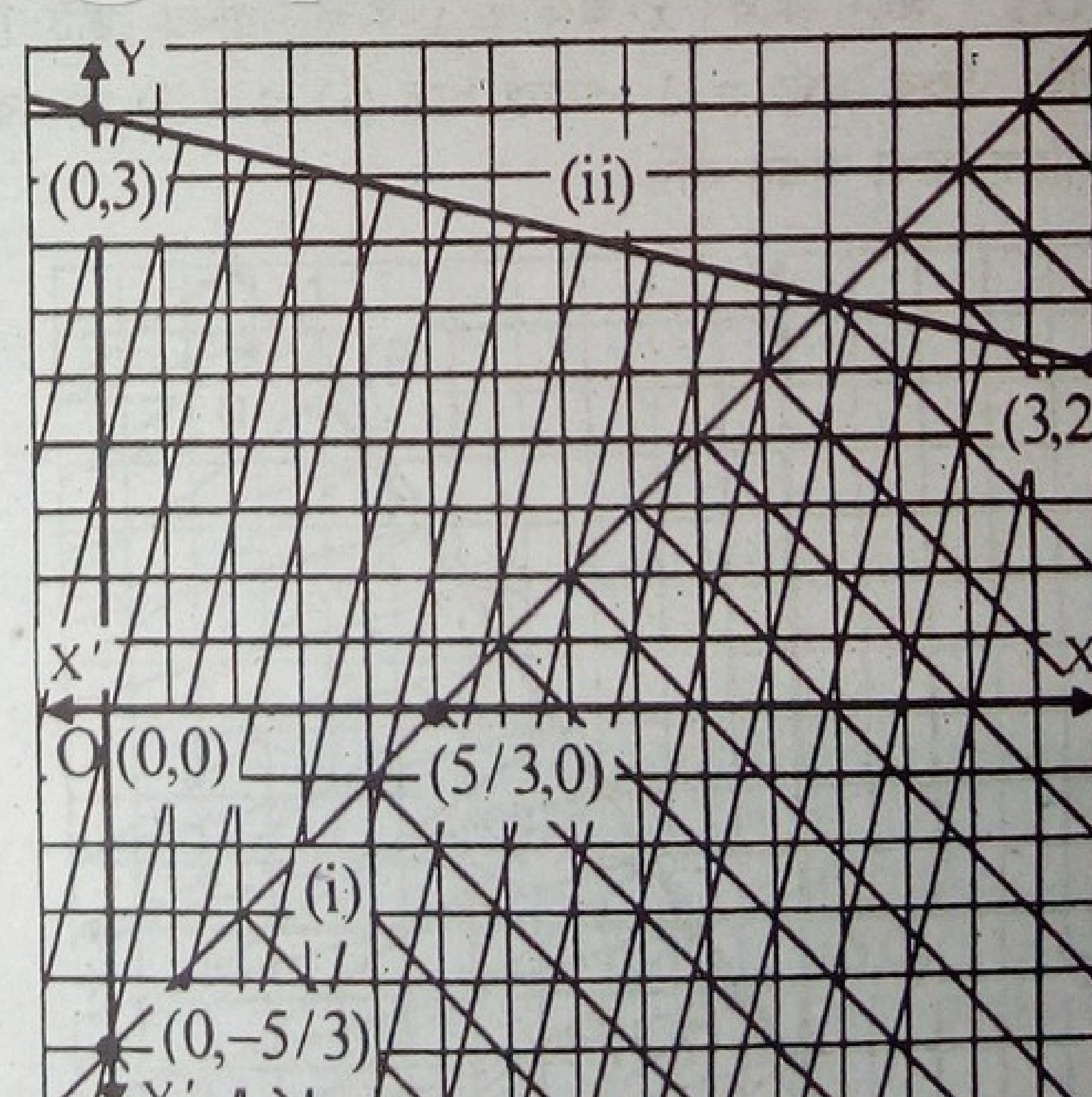
**সমাধান :** প্রদত্ত অসমতাযুগলের অনুরূপ রৈখিক সমীকরণ,

$$3x - 3y = 5 \Rightarrow \frac{x}{5/3} + \frac{y}{-5/3} = 1 \cdots \cdots \text{(i)},$$

$$x + 3y = 9 \Rightarrow x = 9 - 3y \cdots \cdots \text{(ii)}.$$

(ii) – এর উপর যেকোনো দুইটি বিন্দু $(0, 3)$ ও $(3, 2)$ নির্ণয় করি।

একটি ছক কাগজে স্থানাঙ্কের অক্ষরেখা $X'OX$ ও $YOY'$ অঙ্কন করি। $x$-অক্ষ ও $y$-অক্ষ বরাবর ছোট 3 বর্গের বাহুর দৈর্ঘ্য = 1 একক ধরে (i) ও (ii) রেখার লেখচিত্র রেখা অঙ্কন করি।




