প্রশ্নমালা III

জটিল সংখ্যা

1. নিচের জটিল সংখ্যাগুলির মডুলাস ও আর্গুমেন্ট নির্ণয় কর এবং তাদেরকে পোলার আকারে প্রকাশ কর:

(a) দেওয়া আছে, $1+\sqrt{3}\,i$ [চ.'০০; কুয়েট'০৬-০৭,১০-১১]

মনে করি, $r\cos\theta = 1$ এবং $r\sin\theta = \sqrt{3}$

∴ মডুলাস $r = \sqrt{1^2+(\sqrt{3})^2}$, [∵ $r = \sqrt{x^2+y^2}$]

$= \sqrt{1+3} = \sqrt{4} = 2$

⇒ আর্গুমেন্ট $\theta = \tan^{-1}\frac{\sqrt{3}}{1}$ [∵ $\theta = \tan^{-1}\frac{y}{x}$]

$= \tan^{-1}\sqrt{3} = \frac{\pi}{3}$

∴ $1+\sqrt{3}\,i = r\cos\theta + i\,r\sin\theta$

$= r(\cos\theta + i\sin\theta) = 2(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3})$

1(b) দেওয়া আছে, $3-5i$ [চ.'০০]

মনে করি, $r\cos\theta = 3$ এবং $r\sin\theta = -5$

∴ মডুলাস $r = \sqrt{3^2+(-5)^2}$, [∵ $r = \sqrt{x^2+y^2}$]

$= \sqrt{9+25} = \sqrt{34}$

∴ আর্গুমেন্ট $\theta = \tan^{-1}(\frac{-5}{3})$, [∵ $\theta = \tan^{-1}\frac{y}{x}$]

$= -\tan^{-1}\frac{5}{3}$ [∵ $\tan^{-1}\frac{-y}{x} = -\tan^{-1}\frac{y}{x}$]

∴ $3-5i = r\cos\theta + i\,r\sin\theta$

$= \sqrt{34}(\cos\theta + i\sin\theta)$,

যেখানে $\theta = -\tan^{-1}\frac{5}{3}$

1(c) দেওয়া আছে, $-\sqrt{3}+i$ [বুয়েট'১১-১২]

মনে করি, $r\cos\theta = -\sqrt{3}$ এবং $r\sin\theta = 1$

∴ মডুলাস $r = \sqrt{(-\sqrt{3})^2+1^2}$ [∵ $r = \sqrt{x^2+y^2}$]

$= \sqrt{3+1} = \sqrt{4} = 2$

আর্গুমেন্ট $\theta = \tan^{-1}\frac{1}{-\sqrt{3}}$, [∵ $\theta = \tan^{-1}\frac{y}{x}$]

$= \pi - \tan^{-1}\frac{1}{\sqrt{3}}$ [∵ $\tan^{-1}\frac{y}{-x} = \pi - \tan^{-1}\frac{y}{x}$]

$= \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$

∴ $-\sqrt{3} + i = r\cos\theta + i\,r\sin\theta$

$= 2(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6})$

1(d) $-1+\sqrt{3}\,i$ [য.'০২,'১৫]

মনে করি, $r\cos\theta = -1$ এবং $r\sin\theta = \sqrt{3}$

∴ মডুলাস $r = \sqrt{(-1)^2+(\sqrt{3})^2} = 2$

এবং আর্গুমেন্ট $\theta = \tan^{-1}(\frac{\sqrt{3}}{-1})$, [∵ $\theta = \tan^{-1}\frac{y}{x}$]

$= \pi - \tan^{-1}(\frac{\sqrt{3}}{1}) = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$

∴ $-1+\sqrt{3}\,i = r\cos\theta + i\,r\sin\theta$

$= r(\cos\theta + i\sin\theta)$

$= 2(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3})$

1(e) $(2\sqrt{3}-2i)(-2\sqrt{3}+6i)$ [কুয়েট'১২-১৩]

$= (2\sqrt{3})(-2\sqrt{3}) - (2i)(6i) + \{12\sqrt{3}+4\sqrt{3}\}i$

$= -12 - 12i^2 + 16\sqrt{3}\,i$

$= -12 + 12 + 16\sqrt{3}\,i = 0 + 16\sqrt{3}\,i$

মনে করি, $r\cos\theta = 0$ এবং $r\sin\theta = 16\sqrt{3}$

∴ মডুলাস $r = \sqrt{0^2+(16\sqrt{3})^2} = 16\sqrt{3}$

আর্গুমেন্ট $\theta = \tan^{-1}\frac{16\sqrt{3}}{0} = \tan^{-1}(\tan\frac{\pi}{2})$

$= \frac{\pi}{2}$

∴ $(2\sqrt{3}-2i)(-2\sqrt{3}+6i) = 0 + 16\sqrt{3}\,i$

$= r\cos\theta + i\,r\sin\theta$

$= 16\sqrt{3}(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2})$

2. A + iB আকারে প্রকাশ কর ঃ

(a) $\frac{3+2i}{5-7i} = \frac{(3+2i)(5+7i)}{(5-7i)(5+7i)}$

$= \frac{15+21i+10i+14i^2}{5^2-7^2i^2} = \frac{15+31i-14}{25+49}$

$= \frac{1+31i}{74} = \frac{1}{74} + \frac{31}{74}i$, যা A + iB আকারে প্রকাশ করা হল ।

2(b) $\frac{1+5i}{1-2i} + \frac{5-3i}{2+3i}$

$= \frac{(1+5i)(1+2i)}{(1+2i)(1-2i)} + \frac{(5-3i)(2-3i)}{(2+3i)(2-3i)}$

$= \frac{1+7i-10}{1+4} + \frac{10-21i-9}{4+9}$

$= \frac{-9+7i}{5} + \frac{1-21i}{13} = \frac{-117+91i+5-105i}{65}$

$= (-\frac{112}{65}) + (-\frac{14}{65})i$, যা A + iB আকারে প্রকাশ করা হল ।

3. বর্গমূল নির্ণয় কর ঃ

(a) $7-30\sqrt{-2}$ [চ.'০১;ব.'১২; রা.'১৫]

$= 25 - 18 - 30i\sqrt{2}$

$= 25 - 30i\sqrt{2} + 18i^2$

$= 5^2 - 2.5.3\sqrt{2}\,i + (3\sqrt{2}\,i)^2$

$= (5-3\sqrt{2}\,i)^2$

∴ $7-30\sqrt{-2}$ এর বর্গমূল $= \pm\sqrt{(5-3\sqrt{2}i)^2}$

$= \pm(5-3\sqrt{2}\,i)$

3(b) $-7+24i = 9-16+24i$ [দি.'১২]

$= 3^2 + (4i)^2 + 2.3.4i = (3+4i)^2$

∴ $-7+24i$ এর বর্গমূল $= \pm\sqrt{(3+4i)^2}$

$= \pm(3+4i)$

3(c) $1+i$ [চ.'০৫]

$= \frac{1}{2}(2+2i) = \frac{1}{2}\{2 + 2\sqrt{1}\,i\}$

$= \frac{1}{2}\{(\sqrt{2}+1) - (\sqrt{2}-1) + 2\sqrt{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)}\,i\}$

$= \frac{1}{2}\{(\sqrt{2}+1) + (\sqrt{2}-1)i^2 + 2(\sqrt{2}+1)^{\frac{1}{2}}(\sqrt{2}-1)^{\frac{1}{2}}\,i\}$

$= \frac{1}{2}\left[\left\{(\sqrt{2}+1)^{\frac{1}{2}}\right\}^2 + \left\{(\sqrt{2}-1)^{\frac{1}{2}}i\right\}^2 + 2(\sqrt{2}+1)^{\frac{1}{2}}(\sqrt{2}-1)^{\frac{1}{2}}i\right]$

$= \frac{1}{2}\left\{(\sqrt{2}+1)^{\frac{1}{2}} + (\sqrt{2}-1)^{\frac{1}{2}}i\right\}^2$

∴ $1+i$ এর বর্গমূল

$= \pm\frac{1}{\sqrt{2}}\left\{(\sqrt{2}+1)^{\frac{1}{2}} + (\sqrt{2}-1)^{\frac{1}{2}}i\right\}$

3(d) $x + i\sqrt{1-x^2}$ [ব.'০৩]

$= \frac{1}{2}\{2x + 2i\sqrt{(1+x)(1-x)}\,\}$

$= \frac{1}{2}\{(1+x) - (1-x) + 2i\sqrt{(1+x)(1-x)}\,\}$

$= \frac{1}{2}\{(\sqrt{1+x})^2 + (i\sqrt{1-x})^2 + 2.\sqrt{1+x}\,.\,i\sqrt{1-x}\,\}$

$= \frac{1}{2}(\sqrt{1+x} + i\sqrt{1-x})^2$

$\therefore x + i\sqrt{1-x^2}$ এর বর্গমূল $= \pm\frac{1}{\sqrt{2}}(\sqrt{1+x} + i\sqrt{1-x})$

3(e) $x + i\sqrt{x^4+x^2+1}$

$= \frac{1}{2}\{2x + i\,2\sqrt{(x^2)^2 + 2.x^2.1 + 1^2 - x^2}\,\}$

$= \frac{1}{2}\{2x + 2i\sqrt{(x^2+1)^2 - x^2}\,\}$

$= \frac{1}{2}\{2x + 2i\sqrt{(x^2-x+1)(x^2+x+1)}\,\}$

$= \frac{1}{2}\{(x^2+x+1) - (x^2-x+1) + 2i\sqrt{(x^2-x+1)(x^2+x+1)}\,\}$

$= \frac{1}{2}\left\{\left(\sqrt{x^2+x+1}\right)^2 + \left(i\sqrt{x^2-x+1}\right)^2 + 2\sqrt{x^2+x+1}.i\sqrt{x^2-x+1}\right\}$

$= \frac{1}{2}\left(\sqrt{x^2+x+1} + i\sqrt{x^2-x+1}\right)^2$

$\therefore x + i\sqrt{x^4+x^2+1}$ এর বর্গমূল

$= \pm\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{x^2+x+1} + i\sqrt{x^2-x+1}\right)$

3(f) $1 - i\sqrt{x^2-1}$

$= \frac{1}{2}\{2 - 2i\sqrt{(x+1)(x-1)}\}$

$= \frac{1}{2}\{(x+1) - (x-1) - 2i\sqrt{(x+1)(x-1)}\}$

$= \frac{1}{2}\{(\sqrt{x+1})^2 + (i\sqrt{x-1})^2 - 2.\sqrt{x+1}\,i\sqrt{x-1}\}$

$= \frac{1}{2}\{\sqrt{x+1} - i\sqrt{x-1}\}^2$

$\therefore 1 - i\sqrt{x^2-1}$ এর বর্গমূল

$= \pm\frac{1}{\sqrt{2}}(\sqrt{x+1} - i\sqrt{x-1})$

3(g) $-i = \frac{1}{2}(1-1-2i)$ [দি.'০৯]

$= \frac{1}{2}(1^2 + i^2 - 2.1.i) = \frac{1}{2}(1-i)^2$

$\therefore -i$ এর বর্গমূল $= \pm\frac{1}{\sqrt{2}}(1-i)$

3(h) $4 - 4\sqrt{-1}$ [কুয়েট'১০-১১]

$= 4 - 4i = a + bi$ (ধরি), যেখানে $a = 4,\ b = -4$

এখানে, $b < 0$.

নির্ণেয় বর্গমূল $= \pm\frac{1}{\sqrt{2}}\{(\sqrt{a^2+b^2} + a)^{\frac{1}{2}} - i(\sqrt{a^2+b^2} - a)^{\frac{1}{2}}\}$

$= \pm\frac{1}{\sqrt{2}}\{(\sqrt{4^2+(-4)^2} + 4)^{\frac{1}{2}} - i(\sqrt{4^2+(-4)^2} - 4)^{\frac{1}{2}}\}$

$= \pm\frac{1}{\sqrt{2}}\{(4\sqrt{2}+4)^{\frac{1}{2}} - i(4\sqrt{2}-4)^{\frac{1}{2}}\}$

$= \pm\frac{2}{\sqrt{2}}\{(\sqrt{2}+1)^{\frac{1}{2}} - i(\sqrt{2}-1)^{\frac{1}{2}}\}$

$= \pm\sqrt{2}\{(\sqrt{2}+1)^{\frac{1}{2}} - i(\sqrt{2}-1)^{\frac{1}{2}}\}$

3(i) $\frac{5+12i}{3-4i}$ [কুয়েট'০৯-'১০]

$= \frac{(5+12i)(3+4i)}{(3-4i)(3+4i)}$

$= \frac{15 + 48i^2 + (20+36)i}{9 - (4i)^2}$

$= \frac{15 - 48 + 56i}{9+16} = \frac{-33+56i}{25}$

$= \frac{16 - 49 + 56i}{25} = \frac{4^2 + (7i)^2 + 2.4.7i}{25}$

$= \frac{(4+7i)^2}{5^2}$

$\therefore$ নির্ণেয় বর্গমূল $= \pm\frac{4+7i}{5} = \pm(\frac{4}{5} + \frac{7}{5}i)$

4. মান নির্ণয় কর ঃ

(a) $\sqrt[3]{-1}$ [ঢা.'০৪]

সমাধান ঃ মনে করি, $x = \sqrt[3]{-1} \Rightarrow x^3 = -1$

$\Rightarrow x^3 + 1 = 0 \Rightarrow (x+1)(x^2 - x + 1) = 0$

$x + 1 = 0$ হলে, $x = -1$

$x^2 - x + 1 = 0$ হলে,

$x = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4.1.1}}{2.1}$

$= \frac{1 \pm \sqrt{1-4}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{-3}}{2}$

$\therefore x = -1, \frac{1}{2}(1 + \sqrt{-3}), \frac{1}{2}(1 - \sqrt{-3})$.

$\therefore \sqrt[3]{-1} = -1, \frac{1}{2}(1 + \sqrt{-3}), \frac{1}{2}(1 - \sqrt{-3})$

4(b) $\sqrt[4]{-81}$ [রা.'০৪; ব.'০৮; ঢা.'১০;য.'১১]

মনে করি, $x = \sqrt[4]{-81} \Rightarrow x^4 = -81 = 81i^2$

$\Rightarrow (x^2)^2 = (9i)^2$

$\therefore x^2 = \pm 9i = \frac{9}{2}(\pm 2i)$

$= \frac{9}{2}(1^2 + i^2 \pm 2.1.i) = \frac{9}{2}(1 \pm i)^2$

$\therefore x = \pm\frac{3}{\sqrt{2}}(1 \pm i)$.

সুতরাং, $\sqrt[4]{-81} = \pm\frac{3}{\sqrt{2}}(1 \pm i)$

4(c) $\sqrt[4]{1}$

মনে করি, $x = \sqrt[4]{1} \Rightarrow x^4 = 1 \Rightarrow x^4 = i^4$

$\Rightarrow (x^2)^2 - (i^2)^2 = 0$

$\Rightarrow (x^2 + i^2)(x^2 - i^2) = 0$

$x^2 + i^2 = 0$ হলে, $x^2 - 1 = 0$

$\Rightarrow x^2 = 1 \therefore x = \pm 1$

$x^2 - i^2 = 0$ হলে, $x^2 = i^2 \therefore x = \pm i$

$\therefore \sqrt[4]{1} = \pm 1, \pm i$

(d) $\sqrt[3]{i}$

[রা., কু.'০৫,'১২; ঢা.'০৪; চ.'০৯,'১৩; ব.'১০; মা.'১৪]

মনে করি, $x = \sqrt[3]{i} \Rightarrow x^3 = i = -i^3$

$\Rightarrow x^3 + i^3 = 0 \Rightarrow (x+i)(x^2 - xi + i^2) = 0$

$\Rightarrow (x+i)(x^2 - xi - 1) = 0$

$x + i = 0$ হলে, $x = -i$

$x^2 - xi - 1 = 0$ হলে,

$x = \frac{-(-i) \pm \sqrt{(-i)^2 - 4.1.(-1)}}{2.1}$

$= \frac{i \pm \sqrt{-1+4}}{2} = \frac{i \pm \sqrt{3}}{2}$

$\therefore \sqrt[3]{i} = -i, \frac{i \pm \sqrt{3}}{2}$

বিকল্প পদ্ধতি ঃ মনে করি, $x = \sqrt[3]{i}$

$\Rightarrow x^3 = i = (-i)^3$

∴ $x = -i, \frac{1}{2}(-1 \pm \sqrt{-3})(-i)$

এখন, $\frac{1}{2}(-1 \pm \sqrt{3}\, i)(-i) = \frac{1}{2}(i \mp \sqrt{3})$

∴ $\sqrt[3]{i} = -i, \frac{1}{2}(i \pm \sqrt{3})$

4(e) $\sqrt[3]{-i}$ [চ.'০১,'০৬; সি.'০৮; ব.,য.'১৩; ঢা.'১৪; রুয়েট'১১-১২]

মনে করি, $x = \sqrt[3]{-i} \Rightarrow x^3 = -i = i^3$

∴ $x = i, \frac{1}{2}(-1 \pm i\sqrt{3}).\,i$

এখন, $\frac{1}{2}(-1 \pm i\sqrt{3}).\,i = \frac{1}{2}(-i \mp \sqrt{3})$

∴ $\sqrt[3]{-i} = i, \frac{1}{2}(-i \pm \sqrt{3})$

4(f) মনে করি, $x = \sqrt[4]{-1} \Rightarrow x^4 = -1 = i^2$

$\Rightarrow (x^2)^2 = i^2 \Rightarrow x^2 = \pm i = \frac{1}{2}(\pm 2i)$

$= \frac{1}{2}(1^2 + i^2 \pm 2i) = \frac{1}{2}(1 \pm i)^2$

∴ $x = \sqrt[4]{-1} = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}(1 \pm i)$

4(g) $\sqrt[6]{64}$

ধরি, $x = \sqrt[6]{64} \Rightarrow x^6 = 64 \Rightarrow (x^3)^2 = 8^2$

∴ $x^3 = \pm 8 = (\pm 2)^3$

∴ $x = \pm 2, \pm 2\,\frac{1}{2}(-1 \pm i\sqrt{3})$

∴ $x = \pm 2, \pm(1 \pm i\sqrt{3})$

∴ $\sqrt[6]{64} = \pm 2\,,\ \pm(1 \pm i\sqrt{3})$

4(h) $\sqrt[4]{-144}$ [সি.'০২]

মনে করি, $x = \sqrt[4]{-144}$

$\Rightarrow x^4 = -144 = 144\, i^2 \Rightarrow (x^2)^2 = (12\, i)^2$

∴ $x^2 = \pm 12\, i = 6(\pm 2\, i)$

$= 6(1^2 + i^2 \pm 2.1.\, i) = 6(1 \pm i)^2$

∴ $x = \pm\sqrt{6}\,(1 \pm i)$.

সুতরাং, $\sqrt[4]{-144} = \pm\sqrt{6}\,(1 \pm i)$

5. দেখাও যে, (a) $\sqrt{i} + \sqrt{-i} = \sqrt{2}$ [য.'১২; কুয়েট'০৬-০৭,০৮-০৯; রুয়েট'১২-১৩]

প্রমাণ: $\sqrt{i}+\sqrt{-i} = \sqrt{\frac{1}{2}.2i} + \sqrt{\frac{1}{2}.(-2i)}$

$= \sqrt{\frac{1}{2}.(1^2+i^2+2.1.i)} + \sqrt{\frac{1}{2}.(1^2+i^2-2.1.i)}$

$= \sqrt{\frac{1}{2}.(1+i)^2} + \sqrt{\frac{1}{2}.(1-i)^2}$

$= \frac{1}{\sqrt{2}}(1+i+1-i) = \frac{2}{\sqrt{2}}$

∴ $\sqrt{i} + \sqrt{-i} = \sqrt{2}$ (Showed)

5(b) $\sqrt[3]{i}+\sqrt[3]{-i}=0$ [রুয়েট'০৫-০৬]

প্রমাণ: $\sqrt[3]{i}+\sqrt[3]{-i} = \sqrt[3]{(-i)^3} + \sqrt[3]{(i)^3}$

$\sqrt[3]{i} = \sqrt[3]{(-i)^3} = -i, -\frac{i}{2}(-1\pm\sqrt{3}i)$

$\sqrt[3]{-i} = \sqrt[3]{(i)^3} = i, \frac{i}{2}(-1\pm\sqrt{3}i)$

∴ $\sqrt[3]{i}+\sqrt[3]{-i}=0$ (Showed)

6 (a) দেখাও যে, $\left|\frac{x-iy}{x+iy}\right| = 1$ [য.'০৪; কু.'০৭]

প্রমাণ: $\left|\frac{x-iy}{x+iy}\right| = \frac{|x-iy|}{|x+iy|} = \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}}$

∴ $\left|\frac{x-iy}{x+iy}\right| = 1$ (Showed)

6(b) $\sqrt[3]{a+ib} = x+iy$ হলে দেখাও যে,

$\sqrt[3]{a-ib} = x - iy$ [কু.'০৩; য.'০৬; রা.'০৯; দি., সি.'১০; ঢা.'১৩; বুয়েট'০৩-০৪; টেক্সটাইল'০৩-০৪; রুয়েট'০৭-০৮]

এবং $-2(x^2+y^2) = \frac{a}{x} - \frac{b}{y}$ [রা.'০১]

প্রমাণ: দেওয়া আছে, $\sqrt[3]{a+ib} = x+iy$

∴ $a + i\,b = x^3 + 3x^2.iy + 3.x.(iy)^2 + (iy)^3$

$= x^3 + 3x^2 y\, i - 3xy^2 - i\,y^3$

উভয় পক্ষ হতে বাস্তব ও কাল্পনিক অংশ সমীকৃত করে পাই, $a = x^3 - 3xy^2$, $b = 3x^2y - y^3$

এখন, $a - i\,b = x^3 - 3xy^2 - i(3x^2y - y^3)$

$= x^3 - 3xy^2 - 3x^2y\, i + i\,y^3$

$= x^3 + 3xy^2 i^2 - 3x^2 y\, i - i^3y^3$

$= x^3 - 3x^2.\, iy + 3.x.(iy)^2 - (iy)^3$

$= (x - iy)^3$

∴ $\sqrt[3]{a+ib} = x - iy$ (Showed)

এবং $\frac{a}{x} - \frac{b}{y} = \frac{x^3-3xy^2}{x} - \frac{3x^2y - y^3}{y}$

$= x^2 - 3y^2 - 3x^2 + y^2$

$= -2x^2 - 2y^2$

∴ $-2(x^2+y^2) = \frac{a}{x} - \frac{b}{y}$ (Showed)

6(c) $(a+ib)(c+id) = x+iy$ হলে দেখাও যে, $(a-ib)(c-id) = x-iy$ [চ.'০৪; ব.'১৫]

প্রমাণ: দেওয়া আছে, $(a+ib)(c+id) = x+iy$

$\Rightarrow ac - bd + i(ad+bc) = x + iy$

উভয় পক্ষ হতে বাস্তব ও কাল্পনিক অংশ সমীকৃত করে পাই, $x = ac - bd$, $y = ad + bc$

এখন, $x - i\,y = ac - bd - i(ad+bc)$

$= ac - i\,ad - i\,bc - bd$

$= ac - i\,ad - i\,bc + bd\, i^2$

$= a(c - i\,d) - i\,b(c - i\,d)$

$= (a - i\,b)(c - i\,d)$

∴ $(a-i\,b)(c-i\,d) = x - i\,y$ (Showed)

6(d) $a^2+b^2=1$ হলে দেখাও যে, x এর একটি বাস্তব মান $\frac{1-ix}{1+ix} = a - ib$ সমীকরণকে সিদ্ধ করে; যেখানে $a, b \in \mathbb{R}$. [কু.'০৮,'১০,'১৪; রা.'০৬,'১২; সি.'০৮,'১২; য.'০৬,'০৮; ব.'০৭; ঢা.'০৭,'১৪; দি.'১২; চ.'১২; মা.'১৪]

প্রমাণ: দেওয়া আছে, $a^2+b^2=1 \cdots\cdots(1)$ এবং

$\frac{1-ix}{1+ix} = a - ib$

$\Rightarrow 1 - i\,x = a + i\,ax - i\,b + bx$

$\Rightarrow (ai + b + i)x = 1 - a + i\,b$

$\Rightarrow x = \frac{(1-a)+ib}{b+(a+1)i}$

$= \frac{\{(1-a)+ib\}\{b-(a+1)i\}}{\{b+(a+1)i\}\{b-(a+1)i\}}$

$= \frac{b(1-a)+b(a+1)+\{b^2-(1+a)(1-a)\}i}{b^2+(a+1)^2}$

$= \frac{b - ab + ab + b - \{b^2 - 1 + a^2\}i}{b^2+a^2+2a+1}$

$= \frac{2b - 0.i}{1+2a+1}$, [∵ $a^2+b^2=1$]

$= \frac{2b}{2(a+1)} = \frac{b}{a+1}$, যা বাস্তব সংখ্যা।

6(e) $x:y = (a+ib):(c+id)$ হলে দেখাও যে, $(c^2+d^2)x^2 - 2(ac+bd)xy + (a^2+b^2)y^2 = 0$ [রা.'০৩; কু.'০৪; সি.'০৫,'০৯; য.'০৭; ব.'০৯; য.'১০; দি.'১২; বুয়েট'০৪]

প্রমাণ: দেওয়া আছে, $x : y = (a+i\,b) : (c+i\,d)$

$\Rightarrow \frac{x}{y} = \frac{a+ib}{c+id} \Rightarrow cx + i\,dx = ay + i\,by$

$\Rightarrow cx - ay = i\,(by - dx)$

$\Rightarrow (cx - ay)^2 = i^2(by - dx)^2$

$\Rightarrow c^2x^2 - 2cx.ay + a^2y^2 = -(b^2y^2 - 2by.dx + d^2x^2)$

$\Rightarrow c^2x^2 - 2cx.ay + a^2y^2 + (b^2y^2 - 2by.dx + d^2x^2) = 0$

$\therefore (c^2+d^2)x^2 - 2(ac+bd)xy + (a^2+b^2)y^2 = 0$

6(f) $x = -1 + \sqrt{2}\ i$ হলে দেখাও যে, $x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x = 3$ [টেক্সটাইল'০৩-০৪]

প্রমাণ ঃ $x = -1 + \sqrt{2}\ i \Rightarrow x + 1 = \sqrt{2}\ i$

$\Rightarrow (x+1)^2 = 2.i^2 \Rightarrow x^2 + 2x + 1 = -2$

$\Rightarrow x^2 + 2x + 3 = 0$

$x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x = x^2(x^2 + 2x + 3) + 2x(x^2 + 2x + 3) - 1(x^2 + 2x + 3) + 3$

$= x^2.0 + 2x.0 - 1.0 + 3 = 3$

$\therefore\ x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x = 3$ (Showed)

6(g) যদি $x = 2 + \sqrt{-3}$ হয়, তবে $3x^4 - 17x^3 + 41x^2 - 35x + 5$ এর মান নির্ণয় কর। [বুয়েট'০১-০২]

সমাধান : $x = 2 + \sqrt{-3} \Rightarrow x - 2 = \sqrt{-3}$

$\Rightarrow (x-2)^2 = (\sqrt{-3})^2$

$\Rightarrow x^2 - 4x + 4 = -3 \Rightarrow x^2 - 4x + 7 = 0$

এখন, $3x^4 - 17x^3 + 41x^2 - 35x + 5$

$= 3x^3(x^2 - 4x + 7) - 5x^2(x^2 - 4x + 7) + 5$

$= 3x^3 \times 0 - 5x^2 \times 0 + 5 = 5$ (Ans.)

6(h) যদি $x = 2 - i$ হয়, তবে $x^3 - 3x^2 + x + 10$ এর মান নির্ণয় কর। [টেক্সটাইল'০৬-০৭]

সমাধান : $x = 2 - i \Rightarrow x - 2 = -i$

$\Rightarrow x^2 - 4x + 4 = i^2 = -1$

$\Rightarrow x^2 - 4x + 5 = 0$

এখন, $x^3 - 3x^2 + x + 10$

$= x(x^2 - 4x + 5) + (x^2 - 4x + 5) + 5$

$= x \times 0 + 0 + 5 = 5$ (Ans.)

7(a) $x = 3 + 2i$ এবং $y = 3 - 2i$ হলে দেখাও যে, $x^2 + xy + y^2 = 23$ [য.'০৫]

প্রমাণ ঃ দেওয়া আছে, $x = 3 + 2i$

$\Rightarrow x^2 = 9 + 12i + 4i^2$

$= 9 + 12i - 4 = 5 + 12i$ এবং

$y = 3 - 2i \Rightarrow y^2 = 9 - 12i - 4 = 5 - 12i$

$xy = (3 + 2i)(3 - 2i)$

$= 9 - 4i^2 = 9 + 4 = 13$

$\therefore\ x^2 + xy + y^2 = 5 + 12i + 5 - 12i + 13 = 23$

7(b) $z = x + iy$ এবং $|2z - 1| = |z - 2|$ হলে দেখাও যে, $x^2 + y^2 = 1$ [রা.'০৫; দি.'০৯; ব.'১০; ঢা.'১১]

প্রমাণ ঃ দেওয়া আছে, $|2z - 1| = |z - 2|$

$\Rightarrow |2(x + iy) - 1| = |x + iy - 2|$

$\Rightarrow |(2x - 1) + i.2y| = |(x - 2) + yi|$

$\Rightarrow \sqrt{(2x-1)^2 + 4y^2} = \sqrt{(x-2)^2 + y^2}$

$\Rightarrow 4x^2 - 4x + 1 + 4y^2 = x^2 - 4x + 4 + y^2$

$\Rightarrow 3x^2 + 3y^2 = 3$

$\therefore\ x^2 + y^2 = 1$

7(c) $z = x + iy$ এবং $3|z - 1| = 2|z - 2|$ হলে প্রমাণ কর যে, $5(x^2 + y^2) = 2x + 7$ [য.'০৮; চ.'১১,'১৩]

প্রমাণ ঃ দেওয়া আছে, $z = x + iy$ এবং

$3|z - 1| = 2|z - 2|$

$\Rightarrow 3|x + iy - 1| = 2|x + iy - 2|$

$\Rightarrow 3|(x - 1) + iy| = 2|(x - 2) + iy|$

$\Rightarrow 3\sqrt{(x-1)^2 + y^2} = 2\sqrt{(x-2)^2 + y^2}$

উভয় পক্ষকে বর্গ করে আমরা পাই,

$9(x^2 - 2x + 1 + y^2) = 4(x^2 - 4x + 4 + y^2)$

$\Rightarrow 5(x^2 + y^2) = -16x + 16 + 18x - 9$

$\therefore\ 5(x^2 + y^2) = 2x + 7$ (Showed)

8(a) মান নির্ণয় কর ঃ

(i) $\sqrt{-3 + \sqrt{-3 + \sqrt{-3 + \cdots\infty}}}$ [বুয়েট'১১-১২]

মনে করি, $y = \sqrt{-3 + \sqrt{-3 + \sqrt{-3 + \cdots\infty}}}$

$\Rightarrow y = \sqrt{-3 + \sqrt{-3 + \sqrt{-3 + \sqrt{-3 \cdots\infty}}}}$

$\Rightarrow y = \sqrt{-3 + y}$

$\Rightarrow y^2 = -3 + y$ [উভয় পক্ষকে বর্গ করে।]

$\Rightarrow y^2 - y + 3 = 0$

$\Rightarrow y = \dfrac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4.1.3}}{2.1}$

$= \dfrac{1 \pm \sqrt{1 - 12}}{2} = \dfrac{1}{2}(1 \pm \sqrt{-11})$

$\therefore \sqrt{-3 + \sqrt{-3 + \sqrt{-3 + \cdots\infty}}} = \dfrac{1}{2}(1 \pm i\sqrt{11})$

(ii) $\sqrt{-2 + 2\sqrt{-2 + 2\sqrt{-2 + \cdots\infty}}}$ [কুয়েট'০৭-০৮]

মনে করি, $y = \sqrt{-2 + 2\sqrt{-2 + 2\sqrt{-2 + \cdots\infty}}}$

$\Rightarrow y = \sqrt{-2 + 2\sqrt{-2 + 2\sqrt{-2 + 2\sqrt{-2 + \cdots\infty}}}}$

$\Rightarrow y = \sqrt{-2 + 2y}$

$\Rightarrow y^2 = -2 + 2y \Rightarrow y^2 - 2y + 2 = 0$

$\Rightarrow y = \dfrac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4.1.2}}{2.1}$

$= \dfrac{1}{2}(2 \pm \sqrt{4 - 8}) = \dfrac{1}{2}(2 \pm \sqrt{-4})$

$= \dfrac{2 \pm 2\sqrt{-1}}{2} = 1 \pm i$

$\therefore \sqrt{-2 + 2\sqrt{-2 + 2\sqrt{-2 + \cdots\infty}}} = 1 \pm i$

(iii) $\sqrt{i + \sqrt{i + \sqrt{i + \ldots\ldots\infty}}}$ [বুয়েট'০৩-০৪]

মনে করি, $y = \sqrt{i + \sqrt{i + \sqrt{i + \ldots\ldots\infty}}}$

$\Rightarrow y = \sqrt{i + \sqrt{i + \sqrt{i + \sqrt{i + \ldots\ldots\infty}}}}$

$\Rightarrow y = \sqrt{i + y} \Rightarrow = y^2 = i + y$

$\Rightarrow y^2 - y - i = 0$

$\Rightarrow y = \dfrac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4(1)(-i)}}{2.1}$

$= \dfrac{1 \pm \sqrt{1 + 4i}}{2}$

$\therefore \sqrt{i + \sqrt{i + \sqrt{i + \ldots\ldots\infty}}} = \dfrac{1 \pm \sqrt{1 + 4i}}{2}$

8(b) প্রমাণ কর যে,

$|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = 2(|z_1|^2 + |z_2|^2)$

প্রমাণ: মনে করি, $z_1 = a + ib$ এবং $z_2 = c + id$

তাহলে, $|z_1| = \sqrt{a^2 + b^2}$ এবং

$|z_2| = \sqrt{c^2 + d^2}$

$\therefore |z_1|^2 = a^2 + b^2$ এবং $|z_2|^2 = c^2 + d^2$

L.H.S. $= |z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2$

$= |a + ib + c + id|^2 + |a + ib - c - id|^2$

$= (a + c)^2 + (b + d)^2 + (a - c)^2 + (b - d)^2$

$= 2(a^2 + c^2) + 2(b^2 + d^2)$

$= 2|z_1|^2 + 2|z_2|^2$

$= 2\{|z_1|^2 + |z_2|^2\} =$ R.H.S.