প্রদত্ত $3x - 3y > 5$ অসমতায় $(0,0)$ বসিয়ে যাচাই করলে পাওয়া যায় $0 > 5$, যা অসত্য। সুতরাং (i) এর যে পাশে মূলবিন্দু $(0,0)$ তার বিপরীত পার্শ্বস্থ সকল বিন্দুর সেট এই অসমতার লেখচিত্র। তদ্রূপ $x + 3y \leq 9$ অসমতায় $(0,0)$ বসিয়ে যাচাই করলে পাওয়া যায়

$0 \leq 9$, যা সত্য। সুতরাং (ii) রেখাস্থ ও এর (0,0) বিন্দুর পার্শ্বস্থ সকল বিন্দুর সেট এই অসমতার লেখচিত্র।

অতএব, এই রেখা দুইটির সংশিষ্ট অংশ সহ এই দুইভাবে চিহ্নিত অংশের ছেদাংশই অসমতা দুইটির যুগপৎসমাধানের লেখচিত্র। চিত্রে (ii) নং রেখাস্থ বিন্দুসহ গাঢ়ভাবে চিহ্নিত অংশই এই লেখচিত্র।

**(d)** $5x - 3y - 9 > 0$ এবং $3x - 2y \geq 5$

**সমাধান :** প্রদত্ত অসমতাযুগলের অনুরূপ রৈখিক সমীকরণ,

$5x - 3y = 9 \Rightarrow 3y = 5x - 9$

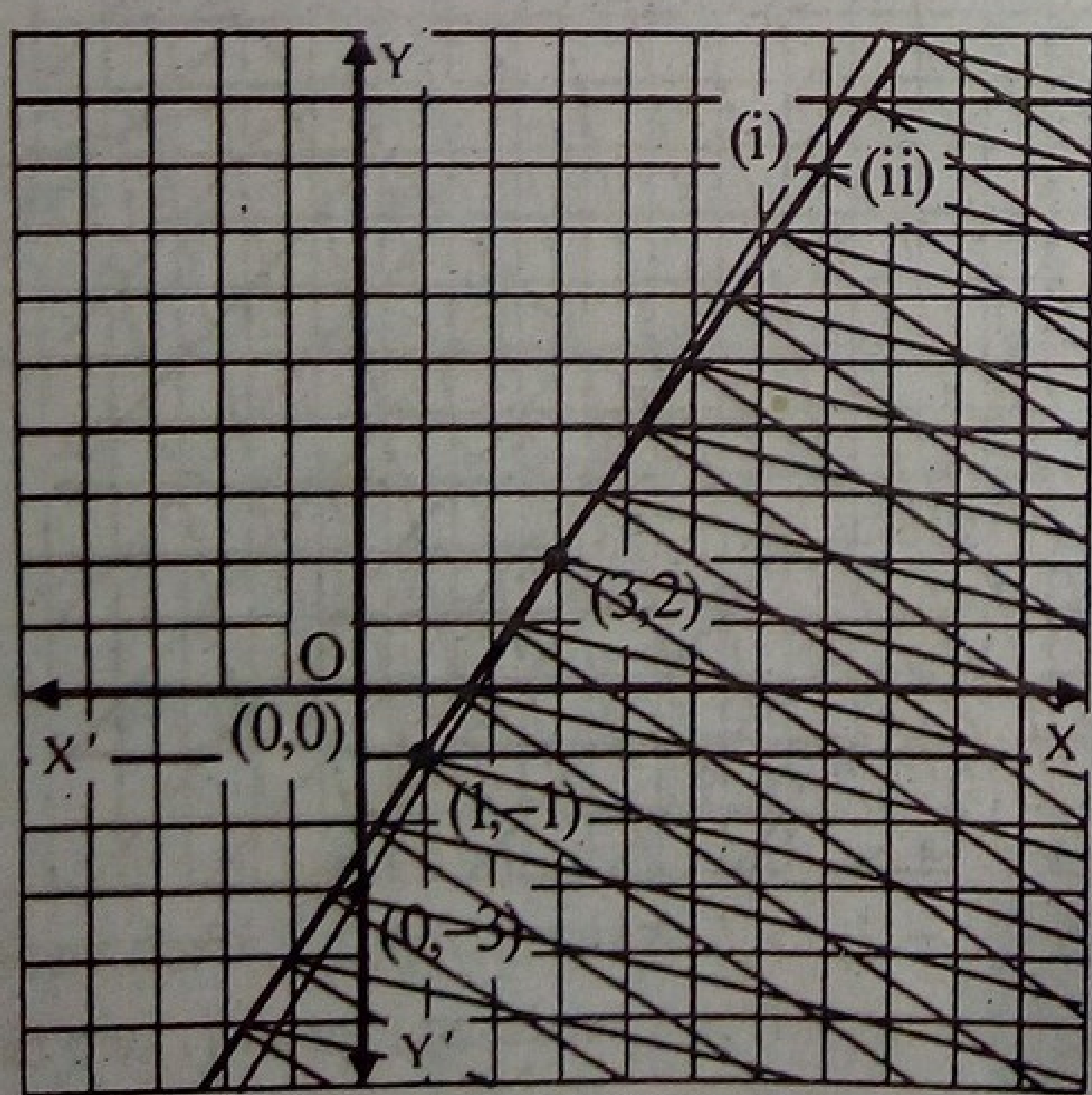
$\Rightarrow y = \dfrac{5}{3}x - 3 \cdots\cdots$ (i), যা $(0, -3)$, $(3,2)$ দিয়ে অতিক্রম করে।