9. এককের কাল্পনিক ঘনমূল ω হলে দেখাও যে,

প্রমাণ ঃ (a)

L.H.S.$= (1+\omega-\omega^2)(\omega+\omega^2-1)(\omega^2+1-\omega)$

[ব.'০৯,'১৫; ঢা.'১২; চুয়েট '০৯-১০]

$= (-\omega^2-\omega^2)(-1-1)(-\omega-\omega)$ $[\because 1+\omega+\omega^2=0]$

$= (-2\omega^2)(-2)(-2\omega) = -8\omega^3$

$= -8.1 = -8 =$ R.H.S.

(b) L.H.S $= (1-\omega+\omega^2)^2 + (1+\omega-\omega^2)^2$ [কু. '০০]

$= (-\omega-\omega)^2 + (-\omega^2-\omega^2)^2$ $[\because 1+\omega+\omega^2=0]$

$= (-2\omega)^2 + (-2\omega^2)^2 = 4(\omega^2+\omega^4)$

$= 4(\omega^2+\omega) = 4(-1) = -4 =$ R.H.S.

9(c) L.H.S $= (x+y)^2 + (x\omega+y\omega^2)^2 + (x\omega^2+y\omega)^2$ [য.'০১; ঢা.'০৩; সি.'১১]

$= x^2+2xy+y^2+x^2\omega^2+2xy\omega^3+y^2\omega^4+x^2\omega^4+2xy\omega^3+y^2\omega^2$

$= x^2+2xy+y^2+x^2\omega^2+2xy.1+y^2\omega+x^2\omega+2xy.1+y^2\omega^2$

$= x^2(1+\omega^2+\omega)+6xy+y^2(1+\omega+\omega^2)$

$= x^2.0+6xy+y^2.0 = 6xy =$ R.H.S.

9(d) L.H.S.$= (1-\omega+\omega^2)(1-\omega^2+\omega^4)(1-\omega^4+\omega^8)(1-\omega^8+\omega^{16})$

[ব.'০৫; রা.'০৮; য.'১১]

$= (1-\omega+\omega^2)(1-\omega^2+\omega)(1-\omega+\omega^2)(1-\omega^2+\omega)$. [$\because \omega^n = 1, \omega, \omega^2$ হবে যদি n কে 3 দ্বারা ভাগ করলে ভাগশেষ যথাক্রমে 0, 1 , 2 হয়]

$= (1-\omega+\omega^2)^2(1-\omega^2+\omega)^2$

$= \{(-\omega-\omega)(-\omega^2-\omega^2)\}^2$ $[\because 1+\omega+\omega^2=0]$

$= \{(-2\omega)(-2\omega^2)\}^2 = (4\omega^3)^2$

$= (4.1)^2 = 16 =$ R.H.S.

9(e) $(-1+\sqrt{-3})^4 + (-1-\sqrt{-3})^4 = -16$

[ব.'০৬; কু. '০৮,'১০,'১৩; য.'০৪,'১৩; ঢা. '০৯; চ.'১০; সি.'১২,'১৪; রা.'১২; দি.'১৪,'১১৫]

প্রমাণ ঃ আমরা জানি , $\omega = \frac{1}{2}(-1+\sqrt{-3})$ হলে

$\omega^2 = \frac{1}{2}(-1-\sqrt{-3})$ হবে ।

$\therefore -1+\sqrt{-3} = 2\omega$, $-1-\sqrt{-3} = 2\omega^2$

L.H.S. $= (-1+\sqrt{-3})^4 + (-1-\sqrt{-3})^4$

$= (2\omega)^4 + (2\omega^2)^4 = 16(\omega^4+\omega^8)$

$= 16(\omega+\omega^2) = 16(-1) = -16 =$ R.H.S

10(a) উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর ঃ

(i) $a^2+ab+b^2 = a^2+ab.1+b^2.1$

$= a^2+ab(-\omega-\omega^2)+b^2\omega^3$ $[\because 1+\omega+\omega^2=0$ এবং $\omega^3=1]$

$= a^2-ab\omega-ab\omega^2+b^2\omega^3$

$= a(a-b\omega)-b\omega^2(a-b\omega)$

$= (a-b\omega)(a-b\omega^2)$ (Ans.)

(ii) $a^2-ab+b^2 = a^2+ab(-1)+b^2.1$

$= a^2+ab(\omega+\omega^2)+b^2.\omega^3$ $[\because 1+\omega+\omega^2=0$ and $\omega^3=1]$

$= a^2+ab\omega+ab\omega^2+b^2\omega^3$

$= a(a+b\omega)+b\omega^2(a+b\omega)$

$= (a+b\omega)(a+b\omega^2)$ (Ans.)

(iii) $a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca$

$= a^2+b^2\omega^3+c^2\omega^3+ab(\omega+\omega^2)+bc(\omega^4+\omega^2)+ca(\omega+\omega^2)$

$= a^2+b^2\omega^3+c^2\omega^3+ab\omega+ab\omega^2+bc\omega^4+bc\omega^2+ca\omega+ca\omega^2$

$= (a^2+ab\omega+ca\omega^2)+(ab\omega^2+b^2\omega^3+bc\omega^4)+(ca\omega+bc\omega^2+c^2\omega^3)$

$= a(a+b\omega+c\omega^2)+b\omega^2(a+b\omega+c\omega^2)+c\omega(a+b\omega+c\omega^2)$

$= (a+b\omega+c\omega^2)(a+b\omega^2+c\omega)$ (Ans.)

(iv) $a^3+b^3+c^3-3abc$

$= (a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$

$= (a+b+c)\{a^2+b^2\omega^3+c^2\omega^3+ab(\omega+\omega^2)+bc(\omega^4+\omega^2)+ca(\omega+\omega^2)\}$

$= (a+b+c)\{a^2+b^2\omega^3+c^2\omega^3+ab\omega+ab\omega^2+bc\omega^4+bc\omega^2+ca\omega+ca\omega^2\}$

$= (a+b+c)\{(a^2+ab\omega+ca\omega^2)+(ab\omega^2+b^2\omega^3+bc\omega^4)+(ca\omega+bc\omega^2+c^2\omega^3)\}$

$= (a+b+c)\{a(a+b\omega+c\omega^2)+b\omega^2(a+b\omega+c\omega^2)+c\omega(a+b\omega+c\omega^2)\}$

$= (a+b+c)(a+b\omega+c\omega^2)(a+b\omega^2+c\omega)$ (Ans.)

10(b) $p = \frac{1}{2}(-1+\sqrt{-3})$, $q = \frac{1}{2}(-1-\sqrt{-3})$ হলে দেখাও যে, (i) $p^3+p^{-3}=2$ (ii) $q^3+q^{-3}=2$ (iii) $(1-p)(1-q)=3$

প্রমাণ ঃ দেওয়া আছে , $p = \frac{1}{2}(-1+\sqrt{-3})$,

$q = \frac{1}{2}(-1-\sqrt{-3})$

আমরা জানি ,

$\omega = \frac{1}{2}(-1+\sqrt{-3})$ হলে $\omega^2 = \frac{1}{2}(-1-\sqrt{-3})$ হবে ; যেখানে ω এককের কাল্পনিক ঘনমূল ।

$\therefore$ আমরা লিখতে পারি , $P = \omega$ এবং $q = \omega^2$

(i) $p^3+p^{-3} = \omega^3+\omega^{-3}$

$= \omega^3+\frac{1}{\omega^3} = 1+\frac{1}{1} = 1+1 = 2$

$\therefore p^3+p^{-3} = 2$ (Showed)

(ii) $q^3+q^{-3} = q^3+\frac{1}{q^3} = (\omega^2)^3+\frac{1}{(\omega^2)^3}$

$= \omega^6+\frac{1}{\omega^6} = 1+\frac{1}{1} = 1+1 = 2$

$\therefore q^3+q^{-3} = 2$ (Showed)

(iii) $(1-p)(1-q) = (1-\omega)(1-\omega^2)$

$= 1-(\omega+\omega^2)+\omega^3 = 1+1+1$

$[\because 1+\omega+\omega^2=0$ এবং $\omega^3=1]$

$\therefore (1-p)(1-q) = 3$ (Showed)

(iv) $p^4+p^2q^2+q^4$ [চুয়েট'১১-১২]

$= \omega^4+\omega^2(\omega^2)^2+(\omega^2)^4$

$= \omega^4+\omega^6+\omega^8 = \omega^3.\omega+(\omega^3)^2+(\omega^3)^2\omega^2$

$= 1.\omega+(1)^2+(1)^2\omega^2 = \omega^2+\omega+1 = 0$

$\therefore p^4+p^2q^2+q^4 = 0$

11(a) $(a\omega^2+b+c\omega)^3+(a\omega+b+c\omega^2)^3 = 0$ হলে দেখাও যে, $a = \frac{1}{2}(b+c)$, অথবা $b = \frac{1}{2}(c+a)$, অথবা $c = \frac{1}{2}(a+b)$ [কু.'০২]

প্রমাণ ঃ দেওয়া আছে ,

$(a\omega^2+b+c\omega)^3+(a\omega+b+c\omega^2)^3 = 0$

$\Rightarrow (a\omega^2+b+c\omega)^3 = -(a\omega+b+c\omega^2)^3$

$\Rightarrow \frac{(a\omega^2+b+c\omega)^3}{(a\omega+b+c\omega^2)^3} = -1$

$\Rightarrow \left(-\frac{a\omega^2+b+c\omega}{a\omega+b+c\omega^2}\right)^3 = 1$

$\therefore -\frac{a\omega^2+b+c\omega}{a\omega+b+c\omega^2} = 1$, অথবা ω, অথবা ω^2

$[\because x^3=1$ হলে $x = 1, \omega, \omega^2]$

যদি $-\frac{a\omega^2+b+c\omega}{a\omega+b+c\omega^2} = 1$ হয়, তাহলে

$a\omega^2+b+c\omega = -a\omega - b - c\omega^2$

$\Rightarrow 2b = (a+b)(-\omega-\omega^2)$

$\Rightarrow 2b = a+b \quad \therefore b = \frac{1}{2}(a+b)$

যদি $-\frac{a\omega^2+b+c\omega}{a\omega+b+c\omega^2} = \omega$ হয়, তাহলে

$a\omega^2+b+c\omega = -a\omega^2 - b\omega - c\omega^3$

$\Rightarrow a\omega^2+b+c\omega = -a\omega^2 - b\omega - c$

$\Rightarrow 2a\omega^2 = (b+c)(-1-\omega) = (b+c)\omega^2$

$\Rightarrow 2a = b+c \quad [\because \omega^2 \neq 0]$

$\therefore a = \frac{1}{2}(b+c)$

যদি $-\frac{a\omega^2+b+c\omega}{a\omega+b+c\omega^2} = \omega^2$ হয়, তাহলে

$a\omega^2+b+c\omega = -a\omega^3 - b\omega^2 - c\omega^4$

$\Rightarrow a\omega^2+b+c\omega = -a - b\omega^2 - c\omega$

$\Rightarrow 2c\omega = (a+b)(-1-\omega^2) = (a+b)\omega$

$\Rightarrow 2c = a+b \quad [\because \omega \neq 0]$

$\therefore c = \frac{1}{2}(a+b)$

$\therefore a = \frac{1}{2}(b+c)$, অথবা $b = \frac{1}{2}(c+a)$,

অথবা $c = \frac{1}{2}(a+b)$ (Showed)

11(b) $x = p+q, y = p\omega + q\omega^2,$ $z = p\omega^2 + q\omega$ হলে দেখাও যে, $x^2+y^2+z^2 = 6pq$

[সি.'০৭,'১৩; চ.'০৭,'০৯; ঢা.'১০,'১৩; রা.'১১; চ.'১২,'১৫]

প্রমাণঃ দেওয়া আছে, $x = p+q$,

$y = p\omega + q\omega^2, z = p\omega^2 + q\omega$

এখন, $x^2+y^2+z^2 = (p+q)^2 + (p\omega+q\omega^2)^2 + (p\omega^2+q\omega)^2$

$= p^2+q^2+2pq+p^2\omega^2+q^2\omega^4 + 2pq\omega^3 + p^2\omega^4 + q^2\omega^2 + 2pq\omega^3$

$= p^2+q^2+2pq+p^2\omega^2+q^2\omega+2pq + p^2\omega+q^2\omega^2+2pq$

$= 6pq + p^2(1+\omega+\omega^2) + q^2(1+\omega+\omega^2)$

$= 6pq + p^2.0 + q^2.0$

$\therefore x^3+y^3+z^3 = 6pq$ (Showed)

11(c) প্রমাণঃ দেওয়া আছে, $x = p+q, y = p+\omega q, z = p+\omega^2 q$ দেখাতে হবে যে,

$x^3+y^3+z^3 = 3(p^3+q^3)$

এখন, $x^3+y^3+z^3 = (p+q)^3 + (p+\omega q)^3 + (p+\omega^2 q)^3$

$= p^3+q^3+3p^2q+3pq^2+p^3+\omega^3q^3+p^2q\omega + 3p\omega^2q^2+p^3+\omega^6q^3+3p^2q\omega^2+pq^2\omega^4)$

$= p^3+q^3+3p^2q+3pq^2+p^3+q^3+3p^2q\omega + 3p\omega^2q^2+p^3+q^3+3p^2q\omega^2+3pq^2\omega$

$= 3(p^3+q^3) + 3p^2q(1+\omega+\omega^2) + 3pq^2(1+\omega+\omega^2)$

$= 3(p^3+q^3) + 3p^2q.0 + 3pq^2.0$

$\therefore x^3+y^3+z^3 = 3(p^3+q^3)$

11(d) $p = \frac{1}{\sqrt{2}}(1+\sqrt{-1})$ হলে দেখাও যে, $p^6+p^4+p^2+1 = 0$ [চ.'০৮,'১০,'১৫; ব.'১১]

প্রমাণঃ দেওয়া আছে, $p = \frac{1}{\sqrt{2}}(1+\sqrt{-1})$

$\Rightarrow \sqrt{2}\,p = 1+\sqrt{-1} = 1+i \quad [\because i = \sqrt{-1}]$

উভয় পক্ষকে বর্গ করে আমরা পাই,

$2p^2 = 1+2i+i^2 = 1+2i-1 = 2i$

$\therefore p^2 = i$

এখন, $p^6+p^4+p^2+1 = (p^2)^3+(p^2)^2+p^2+1$

$= i^3+i^2+i+1 = -i-1+i+1$

$\therefore p^6+p^4+p^2+1 = 0$ (Showed)

11(e) $(a+b\omega+c\omega^2)^2 + (a\omega+b+c\omega^2)^2 + (a\omega+b\omega^2+c)^2 = 0$ হলে দেখাও যে, $a = c$ অথবা, $b = \frac{1}{2}(a+c)$

প্রমাণঃ দেওয়া আছে, $(a+b\omega+c\omega^2)^2 + (a\omega+b+c\omega^2)^2 + (a\omega+b\omega^2+c)^2 = 0$

$\Rightarrow a^2+b^2\omega^2+c^2\omega^4+2ab\omega+2bc\omega^3 + 2ca\omega^2+a^2\omega^2+b^2+c^2\omega^4+2ab\omega + 2bc\omega^2+2ca\omega^3+a^2\omega^2+b^2\omega^4+c^2 + 2ab\omega^3+2bc\omega^2+2ca\omega = 0$

$\Rightarrow a^2(1+2\omega^2)+b^2(1+\omega^2+\omega^4) + c^2(1+2\omega^4)+2ab(2\omega+\omega^3) + 2bc(\omega^3+2\omega^2)+2ca(\omega^2+\omega^3+\omega) = 0$

$\Rightarrow a^2(1+2\omega^2)+b^2(1+\omega^2+\omega) + c^2(1+2\omega)+2ab(2\omega+1)+2bc(1+2\omega^2) + 2ca(\omega^2+1+\omega) = 0$

$\Rightarrow a^2(-\omega-\omega^2+2\omega^2)+b^2\times 0 + c^2(-\omega-\omega^2+2\omega)+2ab(2\omega-\omega^2-\omega) + 2bc(-\omega-\omega^2+2\omega^2)+2ca\times 0 = 0$

$\Rightarrow a^2(\omega^2-\omega)+c^2(\omega-\omega^2)+2ab(\omega-\omega^2) + 2bc(\omega^2-\omega) = 0$

$\Rightarrow (\omega^2-\omega)(a^2-c^2-2ab+2bc) = 0$

$\Rightarrow a^2-c^2-2ab+2bc = 0 \quad [\because \omega^2-\omega \neq 0]$

$\Rightarrow (a-c)(a+c)-2b(a-c) = 0$

$\Rightarrow (a-c)(a+c-2b) = 0$

$\therefore a-c = 0 \Rightarrow a = c$ অথবা, $a+c-2b = 0$

$\Rightarrow b = \frac{1}{2}(a+c)$ (Showed)

বিকল্প পদ্ধতিঃ $(a+b\omega+c\omega^2)^2 + (a\omega+b+c\omega^2)^2 + (a\omega+b\omega^2+c)^2 = 0$

$\Rightarrow (a\omega^3+b\omega^4+c\omega^2)^2 + (a\omega+b+c\omega^2)^2 + (a\omega+b\omega^2+c)^2 = 0$

$\Rightarrow \{\omega^2(a\omega+b\omega^2+c)\}^2 + (a\omega+b+c\omega^2)^2 + (a\omega+b\omega^2+c)^2 = 0$

$\Rightarrow (\omega^4+1)(a\omega+b\omega^2+c)^2 + (a\omega+b+c\omega^2)^2 = 0$

$\Rightarrow (\omega+1)(a\omega+b\omega^2+c)^2 + (a\omega+b+c\omega^2)^2 = 0$

$\Rightarrow -\omega^2(a\omega+b\omega^2+c)^2 + (a\omega+b+c\omega^2)^2 = 0$

$\Rightarrow -(a\omega^2+b\omega^3+c\omega)^2 + (a\omega+b+c\omega^2)^2 = 0$

$\Rightarrow (a\omega+b+c\omega^2)^2 - (a\omega^2+b+c\omega)^2 = 0$

$\Rightarrow (a\omega+b+c\omega^2+a\omega^2+b+c\omega)(a\omega+b+c\omega^2-a\omega^2-b-c\omega) = 0$

$\Rightarrow \{a(\omega+\omega^2)+2b+c(\omega^2+\omega)\}\{a(\omega-\omega^2)-c(\omega-\omega^2)\} = 0$

$\Rightarrow \{a(-1)+2b+c(-1)\}(a-c)(\omega-\omega^2) = 0$

$\Rightarrow (2b-a-c)(a-c) = 0$

[∵ এখানে $\omega^2-\omega \neq 0$]

$\therefore a = c$ অথবা $b = \frac{1}{2}(a+c)$

11(f) $(1+x+x^2)^n = a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_{2n}x^{2n}$ হলে দেখাও যে, $a_0+a_3+a_6+\cdots = 3^{n-1}$ [চ.'০৮]

প্রমাণঃ $(1+x+x^2)^n = a_0+a_1x+a_2x^2$

$+ \cdots \cdots + a_{2n}x^{2n}$ ------- (1)

(1) -এ $x = 1$ বসিয়ে আমরা পাই,

$(1+1+1)^n = a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + \cdots\cdots$

$\Rightarrow 3^n = a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + \cdots$ ------ (2)

(1) -এ $x = \omega$ বসিয়ে আমরা পাই,

$(1+\omega+\omega^2)^n = a_0 + a_1\omega + a_2\omega^2 + a_3\omega^3 + a_4\omega^4 + a_5\omega^5 + a_6\omega^6 + \cdots\cdots$

$\Rightarrow 0 = a_0 + a_1\omega + a_2\omega^2 + a_3 + a_4\omega + a_5\omega^2 + a_6 + \cdots\cdots$ ----- (3)

(1) -এ $x = \omega^2$ বসিয়ে আমরা পাই,

$(1+\omega^2+\omega^4)^n = a_0 + a_1\omega^2 + a_2\omega^4 + a_3\omega^6 + a_4\omega^8 + a_5\omega^{10} + a_6\omega^{12} + \cdots\cdots$

$\Rightarrow (1+\omega+\omega^2)^n = a_0 + a_1\omega^2 + a_2\omega + a_3 + a_4\omega^2 + a_5\omega + a_6 + \cdots\cdots$

$\Rightarrow 0 = a_0 + a_1\omega^2 + a_2\omega + a_3 + a_4\omega^2 + a_5\omega + a_6 + \cdots\cdots$ ------- (4)

(2), (3) এবং (4) যোগ করে পাই,

$3^n = 3(a_0 + a_3 + a_6 + \cdots\cdots) + (a_1 + a_2 + a_4 + a_5 \cdots\cdots)(1+\omega+\omega^2)$

$\Rightarrow 3^n = 3(a_0 + a_3 + a_6 + \cdots\cdots) + (a_1 + a_2 + a_4 + a_5 \cdots\cdots).0$

$\Rightarrow 3^n = 3(a_0 + a_3 + a_6 + \cdots\cdots)$

$\therefore a_0 + a_3 + a_6 + \cdots\cdots = 3^{n-1}$ (Showed)

11(g) $f(n) = (1-\omega^{3n+1})(1-\omega^{3n+2})$, যেখানে $n \in \mathbb{N}$। প্রমাণ কর যে,

(i) $f(0)\times f(1)\times f(2)\times\cdots\cdots\times f(n) = 3^{n+1}$

(ii) $f(0)\times f(\pm1)\times f(\pm2)\times\cdots\times f(\pm n) = 3^{2n+1}$

প্রমাণ ঃ দেওয়া আছে,

$f(n) = (1-\omega^{3n+1})(1-\omega^{3n+2})$

$= (1-\omega^{3n}\omega)(1-\omega^{3n}\omega^2)$

$= (1-\omega)(1-\omega^2)$ [∵ $n\in\mathbb{N}$), $\omega^{3n}=1$]

$= 1-(\omega+\omega^2)+\omega^3$

$= 1-(-1)+1$ [∵ $1+\omega+\omega^2 = 1$]

$= 3$

(i) L.H.S. $= f(0)\times f(1)\times f(2)\times\cdots\times f(n)$

$= 3\times3\times3\times\cdots\cdots(n+1)$ উৎপাদক পর্যন্ত

$= 3^{n+1}$ = R.H.S. (Proved)

(ii) ∵ $f(n) = 3$, ∴ $f(0) = 3$, $f(1) = 3$, $f(-1) = 3, \cdots\cdots$

এখন, L.H.S. $= f(0)\times f(\pm1)\times f(\pm2)\times\cdots\cdots\times f(\pm n)$

$= f(0)\times f(1)\times f(-1)\times f(2)\times f(-2)\times\cdots\cdots\times f(n)\times f(-n)$

$= 3\times3\times3\times3\cdots\cdots(2n+1)$ উৎপাদক পর্যন্ত

$= 3^{2n+1}$ = R.H.S. (Proved)

12. (a) $x+y+z=0$ হলে দেখাও যে, $(x+y\omega+z\omega^2)^3 + (x+y\omega^2+z\omega)^3 = 27xyz$

প্রমাণ ঃ দেওয়া আছে, $x+y+z=0$

মনে করি, $a = x+y\omega+z\omega^2$ এবং

$b = x+y\omega^2+z\omega$

$\therefore a^3+b^3 = (a+b)(a^2-ab+b^2)$

$= (a+b)\{a^2+(\omega+\omega^2)ab+b^2\omega^3\}$

$= (a+b)(a+\omega b)(a+\omega^2 b)$

$= (x+y\omega+z\omega^2+x+y\omega^2+z\omega)$

$\{x+y\omega+z\omega^2+\omega(x+y\omega^2+z\omega)\}$

$\{x+y\omega+z\omega^2+\omega^2(x+y\omega^2+z\omega)\}$

$= \{2x+y(\omega+\omega^2)+z(\omega+\omega^2)\}$

$\{x+y\omega+z\omega^2+x\omega+y+z\omega^2\}$

$\{x+y\omega+z\omega^2+x\omega^2+y\omega+z\}$

$= \{2x+y(-1)+z(-1)\}$

$\{x(1+\omega)+y(1+\omega)+2z\omega^2\}$

$\{x(1+\omega^2)+2y\omega+z(1+\omega^2)\}$

$= (2x-y-z)\{x(-\omega^2)+y(-\omega^2)+2z\omega^2\}\{x(-\omega)+2y\omega+z(-\omega)\}$

$= \{3x-(x+y+z)\}\{-(x+y+z)+3z\}\omega^2\{3y-(x+y+z)\}\omega$

$= \{3x-0\}\{-0+3z\}\{3y-0\}\omega^3$

$= 27xyz$ = R.H.S. (Proved)

(b) প্রমাণ কর যে, $[\frac{1}{2}(-1+i\sqrt{3})]^n + [\frac{1}{2}(-1-i\sqrt{3})]^n = 2$ এবং -1, যখন n-এর মান যথাক্রমে 3 দ্বারা বিভাজ্য এবং 3 দ্বারা অবিভাজ্য। [কু.'০৬; ঢা.'০৮; রা.'০৯; য.'০৯]

প্রমান ঃ আমরা জানি,

$\omega = \frac{1}{2}(-1+i\sqrt{3})$ হলে, $\omega^2 = \frac{1}{2}(-1-i\sqrt{3})$,

যেখানে এককের কাল্পনিক ঘনমূল ω.

L.H.S. $= [\frac{1}{2}(-1+i\sqrt{3})]^n + [\frac{1}{2}(-1-i\sqrt{3})]^n$

$= \omega^n + (\omega^2)^n$

n -এর মান 3 দ্বারা বিভাজ্য হলে মনে করি,

$n = 3m$, যেখানে $m\in\mathbb{N}$.

$\therefore \omega^n + (\omega^2)^n = \omega^{3m} + (\omega^2)^{3m}$

$= (\omega^3)^m + (\omega^3)^{2m} = 1^m + 1^{2m} = 1+1 = 2$

n -এর মান 3 দ্বারা অবিভাজ্য হলে মনে করি, $n = 3m+1$ অথবা $n = 3m+2$, যেখানে $m\in\mathbb{N}$.