এবং $3x - 2y = 5 \Rightarrow 2y = 3x - 5$

$\Rightarrow y = \dfrac{3x-5}{2} \cdots\cdots$ (ii), যা $(1, -1)$, $(3, 2)$ দিয়ে অতিক্রম করে।



একটি ছক কাগজে স্থানাঙ্কের অক্ষরেখা $X'OX$ ও $YOY'$ অঙ্কন করি। $x$-অক্ষ ও $y$-অক্ষ বরাবর ছোট 1 বর্গের বাহুর দৈর্ঘ্য = 1 একক ধরে (i) ও (ii) রেখার লেখচিত্র রেখা অঙ্কন করি।




প্রদত্ত $5x - 3y - 9 > 0$ অসমতায় (0,0) বসিয়ে যাচাই করলে পাওয়া যায় $-9 > 0$, যা অসত্য। সুতরাং (i) এর যে পাশে মূলবিন্দু (0,0) তার বিপরীত পার্শ্বস্থ সকল বিন্দুর সেট এই অসমতার লেখচিত্র। তদ্রূপ $3x - 2y \geq 5$ অসমতায় (0,0) বসিয়ে যাচাই করলে পাওয়া যায় $0 \geq 5$, যা অসত্য। সুতরাং (ii) রেখাস্থ ও এর (0,0) বিন্দুর বিপরীত পার্শ্বস্থ সকল বিন্দুর সেট এই অসমতার লেখচিত্র।

অতএব, এই রেখা দুইটির সংশিষ্ট অংশ সহ এই দুইভাবে চিহ্নিত অংশের ছেদাংশই অসমতা দুইটির যুগপৎসমাধানের লেখচিত্র। চিত্রে (ii) নং রেখাস্থ বিন্দুসহ গাঢ়ভাবে চিহ্নিত অংশই এই লেখচিত্র।

**32. (a) $5x - 5 > 25$ অসমতাটির সমাধান সেট কোনটি?**

A. $S = \{x \in \mathbb{R} : x > 6\}$ B. $S = \{x \in \mathbb{R} : x < 6\}$
C. $S = \{x \in \mathbb{R} : x \leq 6\}$ D. $S = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 6\}$