$n = 3m+1$ হলে,

$\omega^n + (\omega^2)^n = \omega^{3m+1} + (\omega^2)^{3m+1}$

$= \omega^{3m}.\omega + \omega^{6m}.\omega^2 = \omega+\omega^2 = -1$

$n = 3m+2$ হলে,

$\omega^n + (\omega^2)^n = \omega^{3m+2} + (\omega^2)^{3m+2}$

$= \omega^{3m}.\omega^2 + \omega^{6m}.\omega^4 = \omega^2+\omega = -1$

$\therefore [\frac{1}{2}(-1+i\sqrt{3})]^n + [\frac{1}{2}(-1-i\sqrt{3})]^n =$ 2 অথবা -1, যখন n -এর মান 3 দ্বারা যথাক্রমে বিভাজ্য এবং 3 দ্বারা অবিভাজ্য।

সম্ভাব্য ধাপসহ প্রশ্ন:

1. $-8-6i$ এর মডুলাস ও আর্গুমেন্ট নির্ণয় করে পোলার আকারে প্রকাশ কর। [রা.'০২

সমাধান: দেওয়া আছে, $-8-6i$

∴ মডুলাস $r = \sqrt{(-8)^2+(-6)^2}$, [∵ $r = \sqrt{x^2+y^2}$] (১)

$= \sqrt{64+36} = 10$,

আর্গুমেন্ট $\theta = \tan^{-1}(\frac{-6}{-8})$, [∵ $\theta = \tan^{-1}\frac{y}{x}$] (১)

$= \tan^{-1}\frac{3}{4} - \pi$, [∵ $\tan^{-1}\frac{-y}{-x} = \tan^{-1}\frac{y}{x} - \pi$] (১)

এবং $-8-6i$ এর পোলার আকার

$= r\cos\theta + i\, r\sin\theta = 10(\cos\theta + i\sin\theta)$,

যেখানে $\theta = \tan^{-1}\frac{3}{4} - \pi$ (১)

2. $4+3i$ কে পোলার আকারে প্রকাশ কর [য.'০০; কুয়েট'০৪-০৫,১২-১৩]

মনে করি, $r\cos\theta = 4$ এবং $r\sin\theta = 3$

∴ মডুলাস $r = \sqrt{4^2+3^2} = 5$, [∵ $r = \sqrt{x^2+y^2}$] (১)

∴ আর্গুমেন্ট $\theta = \tan^{-1}(\frac{3}{4})$, [∵ $\theta = \tan^{-1}\frac{y}{x}$] (১)

∴ $4+3i = r\cos\theta + i\, r\sin\theta$

$= 5(\cos\theta + i\sin\theta)$, যেখানে $\theta = \tan^{-1}(\frac{3}{4})$ (১)

3. আর্গুমেন্ট নির্ণয় কর : $1 - \frac{i}{1-\frac{1}{1+i}}$

সমাধান : $1 - \frac{i}{1-\frac{1}{1+i}} = 1 - \frac{i}{\frac{1+i-1}{1+i}}$

$= 1 - \frac{i(1+i)}{i} = 1-(1+i)$ (১)

$= -i = 0 - 1.i$

∴ নির্ণেয় আর্গুমেন্ট $= \tan^{-1}\frac{-1}{0}$, [∵ $\theta = \tan^{-1}\frac{y}{x}$] (১)

$= -\tan^{-1}\frac{1}{0}$, [∵ $\tan^{-1}\frac{-y}{x} = -\tan^{-1}\frac{y}{x}$] (১)

$= -\cot^{-1}\frac{0}{1}$, [∵ $\tan^{-1}\frac{y}{x} = \cot^{-1}\frac{x}{y}$]

$= -\cot^{-1}0 = -\frac{\pi}{2}$ (Ans.) (১)

4. দেখাও যে,

$(5+12i)^{-1/2} + (5-12i)^{-1/2} = \frac{6}{13}$

প্রমাণ ঃ $(5+12i)^{-\frac12}+(5-12i)^{-\frac12}$

$=\frac{1}{\sqrt{5+12i}}+\frac{1}{\sqrt{5-12i}}$

$=\frac{1}{\sqrt{9-4+12i}}+\frac{1}{\sqrt{9-4-12i}}$ (১)

$=\frac{1}{\sqrt{3^2+(2i)^2+2.3.2i}}+\frac{1}{\sqrt{3^2+(2i)^2-2.3.2i}}$ (১)

$=\frac{1}{\sqrt{(3+2i)^2}}+\frac{1}{\sqrt{(3-2i)^2}}=\frac{1}{3+2i}+\frac{1}{3-2i}$

$=\frac{3-2i+3+2i}{3^2-(2i)^2}=\frac{6}{9-4.i^2}=\frac{6}{9+4}$ (১)

∴ $(5+12i)^{-\frac12}+(5-12i)^{-\frac12}=\frac{6}{13}$ (Showed) (১)

5. $\frac{(1+i)^n}{(1-i)^{n-2}}$ এর মান নির্ণয় কর ।

সমাধান: $\frac{(1+i)^n}{(1-i)^{n-2}} = \frac{(1+i)^n(1-i)^2}{(1-i)^n}$

$=\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^n(1-2.1.i+i^2)$ (১)

$= \left\{\frac{(1+i)^2}{(1-i)(1+i)}\right\}^n (1-2i-1)$

$= \left\{\frac{1+2i+i^2}{1-i^2}\right\}^n(-2i) = \left\{\frac{1+2i-1}{1+1}\right\}^n(-2i)$

$= \left\{\frac{2i}{2}\right\}^n(-2i) = i^n(-2i) = -2i^{n+1}$ (Ans.) (১)

6. বর্গমূল নির্ণয় কর:

(a) $2+i\sqrt{x^2-4}$

$=\frac12\{4+2i\sqrt{(x+2)(x-2)}\}$

$=\frac12\{(x+2)-(x-2)+2i\sqrt{(x+2)(x-2)}\}$

$=\frac12\{(x+2)+(x-2)i^2+2i\sqrt{(x+2)(x-2)}\}$ (১)

$=\frac12\{(\sqrt{x+2})^2+(i\sqrt{x-2})^2 + 2.\sqrt{x+2}.i\sqrt{x-2}\}$

$=\frac12\{\sqrt{x+2}+i\sqrt{x-2}\}^2$

∴ $2+i\sqrt{x^2-4}$ এর বর্গমূল $= \pm\frac{1}{\sqrt2}(\sqrt{x+2}+i\sqrt{x-2})$ (১)

6(b) $\frac12(-1+\sqrt{-3}) = \frac14(-2+2\sqrt3 i)$

$=\frac14(1-3+2\sqrt3 i)$

$=\frac14\{1^2+(i\sqrt3)^2+2.1.i\sqrt3\}$ (১)

$=\frac14(1+i\sqrt3)^2 = \frac14(1+\sqrt{-3})^2$

∴ $\frac12(-1+\sqrt{-3})$ এর বর্গমূল $=\pm\frac12(1+\sqrt{-3})$ (১)

6(c) $i = \frac12.2i = \frac12(1-1+2i)$

$=\frac12(1^2+i^2+2.1.i) = \frac12(1+i)^2$ (১)

∴ i এর বর্গমূল $=\pm\frac{1}{\sqrt2}(1+i)$ (১)

7. $x = \frac{a+ib}{a-ib}$ হলে প্রমাণ কর যে, $(a^2+b^2)x^2 + a^2+b^2 = 2(a^2-b^2)x$

প্রমাণ : দেওয়া আছে, $x = \frac{a+ib}{a-ib}$

⇒ $ax - ibx = a+ib$ (১)

⇒ $ax - a = i(b+bx)$ (১)

⇒ $(ax-a)^2 = i^2(b+bx)^2$

⇒ $a^2x^2 - 2a^2x + a^2 = -(b^2+2b^2x+b^2x^2)$ (১)

⇒ $a^2x^2-2a^2x+a^2+b^2+2b^2x+b^2x^2=0$

⇒ $(a^2+b^2)x^2+a^2+b^2-2(a^2-b^2)x=0$

∴ $(a^2+b^2)x^2+a^2+b^2=2(a^2-b^2)x$ (১)

8. $z_1 = 1+i\sqrt3$, $z_2=\sqrt3 - i$ হলে দেখাও যে,

(a) $\arg(z_1z_2) = \arg z_1 + \arg z_2$

(b) $\arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \arg z_1 - \arg z_2$

প্রমাণ: দেওয়া আছে, $z_1 = 1+i\sqrt3$, $z_2=\sqrt3-i$

∴ $\arg z_1 = \arg(1+i\sqrt3) = \tan^{-1}\frac{\sqrt3}{1} = \frac\pi3$ (১)

এবং $\arg z_2 = \arg(\sqrt3-i) = \tan^{-1}\left(\frac{-1}{\sqrt3}\right) = -\frac\pi6$

(i) $z_1z_2 = (1+i\sqrt3)(\sqrt3-i)$

$=\sqrt3 - i + 3i - \sqrt3 i^2$ (১)

$=\sqrt3+2i+\sqrt3 = 2\sqrt3+2i$ (১)

∴ $\arg(z_1z_2) = \tan^{-1}\frac{2}{2\sqrt3} = \tan^{-1}\frac{1}{\sqrt3}=\frac\pi6$

এখন, $\arg z_1 + \arg z_2 = \frac\pi3 - \frac\pi6 = \frac{2\pi-\pi}{6}=\frac\pi6$

∴ $\arg(z_1z_2) = \frac\pi6 = \arg z_1 + \arg z_2$ (১)

(ii) $\frac{z_1}{z_2} = \frac{1+i\sqrt3}{\sqrt3-i} = \frac{(1+i\sqrt3)(\sqrt3+i)}{(\sqrt3-i)(\sqrt3+i)}$

$=\frac{\sqrt3-\sqrt3+i+3i}{3+1} = \frac{4i}{4} = i = 0+i$ (২)

∴ $\arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \tan^{-1}\left(\frac10\right) = \cot^{-1}\frac01$

$=\cot^{-1}0 = \frac\pi2$

এখন, $\arg z_1 - \arg z_2 = \frac\pi3 + \frac\pi6 = \frac{2\pi+\pi}{6}$

$=\frac{3\pi}{6}=\frac\pi2$

∴ $\arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \frac\pi2 = \arg z_1 - \arg z_2$ (১)

9. প্রমাণ কর যে,

(a) $(1-\omega+\omega^2)(1+\omega-\omega^2)=4$

L.H.S.= $(1-\omega+\omega^2)(1+\omega-\omega^2)$

$=(-\omega-\omega)(-\omega^2-\omega^2)$ [∵ $1+\omega+\omega^2=0$] (১)

$=(-2\omega)(-2\omega^2) = 4\omega^3 = 4.1 = 4$ = R.H.S. (১)

(b) $(1+\omega-\omega^2)^3 - (1-\omega+\omega^2)^3 = 0$

L.H.S.= $(1+\omega-\omega^2)^3 - (1-\omega+\omega^2)^3$

$=(-\omega^2-\omega^2)^3-(-\omega-\omega)^3$ (১)

[∵ $1+\omega+\omega^2=0$]

$=(-2\omega^2)^3-(-2\omega)^3 = -8\omega^6+8\omega^3$

$=-8.1+8.1=0$ = R.H.S. (১)

(c) $(1+\omega)(1+\omega^2)(1+\omega^4)(1+\omega^8)=1$

L.H.S.= $(1+\omega)(1+\omega^2)(1+\omega^4)(1+\omega^8)$

$=(1+\omega)(1+\omega^2)(1+\omega)(1+\omega^2)$ (১)

$= (1+\omega)^2(1+\omega^2)^2 = (1+\omega^2+\omega+\omega^3)^2$

$= (0+1)^2 = 1 = $ R.H.S.

ভর্তি পরীক্ষার MCQ :

1. $-2-2i$ জটিল রাশিটির আর্গুমেন্ট-[BUET 07-08; IU 08-09; CU 09-10,08-09; JU 09-10]

$Sol^n.:$ $-2-2i$ এর আর্গুমেন্ট $= \tan^{-1}\frac{-2}{-2} =$

$-\pi + \tan^{-1}1 = -\pi + \frac{\pi}{4} = -\frac{3\pi}{4}$

ক্যালকুলেটরের সাহায্যে, Mode 2 (Complex)

Shift ((arg) ((arg) − 2 − 2 ENG) =

Shift) (abs) ((arg) − 2 − 2 ENG) =

-135^0 যা $-\frac{3\pi}{4}$ এর সমান।

$2\sqrt{2}$: যা প্রদত্ত জটিল রাশির মডুলাস।

2. $\frac{2+3i}{2-i} = P + Qi$ হলে এবং P ,Q বাস্তব সংখ্যা হলে Q = ? [BAU 07-08]

$Sol^n.:$ক্যালকুলেটরের সাহায্যে,

(2 + 3 ENG) ÷ (2 −

ENG) = 1/5 (Real part)

Shift = 8/5 (Imaginary part

$\therefore\ Q = \frac{8}{5}$

3. i^{-49} এর মান– [BUET 06-07; JU 09-10]

$Sol^n.:$ $i^{-49} = i^{-1} = -i$

4. $i^2 = -1$ হলে $\frac{i - i^{-1}}{i + 2i^{-1}}$ এর মান কত?
(১) [DU 07-08, Jt.U 08-09]

$Sol^n.:$ $\frac{i-i^{-1}}{i+2i^{-1}} = \frac{2i}{-i} = -2$

$[\because i^{-1} = -i, i^{-2} = -1, i^{-3} = i; i^{-4} = 1]$

অথবা, ক্যালকুলেটরের সাহায্যেও উত্তর পাওয়া যায়।

5. $i^2 = -1$ হলে $\frac{i+i^{-1}}{i-i^{-1}}$ এর মান কত?[DU05-06]

$Sol^n.:$ $\frac{i+i^{-1}}{i-i^{-1}} = \frac{i-i}{i+i} = 0$

6. $\frac{i}{1-\frac{1}{1-\frac{1}{i}}}$ এর মান– [DU 06-07; NU 08-09]

$Sol^n.:$ $\frac{i}{1-\frac{1}{1-\frac{1}{i}}} = \frac{i}{1-\frac{1}{1+i}} = \frac{i(1+i)}{1+i-1} = 1+i$

অথবা, ক্যালকুলেটরের সাহায্যেও উত্তর পাওয়া যায়।

7. $x = -1+i$ হলে $x^3 + 3x^2 + 4x + 7$ এর মান– [DU 05-06; RU 09-10]

$Sol^n.:$ ক্যালকুলেটরের সাহায্যে,

− 1 + ENG =

Ans Shift x^2 + 3 Ans x^2 + 4

Ans + 7 = 5 Shift = 0

8. $17 - 20\sqrt{-2}$ এর বর্গমূল– [RU 07-08]

A. $\pm(5-2\sqrt{2}i)$ B. $\pm(4-3\sqrt{3}i)$

C. $\pm(4-3\sqrt{2}i)$ D. $\pm(5-3\sqrt{2}i)$

$Sol^n.:$ $17-20\sqrt{-2}$ এর বর্গমূল

$= \pm\sqrt{5^2 - (2\sqrt{2})^2 - 2.5.2\sqrt{2}i} = \pm(5-2\sqrt{2}i)$

ক্যালকুলেটরের সাহায্যে, প্রদত্ত Option গুলোর মধ্যে যাকে বর্গ করে $17-20\sqrt{2}i$ বা $17-28.28i$ পাওয়া যাবে সেটিই উত্তর।

(5 − 2 √ 2 ENG) x^2

= 17 Shift = − 28.28i

9. $7-24i$ এর বর্গমূল – [BUET 09-10]

$Sol^n.:$ $7-24i$ এর বর্গমূল

$= \pm\sqrt{4^2 + (3i)^2 - 2.4.3i} = \pm(4-3i)$

10. $\sqrt{i} + \sqrt{-i}$ এর মান– [BUET 05-06, KUET 08-09, 06-07; CU 07-08,05-06; RUET 12-13]

$Sol^n.:$ $\sqrt{i} + \sqrt{-i} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\sqrt{2i} + \sqrt{-2i})$

$= \frac{1}{\sqrt{2}}\{\sqrt{(1+i)^2} + \sqrt{(1-i)^2}\} = \frac{1}{\sqrt{2}}\{1+i+1-i\}$

$= \frac{1}{\sqrt{2}} \times 2 = \sqrt{2}$

11. $\sqrt{-2}\sqrt{-1}$ এর মান– [CU 08-09]

$Sol^n.:$ $\sqrt{-2}\sqrt{-1} = \sqrt{2i^2}\sqrt{i^2} = \sqrt{2}i.i$

$= \sqrt{2}i^2 = -\sqrt{2}$

12. $\sqrt[4]{-81}$ এর মান– [BUET 08-09]

$Sol^n.:$ $\sqrt[4]{-81} = \sqrt[4]{(9i)^2} = \sqrt{\pm 9i}$

$= \sqrt{\frac{9}{2}(\pm 2i)} = \sqrt{\frac{9}{2}(1+i^2 \pm 2i)}$

$= \sqrt{\frac{9}{2}(1\pm i)^2} = \pm\frac{3}{\sqrt{2}}(1\pm i)$

13. $\sqrt[4]{-169}$ এর মান– [SU 06-07; RU 06-07]

$Sol^n.:$ $\sqrt[4]{-169} = \sqrt[4]{(13i)^2} = \sqrt{\pm 13i}$

$= \sqrt{\frac{13}{2}(\pm 2i)} = \sqrt{\frac{13}{2}(1+i^2 \pm 2i)}$

$= \sqrt{\frac{26}{4}(1\pm i)^2} = \pm\frac{\sqrt{26}}{2}(1\pm i)$

14. $\sqrt[6]{-64}$ এর সম্ভাব্য মান– [KU 07-08]

$Sol^n.:$ ধরি, $\sqrt[6]{-64} = x \Rightarrow x^6 = -64 = (-4)^3$

$\therefore\ x^2 = -4, -4\cdot\frac{1}{2}(-1\pm\sqrt{3}i)$

$= -4, (2\pm 2\sqrt{3}i) = (2i)^2, (\sqrt{3}\pm i)^2$

$\therefore\ x = \sqrt[6]{-64} = \pm 2i, \pm(\sqrt{3}\pm i)$

কৌশল : $\sqrt{-n + n\sqrt{-n + n\sqrt{-n + \cdots\cdots\infty}}}$

$= \frac{n \pm \sqrt{n^2 - 4n}}{2}$

15. $\sqrt{-2 + 2\sqrt{-2 + 2\sqrt{-2 + \cdots\infty}}}$ এর মান কত? [JU 06-07; KUET 07-08]

$Sol^n.:$ $\sqrt{-2 + 2\sqrt{-2 + 2\sqrt{-2 + \cdots\infty}}}$

$= \frac{2 \pm \sqrt{2^2 - 4.2}}{2} = 1 \pm i$

16. যদি ω এককের একটি কাল্পনিক জটিল ঘনমূল হয়, তবে $(1-\omega+\omega^2)^2 + (1+\omega-\omega^2)^2 =$

[DU 05-06, 01-02, 97-98; Jt.U 08-09]

$Sol^n.:$ $(1-\omega+\omega^2)^2 + (1+\omega-\omega^2)^2$

$= (-2\omega)^2 + (-2\omega^2)^2 = 4(\omega + \omega^2) = -4$

ক্যালকুলেটরের সাহায্যে,

((arg) − 1 + √ 3) (abs) ÷ 2 =

(1 − Ans + Ans x^2) x^2 +

(1 + Ans − Ans x^2) x^2 =

17. যদি ω এককের একটি কাল্পনিক জটিল ঘনমূল হয়, তবে $(1+\omega)(1+\omega^2)(1+\omega^4)(1+\omega^8) =$

[Jt.U07-08; JU 09-10]

$Sol^n.: (-2\omega^2)(-2\omega)(-2\omega^2)(-2\omega)=16$

18. $x=\frac{1}{2}(-1+\sqrt{3}i)$ হলে $x^{3(n+2)}$ এর মান কত?

[BAU 05-06]

$Sol^n.:$ এখানে, $x=\omega$ $[\because \omega^{3(n+2)}=1$

19. $z_1=2+i$ এবং $z_2=3+i$ হলে $z_1\bar{z}_2$-এর মডুলাস-

DU 13-14

A. 6 B. $5\sqrt{2}$ C. 7 D. $5\sqrt{3}$

$Sol^n.: z_1\bar{z}_2=(2+i)(3-i)=6-i^2+i$

$=7+i$

$\therefore$ মডুলাস $=\sqrt{7^2+1^2}=\sqrt{50}=5\sqrt{2}$

20. যদি $a=\frac{1+i}{\sqrt{2}}$ হয়, তবে a^6 এর মান হবে-

BUET 11-12

A. -1 B. i C. 1 D. $-i$

$Sol^n.: a^2=\frac{1+2i+i^2}{2}=\frac{1+2i-1}{2}=i$

$\therefore a^6=(a^2)^3=i^3=-i$

বহুনির্বাচনি প্রশ্ন (Multiple Choice Questions):

1. $Sol^n: i^{29}=i^{4\times7+1}=i$ $\therefore$ উ: ঘ
2. Sol^n: যেকোনো বাস্তব সংখ্যাকে একটি জটিল সংখ্যা এবং জটিল সংখ্যাকে আর্গন্ডের চিত্রে চিত্রিত করা যায়। $\therefore$ উ: ক
3. $Sol^n: i^{-2017}=\frac{1}{i^{4\times504+1}}=\frac{-i^2}{i}=-i$ উ: গ
4. $Sol^n: \frac{i^{2n}}{i}=\frac{(i^2)^n}{i}=\frac{(-1)^n}{i}\neq -1$ $\therefore$ উ: খ
5. Sol^n: বাস্তব অক্ষ হতে $1+\sqrt{2}i$ জটিল সংখ্যার দূরত্ব $=|\sqrt{2}|=\sqrt{2}$ $\therefore$ উ: খ
6. Sol^n: মূল বিন্দু হতে $1-\sqrt{2}i$ জটিল সংখ্যাটি দূরত্ব $=\sqrt{1^2+(\sqrt{2})^2}=\sqrt{1+2}=\sqrt{3}$ $\therefore$ উ: ঘ
7. Sol^n: জটিল সংখ্যার আর্গুমেন্টের মূখ্য মান θ এর সীমা $-\pi<\theta\leq\pi$. $\therefore$ উ: গ
8. $Sol^n: |z|=1\Rightarrow|x+iy|=1$ $\Rightarrow\sqrt{x^2+y^2}=1\Rightarrow x^2+y^2=1$; যা একটি বৃত্তের সমীকরণ। $\therefore$ উ: খ
9. $Sol^n: z=\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}$ জটিল সংখ্যার মডুলাস $=\sqrt{\cos^2\frac{3\pi}{4}+\sin^2\frac{3\pi}{4}}$ $=\sqrt{1}=1$ $\therefore$ উ: গ
10. $Sol^n: z=2(\cos\frac{5\pi}{6}+i\sin\frac{5\pi}{6})$ $=2\{\cos(\pi-\frac{\pi}{6})+i\sin(\pi-\frac{\pi}{6})\}$ $=2\{-\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\}=2\{-\frac{\sqrt{3}}{2}+i\frac{1}{2}\}$ $=-\sqrt{3}+i$ $\therefore$ উ: ঘ
11. $Sol^n: -2\sqrt{3}+6i$ এর আর্গুমেন্ট $=\tan^{-1}\frac{6}{-2\sqrt{3}}=\pi-\tan^{-1}\sqrt{3}=\pi-\frac{\pi}{3}$ $=\frac{2\pi}{3}$ $\therefore$ উ: গ
12. $Sol^n: -1-\sqrt{3}i$ এর আর্গুমেন্ট কোনটি? $=\tan^{-1}\frac{-\sqrt{3}}{-1}=-\pi+\tan^{-1}\sqrt{3}$ (৩.১) $=-\pi+\frac{\pi}{3}=-\frac{2\pi}{3}$ $\therefore$ উ: ঘ
13. Sol^n: $1+\sqrt{3}$ এর মডুলাস $=\sqrt{1+3}=2$ ও আর্গুমেন্ট $=\tan^{-1}\frac{\sqrt{3}}{1}=\frac{\pi}{3}$ $\therefore$ উ: ক
14. Sol^n: $1+\sqrt{3}i$ এর আর্গুমেন্ট $\theta=\tan^{-1}\frac{\sqrt{3}}{1}=\frac{\pi}{3}$

$\therefore (1+\sqrt{3}i)^4$ এর আর্গুমেন্ট $\theta=\frac{4\pi}{3}$. উ: ক

15. $Sol^n: z=-\sqrt{3}=-\sqrt{3}+0i$ এর আর্গুমেন্ট $=\tan^{-1}\frac{0}{-\sqrt{3}}=\pi-\tan^{-1}0=\pi$ $\therefore$ উ: খ
16. $Sol^n: z=-\sqrt{3}i=0-\sqrt{3}i$ এর আর্গুমেন্ট $=\tan^{-1}\frac{-\sqrt{3}}{0}=-\cot^{-1}0=-\frac{\pi}{2}$ $\therefore$ উ: ঘ
17. $Sol^n: z=x+iy$ জটিল রাশির আর্গুমেন্ট, $\tan^{-1}\frac{y}{x}=\frac{4\pi}{3}\Rightarrow y=x\tan\frac{4\pi}{3}$ $\Rightarrow y=x\tan(\pi+\frac{\pi}{3})\Rightarrow y=x\tan\frac{\pi}{3}$ $\Rightarrow y=\sqrt{3}x$ $\therefore$ উ: ঘ
18. $Sol^n: -3i-2$ এর অনুবন্ধি সংখ্যা $=3i-2$ $\therefore$ Ans. (ঘ)
19. $Sol^n: -2+3i$ এর অনুবন্ধী জটিল সংখ্যা $-2-3i$ কে $(-2,-3)$ বিন্দু দ্বারা প্রকাশ করা যায়। $\therefore$ উ: গ
20. Sol^n: মূলবিন্দু হতে ও বাস্তব অক্ষ হতে $-1+\sqrt{3}i$ এর অনুবন্ধী রাশি $-1-\sqrt{3}i$ এর দূরত্ব যথাক্রমে $\sqrt{1+3}=2, \sqrt{3}$ $\therefore$ উ: ঘ
21. $Sol^n: 2+3i$ এর অনুবন্ধী জটিল সংখ্যা $2-3i$ কে $(2,-3)$ বিন্দু দ্বারা প্রকাশ করা যায় $\therefore$ উ: ঘ
22. $-1-\sqrt{3}i$ জটিল সংখ্যাটির আর্গুমেন্ট $=\tan^{-1}\frac{-\sqrt{3}}{-1}=-\pi+\tan^{-1}\sqrt{3}=-\pi+\frac{\pi}{6}$ $=-\frac{5\pi}{6}$; $-1-\sqrt{3}i$ অনুবন্ধী জটিল সংখ্যা $=-1+\sqrt{3}i$ $\therefore$ উ: ক.
23. $Sol^n: -x-\sqrt{3}i$ ও $iy+1$ পরস্পর অনুবন্ধী হলে, $-x=1\Rightarrow x=-1, -\sqrt{3}=-y$ $\Rightarrow y=\sqrt{3}$ $\therefore x+iy=-1+i\sqrt{3}$ এর আর্গুমেন্ট $=\tan^{-1}\frac{\sqrt{3}}{-1}=\pi-\tan^{-1}\sqrt{3}$ $=\pi-\frac{\pi}{3}=\frac{2\pi}{3}$ $\therefore$ উ: ঘ
24. $Sol^n: a-ib=-i-1$ হলে b এর মান $=1$ $\therefore$ উ: খ
25. $Sol^n: A+iB=\frac{1+\sqrt{3}i}{i^2}=\frac{1+\sqrt{3}i}{-1}$ $=-1-\sqrt{3}i$ $\therefore A-iB=-1+\sqrt{3}i$ এর আর্গুমেন্ট $=\tan^{-1}\frac{\sqrt{3}}{-1}=\pi-\tan^{-1}\sqrt{3}$ $=\pi-\frac{\pi}{3}=\frac{2\pi}{3}$ $\therefore$ উ: খ
26. $Sol^n: -x+5i$ ও $iy+7$ এর অনুবন্ধী পরস্পর সমান হলে, $-x=7\Rightarrow x=-7$, $-y=-5\Rightarrow y=5$ $\therefore (x,y)=(-7,5)$ $\therefore$ উ: ক
27. $Sol^n: x=\frac{1+\sqrt{-1}}{\sqrt{2}}=\frac{1+i}{\sqrt{2}}$ $\Rightarrow x^2=\frac{1+2i+i^2}{2}=\frac{1+2i-1}{2}=i$ $\therefore x^{12}=i^6=i^2=-1$ $\therefore$ উ: ক
28. $Sol^n: z_1-z_2=-3+2i+1-3i$ $=-2-i$ এর অবস্থান তৃতীয় চতুর্ভাগে। $\therefore$ উ: গ.
29. $Sol^n: z_1$ ও z_2 এর দূরত্ব $=|z_1-z_2|$ $=|-3+2i+4|=|1+2i|$ $=\sqrt{1+4}=\sqrt{5}$ $\therefore$ উ: ক
30. $Sol^n: z_1$ এর অনুবন্ধী সংখ্যাটির পরম মান $=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$ $\therefore$ উ: ক

31. Sol^n : $z_1 z_2 = (1+i)(2i+3)$
$= 2i + 3 + 2i^2 + 3i = 3 - 2 + 5i$
$= 1 + 5i$
$\therefore |z_1 z_2| = \sqrt{1^2+5^2} = \sqrt{26}$ $\therefore$ উ: খ

32. Sol^n : $z_1 - 2z_2 = 1 + i - 4i - 6$
$= -5 - 3i$
$\therefore$ $z_1 - 2z_2$ এর পরম মান $= \sqrt{25+9} = \sqrt{34}$
$\therefore$ উ: ক

33. Sol^n : $z^2 = (-i-2)^2 = i^2 + 4i + 4 = 4i + 3$
$z\bar{z} = (-i-2)(i-2) = 2^2 - i^2 = 4 + 1 = 5$
$\therefore$ উ: খ

34. Sol^n : $x^2 + x\bar{x} + (\bar{x})^2 = (x+\bar{x})^2 - x\bar{x}$
$= (3 + 2i + 3 - 2i)^2 - (3+2i)(3-2i)$
$= 36 - (9+4) = 36 - 13 = 23$
$\therefore$ উ: খ

35. Sol^n : $x = \frac{i-1}{\sqrt{2}} = \frac{i}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}$ এর আর্গুমেন্ট
$= \tan^{-1}\frac{1}{-1} = \pi - \tan^{-1}1 = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$
$\therefore$ উ: ঘ

36. Sol^n : $(\sqrt{2}x)^2 = (1-i)^2 \Rightarrow 2x^2 = -2i$
$\Rightarrow x^2 = -i$
$\therefore x^4(1 + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^4}) = x^4 + x^2 + 1$
$= i^2 - i + 1 = -i$ $\therefore$ উ: গ.

37. Sol^n : $|(3+4i)(-i+1)|$ এর মান কত?
$|(3+4i)(-i+1)| = |-3i + 3 + 4 + 4i|$
$= |7+i| = \sqrt{49+1} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$
$\therefore$ উ: খ

38. Sol^n : $(-\sqrt{3}+i)(\sqrt{3}i+1)$
$= (-3i - \sqrt{3} - \sqrt{3} + i = -2i - 2\sqrt{3}$ এর
আর্গুমেন্ট $= \tan^{-1}\frac{-2}{-2\sqrt{3}} = \pi + \tan^{-1}\frac{1}{\sqrt{3}}$
$= \pi + \frac{\pi}{6} = \frac{7\pi}{6}$ $\therefore$ উ: গ

39. Sol^n : $(1+\omega)^3 = (-\omega^2)^3 = -\omega^6 = -1$
$\therefore$ উ: গ

40. Sol^n : $\omega^{17} = \omega^{3\times5+2} = \omega^2, \omega.\omega^2 = \omega^3 = 1$
এবং $\omega^2 + \omega + 1 = 0$ $\therefore$ উ: ক.