*Sol*$^n$.: $5x > 25 + 5 \Rightarrow x > 6$ $\therefore$ Ans. A

**(b) $5x - x^2 - 6 > 0$ অসমতাটির সমাধান কোনটি?**
**[DU 08-09; JU 09-10]**

A. $x < 2$ B. $2 > x > 3$
C. $2 < x < 3$ D. $x < 2$ অথবা $x > 3$

*Sol*$^n$.: $5x - x^2 - 6 > 0 \Rightarrow x^2 - 5x + 6 < 0$

$\Rightarrow (x-3)(x-2) < 0 \Rightarrow x < 3$ এবং $x > 2$

$\Rightarrow 2 < x < 3$ $\therefore$ Ans. C

**(c) বাস্তব সংখ্যায় $0 < |x - 3| < 4$ অসমতাটির সমাধান কোনটি?** **[DU 02-03]**

A. $\{x : -1 < x < 7\}$ B. $\{x : -1 \leq x \leq 7\}$
C. $\{x : -1 < x < 3\} \cap \{x : 3 < x < 7\}$
D. $\{x : -1 < x < 3\} \cup \{x : 3 < x < 7\}$

*Sol*$^n$.: $|x - 3| < 4 \Rightarrow -4 < x - 3 < 4$

$\Rightarrow -1 < x < 7$. কিন্তু $x = 3$ হলে $|x - 3| = 0$ হয়।

$\therefore$ সমাধান সেট

$= \{x \in \mathbb{R} : -1 < x < 3\} \cup \{x \in \mathbb{R} : 3 < x < 7\}$

**33.** দেওয়া আছে, $f(x) = 3x - x^2 + 4$ এবং $g(x) = x^2 + 6x - 27$.

**(a)** বাস্তব সংখ্যার সেট $\mathbb{R}$ এর উপসেট $S = \{ x : g(x) < 0 \}$ এর বৃহত্তম নিম্নসীমা (Inf S) এবং ক্ষুদ্রতম উর্ধ্বসীমা (SupS) নির্ণয় কর।

**(b)** $f(x) > 0$ অসমতাকে পরমমান চিহ্নের সাহায্যে প্রকাশ কর।

**(c)** $x \in \mathbb{R}$ এর সীমা নির্ণয় কর ; যেখানে $f(x) > 0$ এবং $g(x) > 0$.

**সমাধান :** দেওয়া আছে, $f(x) = 3x - x^2 + 4$ এবং $g(x) = x^2 + 6x - 27$.

**(a)** $S = \{ x : g(x) < 0 \}$

$= \{ x : x^2 + 6x - 27 < 0 \}$

$= \{ x : (x-3)(x+9) < 0 \}$.

$= \{ x : -9 < x < 3 \}$

[ $\because (x-3)\{x-(-9)\} < 0$ এবং $3 > -9$ ]

$\therefore$ S এর বৃহত্তম নিম্নসীমা (Inf S) $= -9$ এবং ক্ষুদ্রতম উর্ধ্বসীমা (Sup S) $= 3$



**(b)** $f(x) > 0 \Rightarrow 3x - x^2 + 4 > 0$

$\Rightarrow x^2 - 3x - 4 < 0 \Rightarrow (x-4)(x+1) < 0$

$\therefore -1 < x < 4$

সকল পক্ষে $-\dfrac{-1+4}{2} = -\dfrac{3}{2}$ যোগ করে পাই,

$-1 - \dfrac{3}{2} < x - \dfrac{3}{2} < 4 - \dfrac{3}{2}$

$\Rightarrow -\dfrac{5}{2} < x - \dfrac{3}{2} < \dfrac{5}{2}$

$\therefore |x - \dfrac{3}{2}| < \dfrac{5}{2}$

**(c)** $f(x) > 0 \Rightarrow 3x - x^2 + 4 > 0$

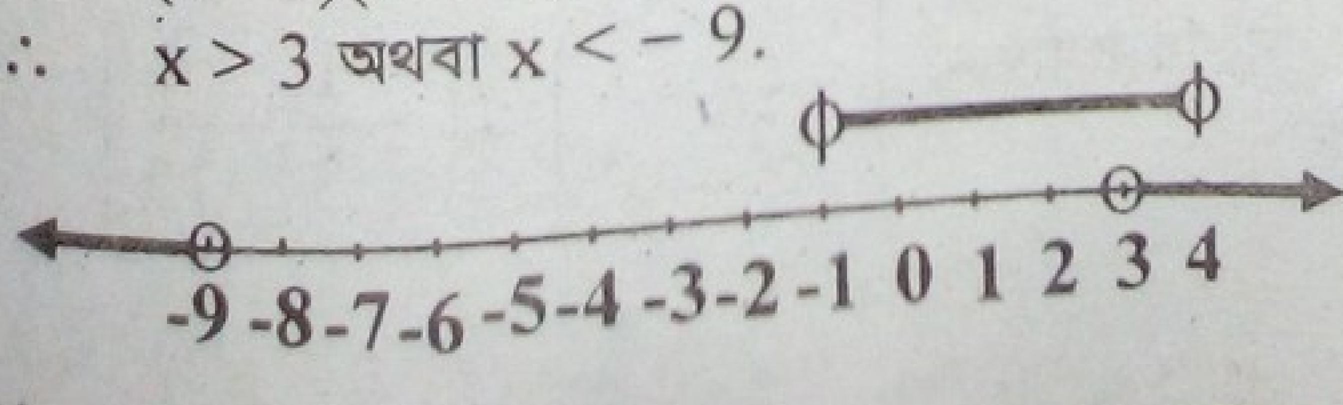
$\Rightarrow x^2 - 3x - 4 < 0 \Rightarrow (x-4)(x+1) < 0$

$\therefore -1 < x < 4$

$g(x) < 0 \Rightarrow x^2 + 6x - 27 > 0$

$\Rightarrow (x-3)(x+9) > 0$

$\therefore x > 3$ অথবা $x < -9$.




যেহেতু $f(x) > 0$ এবং $g(x) > 0$, সুতরাং সংখ্যারেখা হতে $x \in \mathbb{R}$ এর নির্ণেয় সীমা , $3 < x < 4$.

### অতিরিক্ত প্রশ্ন (সমাধানসহ)

**1.** $x$ **এর মান কত হলে,** $\dfrac{x+2}{|x+1|}$ **এর মান বাস্তব হবে?**

**সমাধান ঃ** $\dfrac{x+2}{|x+1|} \in \mathbb{R}$ যদি ও কেবল যদি , $x \in \mathbb{R}$ এবং $x + 1 \neq 0$ ie $x \neq -1$

সুতরাং , $x$ এর মান $= \mathbb{R} - \{-1\}$

**2.** $a < b$ **এবং k ধনাত্মক মূলদ সংখ্যা হলে প্রমাণ কর যে,** $a < \dfrac{a+bk}{1+k} < b$

**প্রমাণ ঃ** দেওয়া আছে , $a < b$

$\therefore \ ak < bk$ [ $\because$ k ধনাত্মক সংখ্যা ]

$\Rightarrow a + ak < a + bk$ [ উভয় পক্ষে $a$ যোগ করে । ]

$\Rightarrow a(1 + k) < a + bk$

$\Rightarrow a < \dfrac{a+bk}{1+k} \cdots (1)$ [ উভয় পক্ষকে $1 + k > 0$ দ্বারা ভাগ করে ]

আবার , $ak < bk$

$\Rightarrow ak + b < bk + b$ [ উভয় পক্ষে b যোগ করে । ]

$\Rightarrow ak + b < b(k + 1)$

$\Rightarrow \dfrac{a+bk}{1+k} < b \cdots (2)$ [ উভয় পক্ষকে $1 + k > 0$ দ্বারা ভাগ করে ]

(1) ও (2) হতে পাই , $a < \dfrac{a+bk}{1+k} < b$

**3.** $A = \{ x : x = 3n , n \in \mathbb{N} \}$ **হলে দেখাও যে, A গুণ প্রক্রিয়ার জন্য আবদ্ধ।**

**প্রমাণ ঃ** ধরি , $x_1 = 3p$ এবং $x_2 = 3q$ প্রদত্ত সেট A এর যেকোনো দুইটি উপাদান ; যেখানে $p, q \in \mathbb{N}$.

এখন , $x_1 x_2 = 3p \times 3q = 9pq$

$= 3(3pq) = 3r$ ;যেখানে $3pq = r$

যেহেতু $3, p, q \in \mathbb{N}$, সেহেতু $r = 3\ pq \in \mathbb{N}$

$\therefore\ 3r \in A$

$\therefore$ A গুণন প্রক্রিয়ার জন্য আবদ্ধ। (প্রমাণিত)