41. Sol^n : $\frac{1}{2}(-1+\sqrt{-3})$ ও $\frac{1}{2}(1+\sqrt{-3})$
পরস্পর বর্গ। $\therefore$ উ: গ

42. Sol^n : সবগুলি তথ্য সত্য। $\therefore$ উ: ঘ

43. Sol^n : $x + iy = i^{-2017} + 2\omega^{-2016}$
$\Rightarrow x + iy = i^{-(4\times504+1)} + 2\omega^{-(3\times672)}$
$\Rightarrow x + iy = i^{-1} + 2\omega^0 = \frac{-i^2}{i} + 2 = -i + 2$
$\therefore x = 2, y = -1$ $\therefore \frac{y}{x} = -\frac{1}{2}$ $\therefore$ উ: খ

44. Sol^n : $\omega^3 + \sqrt{3}i^3 = 1 - \sqrt{3}i$ জটিল
সংখ্যার আর্গুমেন্ট $= \tan^{-1}\frac{-\sqrt{3}}{1} = -\tan^{-1}\sqrt{3} = -\frac{\pi}{3}$
$\therefore$ পোলার আকার
$= 2\{\cos(-\frac{\pi}{3}) + i\sin(-\frac{\pi}{3})\}$
$= 2(\cos\frac{\pi}{3} - i\sin\frac{\pi}{3})$ $\therefore$ উ: ঘ

45. Sol^n : $\omega = \frac{-1+\sqrt{-3}}{2}$ এর অনুবন্ধী জটিল
সংখ্যা $= \frac{-1-\sqrt{-3}}{2}$ $\therefore$ উ: খ

46. $\omega^{32} + \omega^{64} - \sqrt{3}i^{13} = \omega^2 + \omega^1 - \sqrt{3}i^1$
$= -1 - \sqrt{3}i$ এর আর্গুমেন্ট
$= \tan^{-1}\frac{-\sqrt{3}}{-1} = -\pi + \tan^{-1}\sqrt{3}$
$= -\pi + \frac{\pi}{3} = -\frac{2\pi}{3}$ উ: গ

47. Sol^n : $x = \frac{-1+\sqrt{-3}}{2} = \omega$
$\therefore x^{101} + x^{200} = \omega^{101} + \omega^{200} = \omega^2 + \omega^2$
$= 2\omega^2 = 2x^2$ উ: ঘ

48. Sol^n : $P + P^2 = -1$ $\therefore$ উ: খ.

49. Sol^n : i এর বর্গমূল $= \pm\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{2i}$
$= \pm\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{1+i^2+2i} = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{(1+i)^2}$
$= \pm\frac{1}{\sqrt{2}}(1+i) = \frac{1+i}{\sqrt{2}}, \frac{-1-i}{\sqrt{2}}$ $\therefore$ উ: খ

50. Sol^n : $i + i^2 + i^3 + \cdots\cdots + i^{23}$
$= i\frac{1-i^{23}}{1-i} = i\frac{1-(i^2)^{11}i}{1-i} = i\frac{1-(-1)^{11}i}{1-i}$
$= i\frac{1-(-1)i}{1-i} = i\frac{1+i}{1-i} = i\frac{(1+i)^2}{(1-i)(1+i)}$
$= i\frac{2i}{2} = i^2 = -1$ $\therefore$ উ: ঘ

51. Sol^n : $i^{4n+3} = i^3 = -i$ $\therefore$ উ: খ

52. Sol^n : $(\frac{1+i}{1-i})^n = 1 \Rightarrow \{\frac{1+2i+i^2}{(1-i)(1+i)}\}^n = 1$
$\Rightarrow \{\frac{2i}{2}\}^n = 1 \Rightarrow i^n = 1$ হবে যদি $n \in \mathbb{N}$ এর
সর্বনিম্ন মান 4 হয়। $\therefore$ উ: গ

53. Sol^n : $\frac{(i+1)^2}{(i-1)^4} = \frac{i^2+2i+1}{(i^2-2i+1)^2}$
$= \frac{-1+2i+1}{(-1-2i+1)^2} = \frac{2i}{(-2i)^2} = \frac{2i}{4i^2}$
$= \frac{i}{2(-1)} = -\frac{1}{2}i$
$\frac{(i+1)^2}{(i-1)^4}$ এর আর্গুমেন্ট $= \tan^{-1}\frac{-1/2}{0}$
$= -\tan^{-1}(\tan\frac{\pi}{2}) = -\frac{\pi}{2}$ $\therefore$ উ: ক

54. Sol^n : $\sqrt{-16} \times \sqrt{-1} = \sqrt{16i^2} \times \sqrt{i^2}$
$= 4i \times i = 4i^2 = 4(-1) = -4$ $\therefore$ উ: গ

55. Sol^n : $-2-2i$ জটিল রাশিটির আর্গুমেন্ট
$= \tan^{-1}\frac{-2}{-2} = -\pi + \frac{\pi}{4} = -\frac{3\pi}{4}$ উ: গ

56. Sol^n : $i^2 = -1$ হলে $\frac{i^{-1}-i}{i+2i^{-1}} = \frac{1-i^2}{i^2+2}$
$= \frac{1-(-1)}{-1+2} = 2$ উ: ঘ

57. Sol^n : $\frac{i-i^{-1}}{i+2i^{-1}} = \frac{i^2-1}{i^2+2} = \frac{-1-1}{-1+2} = -2$ এর
নতি বা আর্গুমেন্ট $= \pi$ $\therefore$ উ: ঘ
[বি.দ্র.: কোনো জটিল সংখ্যায় (i) শুধু বাস্তব অংশ থাকলে এবং তা ধনাত্মক হলে আর্গুমেন্ট $= 0$. ঋণাত্মক হলে আর্গুমেন্ট $= \pi$; (ii) শুধু কাল্পনিক অংশ থাকলে, এবং তা ধনাত্মক হলে আর্গুমেন্ট $= \frac{\pi}{2}$, ঋণাত্মক হলে আর্গুমেন্ট $= -\frac{\pi}{2}$]

58. Sol^n : $\left|\frac{(2-i)^3}{2+3i}\right| = \left|\frac{2^3 - 3.2^2i + 3.2i^2 - i^3}{2+3i}\right|$
$= \left|\frac{8-12i-6+i}{2+3i}\right| = \left|\frac{2-11i}{2+3i}\right| = \frac{\sqrt{4+121}}{\sqrt{4+9}}$
$= \frac{\sqrt{125}}{\sqrt{13}} = \frac{5\sqrt{5}}{\sqrt{13}} = \frac{5\sqrt{65}}{13}$ $\therefore$ উ: খ

59. Sol^n : $\left|\frac{(2+i)^3}{2+3i}\right| = \left|\frac{2^3 + 3.2^2i + 3.2i^2 + i^3}{2+3i}\right|$
$= \left|\frac{8+12i-6-i}{2+3i}\right| = \left|\frac{2+11i}{2+3i}\right| = \frac{\sqrt{4+121}}{\sqrt{4+9}}$
$= \frac{\sqrt{125}}{\sqrt{13}} = \frac{5\sqrt{5}}{\sqrt{13}} = \frac{5\sqrt{65}}{13}$ $\therefore$ উ: ঘ

60. Sol^n : $\frac{i}{1-\frac{1}{1-\frac{1}{i}}} = \frac{i}{1-\frac{1}{\frac{i-1}{i}}} = \frac{i}{\frac{i-1-i}{i-1}}$

$= \frac{i^2 - i}{-1} = 1 + i \therefore$ উঃ ক

61. Sol^n : $x = -1 + i \Rightarrow x + 1 = i$

$\Rightarrow x^3 + 3x^2 + 3x + 1 = i^3$

$\Rightarrow x^3 + 3x^2 + 4x + 7 - x - 6 = -i$

$\Rightarrow x^3 + 3x^2 + 4x + 7 = -1 + i + 6 - i = 5$

$\therefore$ উঃ গ

62. Sol^n : $x = \frac{1}{2}(-1 + \sqrt{-3}) = \omega$ হলে,

$y = \frac{1}{2}(-1 - \sqrt{-3}) = \omega^2$

$\therefore 1 - x - y - xy = 1 - \omega - \omega^2 - \omega^3$

$= 1 - (-1) - 1 = 1 \therefore$ উঃ খ

63. Sol^n : $4 - 4\sqrt{-1} = 4 - 4i$

এখানে,

$\sqrt{(\sqrt{8}+2)(\sqrt{8}-2)} = \sqrt{(8-4)} = 2$ এবং

$\{\sqrt{(\sqrt{8}+2)}\}^2 - \{\sqrt{(\sqrt{8}-2)}\}^2$

$= (\sqrt{8} + 2 - \sqrt{8} + 2) = 4 \therefore$ উঃ খ

64. Sol^n : ক্যালকুলেটরের সাহায্যে:

$\frac{5+12i}{3-4i} = -\frac{33}{25} + \frac{56}{25}i$ এবং

$(\frac{4}{5} + \frac{7}{5}i)^2 = -\frac{33}{25} + \frac{56}{25}i \therefore$ উঃ গ

65. Sol^n : $\sqrt{i} + \sqrt{-i} = \pm\sqrt{\frac{1}{2}(1+i)^2} + \sqrt{\frac{1}{2}(1-i)^2}$

$= \pm\frac{1}{\sqrt{2}}(1 + i + 1 - i) = \pm\sqrt{2} \therefore$ উঃ গ

66. Sol^n : $\sqrt[4]{-81} = \sqrt[4]{(9i)^2} = \sqrt{\pm 9i}$

$= \sqrt{\frac{9}{2}(\pm 2i)} = \sqrt{\frac{9}{2}(1 + i^2 \pm 2i)}$

$= \sqrt{\frac{9}{2}(1 \pm i)^2} = \pm\frac{3}{\sqrt{2}}(1 \pm i) \therefore$ উঃ ক

67. Sol^n : $(1 - \omega + \omega^2)^2 + (1 + \omega - \omega^2)^2$

$= (-2\omega)^2 + (-2\omega^2)^2 = 4(\omega^2 + \omega)$

$= 4(-1) = -4 \therefore$ উঃ ঘ

68. Sol^n : $|x - 1 + iy| + |x + 1 + iy| = 4$

$\Rightarrow \sqrt{(x-1)^2 + y^2} + \sqrt{(x+1)^2 + y^2} = 4$; যা একটি উপবৃত্তের সমীকরণ যার উপকেন্দ্র (1, 0), (-1, 0) এবং বৃহৎ অক্ষের দৈর্ঘ্য, $2a = 4 \Rightarrow a = 2$. Option গুলিতে উপবৃত্তের সমীকরণ $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{5} = 1$.

ব্যাখ্যা: কেন্দ্র (0, 0) হতে, উপকেন্দ্রের দূরত্ব, $\sqrt{a^2 - b^2} = 1 \Rightarrow b^2 = 2^2 - 1 = 3$.

$\therefore$ উপবৃত্তের সমীকরণ, $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{5} = 1$

বিকল্প ব্যাখ্যা:

$\sqrt{(x-1)^2 + y^2} = 4 - \sqrt{(x+1)^2 + y^2}$

$\Rightarrow (x-1)^2 + y^2 = 16 - 8\sqrt{(x+1)^2 + y^2} + (x+1)^2 + y^2$

$\Rightarrow 8\sqrt{(x+1)^2 + y^2} = 4x + 16$

$\Rightarrow 2\sqrt{(x+1)^2 + y^2} = x + 4$

$\Rightarrow 4(x^2 + 2x + 1 + y^2) = x^2 + 8x + 16$

$\Rightarrow 3x^2 + 4y^2 = 12 \Rightarrow \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{5} = 1 \therefore$ উঃ ঘ

69. Sol^n : $z_1\bar{z}_1 = (2+i)(3-i) = 6 + i - i^2$

$= 7 + i$ এর মডুলাস $= \sqrt{49+1} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$

$\therefore$ উঃ খ

70. Sol^n : $a^2 = \frac{1 + 2i + i^2}{2} = \frac{1 + 2i - 1}{2} = i$

$\therefore a^6 = (a^2)^3 = i^3 = -i \therefore$ উঃ গ

71. Sol^n : $\sqrt{-4}\sqrt{-1} = \sqrt{4i^2}\sqrt{i^2} = 2.i.i$

$= 2i^2 = -2 \therefore$ উঃ ক

72. Sol^n : $\sqrt{-2 + 2\sqrt{-2 + 2\sqrt{-2 + \cdots\infty}}}$

$= \frac{2 \pm \sqrt{2^2 - 4.2}}{2} = 1 \pm i \therefore$ উঃ ঘ

73. Sol^n : $\sqrt[4]{-169} = \sqrt[4]{(13i)^2} = \sqrt{\pm 13i}$

$= \sqrt{\frac{13}{2}(\pm 2i)} = \sqrt{\frac{13}{2}(1 + i^2 \pm 2i)}$

$= \sqrt{\frac{26}{4}(1 \pm i)^2} = \pm\frac{\sqrt{26}}{2}(1 \pm i) \therefore$ উঃ ঘ

74. Sol^n : $\frac{1}{\omega^{2015}} + \frac{1}{\omega^{2016}} + \frac{1}{\omega^{2017}}$ [দি.বো.'১৭],

$= \frac{1}{\omega^2} + \frac{1}{1} + \frac{1}{\omega^1} = \omega + 1 + \omega^2 = 0 \therefore$ উঃ(গ)

75. Sol^n : $z = 2\frac{-1 + i\sqrt{3}}{2} = 2\omega$ [দি.বো.'১৭]

$\therefore z^9 = 512$, আর্গুমেন্ট $= \tan^{-1}\frac{\sqrt{3}}{-1}$

$= 180^0 - 60^0 = 120°$ এবং

বর্গমূল $\pm\frac{1}{\sqrt{2}}(-1 - i\sqrt{3}) \therefore$ উঃ (খ)

76. Sol^n : $i^{4n+3} = i^3 = -i$ [চ.বো.'১৭]

$\therefore$ উঃ (গ)

77. Sol^n : $-\sqrt{3} + i$ এর আর্গুমেন্ট [চ.বো.'১৭]

$= \tan^{-1}\frac{1}{-\sqrt{3}} = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6} \therefore$ উঃ (ঘ)

78. Sol^n : $z = x + iy$; x ও y বাস্তব সংখ্যা হলে

$|z|^2 = 1 \Rightarrow |x + iy|^2 = 1$ $(\sqrt{x^2 + y^2})^2 = 1$

$\Rightarrow x^2 + y^2 = 1$; যা বৃত্তের সমীকরণ,

$\therefore$ উঃ (খ) [চ.বো.'১৭]

79. Sol^n : $i = \frac{1}{2}(2i) = \frac{1}{2}(1 + 2i + i^2)$

$= \frac{1}{2}(1 + i)^2 \therefore i$ এর বর্গমূল $= \pm\frac{1}{\sqrt{2}}(1 + i)$

$\therefore$ উঃ (ক) [ঢা.বো.'১৭]

80. Sol^n : $i = 0 + i$ এর আর্গুমেন্ট [ঢা.বো.'১৭]

$= \tan^{-1}\frac{1}{0} = \cot^{-1}0 = \frac{\pi}{2} \therefore$ উঃ (খ)

81. Sol^n : $i^m + i^{m+1} + i^{m+2} + i^{m+3}$

$= i^m(1 + i + i^2 + i^3) = i^m(1 + i - 1 - i)$

$= 0 \therefore$ উঃ (গ) [রা.বো.'১৭]

82. Sol^n : $-2-2i$ এর মুখ্য আর্গুমেন্ট [রা.বো.'১৭]

$= \tan^{-1}\frac{-2}{-2} = -\pi + \frac{\pi}{4} = -\frac{3\pi}{4}$

$\therefore$ উঃ (ক)

83. Sol^n : $z = \frac{1}{1+i} = \frac{1-i}{(1+i)(1-i)} = \frac{1-i}{2}$

এর আর্গুমেন্ট $= \tan^{-1}\frac{-1}{1} = -\frac{\pi}{4}$ [কু.বো.'১৭]

$\therefore$ উঃ (খ)

84. Sol^n : $\omega^3 = 1 \therefore$ উঃ (খ.) [কু.বো.'১৭]

85. Sol^n : সব তথ্যই সত্য। ∴ উঃ (ঘ) [কু.বো.'১৭]

86. Sol^n : $2x - i9y; x > 0, y > 0$ জটিল সংখ্যাটি ৪র্থ চতুর্ভাগে অবস্থিত। [সি.বো.'১৭]

$\therefore$ উঃ (ঘ)

87. Sol^n : $i^{-76} + 1 = i^{-2} + 1 = \frac{1}{i^2} + 1$

$= -1 + 1 = 0$. উঃ (ক) [য.বো.'১৭]

88. Sol^n : $-1 + i$ এর মুখ্য আর্গুমেন্ট [য.বো.'১৭]

$= \tan^{-1}\frac{1}{-1} = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4} \therefore$ উঃ (গ)

89. Sol^n : $\omega^{92} + \omega^{16} = \omega^2 + \omega^1 = -1$

$\therefore$ উঃ (ক) [য.বো.'১৭]

সৃজনশীল প্রশ্ন (Creative Questions)

1. $z_1 = -7 - 24i$, $z_2 = 12i + 2$

ক. z_1 এর আর্গুমেন্ট নির্ণয় কর।

সামাধান: $z = -7 - 24i$ এর

আর্গুমেন্ট $= \tan^{-1}\frac{-24}{-7} = \tan^{-1}\frac{24}{7} - 180^0$

খ. $\frac{1}{z_1}$ এর বর্গমূল নির্ণয় কর।

সামাধান: $z_1 = -7 - 24i \therefore \bar{z_1} = -7 + 24i$

এখন, $\frac{1}{z_1} = \frac{1}{-7 + 24i}$

$= \frac{-7 - 24i}{(-7 + 24i)(-7 - 24i)}$

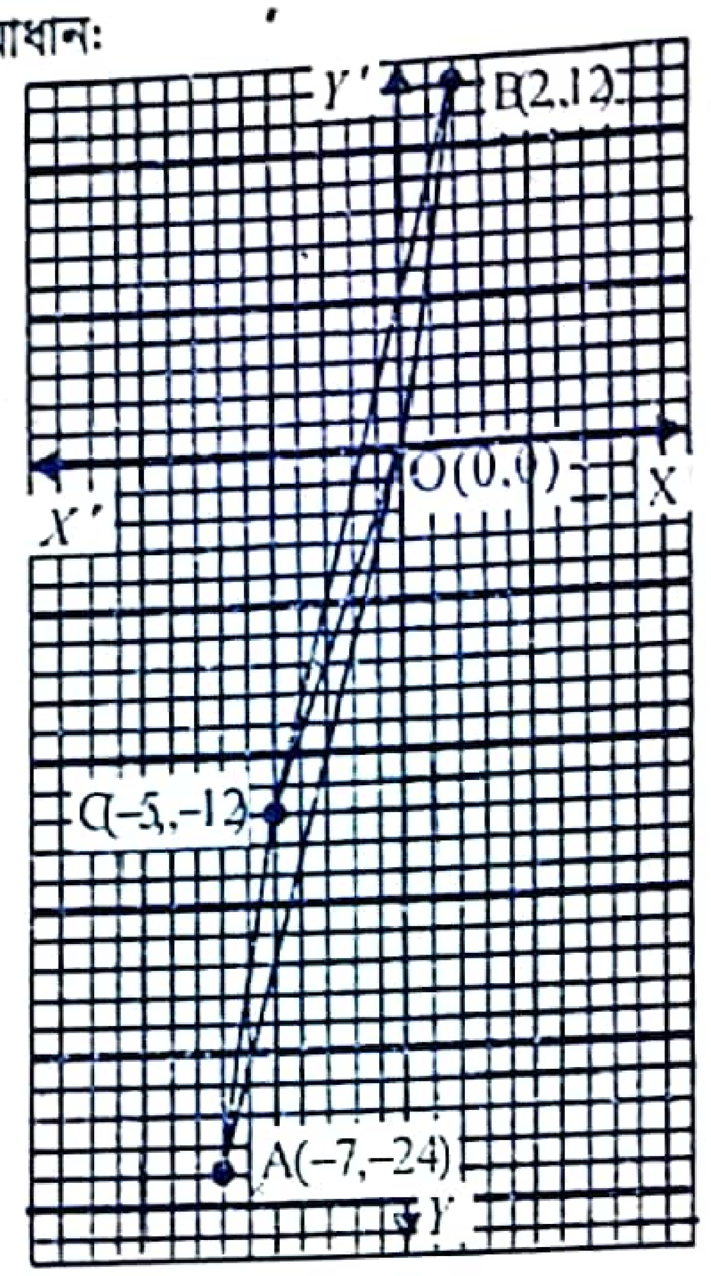
$$= \frac{9-16-24i}{7^2-(24i)^2} = \frac{3^2+(4i)^2-2.3.4i}{49-576i^2}$$

$$= \frac{(3-4i)^2}{49+576} = \frac{(3-4i)^2}{25^2}$$

$\therefore$ $\frac{1}{z}$ এর বর্গমূল $= \pm\frac{3-4i}{25}$

গ. আর্গন্ড চিত্রে z_1 ও z_2 চিহ্নিত করে এদের যোগফলের পরমমান নির্ণয় কর।

সমাধানঃ



x অক্ষ (বাস্তব অক্ষ) ও y অক্ষ (কাল্পনিক অক্ষ) বরাবর ক্ষুদ্রতম বর্গের 1 বাহুর দৈর্ঘ্য = 1 একক ধরে $z_1 = -7 - 24i$, $z_2 = 12i + 2$ কে A(−7,−24) এবং B(2, 12) দ্বারা নির্দেশ করে গ্রাফ পেপারে স্থাপন করি।

OA ও OB কে সন্নিহিত বাহু ধরে OACB সামান্তরিক সম্পূর্ণ করি এবং O, C যোগ করি। তাহলে C বিন্দু জটিল সংখ্যা দুইটির যোগফল $z_1 + z_2$ এর অবস্থান নির্দেশ করে। তাহলে, চিত্রের সাহায্যে $z_1 + z_2$ এর পরমমান $= |z_1 + z_2|$

= OC = 13 ঘর = 13 একক।

$$z_1 + z_2 = -7 - 24i + 12i + 2$$
$$= -5 - 12i$$

সূত্রের সাহায্যে নির্ণেয় পরমমান

$$= \sqrt{(-5)^2 + (-12)^2} = 13$$

2. (i) $(1+x)^n = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$

(ii) $(1 + x + x^2)^n = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots \ldots \ldots + a_{2n}x^{2n}$

ক. $(1+\omega-\omega^2)(\omega+\omega^2-1)(\omega^2+1-\omega)$ এর মান নির্ণয় কর।

সমাধানঃ $(1+\omega-\omega^2)(\omega+\omega^2-1)(\omega^2+1-\omega)$

$= (-\omega^2-\omega^2)(-1-1)(-\omega-\omega)$,

$[\because 1+\omega+\omega^2 = 0]$

$= (-2\omega^2)(-2)(-2\omega)$

$= -8\omega^3 = -8 \times 1 = -8$ (Ans.)

খ. (i) এর সাহায্যে প্রমাণ কর যে,

$(a_0-a_2+a_4-\cdots)^2 + (a_1-a_3+a_5-\cdots)^2 = a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n$

সমাধান : দেওয়া আছে,

$(1+x)^n = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$ ---(1)

এখন, (1)-এ $x = 1$ বসিয়ে পাই,

$(1+1)^n = a_0 + a_1 + a_2 + \cdots\cdots + a_n$

$\therefore$ $a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_n = 2^n$ ---(2)

(1)-এ $x = i$ বসিয়ে পাই,

$(1+i)^n = a_0 + a_1i + a_2i^2 + a_3i^3 + a_4i^4 + \cdots$

$\Rightarrow (1+i)^n = a_0 + a_1i - a_2 - a_3i + a_4 + a_5i + \cdots$

$\Rightarrow (1+i)^n = (a_0 - a_2 + a_4 - \cdots) + i(a_1 - a_3 + a_5 + \cdots)$ --- (3)

(3)-এ i এর পরিবর্তে $-i$ লিখে পাই,

$(1-i)^n = (a_0 - a_2 + a_4 - \cdots\cdots) - i(a_1 - a_3 + a_5 + \cdots\cdots)$ ----- (4)

(3) এবং (4) নং সমীকরণ গুণ করে পাই,

$(1-i^2)^n = \{(a_0-a_2+a_4-\cdots\cdots) + i(a_1-a_3+a_5+\cdots\cdots)\}$
$\{(a_0-a_2+a_4-\cdots) - i(a_1-a_3+a_5+\cdots)\}$

$\Rightarrow (1+1)^n = (a_0 - a_2 + a_4 - \cdots)^2 - i^2(a_1 - a_3 + a_5 + \cdots)^2$

$\Rightarrow 2^n = (a_0 - a_2 + a_4 - \cdots)^2 + (a_1 - a_3 + a_5 + \cdots)^2$ ------ (5)

(2) এবং (5) হতে পাই,

$(a_0 - a_2 + a_4 - \cdots)^2 + (a_1 - a_3 + a_5 - \cdots)^2 = a_0 + a_1 + a_2 + \cdots\cdots + a_n$

গ. (ii) এর সাহায্যে দেখাও যে, $a_0 + a_3 + a_6 + \cdots \ldots\ldots = 3^{n-1}$

সমাধানঃ 11(f) এর সমাধান দ্রষ্টব্য।

3. $\bar{z} = -1 + \sqrt{3}\,i$, $f(x, y) = x + iy$

ক. 2i এর বর্গমূল নির্ণয় কর।

সমাধানঃ $2i = 1 - 1 + 2i$

$= 1 + i^2 + 2.1.i = (1+i)^2$

$\therefore$ $2i$ এর বর্গমূল $= \pm\sqrt{(1+i)^2} = \pm(1+i)$

খ. প্রমাণ কর যে, $(z)^4 + (\bar{z})^4 = -16$

প্রমাণ : $\bar{z} = -1 + \sqrt{3}\,i \;\therefore\; z = -1 - \sqrt{3}\,i$

আমরা জানি, $\frac{1}{2}(-1-\sqrt{3}i) = \omega$ অর্থাৎ

$z = -1 - \sqrt{3}\,i = 2\omega$ হলে $\frac{1}{2}(-1+\sqrt{3}i)$

$= \omega^2$ অর্থাৎ $\bar{z} = -1 + \sqrt{3}\,i = 2\omega^2$.

L.H.S. $= (z)^4 + (\bar{z})^4 = (2\omega)^4 + (2\omega^2)^4$

$= 16\omega^4 + 16\omega^8 = 16(\omega + \omega^2)$

$= 16(-1)$; $[\because 1+\omega+\omega^2 = 0]$

$= -16 =$ R.H.S.

গ. প্রমাণ কর যে, $|f(x-8,y)| + |\,f(x+8, y| = 20$ দ্বারা নির্দেশিত সঞ্চারপথের সমীকরণ একটি উপবৃত্ত।

প্রমাণ : $|f(x-8,y)| + |\,f(x+8, y| = 20$

$\Rightarrow |(x-8) + iy| + |(x+8) + iy| = 20$

$\Rightarrow \sqrt{(x-8)^2+y^2} + \sqrt{(x+8)^2+y^2} = 20$

$\Rightarrow \sqrt{(x-8)^2+y^2} = 20 - \sqrt{(x+8)^2+y^2}$

উভয় পক্ষকে বর্গ করে পাই,

$x^2 - 16x + 64 + y^2 = 400 - 40\sqrt{(x+8)^2+y^2}$
$+ x^2 + 16x + 64 + y^2$

$\Rightarrow 32x + 400 = 40\sqrt{(x+8)^2+y^2}$

$\Rightarrow 4x + 50 = 5\sqrt{x^2+16x+64+y^2}$

আবার উভয় পক্ষকে বর্গ করে পাই,

$16x^2 + 400x + 2500 = 25(x^2 + 16x + 64 + y^2)$

$= 25x^2 + 400x + 1600 + 25y^2$

$\Rightarrow 9x^2 + 25y^2 = 900 \Rightarrow \frac{x^2}{5^2} + \frac{y^2}{3^2} = 1$, যা উপবৃত্তের সমীকরণ।

$\therefore$ $f(x-8,y)| + |\,f(x+8, y| = 20$ দ্বারা নির্দেশিত সঞ্চারপথের সমীকরণ একটি উপবৃত্ত।

4. $f(x) = a + bx + cx^2$, $g(x) = \frac{1}{2}(-1+\sqrt{3}\,x)$

ক. i এর বর্গমূল নির্ণয় কর।

সমাধানঃ $i = \frac{1}{2}(2i) = \frac{1}{2}(1-1+2i)$

$= \frac{1}{2}(1+i^2+2.1.i) = \frac{1}{2}(1+i)^2$

i এর বর্গমূল $= \pm\sqrt{\frac{(1+i)^2}{2}} = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}(1+i)$

খ. $a + b + c = 0$ হলে দেখাও যে,
$\{f(\omega)\}^3 + \{f(\omega^2)\}^3 = 27abc$

প্রমাণঃ $f(x) = a + bx + cx^2$

$\therefore$ $f(\omega) = a + b\omega + c\omega^2$ এবং

$f(\omega) = a + b\omega^2 + c(\omega^2)^2$

$= a + b\omega^2 + c\omega^4 = a + b\omega^2 + c\omega$

ধরি, $x = a + b\omega + c\omega^2$ এবং

$y = a + b\omega^2 + c\omega$

$\therefore$ $x^3 + y^3 = (x + y)(x^2 - xy + y^2)$

$= (x + y)\{x^2 + (\omega + \omega^2)xy + y^2\omega^3\}$

$= (x + y)(x + \omega b)(x + \omega^2 y)$

$= (a + b\omega + c\omega^2 + a + b\omega^2 + c\omega)$

$\{a + b\omega + c\omega^2 + \omega(a + b\omega^2 + c\omega)\}$

$\{a + b\omega + c\omega^2 + \omega^2(a + b\omega^2 + c\omega)\}$

$= \{2a + b(\omega + \omega^2) + c(\omega + \omega^2)\}$

$\{a + b\omega + c\omega^2 + a\omega + b + c\omega^2\}$

$\{a + b\omega + c\omega^2 + a\omega^2 + b\omega + c\}$

$= \{2a + b(-1) + c(-1)\}$

$\{a(1 + \omega) + b(1 + \omega) + 2c\omega^2\}$

$\{a(1 + \omega^2) + 2b\omega + c(1 + \omega^2)\}$

$= (2a - b - c)\{a(-\omega^2) + b(-\omega^2)$

$+ 2c\omega^2\}\{a(-\omega) + 2b\omega + c(-\omega)\}$

$= \{3a - (a + b + c)\}\{-(a + b + c)$

$+ 3c\}\omega^2 \{3b - (a + b + c)\}\omega$

$= \{3a - 0\}\{-0 + 3c\}\{3b - 0\}\omega^3$

$\Rightarrow x^3 + y^3 = 27abc$

$\therefore \{f(\omega)\}^3 + \{f(\omega^2)\}^3 = 27abc$ (Proved)

গ. প্রমাণ কর যে, $[g(i)]^n + [g(-i))]^n = 2$ এবং -1, যখন n-এর মান যথাক্রমে 3 দ্বারা বিভাজ্য এবং 3 দ্বারা অবিভাজ্য।

প্রমান : $g(x) = \frac{1}{2}(-1+\sqrt{3}\,x)$

$\therefore$ $g(i) = \frac{1}{2}(-1+\sqrt{3}\,i)$ এবং

$g(-i) = \frac{1}{2}(-1-\sqrt{3}\,i)$

আমরা জানি,

$\omega = \frac{1}{2}(-1+i\sqrt{3})$ হলে, $\omega^2 = \frac{1}{2}(-1-i\sqrt{3})$

, যেখানে এককের কাল্পনিক ঘনমূল ω.

L.H.S.= $[g(i)]^n + [g(-i))]^n$

$= [\frac{1}{2}(-1 + i\sqrt{3})]^n + [\frac{1}{2}(-1 - i\sqrt{3})]^n$

$= \omega^n + (\omega^2)^n$

n −এর মান 3 দ্বারা বিভাজ্য হলে মনে করি, $n = 3m$, যেখানে $m \in \mathbb{N}$.

$\therefore \omega^n + (\omega^2)^n = \omega^{3m} + (\omega^2)^{3m}$

$= (\omega^3)^m + (\omega^3)^{2m} = 1^m + 1^{2m} = 1 + 1 = 2$

n -এর মান 3 দ্বারা অবিভাজ্য হলে মনে করি, $n = 3m + 1$ অথবা $n = 3m + 2$, যেখানে $m \in \mathbb{N}$.

$n = 3m + 1$ হলে,

$\omega^n + (\omega^2)^n = \omega^{3m+1} + (\omega^2)^{3m+1}$

$= \omega^{3m}.\omega + \omega^{6m}.\omega^2 = \omega + \omega^2 = -1$

$n = 3m + 2$ হলে,

$\omega^n + (\omega^2)^n = \omega^{3m+2} + (\omega^2)^{3m+2}$

$= \omega^{3m}.\omega^2 + \omega^{6m}.\omega^4 = \omega^2 + \omega = -1$

$\therefore [g(i)]^n + [g(-i))]^n = 2$ অথবা -1, যখন n -এর মান 3 দ্বারা যথাক্রমে বিভাজ্য এবং 3 দ্বারা অবিভাজ্য।

5. $x^3 - 1 = 0$ একটি ত্রিঘাত সমীকরণ।

ক. $3 + ix^2 y$ এবং $x^2 + y + 4i$ পরস্পর অনুবন্ধী হলে, x এবং y এর বাস্তব মান নির্ণয় কর।

সমাধান: দেওয়া আছে, $3 + i\,x^2 y$ এবং $x^2 + y + 4i$ পরস্পর অনুবন্ধী জটিল সংখ্যা।

$\therefore x^2 + y = 3 \Rightarrow x^2 = 3 - y \cdots\cdots (1)$ এবং

$x^2 y = -4 \Rightarrow (3 - y)y = -4$

$\therefore y^2 - 3y - 4 = 0$

$\Rightarrow (y - 4)(y + 1) = 0$

$\therefore y = 4$ অথবা, $y = -1$

$y = 4$ হলে, $x^2 = 3 - 4 = -1 \notin \mathbb{R}$

$y = -1$ হলে, $x^2 = 3 + 1 = 4 \Rightarrow x = \pm 2$

$\therefore x = \pm 2, y = -1$ (Ans.)

খ. ত্রিঘাত সমীকরণটির মূলগুলি নির্ণয় করে প্রমাণ কর যে, তাদের জটিল মূলদ্বয়ের একটি অপরটির বিপরীত।

সমাধান: $x^3 - 1 = 0 \Rightarrow (x - 1)(x^2 + x + 1) = 0$

$\therefore x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1$ অথবা $x^2 + x + 1 = 0$

$\Rightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4.1}}{2.1} = \frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2}$

$\therefore$ প্রদত্ত সমীকরণের তিনটি মূল 1, $\frac{1}{2}(-1 + \sqrt{-3})$, $\frac{1}{2}(-1 - \sqrt{-3})$ ।

এদের মধ্যে 1 বাস্তব এবং অপর দুইটি জটিল।

ধরি, $x_1 = \frac{1}{2}(-1 + \sqrt{-3})$ এবং

$x_2 = \frac{1}{2}(-1 - \sqrt{-3})$

$\frac{1}{x_1} = \frac{1}{\frac{-1 + \sqrt{-3}}{2}}$

$= \frac{2(-1 - \sqrt{-3})}{(-1 + \sqrt{-3})(-1 - \sqrt{-3})}$

$= \frac{2(-1 - \sqrt{-3})}{(-1)^2 - (\sqrt{-3})^2} = \frac{2(-1 - \sqrt{-3})}{1 - (-3)}$

$= \frac{2(-1 - \sqrt{-3})}{4} = \frac{-1 - \sqrt{-3}}{2} = x_2$

$\Rightarrow \frac{1}{x_1} = x_2$

$\therefore$ জটিল মূলদ্বয়ের একটি অপরটির বিপরীত।

গ. প্রাপ্ত জটিল মূলদ্বয়ের যেকোনো একটি ω হলে প্রমাণ কর যে,

$(1 - \omega + \omega^2)(1 - \omega^2 + \omega^4)(1 - \omega^4 + \omega^8)$

প্রমাণ: L.H.S. $= (1 - \omega + \omega^2)(1 - \omega^2 + \omega^4)$

$(1 - \omega^4 + \omega^8)\cdots$ 2n উৎপাদক পর্যন্ত।

$= (1 - \omega + \omega^2)(1 - \omega^2 + \omega)(1 - \omega + \omega^2)$

$(1 - \omega^2 + \omega)\cdots\cdots$ 2n উৎপাদক পর্যন্ত

$= \{(1 - \omega + \omega^2)(1 - \omega + \omega^2) \cdots\cdots$ n উৎপাদক পর্যন্ত $\}\{(1 - \omega^2 + \omega)(1 - \omega^2 + \omega) \cdots\cdots$ n উৎপাদক পর্যন্ত $\}$

$= (1 - \omega + \omega^2)^n (1 - \omega^2 + \omega)^n$

$= (-\omega - \omega)^n (-\omega^2 - \omega^2)^n$

$= \{(-2\omega)(-2\omega^2)\}^n = (4\omega^3)^n$

$= (2^2.1)^n = 2^{2n} =$ R.H.S.

6. $f(x) = x^2 + x + 1, g(x) = ax + b + cx^2$

ক. $f(x)$ এর ক্ষুদ্রতম মান নির্ণয় কর।

সমাধান: দেওয়া আছে, $f(x) = x^2 + x + 1$

$\Rightarrow (x) = x^2 + 2x.\frac{1}{2} + (\frac{1}{2})^2 + 1 - \frac{1}{4}$

$= (x + \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}$

$x + \frac{1}{2} = 0$ অর্থাৎ $x = -\frac{1}{2}$ হলে $f(x)$ এর মান ক্ষুদ্রতম হবে। x এর এ বাস্তব মানের জন্য $f(x)$ এর ক্ষুদ্রতম মান $\frac{3}{4}$.

খ. দেখাও যে, $f(x) = 0$ দ্বিঘাত সমীকরণের মূলদ্বয়ের একটি অপরটির বর্গ।

প্রমাণ: $f(x) = 0$ হলে, $x^2 + x + 1 = 0$

$\Rightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4.1}}{2.1} = \frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2}$

$\therefore x = \frac{-1 + \sqrt{-3}}{2}, \frac{-1 - \sqrt{-3}}{2}$

এখন, $\{\frac{1}{2}(-1 + \sqrt{-3})\}^2$ ……… 2n উৎপাদক পর্যন্ত $= 2^{2n}$

$= \frac{1}{4}\{1 + 2(-1)\sqrt{-3} + (\sqrt{-3})^2\}$

$= \frac{1}{4}\{1 - 2\sqrt{-3} - 3\}$

$= \frac{1}{4}\{-2 - 2\sqrt{-3}\} = \frac{1}{2}(-1 - \sqrt{-3})$

আবার, $\{\frac{1}{2}(-1-\sqrt{-3})\}^2$

$=\frac{1}{4}\{1+2\sqrt{-3}-3\}$

$=\frac{1}{4}(-2-2\sqrt{-3})=\frac{1}{2}(-1+\sqrt{-3})$

∴ $f(x)=0$ দ্বিঘাত সমীকরণের মূলদ্বয়ের একটি অপরটির বর্গ।

গ. $\{g(\omega)\}^3+\{g(\frac{1}{\omega})\}^3=0$ হলে দেখাও যে, $a=\frac{1}{2}(b+c)$, অথবা $b=\frac{1}{2}(c+a)$, অথবা $c=\frac{1}{2}(a+b)$

প্রামাণ: $g(x)=ax+b+cx^2$

∴ $g(\omega)=a\omega+b+c\omega^2$ এবং

$g(\frac{1}{\omega})=a\frac{1}{\omega}+b+c\frac{1}{\omega^2}=a\omega^2+b+c\omega$

$[\because \omega^3=1\Rightarrow\omega^2=\frac{1}{\omega}]$

এখন, $\{g(\omega)\}^3+\{g(\frac{1}{\omega})\}^3=0$

$\Rightarrow (a\omega+b+c\omega^2)^3+(a\omega^2+b+c\omega)^3=0$

$\Rightarrow (a\omega^2+b+c\omega)^3=-(a\omega+b+c\omega^2)^3$

$\Rightarrow \frac{(a\omega^2+b+c\omega)^3}{(a\omega+b+c\omega^2)^3}=-1$

$\Rightarrow \left(-\frac{a\omega^2+b+c\omega}{a\omega+b+c\omega^2}\right)^3=1$

∴ $-\frac{a\omega^2+b+c\omega}{a\omega+b+c\omega^2}=1$, অথবা ω, অথবা ω^2

$[\because x^3=1$ হলে $x=1,\omega,\omega^2]$

যদি $-\frac{a\omega^2+b+c\omega}{a\omega+b+c\omega^2}=1$ হয়, তাহলে

$a\omega^2+b+c\omega=-a\omega-b-c\omega^2$

$\Rightarrow 2b=(a+b)(-\omega-\omega^2)$

$\Rightarrow 2b=a+b \quad \therefore b=\frac{1}{2}(a+b)$.

যদি $-\frac{a\omega^2+b+c\omega}{a\omega+b+c\omega^2}=\omega$ হয়, তাহলে

$a\omega^2+b+c\omega=-a\omega^2-b\omega-c\omega^3$

$\Rightarrow a\omega^2+b+c\omega=-a\omega^2-b\omega-c$

$\Rightarrow 2a\omega^2=(b+c)(-1-\omega)=(b+c)\omega^2$

$\Rightarrow 2a=b+c \quad [\because \omega^2\neq 0]$

∴ $a=\frac{1}{2}(b+c)$

যদি $-\frac{a\omega^2+b+c\omega}{a\omega+b+c\omega^2}=\omega^2$ হয়, তাহলে

$a\omega^2+b+c\omega=-a\omega^3-b\omega^2-c\omega^4$

$\Rightarrow a\omega^2+b+c\omega=-a-b\omega^2-c\omega$

$\Rightarrow 2c\omega=(a+b)(-1-\omega^2)=(a+b)\omega$

$\Rightarrow 2c=a+b \quad [\because \omega\neq 0]$

∴ $c=\frac{1}{2}(a+b)$

∴ $a=\frac{1}{2}(b+c)$, অথবা $b=\frac{1}{2}(c+a)$, অথবা $c=\frac{1}{2}(a+b)$ (Showed)

7. $f(x)=1+x$, $z_1=3+2i$ এবং $z_2=3-2i$

ক. $-2i$ এর বর্গমূল নির্ণয় কর।

সমাধান: $-2i=1-1-2i$

$=1^2+i^2-2.1.i=(1-i)^2$

∴ $-2i$ এর বর্গমূল $=\pm(1-i)=\pm\sqrt{(1-i)^2}$

খ. $|z_1^2+z_1z_2-\overline{z_2}|$ নির্ণয় কর।

সমাধান: দেওয়া আছে, $z_1=3+2i$, $z_2=3-2i$

∴ $z_1^2=(3+2i)^2=9+2.3.2i+(2i)^2$

$=9+12i+4i^2=9+12i-4$, $[\because i^2=-1]$

$=5+12i$

$z_1z_2=(3+2i)(3-2i)=9-(2i)^2$

$=9+4=13$

$\overline{z_2}=3+2i$

∴ $z_1^2+z_1z_2-\overline{z_2}=5+12i+13+3+2i$

$=21+14i$

গ. প্রমাণ কর যে, $f(\omega)\times f(\omega^2)\times f(\omega^4)\times\cdots$ ⋯ n তম উৎপদক পর্যন্ত $=1$, যেখানে n স্বাভাবিক জোড় সংখ্যা।

প্রমাণ: দেওয়া আছে, $f(x)=1+x$

L.H.S.= $f(\omega)\times f(\omega^2)\times f(\omega^4)\times\cdots\cdots$ n তম উৎপদক পর্যন্ত

$=(1+\omega)(1+\omega^2)(1+\omega^4)(1+\omega^8)\cdots$ n তম উৎপদক পর্যন্ত

$=(1+\omega)(1+\omega^2)(1+\omega)(1+\omega^2)\cdots\cdots$ n তম উৎপদক পর্যন্ত

$=(1+\omega)^{n/2}(1+\omega^2)^{n/2}$

$=\{(1+\omega)(1+\omega^2)\}^{n/2}$

$=\{1+(\omega+\omega^2)+\omega^3\}^{n/2}$

$=\{1+(-1)+1\}^{n/2} \quad [\because 1+\omega+\omega^2=0]$

$=(1)^{n/2}=1=$ R.H.S. (Proved)

8. (i) আর্গন্ডের চিত্রে A, B, C তিনটি বিন্দু এবং $\begin{bmatrix}-1 & 1 & i\\ i & -1 & 1\\ 1 & i & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}A\\B\\C\end{bmatrix}$;

(ii) $P=(1+i^{4n+1})(1+i^{4n-1})+i^{4n+3}$

ক. মান নির্ণয় কর: $\begin{vmatrix}1 & -\omega & \omega^2\\ -\omega & \omega^2 & 1\\ \omega^2 & 1 & -\omega\end{vmatrix}$

সমাধান: $\begin{vmatrix}1 & -\omega & \omega^2\\ -\omega & \omega^2 & 1\\ \omega^2 & 1 & -\omega\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & 0 & 0\\ -\omega & 0 & 1+\omega^3\\ \omega^2 & 1+\omega^3 & 0\end{vmatrix}$

$[c_2'=c_2+c_1.\omega, c_3'=c_3+c_2.\omega]$

$=1\{0-(1+\omega^3)^2\}=-(1+1)^2$

$=-2^2=-4$ (Ans.)

খ. $|P|$ নির্ণয় কর।

সমাধান: $P=(1+i^{4n+1})(1+i^{4n-1})+i^{4n+3}$

$=(1+i^1)(1+i^{-1})+i^3$

$[\because n\in\mathbb{N}$ এবং $i^{4n}=1]$

$=(1+i)(1+\frac{1}{i})+i.i^2$

$=(1+i)(1+\frac{-i^2}{i})+i(-1)$

$=(1+i)(1-i)-i=1^2-(i)^2-i$

$=1-(-1)-i=1+1-i=2-i$

∴ $|P|=\sqrt{2^2+(-1)^2}=\sqrt{4+1}=\sqrt{5}$

গ. দেখাও যে A, B, C একটি সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দু।

প্রমাণ : দেওয়া আছে, $\begin{bmatrix}-1 & 1 & i\\ i & -1 & 1\\ 1 & i & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}A\\B\\C\end{bmatrix}$

$\Rightarrow \begin{bmatrix}-1+2+3i\\ i-2+3\\ 1+2i-3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}A\\B\\C\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix}1+3i\\ i+1\\ 2i-2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}A\\B\\C\end{bmatrix}$

∴ $A=1+3i=(1,3)$, $B=1+i=(1,1)$ এবং $C=-2+2i=(-2,2)$

এখন, $AB=\sqrt{(1-1)^2+(3-1)^2}=2$

$BC=\sqrt{(1+2)^2+(1-2)^2}=\sqrt{9+1}=\sqrt{10}$

$CA=\sqrt{(-2-1)^2+(2-3)^2}=\sqrt{9+1}=\sqrt{10}$

AB, BC, CA এর যেকোন দুইটির যোগফল তৃতীয়টি অপেক্ষা বৃহত্তর বলে বিন্দু তিনটি একটি ত্রিভুজ গঠন করে। আবার, $BC=CA=\sqrt{10}$ বলে ABC একটি সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ।

Ans.: − 4

9. $x=\sqrt[3]{\omega+\omega^2}$,

$R=\sqrt{-2+2\sqrt{-2+2\sqrt{-2+\cdots\cdots\infty}}}$

ক. প্রমাণ কর যে, $(1-\omega+\omega^2)^2+(1+\omega-\omega^2)^2=-4$

প্রমাণ :

L.H.S $= (1-\omega+\omega^2)^2 + (1+\omega-\omega^2)^2$

$= (-\omega-\omega)^2 + (-\omega^2-\omega^2)^2$, $[\because 1+\omega+\omega^2=0]$

$= (-2\omega)^2 + (-2\omega^2)^2 = 4(\omega^2+\omega^4)$

$= 4(\omega^2+\omega) = 4(-1) = -4 =$ R.H.S.

খ. x এর জটিল মূলদ্বয় নির্ণয় করে এদের যেকোনো একটির বর্গমূল নির্ণয় কর।

সমাধান: $x = \sqrt[3]{\omega+\omega^2}$

$\Rightarrow x = \sqrt[3]{-1}$, $[\because 1+\omega+\omega^2=0]$

$\Rightarrow x^3 = -1 \Rightarrow x^3+1=0$

$\Rightarrow (x+1)(x^2-x+1)=0$

$x+1=0$ হলে, $x=-1$

$x^2-x+1=0$ হলে,

$$x = \frac{-(-1)\pm\sqrt{(-1)^2-4.1.1}}{2.1}$$

$$= \frac{1\pm\sqrt{1-4}}{2} = \frac{1\pm\sqrt{-3}}{2}$$

$\therefore$ x এর জটিল মূলদ্বয়

$$\frac{1+\sqrt{-3}}{2}, \frac{1-\sqrt{-3}}{2}.$$

এখন, $\frac{1+\sqrt{-3}}{2} = \frac{1}{2}(1+\sqrt{3i^2})$

$$= \frac{1}{4}(2+2\sqrt{3}i) = \frac{1}{4}\{(\sqrt{3})^2-1+2\sqrt{3}i\}$$

$$= \frac{1}{4}\{(\sqrt{3})^2+i^2+2\sqrt{3}i\} = \frac{1}{4}(\sqrt{3}+i)^2$$

$\therefore$ $\frac{1+\sqrt{-3}}{2}$ এর বর্গমূল $= \pm\frac{1}{2}(\sqrt{3}+i)$

গ. R এর পরমমান নির্ণয় কর।

সমাধান:

$$R = \sqrt{-2+2\sqrt{-2+2\sqrt{-2+\cdots\infty}}}$$

$\Rightarrow R = \sqrt{-2+2\sqrt{-2+2\sqrt{-2+2\sqrt{-2+\cdots\infty}}}}$

$\Rightarrow R = \sqrt{-2+2R}$

$\Rightarrow R^2 = -2+2R \Rightarrow R^2-2R+2=0$

$$\Rightarrow R = \frac{-(-2)\pm\sqrt{(-2)^2-4.1.2}}{2.1}$$

$$= \frac{1}{2}(2\pm\sqrt{4-8}) = \frac{1}{2}(2\pm\sqrt{-4})$$

$$= \frac{2\pm2\sqrt{-1}}{2} = 1\pm i$$

$\therefore$ R এর পরমমান $= \sqrt{1^2+1^2}$

$= \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$

10. $z = x+iy$, $f(x) = |2x+4|$

ক. $\text{Im}(z^2)$ নির্ণয় কর।

সমাধান: $z = x+iy \Rightarrow z^2 = (x+iy)^2$

$\Rightarrow z^2 = (x)^2+(iy)^2+2x.iy$

$\Rightarrow z^2 = x^2+i^2y^2+2xyi$

$\Rightarrow z^2 = x^2-y^2+2xyi$, $[\because i^2=-1]$

$\therefore$ $\text{Im}(z^2) = 2xy$

খ. সংখ্যা রেখায় $f(x) < 6$ এর সমাধান সেট নি[র্ণয়] কর।

সমাধান: $f(x) < 6 \Rightarrow |2x+4| < 6$

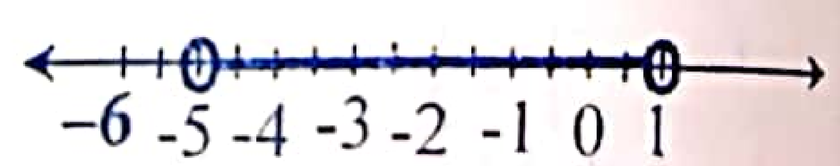
$\Rightarrow -6 < 2x+4 < 6$

$\Rightarrow -6-4 < 2x+4-4 < 6-4$

$\Rightarrow -10 < 2x < 2 \Rightarrow -5 < x < 1$

$\therefore$ সমাধান সেট, $S = \{x\in\mathbb{R}: -5<x<1\}$

নিম্নে সংখ্যারেখায় সমাধান সেট দেখানো হল:



গ. $|z-i| \geq 3$ দ্বারা নির্দেশিত জ্যামিতিক অ[ঞ্চল] চিত্রের সাহায্যে দেখাও।

সমাধান: $|z-i| \geq 3 \Rightarrow |x+iy-i| \geq 3$

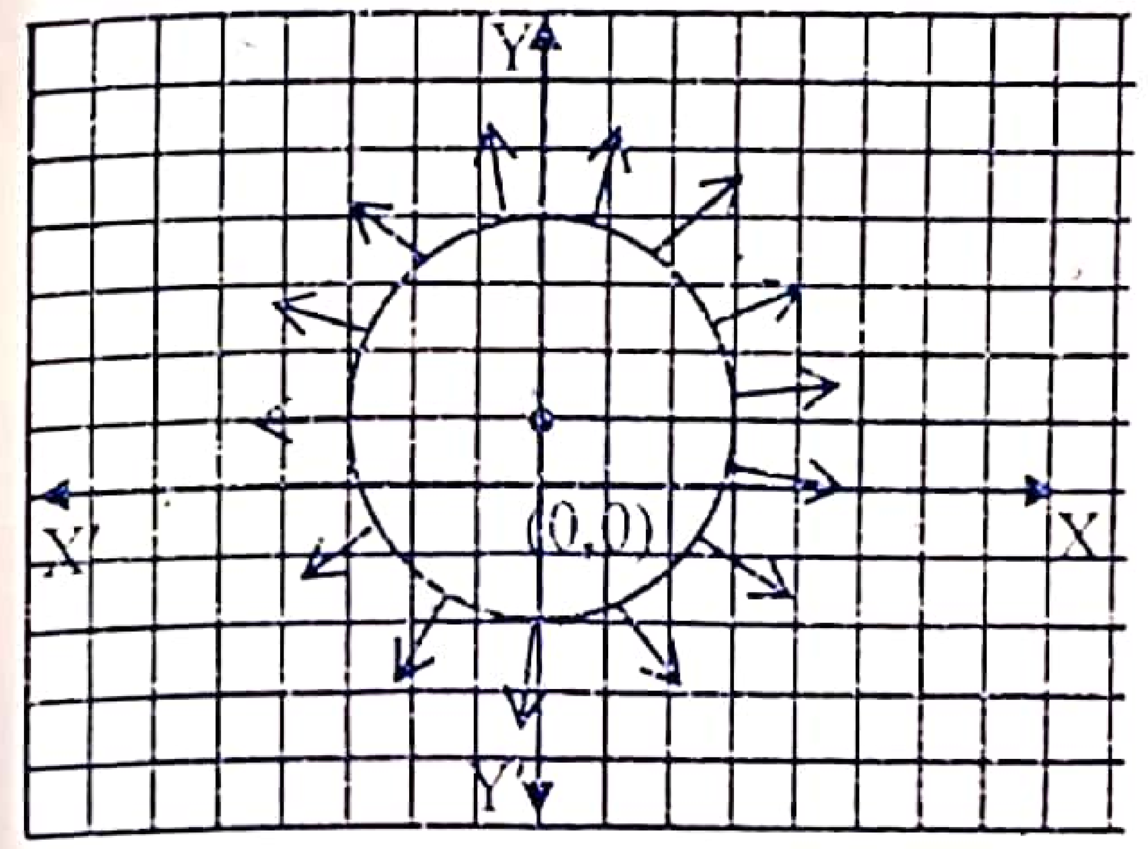
$\Rightarrow |x+(y-1)i| \geq 3$

$\Rightarrow \sqrt{x^2+(y-1)^2} \geq 3$

$\Rightarrow x^2+(y-1)^2 \geq 3^2$

$x^2+(y-1)^2 = 3^2$ একটি বৃত্তের সমীকরণ যা[র] কেন্দ্র (0, 1) এবং ব্যাসার্ধ 3.

একটি ছক কাগজে x-অক্ষ ও y-অক্ষ বরাবর ছোট 1 বর্গের বাহুর দৈর্ঘ্য = 1 একক ধরে $x^2+(y-1)^2 = 3^2$ বৃত্তের লেখচিত্র অঙ্কন করি। বৃত্তস্থ বিন্দুসহ এর বাইরের বিন্দুসমূহের সেট প্রদত্ত অসমতা দ্বারা নির্দেশিত জ্যামিতিক অঞ্চল নির্দেশ করে।



11. $z = 3x+4y$, সীমাবদ্ধতা : $x \leq 2y+2$, $x \geq 6-2y$, $y \leq x$, $x \leq 6$.

ক. $y = 1$ এবং $|z| < 1$ হলে, x এর সীমা নির্ণয় কর।

সমাধান: $|z| < 1 \Rightarrow |3x+4y| < 1$

$\Rightarrow |3x+4\times1| < 1 \Rightarrow |3x+4| < 1$

$\Rightarrow -1 < 3x+4 < 1 \Rightarrow -1-4 < 3x+4-4 < 1-4$

$\Rightarrow -5 < 3x < -3 \Rightarrow -\frac{5}{3} < x < -1$ (Ans.)

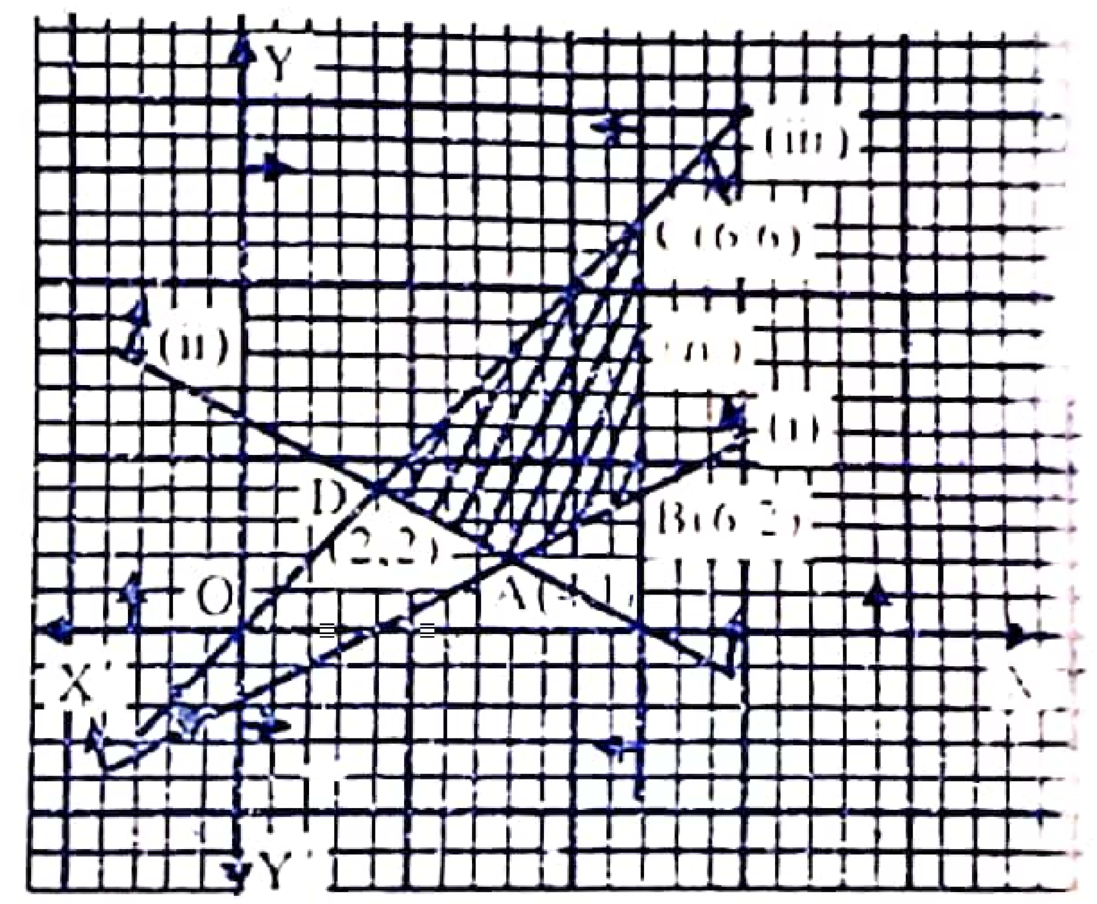
খ. প্রদত্ত সীমাবদ্ধতার আলোকে অভীষ্ট ফাংশন z এর সর্বনিম্ন মান নির্ণয় কর।

সমাধান: প্রদত্ত অসমতাগুলির অনুরূপ রৈখিক সমীকরণ, $x = 2y+2 \Rightarrow \frac{x}{2}+\frac{y}{-1} = 1 \cdots$(i),

$x = 6-2y \Rightarrow \frac{x}{6}+\frac{y}{3} = 1 \cdots\cdots$(ii),

$y = x \cdots\cdots$(iii) যা (0, 0), (2, 2) বিন্দুগামী এবং $x = 6 \cdots$(iv)

একটি ছক কাগজে স্থানাঙ্কের অক্ষরেখা X'OX ও YOY' অঙ্কন করি। x-অক্ষ ও y-অক্ষ বরাবর ছোট 2 বর্গের বাহুর দৈর্ঘ্য = 1 একক ধরে (i), (ii) ও (iii) রেখার লেখচিত্র অঙ্কন করি।



OABCD বহুভুজ দ্বারা সীমাবদ্ধ এলাকা[র] বিন্দুসমূহের সেট প্রদত্ত সকল শর্তকে সিদ্ধ ক[রে]। অতএব এই ক্ষেত্রটিই সমাধানের অনুকূল এলাকা।

এখানে, $x = 2y+2$ ও $x = 6-2y$ রেখাদ্বয় A(4,1) বিন্দুতে, $x = 2y+2$ ও $x = 6$ রেখাদ্বয় B(6, 2) বিন্দুতে, $x = 6$ ও $y = x$ রেখাদ্বয় C(6, 6) বিন্দুতে, $y = x$ ও $x = 6-2y$ রেখাদ্বয় D(2, 2) বিন্দুতে ছেদ করে।

A(4, 1) বিন্দুতে, $z = 3\times4+4\times1 = 16$,
B(6, 2) বিন্দুতে, $z = 3\times6+4\times2 = 26$,
C(6, 6) বিন্দুতে, $z = 3\times6+4\times6 = 42$
D(2, 2) বিন্দুতে, $z = 3\times2+4\times2 = 14$

$\therefore$ z এর এর সর্বনিম্ন মান 14.

গ. $x = 1$, $y = \sqrt{-1}$ এবং $\frac{z}{\bar{z}} = A+iB$ হলে $|A-iB|$ নির্ণয় কর।

সমাধান: $x = 1$ হলে, $y = \sqrt{-1}$, তাহলে $z = 3+4\sqrt{-1} = 3+4i$, $[\because i = \sqrt{-1}]$

$\therefore$ $\bar{z} = 3-4i$

এখন, $\frac{z}{\bar{z}} = \frac{3+4i}{3-4i} = \frac{(3+4i)^2}{(3-4i)(3+4i)}$

$$= \frac{3^2+2.3.4i+(4i)^2}{(3)^2-(4i)^2} = \frac{9+24i+16i^2}{9-16i^2}$$

$$= \frac{9+24i-16}{9+16} = -\frac{7}{25}+\frac{24}{25}i = A+iB$$

$\therefore\ A - iB = -\frac{7}{25} - \frac{24}{25}i$

$\therefore\ |A - iB| = \sqrt{\left(-\frac{7}{25}\right)^2 + \left(\frac{24}{25}\right)^2} = 1$

12. $z = \frac{2}{3 + \cos\theta + i\sin\theta} = x + iy$

ক. $-3 - 4i$ এর বর্গমূল নির্ণয় কর।

সমাধান: $-3 - 4i = 1 - 4 - 4i$

$= 1 + 4i^2 - 4i = 1^2 + (2i)^2 - 2.1.2i$

$= (1 - 2i)^2$

$\therefore\ -3 - 4i$ এর বর্গমূল $= \pm(1 - 2i)$

খ. $\arg(z - 3i) = \pi$ এবং $|z + 6| = 5$ হলে z নির্ণয় কর।

সমাধান: $\arg(z - 3i) = \pi$

$\Rightarrow \arg(x + iy - 3i) = \pi$

$\Rightarrow \arg\{x + i(y - 3)\} = \pi \Rightarrow \tan^{-1}\frac{y-3}{x} = \pi$

$\Rightarrow \frac{y-3}{x} = \tan\pi = 0 \Rightarrow y = 3$

আবার, $|z + 6| = 5 \Rightarrow |x + iy + 6| = 5$

$\Rightarrow |x + 6 + iy| = 5 \Rightarrow \sqrt{(x+6)^2 + y^2} = 5$

$\Rightarrow (x + 6)^2 + 3^2 = 5^2 \Rightarrow (x + 6)^2 = 4^2$

$\Rightarrow x + 6 = \pm 4 \Rightarrow x = -10, -2$

$\therefore\ z = -10 + 3i, -2 + 3i$

গ. প্রমাণ কর যে, $2(x^2 + y^2) = 3x - 1$

প্রমাণ ঃ দেওয়া আছে,

$x + iy = \frac{2}{3 + \cos\theta + i\sin\theta}$

$= \frac{2(3 + \cos\theta - i\sin\theta)}{\{(3 + \cos\theta) + i\sin\theta\}\{(3 + \cos\theta) - i\sin\theta\}}$

$= \frac{2(3 + \cos\theta) - 2i\sin\theta}{(3 + \cos\theta)^2 - i^2\sin^2\theta}$

$= \frac{2(3 + \cos\theta) - 2i\sin\theta}{9 + 6\cos\theta + \cos^2\theta + \sin^2\theta}$

$\Rightarrow x + iy = \frac{2(3 + \cos\theta)}{2(5 + 3\cos\theta)} + \frac{-2i\sin\theta}{2(5 + 3\cos\theta)}$

$\therefore\ x = \frac{3 + \cos\theta}{5 + 3\cos\theta},\ y = \frac{-\sin\theta}{5 + 3\cos\theta}$

এখন, $x^2 + y^2 = \frac{9 + 6\cos\theta + \cos^2\theta}{(5 + 3\cos\theta)^2} + \frac{\sin^2\theta}{(5 + 3\cos\theta)^2}$

$= \frac{9 + 6\cos\theta + \cos^2\theta + \sin^2\theta}{(5 + 3\cos\theta)^2}$

$= \frac{2(5 + 3\cos\theta)}{(5 + 3\cos\theta)^2} = \frac{2}{5 + 3\cos\theta}$

$= \frac{1}{2}\frac{3(3 + \cos\theta) - (5 + 3\cos\theta)}{5 + 3\cos\theta}$

$= \frac{1}{2}\left\{\frac{3(3 + \cos\theta)}{5 + 3\cos\theta} - \frac{5 + 3\cos\theta}{5 + 3\cos\theta}\right\}$

$= \frac{1}{2}(3x - 1)$

$\therefore\ 2(x^2 + y^2) = 3x - 1$

13. $z_1 = 2(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6})$,

$z_2 = 2(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3})$

ক. $\frac{z_1}{z_2}$ এর আর্গুমেন্ট নির্ণয় কর।

সমাধান: z_1 এর আর্গুমেন্ট $= \frac{5\pi}{6}$

z_2 এর আর্গুমেন্ট $= \frac{\pi}{3}$

$\therefore\ \frac{z_1}{z_2}$ এর আর্গুমেন্ট $= \frac{5\pi}{6} - \frac{\pi}{3}$

$= \frac{5\pi - 2\pi}{6} = \frac{3\pi}{6} = \frac{\pi}{2}$

খ. $|z_1 - z_2|$ নির্ণয় কর।

সমাধান: $z_1 = 2(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6})$

$= 2\{\cos(\pi - \frac{\pi}{6}) + i\sin(\pi - \frac{\pi}{6})\}$

$= 2\{-\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\}$

$= 2\{-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\} = -\sqrt{3} + i$

$z_2 = 2(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}) = 2(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i)$

$= 1 + \sqrt{3}i$

$\therefore\ |z_1 - z_2| = |-\sqrt{3} + i - 1 - \sqrt{3}i|$

$= |-\sqrt{3} - 1 + i(1 - \sqrt{3})|$

$= |-\sqrt{3} - 1 + i(1 - \sqrt{3})|$

$= \sqrt{(-\sqrt{3} - 1)^2 + (1 - \sqrt{3})^2}$

$= \sqrt{(\sqrt{3} + 1)^2 + (1 - \sqrt{3})^2}$

$= \sqrt{2\{(\sqrt{3})^2 + 1^2\}} = \sqrt{2(3 + 1)}$

$= 2\sqrt{2}$ (Ans.)