**ভর্তি পরীক্ষার MCQ ঃ**

**1. $|7 - 3x| \leq 5$ এর সমাধান –**

**[ DU 06-07; JU 09-10]**

*Sol*".: $|7 - 3x| \leq 5 \Rightarrow |3x - 7| \leq 5$

$\Rightarrow -5 \leq 3x - 7 \leq 5 \Rightarrow 2 \leq 3x \leq 12$

$\therefore\ 2/3 \leq x \leq 4$

**2. $-7 < x < -1$ কে পরম মানের সাহায্যে লিখলে দাঁড়ায়- [DU 04-05; CU 08-09; JU 09-10]**

*Sol*".: $-7 + 4 < x + 4 < -1 + 4$

$\Rightarrow\ -3 < x + 4 < 3\ \therefore |x + 4| < 3$

**3. $|x| \geq 3$ অসমতার সমাধান হবে- [CU 07-08]**

*Sol*".: $|x| \geq 3 \Rightarrow x \leq -3$ অথবা $x \geq 3$

$\Rightarrow (-\infty, -3] \cup [3, \infty)$



**4. কোন সংখ্যাটি অমূলদ– [ HSTU 05-06; SUST 04-05; SAU 07-08; JU 09-10]**

*Sol*".: **A. $\frac{11}{6}$ B. –3.3 C. 20200.. D. 1.1212..**

**Ans. C**

**5. সমাধান করঃ $|x - 5| - 2x > 4$ [SUST 08-09]**

*Sol*".: $x - 5 >$ হলে, $x - 5 - 2x > 4$

$\Rightarrow -x > 9 \Rightarrow x < -9$

$x - 5 < 0$ হলে, $-(x - 5) - 2x > 4$

$\Rightarrow -x + 5 - 2x > 4 \Rightarrow -3x > -1 \Rightarrow x < \frac{1}{3}$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান : $x < \frac{1}{3}$

**6. বাস্তব সংখ্যায় $\frac{1}{|2x-3|} > 5$ অসমতাটির সমাধান–**

**[DU 09-10; SUST 08-09]**

*Sol*".: $\frac{1}{|2x-3|} > 5 \Rightarrow |2x - 3| < \frac{1}{5}$

$\Rightarrow -\frac{1}{5} < 2x - 3 < \frac{1}{5} \Rightarrow -\frac{1}{5} + 3 < 2x < \frac{1}{5} + 3$

$\Rightarrow \frac{14}{5} < 2x < \frac{16}{5} \Rightarrow \frac{7}{5} < x < \frac{8}{5}$

কিন্তু $2x - 3 = 0$ ie, $x = \frac{3}{2}$ হলে, প্রদত্ত অসমতাটি অসংজ্ঞায়িত হয়।

$\therefore$ সমাধান $(\frac{7}{5}, \frac{3}{2}) \cup (\frac{3}{2}, \frac{8}{5})$

**7. $X = \{x : x < 0\}$ হলে X এর ক্ষুদ্রতম উর্ধ্বসীমা–**

**[JU 10-11, 09-10]**

*Sol*".: X এর উর্ধ্বসীমার সেট $= \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$

$\therefore$ X এর ক্ষুদ্রতম উর্ধ্বসীমা = 0.

**10. $|\pi - 2|$ কে পরমমান চিহ্ন ব্যতিত লিখলে দাঁড়ায়–**

**[JU 09-10]**

*Sol*".: $|\pi - 2| = \pi - 2, [\because \pi > 2]$

**11. বাস্তব সংখ্যায় $\frac{1}{|3x+1|} \geq 5$ অসমতাটির সমাধান-**

**DU 13-14**

A. $\left(-\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}\right) \cup \left(-\frac{1}{3}, -\frac{4}{5}\right)$ B. $\left(-\frac{2}{3}, -\frac{4}{15}\right)$

C. $\left[-\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}\right) \cup \left(-\frac{1}{3}, -\frac{4}{15}\right]$ D. None

*Sol*".: $\frac{1}{|3x+1|} \geq 5 \Rightarrow |3x + 1| \leq \frac{1}{5}$

$\Rightarrow -\frac{1}{5} \leq 3x + 1 \leq \frac{1}{5}$

$\Rightarrow -\frac{1}{5} - 1 \leq 3x \leq \frac{1}{5} - 1 \Rightarrow -\frac{6}{5} \leq 3x \leq -\frac{4}{5}$

$\Rightarrow -\frac{2}{5} \leq x \leq -\frac{4}{15}$. কিন্তু $3x + 1 = 0$ অর্থাৎ $x = -\frac{1}{3}$ হলে, প্রদত্ত অসমতাটি অসংজ্ঞায়িত হয়।

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান: $\left[-\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}\right) \cup \left(-\frac{1}{3}, -\frac{4}{15}\right]$