গ. $z_1 z_2$ দ্বারা সূচিত বিন্দুর অবস্থান আর্গন্ড চিত্রে দেখাও।

সমাধান: এখানে, $\arg z_1 = \frac{5\pi}{6}$, $\arg z_2 = \frac{\pi}{3}$

Mod $z_1 = 2$, Mod $z_2 = 2$

$\therefore\ \arg z_1 z_2 = \arg z_1 + \arg z_2 = \frac{5\pi}{6} + \frac{\pi}{3}$

$= \frac{5\pi + 2\pi}{6} = \frac{7\pi}{6} = \pi + \frac{\pi}{6}$

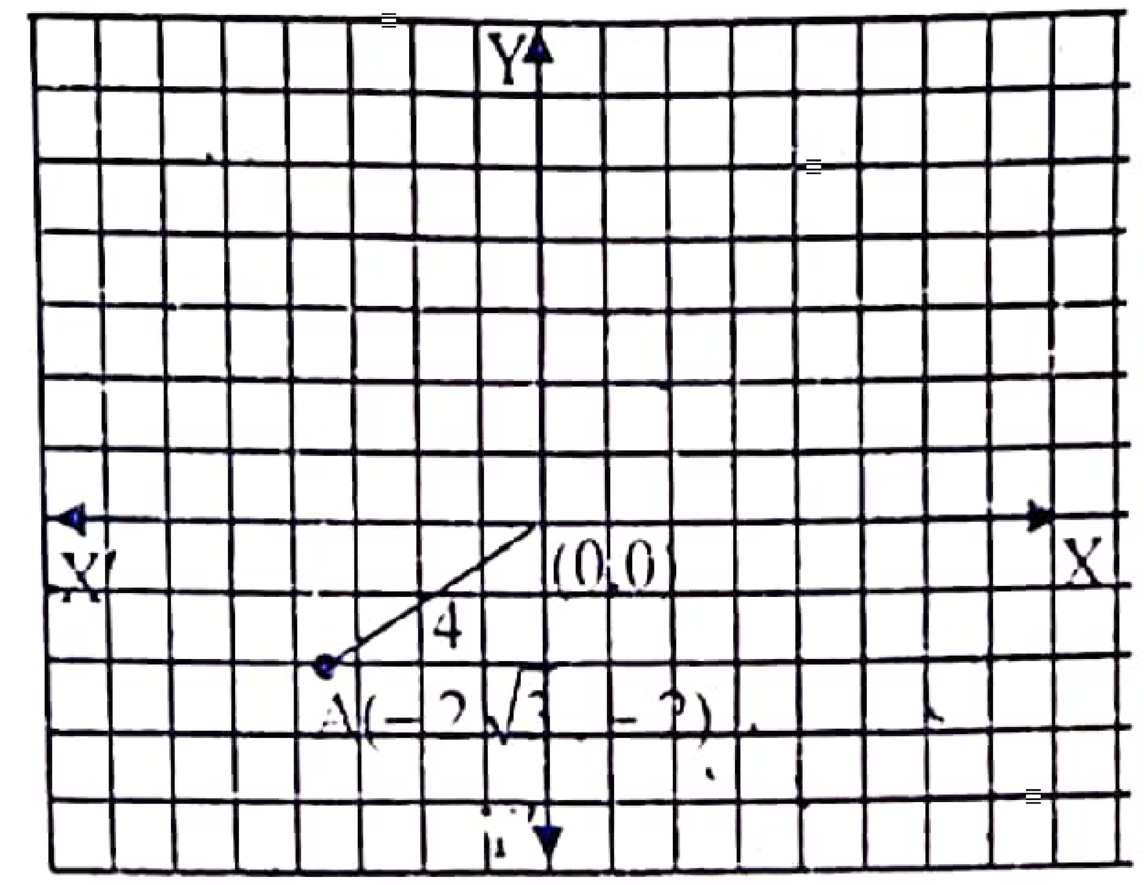
Mod $(z_1 z_2) =$ Mod $z_1 \times$ Mod $z_2 = 4$

$\therefore\ z_1 z_2 = 4\{\cos(\pi + \frac{\pi}{6}) + i\sin(\pi + \frac{\pi}{6})\}$

$= 4\{-\cos\frac{\pi}{6} - i\sin\frac{\pi}{6}\}$

$= 4\{-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\} = -2\sqrt{3} - 2i$

x অক্ষ (বাস্তব অক্ষ) ও y অক্ষ (কাল্পনিক অক্ষ) বরাবর ক্ষুদ্রতম বর্গের 1 বাহুর দৈর্ঘ্য = 1 একক ধরে $z_1 z_2 = -2\sqrt{3} - 2i$ দ্বারা সূচিত বিন্দু যথাক্রমে $A(-2\sqrt{3}, -2)$ এর অবস্থান আর্গন্ড চিত্রে দেখানো হলো ।



14 $z = 3 - 5i$, $z_1 = 1 - i$

ক. $|z + z_1|$ নির্ণয় কর।

সমাধান: $|z + z_1| = |3 - 5i + 1 - i|$

$= |4 - 6i| = \sqrt{4^2 + 6^2} = \sqrt{16 + 36}$

$= \sqrt{52} = 2\sqrt{13}$ (Ans.)

খ. $x = \frac{\bar{z}}{\sqrt{2}}$ হলে দেখাও যে,

$x^4 + 16x^2 + 2889 = 0$

প্রমাণ: $x = \frac{\bar{z}}{\sqrt{2}} = \frac{3 + 5i}{\sqrt{2}}$

$\Rightarrow x^2 = \frac{9 + 30i + 25i^2}{2} = \frac{9 + 30i - 25}{2}$

$= \frac{30i - 16}{2} = 15i - 8$

$\Rightarrow x^2 + 8 = 15i \Rightarrow (x^2 + 8)^2 = (15i)^2$

$\Rightarrow x^4 + 16x^2 + 64 = 225i^2 = -225$

$\therefore\ x^4 + 16x^2 + 289 = 0$

গ. দেখাও যে, $\arg(\frac{z}{z_1}) = \arg z - \arg z_1$

প্রমাণ: $z = 3 - 5i$, $z_1 = 1 - i$

$\therefore\ \arg z = \tan^{-1}\frac{-5}{3} = -\tan^{-1}\frac{5}{3}$

$= -59.04^\circ$

$\arg z_1 = \tan^{-1}\frac{-1}{1} = -\tan^{-1} 1 = -45^\circ$

$$\frac{z}{z_1}=\frac{3-5i}{1-i}=\frac{(3-5i)(1+i)}{(1-i)(1+i)}$$
$$=\frac{3+3i-5i-5i^2}{(1-i)(1+i)}=\frac{3-2i+5}{1^2-i^2}$$
$$=\frac{8-2i}{2}=4-i$$

$\therefore \arg(\frac{z}{z_1})=\tan^{-1}\frac{-1}{4}=-\tan^{-1}\frac{1}{4}$

$=-14.04^0$

এখন, $\arg z-\arg z_1=-59.04^0+45^0$

$=14.04^0$

$\therefore \arg(\frac{z}{z_1})=\arg z-\arg z_1=14.04^0$

15. $z_1=7-6i,\ z_2=3+4i$

ক. $(1-\omega+\omega^2)^4+(1+\omega-\omega^2)^4$ এর মান নির্ণয় কর।

সমাধান: $(1-\omega+\omega^2)^4+(1+\omega-\omega^2)^4$

$=(-\omega-\omega)^4+(-\omega^2-\omega^2)^4$

$[\because 1+\omega+\omega^2=0]$

$=(-2\omega)^4+(-2\omega^2)^4=16(\omega^4+\omega^8)$

$=16(\omega^1+\omega^2)=16(-1)=-16$ (Ans.)

খ. $\sqrt{z_1z_2}$ নির্ণয় কর।

সমাধান: $z_1z_2=(7-6i)(3+4i)$

$=21+28i-18i-24i^2$

$=21+28i-18i+24$

$=45+10i$

$\therefore \sqrt{z_1z_2}=\frac{1}{\sqrt{2}}\{(\sqrt{45^2+10^2}+45)^{\frac{1}{2}}+$

$i(\sqrt{45^2+10^2}-45)^{\frac{1}{2}}\}$

$=\frac{1}{\sqrt{2}}\{(5\sqrt{81+4}+45)^{\frac{1}{2}}+$

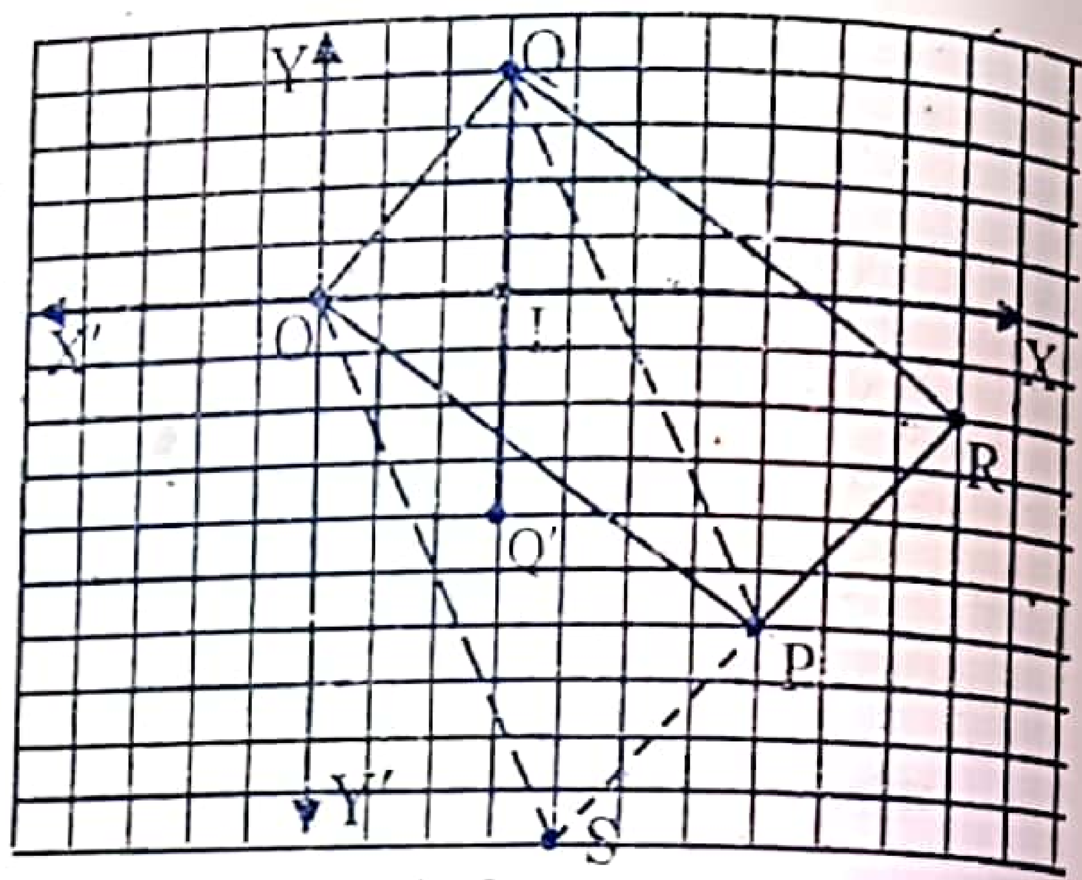
$i(5\sqrt{81+4}-45)^{\frac{1}{2}}\}$

$=\frac{1}{\sqrt{2}}\{(5\sqrt{85}+45)^{\frac{1}{2}}+$

$i(5\sqrt{85}-45)^{\frac{1}{2}}\}$ (Ans.)

গ. আর্গন্ড চিত্রে z_1 ও z_2 দ্বারা সূচিত বিন্দুর সাহায্যে z_1+z_2, z_1-z_2 ও $\overline{z_1}$ দ্বারা সূচিত বিন্দুগুলির অবস্থান দেখাও।

সমাধান: x অক্ষ (বাস্তব অক্ষ) ও y অক্ষ (কাল্পনিক অক্ষ) বরাবর ক্ষুদ্রতম বর্গের 1 বাহুর দৈর্ঘ্য = 1 একক ধরে $z_1=7-6i$ ও $z_2=3+4i$ দ্বারা সূচিত বিন্দু P(7, – 6) ও Q(3, 4) এর অবস্থান আর্গন্ড চিত্রে দেখানো হলো, যেখানে O(0, 0) মূলবিন্দু।



আর্গন্ড চিত্র

OP ও OQ কে সন্নিহিত বাহু ধরে OPRQ সামান্তরিক এবং OQ ও QP কে সন্নিহিত বাহু ধরে OQPS সামান্তরিক অঙ্কন করি। Q হতে x-অক্ষের উপর অঙ্কিত লম্ব QL কে LQ' পর্যন্ত বর্ধিত করি যেন QL = LQ' হয়। তাহলে, R, S ও Q' বিন্দুত্রয় যথাক্রমে z_1+z_2, z_1-z_2 ও $\overline{z_2}$ জটিল সংখ্যাত্রয় নির্দেশ করে।

16. $a=\sqrt[4]{-81},\ b=\sqrt[3]{i}$

ক. $-7+24i$ এর বর্গমূল নির্ণয় কর।

সমাধান: প্রশ্নমালা III এর 3(b) দ্রষ্টব্য।

খ. b এর জটিল মান দুইটির আর্গুমেন্ট θ_1 ও θ_2 হলে $|\theta_1-\theta_2|$ নির্ণয় কর।

সমাধান: মনে করি, $b=\sqrt[3]{-i}\Rightarrow b^3=-i=i^3$

$\therefore b=i.\frac{1}{2}(-1\pm i\sqrt{3}).i=i,\ \frac{1}{2}(-i\mp\sqrt{3})$

b এর জটিল মান দুইটি $-\frac{i}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}$ ও $-\frac{i}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}$ এর আর্গুমেন্ট θ_1 ও θ_2 হলে,

$|\theta_1-\theta_2|=|\tan^{-1}\frac{-1/2}{\sqrt{3}/2}-\tan^{-1}\frac{-1/2}{-\sqrt{3}/2}|$

$=|-\tan^{-1}\frac{1}{\sqrt{3}}-\{-\pi+\tan^{-1}\frac{1}{\sqrt{3}}\}|$

$=|-\tan^{-1}\frac{1}{\sqrt{3}}+\pi-\tan^{-1}\frac{1}{\sqrt{3}}|$

$=|\pi-2.\frac{\pi}{6}|=|\pi-\frac{\pi}{3}|=\frac{2\pi}{3}$ (Ans.)

গ. আর্গন্ড চিত্রে a এর মান চারটি দ্বারা সূচিত বিন্দু চারটি যে চতুর্ভুজ গঠন করে তার কর্ণের দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

সমাধান : দেওয়া আছে, $a=\sqrt[4]{-81}$

$\Rightarrow a^4=-81=81i^2$

$\Rightarrow (a^2)^2=(9i)^2$

$\therefore a^2=\pm 9i=\frac{9}{2}(\pm 2i)$

$=\frac{9}{2}(1^2+i^2\pm 2.1.i)=\frac{9}{2}(1\pm i)^2$

$\therefore a=\pm\frac{3}{\sqrt{2}}(1\pm i)$.

$\therefore$ আর্গন্ড চিত্রে a এর মান চারটি $\frac{3}{\sqrt{2}}+\frac{3}{\sqrt{2}}i$, $\frac{3}{\sqrt{2}}-\frac{3}{\sqrt{2}}i$, $-\frac{3}{\sqrt{2}}-\frac{3}{\sqrt{2}}i$ ও $-\frac{3}{\sqrt{2}}+\frac{3}{\sqrt{2}}i$ দ্বারা সূচিত বিন্দু চারটি $A(\frac{3}{\sqrt{2}},\frac{3}{\sqrt{2}})$, $B(\frac{3}{\sqrt{2}},-\frac{3}{\sqrt{2}})$, $C(-\frac{3}{\sqrt{2}},-\frac{3}{\sqrt{2}})$ ও $D(-\frac{3}{\sqrt{2}},\frac{3}{\sqrt{2}})$ একটি বর্গক্ষেত্র উৎপন্ন করে যার কর্ণের দৈর্ঘ্য = AC

$=\sqrt{(\frac{3}{\sqrt{2}}+\frac{3}{\sqrt{2}})^2+(\frac{3}{\sqrt{2}}+\frac{3}{\sqrt{2}})^2}$

$=\sqrt{(3\sqrt{2})^2+(3\sqrt{2})^2}=\sqrt{18+18}$

$=6$ একক।

17. $f(x)=x-3$

ক. $f(2+\sqrt{3}i)$ এর অনুবন্ধী জটিল সংখ্যার আর্গুমেন্ট নির্ণয় কর।

সমাধান: $f(x)=x-3$

$\therefore f(2+\sqrt{3}i)=2+\sqrt{3}i-3=-1+\sqrt{3}i$

$\therefore f(2+\sqrt{3}i)$ এর অনুবন্ধী জটিল সংখ্যা $=-1-\sqrt{3}i$

$\therefore -1-\sqrt{3}i$ এর আর্গুমেন্ট $=\tan^{-1}\frac{-\sqrt{3}}{-1}$

$=-\pi+\tan^{-1}\sqrt{3}=-\pi+\frac{\pi}{3}$

$=-\frac{2\pi}{3}$ (Ans.)

খ. $|f(x)|<\frac{1}{5}$ হলে প্রমাণ কর যে, $|x^2-9|<\frac{31}{25}$

সমাধান: $|f(x)|<\frac{1}{5}\Rightarrow|x-3|<\frac{1}{5}\cdots$ (i)

এখন, $|x+3|=|x-3+6|\le|x-3|+|6|$

$\Rightarrow|x+3|<\frac{1}{5}+6\Rightarrow|x+3|<\frac{31}{5}\cdots$ (ii)

$(i)\times(ii)\Rightarrow|x-3||x+3|<\frac{1}{5}\times\frac{31}{5}$

$\Rightarrow|(x-3)(x+3)|<\frac{31}{25}$

$\therefore |x^2-9|<\frac{31}{25}$ (Proved)

গ. আর্গন্ড চিত্রে $f(-5-6i)$ এর বর্গমূল দুইটির মডুলাস ও আর্গুমেন্ট দেখাও।

সমাধান: $f(-5-6i)=-5-6i-3$

$= -8 - 6i = -9 + 1 - 6i$

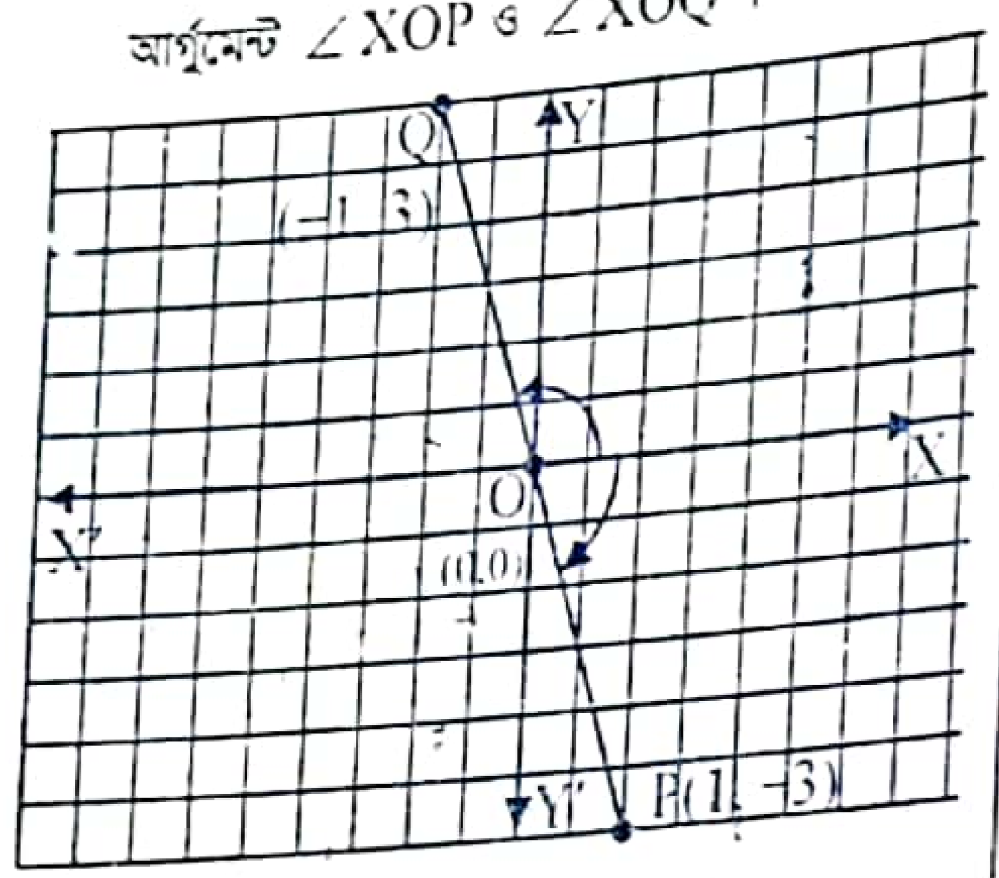
$= 1^2 + (3i)^2 - 2.1.3i = (1 - 3i)^2$

$\therefore$ $f(-5 - 6i)$ এর বর্গমূল $= \pm(1 - 3i)$

$\therefore$ $f(-5 - 6i)$ এর বর্গমূল দুইটি $\pm(1 - 3i)$

$= 1 - 3i, -1 + 3i$

x- অক্ষ (বাস্তব অক্ষ) ও y- অক্ষ (কাল্পনিক অক্ষ) বরাবর ক্ষুদ্রতম বর্গের 2 বাহুর দৈর্ঘ্য = 1 একক ধরে $1 - 3i$ ও $-1 + 3i$ দ্বারা সূচিত বিন্দু $P(1, -3)$ ও $Q(-1, 3)$ এর অবস্থান আর্গন্ড চিত্রে দেখানো হলো। $1 - 3i$ ও $-1 + 3i$ এর মডুলাস OP ও OQ এবং আর্গুমেন্ট $\angle XOP$ ও $\angle XOQ$।



18. $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$

ক. $\sqrt{-1}$ এর মান নির্ণয় কর।

সমাধান: প্রশ্নমালা III এর 4(a) দ্রষ্টব্য।

খ. $|z| = 1$, $\theta = \frac{2\pi}{3}$ হলে প্রমাণ কর যে, $(a + b)^2 + (az + bz^2)^2 + (az^2 + bz)^2 = 6ab$

প্রমাণ: দেওয়া আছে, $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$.

$|z| = 1$ এবং $\theta = \frac{2\pi}{3}$

$\therefore$ $r = |z| = 1$ এবং

$z = 1\{\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\}$

$= \cos(\pi - \frac{\pi}{3}) + i\sin(\pi - \frac{\pi}{3})$

$= -\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$

$= \frac{1}{2}(-1 + \sqrt{3}i) = \omega$ (এককের জটিল ঘনমূল)

L.H.S. $= (a + b)^2 + (az + bz^2)^2 + (az^2 + bz)^2$

$= (a + b)^2 + (a\omega + b\omega^2)^2 + (a\omega^2 + b\omega)^2$

$= a^2 + 2ab + b^2 + a^2\omega^2 + 2ab\omega^3 + b^2\omega^4 + a^2\omega^4 + 2ab\omega^3 + b^2\omega^2$

$= a^2 + 2ab + b^2 + a^2\omega^2 + 2ab.1 + b^2\omega + a^2\omega + 2ab.1 + b^2\omega^2$

$= a^2(1 + \omega + \omega^2) + b^2(1 + \omega + \omega^2) + 6ab$

$= a^2.0 + b^2.0 + 6ab = 6ab =$ R.H.S.

$\therefore$ L.H.S. = R.H.S. (Proved)

গ. $|z| = 2, \theta = \frac{5\pi}{6}$ হলে z ও $\bar{z}$ এর মধ্যবর্তী কোণ নির্ণয় কর।

সমাধান: $|z| = 2 = r$

$\therefore$ $z = 2(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6})$

$= 2\{\cos(\pi - \frac{\pi}{6}) + i\sin(\pi - \frac{\pi}{6})\}$

$= 2\{-\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\}$

$= 2(-\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}) = -\sqrt{3} + i$

$\therefore$ $\bar{z} = -\sqrt{3} - i$

$\therefore$ $\arg(z) = \tan^{-1}(\frac{1}{-\sqrt{3}}) = \pi - \tan^{-1}\frac{1}{\sqrt{3}}$

$= \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$

এবং $\arg(\bar{z}) = \tan^{-1}(\frac{-1}{-\sqrt{3}})$

$= -\pi + \tan^{-1}\frac{1}{\sqrt{3}} = -\pi + \frac{\pi}{6} = -\frac{5\pi}{6}$

এখন, $|\arg(z) - \arg(\bar{z})| = |\frac{5\pi}{6} - (-\frac{5\pi}{6})|$

$= |\frac{5\pi}{6} + \frac{5\pi}{6}| = \frac{5\pi}{3} > \pi$

$\therefore$ z ও $\bar{z}$ এর মধ্যবর্তী কোণ $= 2\pi - \frac{5\pi}{3} = \frac{\pi}{3}$

19. $P = -1 + \sqrt{3}i$ এবং Q একটি জটিল সংখ্যা, যেখানে $|Q| = 2$, $\arg P + \arg Q = \frac{\pi}{2}$

ক. $\frac{P}{\bar{P}}$ নির্ণয় কর।

সমাধান: $P = -1 + \sqrt{3}i$

$\therefore$ $\bar{P} = -1 - \sqrt{3}i$

এখন, $\frac{P}{\bar{P}} = \frac{-1 + \sqrt{3}i}{-1 - \sqrt{3}i}$

$= \frac{(-1 + \sqrt{3}i)(-1 + \sqrt{3}i)}{(-1 - \sqrt{3}i)(-1 + \sqrt{3}i)}$

$= \frac{(-1)^2 - 2.1.\sqrt{3}i + (\sqrt{3}i)^2}{(-1)^2 - (\sqrt{3}i)^2}$

$= \frac{1 - 2\sqrt{3}i + 3i^2}{1 - 3i^2} = \frac{1 - 2\sqrt{3}i - 3}{1 + 3}$

$= \frac{2(-\sqrt{3}i - 1)}{4} = \frac{-\sqrt{3}i - 1}{2}$ (Ans.)

খ. $\sqrt{P} = z$ হলে $z + \frac{1}{z}$ নির্ণয় কর।

সমাধান: $P = -1 + \sqrt{3}i = \frac{1}{2}(-2 + 2\sqrt{3}i)$

$= \frac{1}{2}(-3 + 1 + 2\sqrt{3}i)$

$= \frac{1}{2}\{(\sqrt{3}i)^2 + 1^2 + 2\sqrt{3}i.1\}$

$= \frac{1}{2}(\sqrt{3}i + 1)^2$

$\therefore$ $z = \sqrt{P} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\sqrt{3}i + 1) = \frac{1}{\sqrt{2}}(1 + \sqrt{3}i)$

$\therefore$ $\frac{1}{z} = \frac{\sqrt{2}(1 - \sqrt{3}i)}{(1 + \sqrt{3}i)(1 - \sqrt{3}i)} = \frac{\sqrt{2}(1 - \sqrt{3}i)}{(1)^2 - (\sqrt{3}i)^2}$

$= \frac{\sqrt{2}(1 - \sqrt{3}i)}{1 + 3} = \frac{\sqrt{2}(1 - \sqrt{3}i)}{4} = \frac{1 - \sqrt{3}i}{2\sqrt{2}}$

$\therefore$ $z + \frac{1}{z} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1 + \sqrt{3}i) + \frac{1 - \sqrt{3}i}{2\sqrt{2}}$

$= \frac{2 + 2\sqrt{3}i + 1 - \sqrt{3}i}{2\sqrt{2}} = \frac{3 + \sqrt{3}i}{2\sqrt{2}}$ (Ans.)

গ. Q নির্ণয় কর।

সমাধান: $\arg P + \arg Q = \frac{\pi}{2}$

$\Rightarrow$ $\tan^{-1}\frac{\sqrt{3}}{-1} + \arg Q = \frac{\pi}{2}$

$\Rightarrow$ $\pi - \tan^{-1}\frac{\sqrt{3}}{1} + \arg Q = \frac{\pi}{2}$

$\Rightarrow$ $\pi - \frac{\pi}{3} + \arg Q = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \frac{2\pi}{3} + \arg Q = \frac{\pi}{2}$

$\Rightarrow$ $\arg Q = \frac{\pi}{2} - \frac{2\pi}{3} = \frac{3\pi - 4\pi}{6} = -\frac{\pi}{6}$

$\therefore$ $Q = |Q|\{\cos(\arg Q) + i\sin(\arg Q)\}$

$= 2\{\cos(-\frac{\pi}{6}) + i\sin(-\frac{\pi}{6})\}$

$= 2\{\cos\frac{\pi}{6} - i\sin\frac{\pi}{6}\} = 2(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i)$

$= \sqrt{3} - i$ (Ans.)

20. $\begin{bmatrix} -1 & \omega & \omega^2 \\ \omega^2 & -1 & \omega \\ \omega & \omega^2 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \omega \\ \omega^2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ ......(i)

যেখানে, ω এককের একটি জটিল ঘনমূল।

$P = (3 + 4i)^{-\frac{1}{2}} + (3 - 4i)^{-\frac{1}{2}}$ ......(ii)

ক. $(1 - \omega + \omega^2)^3 + (1 + \omega - \omega^2)^3$ এর মান নির্ণয় কর।

সমাধান: $(1 - \omega + \omega^2)^3 + (1 + \omega - \omega^2)^3$

$= (1 + \omega + \omega^2 - 2\omega)^3 + (1 + \omega + \omega^2 - 2\omega^2)^3$

$= (-2\omega)^3 + (-2\omega^2)^3$, $[\because 1 + \omega + \omega^2 = 0]$

$4\omega^2 + 4\omega^4 = 4(\omega + \omega^2)$, [∵ $\omega^3 = 1$]

$= 4(-1)$, [∵ $1 + \omega + \omega^2 = 0$]

$= -4$

(ii) এর সাহায্যে প্রমাণ কর যে, $P = \frac{4}{5}$

প্রমাণ : $(3+4i)^{-\frac{1}{2}} + (3-4i)^{-\frac{1}{2}}$

$= \frac{1}{\sqrt{3+4i}} + \frac{1}{\sqrt{3-4i}}$

$= \frac{1}{\sqrt{4-1+4i}} + \frac{1}{\sqrt{4-1-4i}}$

$= \frac{1}{\sqrt{2^2+i^2+2.2.i}} + \frac{1}{\sqrt{2^2+i^2-2.2.i}}$

$= \frac{1}{\sqrt{(2+i)^2}} + \frac{1}{\sqrt{(2-i)^2}} = \frac{1}{2+i} + \frac{1}{2-i}$

$= \frac{1}{(2+i)(2-i)} = \frac{2-i+2+i}{2^2-i^2} = \frac{4}{4+1}$

$(3+4i)^{-\frac{1}{2}} + (3-4i)^{-\frac{1}{2}} = \frac{4}{5}$ (Showed)

(i) এর সাহায্যে দেখাও যে, $xyz = -8$

প্রমাণ: $\begin{bmatrix} -1 & \omega & \omega^2 \\ \omega & -1 & \omega \\ \omega & \omega^2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega \\ \omega^2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} -\omega + \omega^3 + \omega^2 \\ \omega^2 - \omega^2 + \omega \\ \omega^2 + \omega^4 - 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$

$x = -\omega + 1 + \omega^2 = 1 + \omega + \omega^2 - 2\omega = -2\omega$

[∵ $1 + \omega + \omega^2 = 0$]

$y = \omega^2 - \omega^2 + \omega = 1 + \omega + \omega^2 - 2\omega^2 = -2\omega^2$

$z = \omega^2 + \omega^4 - 1 = \omega^2 + \omega - 1$

$= 1 + \omega + \omega^2 - 2 = -2$

∴ $xyz = (-2\omega)(-2\omega^2)(-2) = -8\omega^3 = -8$

$xyz = -8$ (Showed)

$x = 2 + \sqrt{3}i$ এবং $y = 2 - \sqrt{3}i$

ক. $\frac{1-ix}{1+ix} = a - ib$ হলে প্রমাণ কর যে, $a^2 + b^2 = 1$

খ. $\frac{y}{x}$ এর বর্গমূল নির্ণয় কর।

গ. দেখাও যে, $x^2 + xy + \frac{1}{x} = 23$

ক. প্রমাণ: $\frac{1-ix}{1+ix} = a - ib$

$\Rightarrow \left|\frac{1-ix}{1+ix}\right| = |a - ib| \Rightarrow \frac{|1-ix|}{|1+ix|} = |a - ib|$

$\Rightarrow \frac{\sqrt{1+(-x)^2}}{\sqrt{1+x^2}} = \sqrt{a^2+b^2}$ ১

$\Rightarrow \frac{\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x^2}} = \sqrt{a^2+b^2} \Rightarrow 1 = \sqrt{a^2+b^2}$

∴ $a^2 + b^2 = 1$ (প্রমাণিত) ১

খ. সমাধান:

$\frac{y}{x} = \frac{2-\sqrt{3}i}{2+\sqrt{3}i} = \frac{(2-\sqrt{3}i)^2}{(2+\sqrt{3}i)(2-\sqrt{3}i)}$

$= \frac{4 - 2.2.\sqrt{3}i + (\sqrt{3}i)^2}{4 - (\sqrt{3}i)^2}$ ১

$= \frac{4 - 4\sqrt{3}i + 3(-1)}{4 - 3(-1)}$, [∵ $i^2 = -1$] ১

$= \frac{4 - 4\sqrt{3}i - 3}{4+3} = \frac{1 - 4\sqrt{3}i}{7}$

$= \frac{1}{7} - \frac{4\sqrt{3}}{7}i$

$= \frac{1}{7}(4 - 3 - 4\sqrt{3}i)$

$= \frac{1}{7}\{2^2 + (\sqrt{3}i)^2 - 2.2.\sqrt{3}i\}$ ১

$= \frac{1}{7}(2 + \sqrt{3}i)^2$

∴ $\frac{y}{x}$ এর বর্গমূল $= \pm\frac{1}{\sqrt{7}}(2 + \sqrt{3}i)$

গ. প্রমাণ: দেওয়া আছে, $x = 2 + \sqrt{3}i$

$x^2 = 4 + 4\sqrt{3}i + 3i^2$

$= 4 + 4\sqrt{3}i - 3 = 1 + 4\sqrt{3}i$ এবং ১

$xy = (2 + \sqrt{3}i)(2 - \sqrt{3}i)$

$= 4 - 3i^2 = 4 + 3 = 7$ ১

$\frac{1}{x} = \frac{1}{2+\sqrt{3}i} = \frac{2-\sqrt{3}i}{(2+\sqrt{3}i)(2-\sqrt{3}i)}$

$= \frac{2-\sqrt{3}i}{4-3i^2} = \frac{2-\sqrt{3}i}{4-3(-1)} = \frac{2-\sqrt{3}i}{7}$ ১

∴ $x^2 + xy + \frac{28}{x} = 1 + 4\sqrt{3}i + 7 + 28(\frac{2-\sqrt{3}i}{7})$

$= 8 + 4\sqrt{3}i + 8 - 4\sqrt{3}i = 16$

∴ $x^2 + xy + \frac{28}{x} = 16$ (Showed) ১

27. $z = x + iy$, 1 এর ঘনমূল 1, ω, ω^2

ক. $(2\sqrt{3} - 2i)(-2\sqrt{3} + 6i)$ এর মডুলাস নির্ণয় কর।

খ. arg $(z - 3i) = \pi$ এবং $|z + 6| = 5$ হলে z নির্ণয় কর।

গ. প্রমাণ কর যে, i এ ঘনমূল তিনটি $-i$, $-i\omega$, $-i\omega^2$

ক. সমাধান : $(2\sqrt{3} - 2i)(-2\sqrt{3} + 6i)$

$= (2\sqrt{3})(-2\sqrt{3}) - (2i)(6i) +$

$\{12\sqrt{3} + 4\sqrt{3}\}i$

$= -12 - 12i^2 + 16\sqrt{3}i$

$= -12 + 12 + 16\sqrt{3}i = 0 + 16\sqrt{3}i$

∴ নির্ণেয় মডুলাস $= \sqrt{0^2 + (16\sqrt{3})^2} = 16\sqrt{3}$

খ. সমাধান : arg $(z - 3i) = \pi$

$\Rightarrow$ arg $(x + iy - 3i) = \pi$

$\Rightarrow$ arg$\{x + i(y - 3)\} = \pi$

$\Rightarrow \tan^{-1}\frac{y-3}{x} = \pi \Rightarrow \frac{y-3}{x} = \tan\pi = 0$

$\Rightarrow y - 3 = 0 \Rightarrow y = 3$

আবার, $|z + 6| = 5 \Rightarrow |x + iy + 6| = 5$

$\Rightarrow |(x + 6) + iy| = 5$

$\Rightarrow \sqrt{(x+6)^2 + y^2} = 5$

$\Rightarrow (x+6)^2 + y^2 = 25$

$\Rightarrow (x+6)^2 + 3^2 = 25 \Rightarrow (x+6)^2 = 4^2$

$\Rightarrow x + 6 = \pm 4 \Rightarrow x = \pm 4 - 6$

$\Rightarrow x = -2, -10.$

∴ $z = -2 + 3i$, $-10 + 3i$

গ. প্রমাণ : আমরা জানি, 1 এর জটিল ঘনমূল $\omega = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$ হলে, $\omega^2 = \frac{-1-i\sqrt{3}}{2}$

মনে করি, $x = \sqrt[3]{i} \Rightarrow x^3 = i = -i^3$

$\Rightarrow x^3 + i^3 = 0 \Rightarrow (x + i)(x^2 - xi + i^2) = 0$

$\Rightarrow (x + i)(x^2 - xi - 1) = 0$

$x + i = 0$ হলে, $x = -i$

$x^2 - xi - 1 = 0$ হলে,

$x = \frac{-(-i) \pm \sqrt{(-i)^2 - 4.1.(-1)}}{2.1}$

$= \frac{i \pm \sqrt{-1+4}}{2} = \frac{i \pm \sqrt{3}}{2}$

$= \frac{i}{i}(\frac{i \pm \sqrt{3}}{2}) = \frac{1}{i}(\frac{i^2 \pm i\sqrt{3}}{2})$

$= \frac{1}{i}(\frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}) = \frac{-i^2}{i}(\frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2})$

$= -i(\frac{-1\pm i\sqrt{3}}{2})$

$= -i(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}), -i(\frac{-1-i\sqrt{3}}{2})$

$= -i\omega, -i\omega^2$

∴ i এর ঘনমূল তিনটি $-i, -i\omega, -i\omega^2$

23. $x=\sqrt[6]{-64}$, $z_1=\sqrt{3}+i$, $z_2=\sqrt{3}-i$

ক. $-4-4i$ এর আর্গুমেন্ট নির্ণয় কর।

খ. প্রমাণ কর যে, $x=\pm 2i, \pm z_1, \pm z_2$

গ. দেখাও যে, $z_1^2+z_1 z_2+\frac{8\sqrt{3}}{z_1}=12$

ক. সমাধানঃ $-4-4i$ এর আর্গুমেন্ট,

$\theta = \tan^{-1}\frac{-4}{-4} = -\pi + \tan^{-1}\frac{4}{4}$

$= -\pi+\tan^{-1}1 = -\pi+\frac{\pi}{4}$

$= -\frac{3\pi}{4}$

খ. প্রমাণ : $x=\sqrt[6]{-64} \Rightarrow x^6=-64$

$\Rightarrow (x^2)^3=(-4)^3$

∴ $x^2 = -4, -4\times\frac{1}{2}(-1\pm i\sqrt{3})$

$=-4,\ 2\pm2\sqrt{3}\, i$

$x^2=-4=(2i)^2$ হলে $x=\pm 2i$

আবার, $x^2 = 2\pm2\sqrt{3}\, i = 3-1\pm2\sqrt{3}\, i$

$=(\sqrt{3})^2+i^2\pm2\sqrt{3}\, i = (i\pm\sqrt{3})^2$

হলে, $x=\pm(i\pm\sqrt{3})$

$=\pm(i+\sqrt{3}), \pm(i-\sqrt{3})$

$=\pm z_1, \pm z_2$

∴ $\sqrt[6]{64} = \pm2, \pm z_1, \pm z_2$

গ. প্রমাণ: $z_1^2=(\sqrt{3}+i)^2$

$=(\sqrt{3})^2+2.\sqrt{3}.i+i^2$

$=3+2\sqrt{3}\, i-1=2+2\sqrt{3}\, i$

$z_1 z_2=(\sqrt{3}+i)(\sqrt{3}-i)=(\sqrt{3})^2-i^2$

$=3+1=4$

$\frac{1}{z_1}=\frac{1}{\sqrt{3}+i}=\frac{\sqrt{3}-i}{(\sqrt{3}+i)(\sqrt{3}-i)}$

$=\frac{\sqrt{3}-i}{(\sqrt{3})^2-i^2}=\frac{\sqrt{3}-i}{3+1}=\frac{\sqrt{3}-i}{4}$

∴ $z_1^2+z_1 z_2+\frac{8\sqrt{3}}{z_1}=2+2\sqrt{3}\, i+4$

$+\frac{8\sqrt{3}(\sqrt{3}-i)}{4}$

$=6+2\sqrt{3}i+2\sqrt{3}(\sqrt{3}-i)$

$=6+2\sqrt{3}i+6-2\sqrt{3}i$

$=12$

24. $z_1=\frac{1+5i}{1-2i}+\frac{5-3i}{2+3i}$, $z_2=\frac{i}{1+i}$

ক. i এর বর্গমূল নির্ণয় কর।

খ. z_2 ও $\overline{z_2}$ দ্বারা সূচিত বিন্দুর অবস্থান আর্গন্ড চিত্রে দেখাও।

গ. z_1 এর আর্গুমেন্ট ষাটমূলক পদ্ধতিতে দুই দশমিক স্থান পর্যন্ত নির্ণয় কর।

ক. সমাধানঃ $i=\frac{1}{2}.2i=\frac{1}{2}(1-1+2i)$

$=\frac{1}{2}(1^2+i^2+2.1.i)=\frac{1}{2}(1+i)^2$

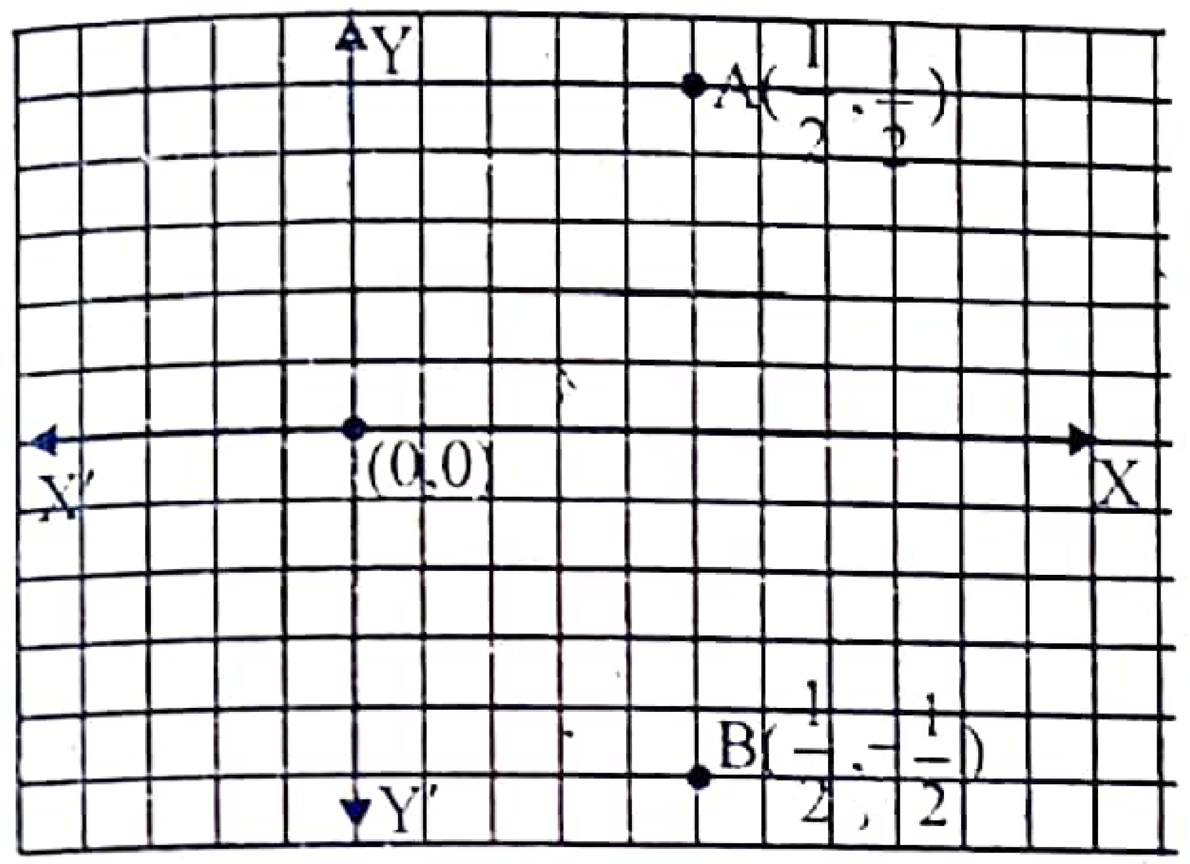
∴ i এর বর্গমূল $=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}(1+i)$

খ. $z_2=\frac{i}{1+i}=\frac{i(1-i)}{(1+i)(1-i)}$

$=\frac{i-i^2}{1^2-i^2}=\frac{i+1}{1+1}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i$

∴ $\overline{z_2}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i$

x অক্ষ (বাস্তব অক্ষ) ও y অক্ষ (কাল্পনিক অক্ষ) বরাবর ক্ষুদ্রতম বর্গের 10 বাহুর দৈর্ঘ্য = 1 একক ধরে $z_2=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i$ ও $\overline{z_2}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i$ দ্বারা সূচিত বিন্দু যথাক্রমে $A(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ ও $B(\frac{1}{2},-\frac{1}{2})$ এর অবস্থান আর্গন্ড চিত্রে দেখানো হলো।



গ. সমাধানঃ $\frac{1+5i}{1-2i}+\frac{5-3i}{2+3i}$

$=\frac{(1+5i)(1+2i)}{(1+2i)(1-2i)}+\frac{(5-3i)(2-3i)}{(2+3i)(2-3i)}$

$=\frac{1+7i-10}{1+4}+\frac{10-21i-9}{4+9}$

$=\frac{-9+7i}{5}+\frac{1-21i}{13}$

$=\frac{-117+91i+5-105i}{65}$

$=(-\frac{112}{65})+(-\frac{14}{65})i$

∴ z_1 এর আর্গুমেন্ট $=\tan^{-1}(\frac{-112/65}{-14/65})$

$=-180^0+\tan^{-1}(\frac{112}{14})$

$=-180^0+\tan^{-1}8$

$=-180^0+82.87^0=-97.13^0$ (প্রায়)

25. $z=\frac{4}{\cos\theta+i\sin\theta}=x+iy$, $P=\frac{\bar{z}}{z}$

ক. $|2z-1|=|z-\bar{z}|$ হলে দেখাও যে, $x^2+y^2=1$

খ. প্রমাণ কর যে, $x^2+y^2=16$

গ. প্রমাণ কর যে, $\bar{P}=\frac{1}{P}=\frac{x^2-y^2+2xyi}{x^2+y^2}$

ক. প্রমাণ: দেওয়া আছে, $|2z-1|=|z-2|$

$\Rightarrow |2(x+iy)-1|=|x+iy-2|$

$\Rightarrow |(2x-1)+i.2y|=|(x-2)+yi|$

$\Rightarrow \sqrt{(2x-1)^2+4y^2}=\sqrt{(x-2)^2+y^2}$

$\Rightarrow 4x^2-4x+1+4y^2=x^2-4x+4+y^2$

$\Rightarrow 3x^2+3y^2=3$

∴ $x^2+y^2=1$

খ. প্রমাণ : দেওয়া আছে ,

$x+iy=\frac{2}{3+\cos\theta+i\sin\theta}$

$=\frac{2(3+\cos\theta-i\sin\theta)}{\{(3+\cos\theta)+i\sin\theta\}\{(3+\cos\theta)-i\sin\theta\}}$

$=\frac{2(3+\cos\theta)-2i\sin\theta}{(3+\cos\theta)^2-i^2\sin^2\theta}$

$=\frac{2(3+\cos\theta)-2i\sin\theta}{9+6\cos\theta+\cos^2\theta+\sin^2\theta}$

$\Rightarrow x+iy=\frac{2(3+\cos\theta)}{2(5+3\cos\theta)}+\frac{-2i\sin\theta}{2(5+3\cos\theta)}$

∴ $x=\frac{3+\cos\theta}{5+3\cos\theta}$, $y=\frac{-\sin\theta}{5+3\cos\theta}$

L.H.S. $= x^2 + y^2$

$$= \frac{9+6\cos\theta+\cos^2\theta}{(5+3\cos\theta)^2} + \frac{\sin^2\theta}{(5+3\cos\theta)^2}$$

$$= \frac{9+6\cos\theta+\cos^2\theta+\sin^2\theta}{(5+3\cos\theta)^2}$$

$$= \frac{2(5+3\cos\theta)}{(5+3\cos\theta)^2} = \frac{2}{5+3\cos\theta}$$

$$\therefore\ 2(x^2+y^2) = \frac{4}{5+3\cos\theta}$$

R.H.S. $= 3x - 1 = 3\times\dfrac{3+\cos\theta}{5+3\cos\theta} - 1$

$$= \frac{9+3\cos\theta}{5+3\cos\theta} - 1$$

$$= \frac{9+3\cos\theta-5-3\cos\theta}{5+3\cos\theta}$$

$$= \frac{4}{5+3\cos\theta}$$

∴ L.H.S. = R.H.S. (Proved)

গ. $P = \dfrac{\bar{z}}{z} = \dfrac{x-iy}{x+iy} = \dfrac{(x-iy)^2}{(x+iy)(x-iy)}$

$$= \frac{x^2-2ixy+(iy)^2}{x^2-(iy)^2} = \frac{x^2-2ixy-y^2}{x^2+y^2}$$

$$= \frac{x^2--y^2-2ixy}{x^2+y^2}$$

$\therefore\ \bar{P} = \dfrac{x^2-y^2+2ixy}{x^2+y^2}$ এবং

$$\frac{1}{P} = \frac{x^2+y^2}{x^2-y^2-2ixy}$$

$$= \frac{(x^2+y^2)(x^2-y^2+2ixy)}{(x^2-y^2-2ixy)(x^2-y^2+2ixy)}$$

$$= \frac{(x^2+y^2)(x^2-y^2+2ixy)}{(x^2-y^2)^2-(2ixy)^2}$$

$$= \frac{(x^2+y^2)(x^2-y^2+2ixy)}{(x^2-y^2)^2+4x^2y^2}$$

$$= \frac{(x^2+y^2)(x^2-y^2+2ixy)}{(x^2+y^2)^2}$$

$$= \frac{x^2-y^2+2ixy}{x^2+y^2}$$

$$\therefore\ \bar{P} = \frac{1}{P} = \frac{x^2-y^2+2xyi}{x^2+y^2}$$

26. $z_1 = 2(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3})$,

$z_2 = 2(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3})$

ক. $z_1 z_2$ এর আর্গুমেন্ট নির্ণয় কর।

খ. $|z_1 - z_2|$ নির্ণয় কর।

গ. $\frac{z_1}{z_2}$ দ্বারা সূচিত বিন্দুর অবস্থান আর্গন্ড চিত্রে

সমাধানঃ $z_1 = 2(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3})$,

$z_2 = 2(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3})$

$\therefore\ \arg(z_1) = \frac{2\pi}{3}$ এবং $\arg(z_2) = \frac{\pi}{3}$

আমরা জানি,

$\arg(z_1z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2)$

$= \frac{2\pi}{3} + \frac{\pi}{3} = \frac{3\pi}{3} = \pi$

খ. সমাধানঃ $z_1 = 2(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3})$

$= 2\{\cos(\pi - \frac{\pi}{3}) + i\sin(\pi - \frac{\pi}{3})\}$

$= 2(-\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3})$

$= 2(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}) = -1 + \sqrt{3}i$

$z_2 = 2(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3})$

$= 2(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}) = 1 + \sqrt{3}i$

$z_1 - z_2 = -1 + \sqrt{3}i - 1 - \sqrt{3}i$

$= -2 + 0i$

$\therefore\ |z_1 - z_2| = \sqrt{(-2)^2 + 0^2} = 2$

গ. সমাধানঃ $z_1 = 2(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3})$,

$z_2 = 2(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3})$

$\therefore$ Mod$(z_1) = 2$, Mod$(z_2) = 2$

$\arg(z_1) = \frac{2\pi}{3}$ এবং $\arg(z_2) = \frac{\pi}{3}$

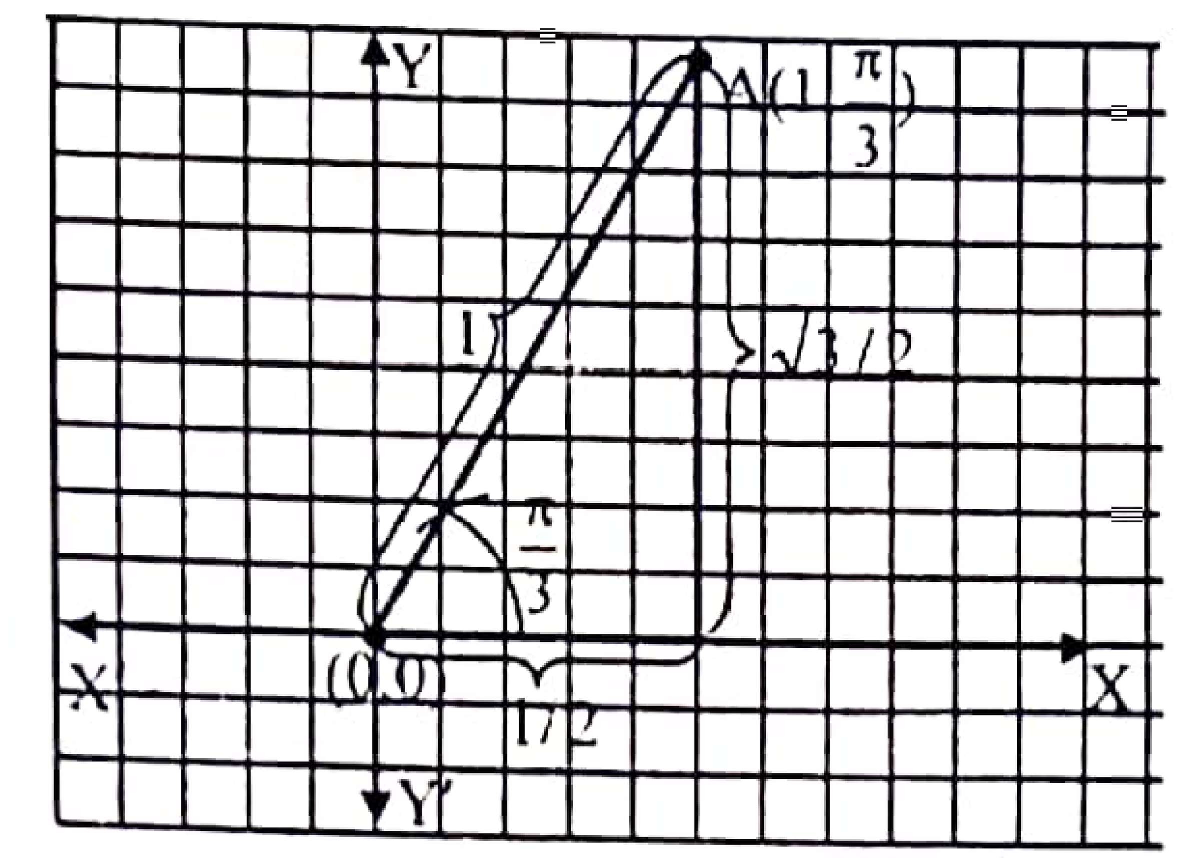
$\therefore$ Mod$(\frac{z_1}{z_2}) = \frac{Mod(z_1)}{Mod(z_2)} = \frac{2}{2} = 1$ এবং

$\arg(\frac{z_1}{z_2}) = \arg(z_1) - \arg(z_2)$

$= \frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{3}$

$\therefore\ \frac{z_1}{z_2} = 1(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}) = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$

x অক্ষ (বাস্তব অক্ষ) ও y অক্ষ (কাল্পনিক অক্ষ) বরাবর ক্ষুদ্রতম বর্গের 10 বাহুর দৈর্ঘ্য = 1 একক ধরে $\frac{z_1}{z_2} = 1(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3})$ দ্বারা সূচিত বিন্দু $A(1, \frac{\pi}{3})$ অর্থাৎ $A(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$ এর অবস্থান আর্গন্ড চিত্রে দেখানো হলো।



আর্গন্ড চিত্র

27. $z_1 = 4 + 4i$, $z_2 = 3 - 5i$

ক. z_1 এর বর্গমূল নির্ণয় কর।

খ. z_1z_2 এর আর্গুমেন্ট ষাটমূলক পদ্ধতিতে তিন দশমিক স্থান পর্যন্ত ষাটমূলক পদ্ধতিতে নির্ণয় কর।

গ. আর্গন্ড চিত্রে z_1 ও z_2 দ্বারা সূচিত বিন্দুর সাহায্যে $z_1 + z_2$, $z_1 - z_2$ ও $\overline{z_2}$ দ্বারা সূচিত বিন্দুগুলির অবস্থান দেখাও।

ক. সমাধানঃ $4 - 4i = a + bi$ (ধরি), যেখানে $a = 4$, $b = -4$। এখানে, $b < 0$.

$\therefore$ নির্ণেয় বর্গমূল $= \pm\frac{1}{\sqrt{2}}\{(\sqrt{a^2+b^2}+a)^{\frac{1}{2}} - i(\sqrt{a^2+b^2}-a)^{\frac{1}{2}}\}$

$= \pm\frac{1}{\sqrt{2}}\{(\sqrt{4^2+(-4)^2}+4)^{\frac{1}{2}} - i(\sqrt{4^2+(-4)^2}-4)^{\frac{1}{2}}\}$

$= \pm\frac{1}{\sqrt{2}}\{(4\sqrt{2}+4)^{\frac{1}{2}} - i(4\sqrt{2}-4)^{\frac{1}{2}}\}$

$= \pm\frac{2}{\sqrt{2}}\{(\sqrt{2}+1)^{\frac{1}{2}} - i(\sqrt{2}-1)^{\frac{1}{2}}\}$

$= \pm\sqrt{2}\{(\sqrt{2}+1)^{\frac{1}{2}} - i(\sqrt{2}-1)^{\frac{1}{2}}\}$

খ. সমাধানঃ $z_1 = 4 - 4i$, $z_2 = 3 - 5i$

∴ $z_1z_2 = (4+4i)(3-5i)$

$= 12 - 20i + 12i - 20i^2$

$= 12 - 8i + 20$

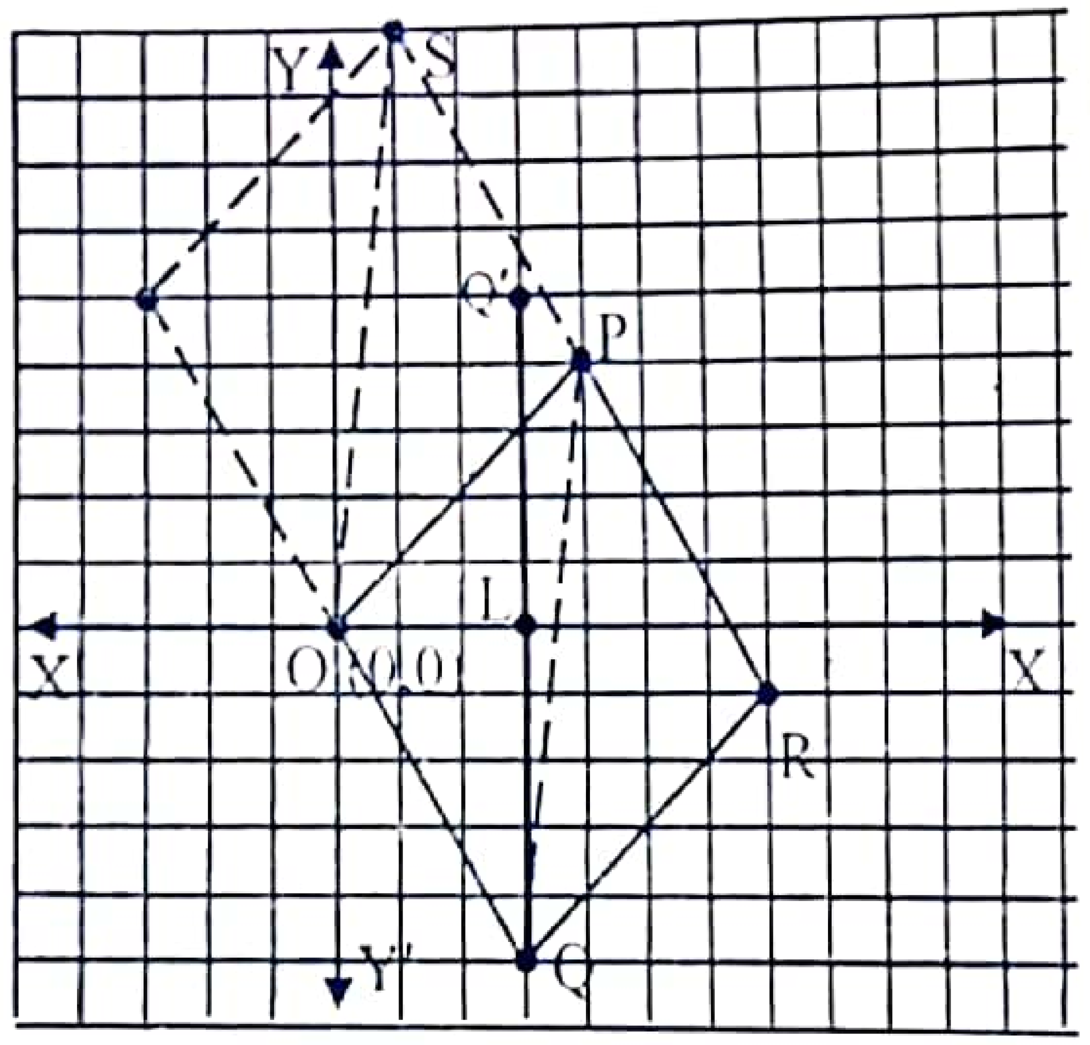
$= 32 - 8i$

∴ z_1z_2 এর আর্গুমেন্ট $= \tan^{-1}(\frac{-8}{32})$

$= -\tan^{-1}(\frac{8}{32})$

$= -\tan^{-1}(\frac{1}{4}) = -14.036^0$ (প্রায়)

গ. x অক্ষ (বাস্তব অক্ষ) ও y অক্ষ (কাল্পনিক অক্ষ) বরাবর ক্ষুদ্রতম বর্গের 1 বাহুর দৈর্ঘ্য = 1 একক ধরে $z_1 = 4+4i$ ও $z_2 = 3-5i$ দ্বারা সূচিত বিন্দু P(4,4) ও Q(3, −5) এর অবস্থান আর্গন্ড চিত্রে দেখানো হলো, যেখানে O(0, 0) মূলবিন্দু। OP ও OQ কে সন্নিহিত বাহু ধরে OPRQ সামান্তরিক এবং OQ ও QP কে সন্নিহিত বাহু ধরে OQPS সামান্তরিক অঙ্কন করি। Q হতে x-অক্ষের উপর অঙ্কিত লম্ব QL কে LQ′ পর্যন্ত বর্ধিত করি যেন QL = LQ′ হয়। তাহলে, R, S ও Q′ বিন্দুত্রয় যথাক্রমে z_1+z_2, z_1-z_2 ও $\overline{z_2}$ জটিল সংখ্যাত্রয় নির্দেশ করে।



আর্গন্ড চিত্র

28. $P = 7 - 24i$, $Q = 1 + i$, $z = x + iy$

ক. P এর বর্গমূল নির্ণয় কর।

খ. আর্গন্ড চিত্রে P ও Q দ্বারা সূচিত বিন্দুদ্বয়ের দূরত্ব নির্ণয় কর।

গ. $(z+1)(5-2i) = 7+3i$ হলে z নির্ণয় কর।

ক. সমাধান: $P = 7 - 24i = 16 - 9 - 24i$

$= 4^2 + (3i)^2 - 2.4.3i = (4-3i)^2$

∴ $7 - 24i$ এর বর্গমূল $= \pm\sqrt{(4-3i)^2}$

$= \pm(4-3i)$

খ. সমাধান: আর্গন্ড চিত্রে P ও Q দ্বারা সূচিত বিন্দুদ্বয়ের দূরত্ব = $|P - Q|$

এখন, $P - Q = 7 - 24i - (1+i)$

$= 7 - 24i - 1 - i$

$= 6 - 25i$

∴ নির্ণেয় দূরত্ব $= |P - Q| = |6 - 25i|$

$= \sqrt{6^2 + (-25)^2} = \sqrt{36 + 625}$

$= \sqrt{661}$

গ. সমাধান: $(z+1)(5-2i) = 7+3i$

$\Rightarrow (x+iy+1)(5-2i) = 7+3i$

$\Rightarrow \{(x+1)+iy\}(5-2i) = 7+3i$

$\Rightarrow 5(x+1) - 2yi^2 - 2(x+1)i + 5yi = 7+3i$

$\Rightarrow 5(x+1) + 2y - 2(x+1)i + 5yi = 7+3i$

বাস্তব ও কাল্পনিক অংশ সমীকৃত করে পাই,

$5(x+1) + 2y = 7$ …… (i)

$-2(x+1) + 5y = 3$ …… (ii)

$2\times$(i) + $5\times$(ii) $\Rightarrow 4y + 25y = 14 + 15$

$\Rightarrow 29y = 29 \Rightarrow y = 1$

(i) হতে, $5x + 5 + 2 = 7 \Rightarrow 5x = 0$

$\Rightarrow x = 0$

∴ $z = x + iy = 0 + i$

29. $z = 1 - i\sqrt{x^2-1}$, $z_1 = 1 - i$

ক. $|z + z_1|$ নির্ণয় কর।

খ. $y = \frac{\overline{z_1}}{\sqrt2}$ হলে দেখাও যে,

$y^6 + y^4 + y^2 + 1 = 0$

গ. $\sqrt{z} = M + iN$ হলে $|M - iN|$ নির্ণয় কর।

ক. সমাধান: $|z + z_1| = |1 - i\sqrt{x^2-1} + 1 - i|$

$= |2 - i(\sqrt{x^2-1} + 1)|$

$= \sqrt{2^2 + (\sqrt{x^2-1}+1)^2}$

$= \sqrt{4 + x^2 - 1 + 2\sqrt{x^2-1}.1 + 1}$

$= \sqrt{4 + x^2 + 2\sqrt{x^2-1}}$

খ. প্রমাণ: $z_1 = 1 - i$ ∴ $\overline{z_1} = 1 + i$

∴ $y = \frac{\overline{z_1}}{\sqrt2} = \frac{1+i}{\sqrt2}$

∴ $y^2 = \frac{(1+i)^2}{2} = \frac{1+2i+i^2}{2} = \frac{1+2i-1}{2}$

$= \frac{2i}{2} = i$

∴ $y^6 + y^4 + y^2 + 1 = (y^2)^3 + (y^2)^2 + y^2 + 1$

$= i^3 + i^2 + i + 1$

$= i^2.i + (-1) + i + 1$

$= (-1).i - 1 + i + 1$

$= -i + i = 0$

∴ $y^6 + y^4 + y^2 + 1 = 0$

গ. সমাধান: $z = 1 - i\sqrt{x^2-1}$

$= \frac{1}{2}\{2 - 2i\sqrt{(x+1)(x-1)}\}$

$= \frac{1}{2}\{(x+1) - (x-1) - 2i\sqrt{(x+1)(x-1)}\}$

$= \frac{1}{2}\{(\sqrt{x+1})^2 + (i\sqrt{x-1})^2 - 2.\sqrt{x+1}\,i\sqrt{x-1}\}$

$= \frac{1}{2}\{\sqrt{x+1} - i\sqrt{x-1}\}^2$

∴ $\sqrt{z} = \frac{1}{\sqrt2}(\sqrt{x+1} - i\sqrt{x-1}) = M + iN$

∴ $M - iN = \frac{1}{\sqrt2}(\sqrt{x+1} + i\sqrt{x-1})$

∴ $|M - iN| = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt2}\right)^2}$

$= \sqrt{\frac{x+1}{2} + \frac{x-1}{2}}$

$= \sqrt{\frac{x+1+x-1}{2}} = \sqrt{\frac{2x}{2}} = \sqrt{x}$

30. $z = 3 + 4i$

ক. প্রমাণ কর যে,

$(1 - \omega + \omega^2)^2 + (1 + \omega - \omega^2)^2 = -4$

খ. $x = \frac{\overline{z}}{\sqrt2}$ হলে দেখাও যে,

$4x^4 + 28x^2 + 625 = 0$

গ. দেখাও যে, $|\sqrt{z} + \frac{1}{\sqrt{z}}| = 4\sqrt{\frac{2}{5}}$

ক. প্রমাণ:

L.H.S $= (1 - \omega + \omega^2)^2 + (1 + \omega - \omega^2)^2$

$= (-\omega - \omega)^2 + (-\omega^2 - \omega^2)^2$

$[\because 1 + \omega + \omega^2 = 0]$

$= (-2\omega)^2 + (-2\omega^2)^2 = 4(\omega^2 + \omega^4)$

$= 4(\omega^2 + \omega) = 4(-1) = -4$ = R.H.S.

খ. $z = 3 + 4i$ ∴ $\overline{z} = 3 - 4i$

এখন, $x = \frac{\overline{z}}{\sqrt2} = \frac{3-4i}{\sqrt2}$

$\Rightarrow x^2 = \frac{3^2 - 2.3.4i + (4i)^2}{(\sqrt2)^2}$

$= \frac{9 - 24i - 16}{2} = \frac{-24i - 7}{2}$

$\Rightarrow 2x^2 + 7 = -24i$

$\Rightarrow (2x^2+7)^2 = (-24i)^2$

$\Rightarrow (2x^2)^2 + 2.2x^2.7 + 7^2 = -576$

$\Rightarrow 4x^4 + 28x^2 + 49 + 576 = 0$

$\Rightarrow 4x^4 + 28x^2 + 625 = 0$

গ. প্রমাণ : $z = 3 + 4i = 4 - 1 + 4i$

$= 2^2 + i^2 + 2.2.i = (2+i)^2$

$\therefore \sqrt{z} = 2 + i$ এবং

$\frac{1}{\sqrt{z}} = \frac{1}{2+i} = \frac{2-i}{(2+i)(2-i)} = \frac{2-i}{4-i^2}$

$= \frac{2-i}{4+1} = \frac{2-i}{5}$

$\therefore \sqrt{z} + \frac{1}{\sqrt{z}} = 2 + i + \frac{2-i}{5}$

$= \frac{10+5i+2-i}{5} = \frac{12+4i}{5}$

$\therefore |\sqrt{z} + \frac{1}{\sqrt{z}}| = |\frac{12}{5} + \frac{4}{5}i|$

$= \sqrt{(\frac{12}{5})^2 + (\frac{4}{5})^2} = \sqrt{\frac{144}{25} + \frac{16}{25}}$

$= \sqrt{\frac{144+16}{25}} = \sqrt{\frac{160}{25}} = \sqrt{\frac{32}{5}}$

$= 4\sqrt{\frac{2}{5}}$

31. $z = (3+4i)^{\frac{1}{2}} \dots\dots (i)$, $\sqrt[3]{a+ib} = x + iy \cdots (ii)$

ক. $\sqrt[3]{-1}$ এর মান নির্ণয় কর।

খ. দেখাও যে, $\frac{1}{z} + \frac{1}{\bar{z}} = \frac{4}{5}$

গ. (ii) হতে দেখাও যে, $-2(x^2 + y^2) = \frac{a}{x} - \frac{b}{y}$

ক. সমাধান: $x = \sqrt[3]{-1} \Rightarrow x^3 = -1$

$\Rightarrow x^3 + 1 = 0 \Rightarrow (x+1)(x^2 - x + 1) = 0$

$x + 1 = 0$ হলে, $x = -1$

$x^2 - x + 1 = 0$ হলে,

$x = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4.1.1}}{2.1}$

$= \frac{1 \pm \sqrt{1-4}}{2} = \frac{1+\sqrt{-3}}{2}, \frac{1-\sqrt{-3}}{2}$

$\therefore \sqrt{-1} = 1, \frac{1}{2}(1 + \sqrt{-3}), \frac{1}{2}(1 - \sqrt{-3})$.

খ. $z = (3+4i)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{4-1+4i}$

$= \sqrt{2^2 + i^2 + 2.2.i} = \sqrt{(2+i)^2}$

$= 2 + i$

$\therefore \frac{1}{z} = \frac{1}{2+i} = \frac{2-i}{(2+i)(2-i)} = \frac{2-i}{4+1}$

$= \frac{2-i}{5}$

$\therefore \frac{1}{\bar{z}} = \frac{2+i}{5}$

এখন, $\frac{1}{z} + \frac{1}{\bar{z}} = \frac{2-i}{5} + \frac{2+i}{5} = \frac{2-i+2+i}{5}$

$\therefore \frac{1}{z} + \frac{1}{\bar{z}} = \frac{4}{5}$ (Showed)

গ. প্রমাণ : দেওয়া আছে, $\sqrt[3]{a+ib} = x + iy$

$\therefore a + ib = x^3 + 3.x^2.iy + 3.x.(iy)^2 + (iy)^3$

$= x^3 + 3x^2yi - 3xy^2 - iy^3$

উভয় পক্ষ হতে বাস্তব ও কাল্পনিক অংশ সমীকৃত করে পাই, $a = x^3 - 3xy^2$, $b = 3x^2y - y^3$

এখন, $\frac{a}{x} - \frac{b}{y} = \frac{x^3 - 3xy^2}{x} - \frac{3x^2y - y^3}{y}$

$= x^2 - 3y^2 - 3x^2 + y^2$

$= -2x^2 - 2y^2$

$\therefore -2(x^2 + y^2) = \frac{a}{x} - \frac{b}{y}$ (Showed)

32. $a = \sqrt[4]{-4}$, $b = \sqrt[3]{1}$

ক. i এর বর্গমূল নির্ণয় কর।

খ. দেখাও যে, b এর মান তিনটির সমষ্টি শূন্য।

গ. আর্গন্ড চিত্রে a এর মান চারটি দ্বারা সূচিত বিন্দু চারটি যে চতুর্ভুজ গঠন করে তার কর্ণের দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

ক. সমাধান: $i = \frac{1}{2}.2i = \frac{1}{2}(1 - 1 + 2i)$

$= \frac{1}{2}(1^2 + i^2 + 2.1.i) = \frac{1}{2}(1+i)^2$

$\therefore$ i এর বর্গমূল $= \pm\frac{1}{\sqrt{2}}(1+i)$

খ. প্রমাণ : $b = \sqrt[3]{1} \Rightarrow b^3 = 1$

$\Rightarrow b^3 - 1 = 0$

$\Rightarrow (b-1)(b^2 + b + 1) = 0$

$\therefore b - 1 = 0$ হলে, $b = 1$

$b^2 + b + 1 = 0$ হলে,

$b = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4.1}}{2.1} = \frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2}$

$\therefore$ b এর মান তিনটি $1, \frac{1}{2}(-1+\sqrt{-3})$ ও $\frac{1}{2}(-1-\sqrt{-3})$.

b এর মান তিনটির সমষ্টি $= 1 + \frac{1}{2}(-1+\sqrt{-3}) + \frac{1}{2}(-1-\sqrt{-3})$

$= 1 + \frac{1}{2}(-1 + \sqrt{-3} - 1 - \sqrt{-3})$

$= 1 + \frac{1}{2}(-2) = 1 - 1 = 0$

$\therefore$ b এর মান তিনটির সমষ্টি $= 0$.

গ. সমাধান : মনে করি, $a = \sqrt[4]{-4}$

$\Rightarrow a^4 = -4 = 4i^2$

$\Rightarrow (a^2)^2 = (2i)^2$

$\therefore a^2 = \pm 2i = (1^2 + i^2 \pm 2.1.i)$

$= (1 \pm i)^2$

$\therefore a = \pm(1 \pm i)$.

$\therefore$ আর্গন্ড চিত্রে a এর মান চারটি $1+i$, $1-i$, $-1-i$ ও $-1+i$ দ্বারা সূচিত বিন্দু চারটি $A(1, 1)$, $B(1, -1)$, $C(-1, -1)$ ও $D(-1, 1)$ একটি বর্গক্ষেত্র উৎপন্ন করে যার কর্ণের দৈর্ঘ্য $= AC = \sqrt{(1+1)^2 + (1+1)^2}$

$= \sqrt{4+4} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$ একক।

33. এককের একটি জটিল ঘনমূল $z = \frac{1}{2}(-1 + \sqrt{3}i)$

ক. $|\bar{z}|$ নির্ণয় কর।

খ. $|1+z| : |1-z|$ নির্ণয় কর।

গ. প্রমাণ কর যে, $z^4 + \frac{1}{z^4} + \frac{z^{-1}}{z} = 0$

ক. সমাধান: $z = \frac{1}{2}(-1 + \sqrt{3}i) = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$

$\therefore |z| = |-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i|$

$= \sqrt{(-\frac{1}{2})^2 + (\frac{\sqrt{3}}{2})^2}$

$= \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}} = \sqrt{\frac{4}{4}} = 1$ (Ans.)

খ. $1 + z = 1 + \frac{-1+\sqrt{3}i}{2} = \frac{2-1+\sqrt{3}i}{2}$

$= \frac{1+\sqrt{3}i}{2} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$

$|1+z| = |\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i|$

$= \sqrt{(\frac{1}{2})^2 + (\frac{\sqrt{3}}{2})^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}}$

$= \sqrt{\frac{4}{4}} = 1$

$$1-z = 1-\frac{-1+\sqrt{3}i}{2} = \frac{2+1-\sqrt{3}i}{2}$$

$$= \frac{3-\sqrt{3}i}{2} = \frac{3}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$$

$$\therefore \quad |1-z| = \sqrt{(\frac{3}{2})^2+(\frac{\sqrt{3}}{2})^2} = \sqrt{\frac{9}{4}+\frac{3}{4}}$$

$$= \sqrt{\frac{9+3}{4}} = \sqrt{\frac{12}{4}} = \sqrt{3}$$

$$\therefore \quad |1+z| : |1-z| = 1 : \sqrt{3}$$

প্রমাণ: $z = \frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$

$\therefore \quad \bar{z} = \frac{-1-\sqrt{3}i}{2} \Rightarrow \frac{1}{\bar{z}} = \frac{2}{-1-\sqrt{3}i}$ এবং

$$z^{-1} = \frac{1}{z} = \frac{2}{-1+\sqrt{3}i}$$

$$= \frac{2(-1-\sqrt{3}i)}{(-1+\sqrt{3}i)(-1-\sqrt{3}i)}$$

$$= \frac{2(-1-\sqrt{3}i)}{(-1)^2-(\sqrt{3}i)^2} = \frac{2(-1+\sqrt{3}i)}{1+3}$$

$$= \frac{2(-1-\sqrt{3}i)}{4} = \frac{-1-\sqrt{3}i}{2}$$

$$\text{L.H.S.} = z^4+\frac{1}{z^4}+\frac{z^{-1}}{\bar{z}}$$

$$= z+\frac{1}{z}+\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}\times\frac{2}{-1-\sqrt{3}i}$$

[∵ এককের একটি জটিল ঘনমূল z ∴ $z^3 = 1$]

$$= \frac{-1+\sqrt{3}i}{2}+\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}+1$$

$$= \frac{-1+\sqrt{3}i-1-\sqrt{3}i}{2}+1$$

$$= \frac{-2}{2}+1 = -1+1 = 0 = \text{R. H. S.}$$

(Proved)

34. $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$

ক. দেখাও যে, $\left|\frac{x-iy}{x+iy}\right| = 1$

খ. $|z| = 1,\ \theta = -\frac{\pi}{4}$ হলে $z^6+z^4+z^2+1$ এর মান নির্ণয় কর।

গ. $|z| = 2, \theta = \frac{2\pi}{3}$ হলে z ও $\bar{z}$ এর মধ্যবর্তী কোণ নির্ণয় কর।

ক. প্রমাণ : $\left|\frac{x-iy}{x+iy}\right| = \frac{|x-iy|}{|x+iy|} = \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}}$

$\therefore \quad \left|\frac{x-iy}{x+iy}\right| = 1$ (Showed)

খ. সমাধান: দেওয়া আছে, $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$,

$|z| = 1$ এবং $\theta = -\frac{\pi}{4}$

$\therefore \quad r = |z| = 1$ এবং

$$z = 1\{\cos(-\frac{\pi}{4}) + i\sin(-\frac{\pi}{4})\}$$

$$= (\cos\frac{\pi}{4} - i\sin\frac{\pi}{4})$$

$$= (\frac{1}{\sqrt{2}} - i\frac{1}{\sqrt{2}}) = \frac{1}{\sqrt{2}}(1-i)$$

$$\therefore \quad z^2 = \frac{1}{2}(1-2i+i^2) = \frac{1}{2}(1-2i-1)$$

$$= \frac{1}{2}(-2i) = -i$$

$\therefore \quad z^6+z^4+z^2+1 = (z^2)^3+(z^2)^2+z^2+1$

$$= (-i)^3+(-i)^2+(-i)+1$$

$$= -i^3+i^2-i+1$$

$$= -(-i)-1-i+1 = i-i$$

$$\therefore \quad z^6+z^4+z^2+1 = 0$$

গ. সমাধান: $z = 2(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3})$

$$= 2\{\cos(\pi-\frac{\pi}{3}) + i\sin(\pi-\frac{\pi}{3})\}$$

$$= 2\{-\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\}$$

$$= 2(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}) = -1+\sqrt{3}i$$

$$\therefore \quad \bar{z} = -1-\sqrt{3}i$$

$$\therefore \quad \arg(z) = \tan^{-1}(\frac{\sqrt{3}}{-1}) = \pi - \tan^{-1}\sqrt{3}$$

$$= \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$$

এবং $\arg(\bar{z}) = \tan^{-1}(\frac{-\sqrt{3}}{-1}) = -\tan^{-1}\sqrt{3}$

$$= -\frac{\pi}{3}$$

এখন, $|\arg(z) - \arg(\bar{z})| = |\frac{2\pi}{3} - (-\frac{\pi}{3})|$

$$= |\frac{2\pi}{3} + \frac{\pi}{3}| = \pi$$

∴ z ও $\bar{z}$ এর মধ্যবর্তী কোণ π।

[বি.দ্র.: $|\arg(z) - \arg(\bar{z})| > \pi$ হলে নির্ণেয় মধ্যবর্তী কোণ হবে, $2\pi - |\arg(z) - \arg(\bar{z})|$]

35. এককের একটি জটিল ঘনমূল $\omega = \frac{1}{2}(-1+\sqrt{3}i)$ এবং $\ln(1-x+x^2) = a_1x+a_2x^2+a_3x^3+a_4x^4+\cdots\cdots$

ক. ω এর বর্গমূল নির্ণয় কর।

খ. আর্গন্ড চিত্রে $\sqrt[4]{\omega+\omega^2}$ এর যে মানটি তৃতীয় চতুর্ভাগে অবস্থিত তার আর্গুমেন্ট নির্ণয় কর।

গ. প্রমাণ কর যে, $a_3+a_6+a_9+\cdots = \frac{2}{3}\ln 2$

ক. সমাধান: $\omega = \frac{1}{2}(-1+\sqrt{3}i)$

$$= \frac{1}{4}(-2+2\sqrt{3}i) = \frac{1}{4}(-3+1+2\sqrt{3}i)$$

$$= \frac{1}{4}\{(\sqrt{3}i)^2+1^2+2.\sqrt{3}i.1\}$$

$$= \frac{1}{4}(\sqrt{3}i+1)^2$$

∴ ω এর বর্গমূল $= \pm\frac{1}{2}(1+\sqrt{3}i)$

খ. $\sqrt[4]{\omega+\omega^2} = \sqrt[4]{-1}$, [∵ $\omega+\omega^2+1 = 0$]

মনে করি, $x = \sqrt[4]{-1} \Rightarrow x^4 = -1 = i^2$

$$\Rightarrow (x^2)^2 = i^2 \Rightarrow x^2 = \pm i = \frac{1}{2}(\pm 2i)$$

$$= \frac{1}{2}(1^2+i^2\pm 2i) = \frac{1}{2}(1\pm i)^2$$

$$\therefore \quad x = \sqrt[4]{\omega+\omega^2} = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}(1\pm i)$$

মান চারটির মধ্যে $\frac{1}{\sqrt{2}}(-1-i)$ মানটি আর্গন্ড চিত্রে তৃতীয় চতুর্ভাগে অবস্থিত।

∴ $\frac{1}{\sqrt{2}}(-1-i) = -\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}}i$ এর আর্গুমেন্ট

$$= \tan^{-1}\frac{-1/\sqrt{2}}{-1/\sqrt{2}} = -\pi+\tan^{-1}1$$

$$= -\pi+\frac{\pi}{4} = -\frac{3\pi}{4}$$

গ. প্রমাণ : $\ln(1-x+x^2) = a_1x+a_2x^2+\cdots\cdots+a_{2n}x^{2n}$ -------- (1)

(1) -এ $x = 1$ বসিয়ে আমরা পাই,

$\ln(1-1+1) = a_1+a_2+a_3+\cdots$

$\Rightarrow \ln 1 = a_1+a_2+a_3+\cdots\cdots$

$\Rightarrow 0 = a_1+a_2+a_3+$ ------ (2)

(1) -এ $x = \omega$ বসিয়ে আমরা পাই,

$\ln(1-\omega+\omega^2) = a_1\omega + a_2\omega^2 + a_3\omega^3 + a_4\omega^4 + a_5\omega^5 + a_6\omega^6 + \cdots\cdots$

$\Rightarrow \ln(1+\omega+\omega^2-2\omega) = a_0 + a_1\omega + a_2\omega^2 + a_3 + a_4\omega + a_5\omega^2 + a_6 + \cdots\cdots$

$\Rightarrow \ln(-2\omega) = a_1\omega + a_2\omega^2 + a_3 + a_4\omega + a_5\omega^2 + a_6 + \cdots\cdots$ ----- (3)

(1) -এ $x=\omega^2$ বসিয়ে আমরা পাই,

$\ln(1-\omega^2+\omega^4) = a_1\omega^2 + a_2\omega^4 + a_3\omega^6 + a_4\omega^8 + a_5\omega^{10} + a_6\omega^{12} + \cdots\cdots$

$\Rightarrow \ln(1+\omega+\omega^2-2\omega^2) = a_1\omega^2 + a_2\omega + a_3 + a_4\omega^2 + a_5\omega + a_6 + \cdots\cdots$

$\Rightarrow \ln(-2\omega^2) = a_1\omega^2 + a_2\omega + a_3 + a_4\omega^2 + a_5\omega + a_6 + \cdots\cdots$ ------- (4)

(2), (3) এবং (4) যোগ করে পাই,

$\ln(-2\omega) + \ln(-2\omega^2) = 3(a_3+a_6+a_9+\cdots) + (a_1+a_2+a_4+a_5\cdots\cdots)(1+\omega+\omega^2)$

$\Rightarrow \ln(-2\omega)(-2\omega^2) = 3(a_3+a_6+a_9+\cdots) + (a_1+a_2+a_4+a_5\cdots\cdots)\times 0$

$\Rightarrow \ln(4\omega^3) = 3(a_3+a_6+a_9+\cdots\cdots)$

$\Rightarrow \ln(2^2\times 1) = 3(a_3+a_6+a_9+\cdots\cdots)$

$\Rightarrow 2\ln 2 = 3(a_3+a_6+a_9+\cdots\cdots)$

$\therefore a_3+a_6+a_9+\cdots\cdots = \frac{2}{3}\ln 2$

(Showed)

36. $z = 3x+2y$, সীমাবদ্ধতা : $x+2y\ge 4$, $2x+y\ge 8$, $x\ge 0$, $y\ge 0$.

ক. $x=1$ হলে $|z|<5$ হতে y–এর সীমা নির্ণয় কর।

সমাধান: $x=1$ হলে, $z=3.1+2y=3+2y$

$\therefore |z|<5 \Rightarrow |3+2y|<5$

$\Rightarrow -5<3+2y<5$

$\Rightarrow -5-3<3+2y-3<5-3$

$\Rightarrow -8<2y<2 \Rightarrow -4<y<1$ (Ans.)

খ. যোগাশ্রয়ী প্রোগ্রামটি লিখচিত্রের সাহায্যে সমাধান করে z এর সর্বনিম্ন মান নির্ণয় কর।

সমাধান: প্রশ্নমালা II এর 3(b) দ্রষ্টব্য।

গ. $x=1$, $y=2\sqrt{-1}$ হলে z এর বর্গমূল দুইটির দূরত্ব নির্ণয় কর।

সমাধান: $x=1$, $y=2\sqrt{-1}$ হলে,

$z=3.1+2.2\sqrt{-1} = 3+4\sqrt{i^2}$

$=3+4i = 4-1+4i \Rightarrow 2^2+i^2+2.2.i$

$=(2+i)^2$

$\therefore$ z এর বর্গমূল দুইটি (ধরি) $z_1=2+i$,

$z_2=-2-i$

$\therefore$ z এর বর্গমূল দুইটির দূরত্ব $=|z_1-z_2|$

$=|2+i-(-2-i)|$

$=|2+i+2+i| = |4+2i|$

$=\sqrt{4^2+2^2} = \sqrt{16+4} = \sqrt{20} = 2\sqrt5$

37. $f(x)=\begin{cases}\sqrt{-3+\sqrt{-3+\sqrt{-3+}}}, & \text{যখন } |x-5|<4 \\ \sqrt3+i, & \text{যখন } |x-5|\nless 4\end{cases}$

ক. x এর কোন ব্যবধিতে উদ্দীপকে উল্লেখিত f(x) ফাংশনের মান $\sqrt3+i$ হবে।

সমাধান: $f(x)=\sqrt3+i$ হবে যদি $|x-5|\nless 4$ হয়। অর্থাৎ, $|x-5|\ge 4 \cdots$ (i)

$x-5\ge 0$ হলে (i) হতে পাই, $x-5\ge 4$

$\Rightarrow x\ge 9$

$x-5<0$ হলে (i) হতে পাই, $-(x-5)\ge 4$

$\Rightarrow x-5\le -4 \Rightarrow x\le 1$

$\therefore$ নির্ণেয় ব্যবধি, $x\le 1$ অথবা $x\ge 9$.

খ. উদ্দীপকের আলোকে $|x-5|\nless 4$ হলে, f(x) ও এর অনুবন্ধী জটিল সংখ্যার মধ্যবর্তী কোণ নির্ণয় কর।

সমাধান: $|x-5|\nless 4$ হলে,

$f(x)=\sqrt3+i=z$ (ধরি)

$\therefore$ f(x) এর অনুবন্ধী জটিল সংখ্যা, $\bar z=\sqrt3-i$

$\therefore \arg(z)=\tan^{-1}(\frac{1}{\sqrt3})=\frac{\pi}{6}$

এবং $\arg(\bar z)=\tan^{-1}(\frac{-1}{\sqrt3}) = -\tan^{-1}\frac{1}{\sqrt3}$

$=-\frac{\pi}{6}$

এখন, $|\arg(z)-\arg(\bar z)| = |\frac{\pi}{6}-(-\frac{\pi}{6})|$

$=|\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{6}| = 2.\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{3}$.

$\therefore$ f(x) ও এর অনুবন্ধী জটিল সংখ্যার মধ্যবর্তী কোণ $\frac{\pi}{3}$.

গ. $1<x<9$ হলে f(x) এর মডুলাস নির্ণয় কর।

সমাধান: $1<x<9$

সকল পক্ষে $-\frac{1+9}{2}=-5$ যোগ করে পাই,

$1-5<x-5<9-5 \Rightarrow -4<x-5<4$

$\Rightarrow |x-5|<4$.

$\therefore 1<x<9 \Rightarrow |x-5|<4$ হলে

$f(x)=\sqrt{-3+\sqrt{-3+\sqrt{-3+}}} = y$ (ধরি)

$\Rightarrow y=\sqrt{-3+\sqrt{-3+\sqrt{-3+\sqrt{-3\cdots\infty}}}}$

$\Rightarrow y=\sqrt{-3+y}$

$\Rightarrow y^2=-3+y$ [উভয় পক্ষকে বর্গ করে।]

$\Rightarrow y^2-y+3=0$

$\Rightarrow y=\frac{-(-1)\pm\sqrt{(-1)^2-4.1.3}}{2.1}$

$=\frac{1\pm\sqrt{1-12}}{2}=\frac{1}{2}(1\pm\sqrt{-11})$

$\therefore y=f(x)=\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{11}}{2}i$ এর মডুলাস

$=|f(x)|=|\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{11}}{2}i|$

$=\sqrt{(\frac{1}{2})^2+(\frac{\sqrt{11}}{2})^2}=\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{11}{4}}$

$=\sqrt{\frac{1+11}{4}}=\sqrt{\frac{12}{4}}=\sqrt3$ (Ans.)

38. (i) $|a+b|\le|a|+|b|$,

(ii) $x+iy=\frac{2}{3+\cos\theta+i\sin\theta}$

(বাস্তব সংখ্যা ও অসমতা + জটিল সংখ্যা)

ক. যথাযথ কারণ উল্লেখ করে $||7-12|-|3-5||$ এর মান নির্ণয় কর।

খ. (i) এর সাহায্যে প্রমাণ কর যে,
$|a-b|\ge||a|-|b||$

গ. (ii) এর সাহায্যে প্রমাণ কর যে,
$2(x^2+y^2)=3x-1$

ক. প্রমাণ: $||7-12|-|3-5||$

$=||-5|-|-2||$

$=|-(-5)-(-(-2))|$ ১

[$\because -2<0$ এবং $-5<0$]

$=|5-2|=|3|=(3)$ [$\because 3>0$]

$=3$ (Ans.) ১

খ. প্রমাণ: $|a+b|\le|a|+|b|\cdots\cdots$(i)

$|a|=|(a-b)+b|\le|a-b|+|b|$ ১

[(i) নং দ্বারা]

$\Rightarrow |a|-|b|\le|a-b|\cdots\cdots$ (ii) ১

$\therefore |b|-|a|\le|b-a|=|a-b|$

$\Rightarrow -(|b|-|a|)\ge-|a-b|$ ১

$\Rightarrow -|a-b|\le|a|-|b|\cdots\cdots$ (iii)

(ii) এবং (iii) হতে আমরা পাই,

$-|a-b|\le|a|-|b|\le|a-b|$

$\therefore |a-b|\ge||a|-|b||$ (Proved) ১

গ. প্রমাণ : দেওয়া আছে,

$$x+iy=\frac{2}{3+\cos\theta+i\sin\theta}$$

$$=\frac{2(3+\cos\theta-i\sin\theta)}{\{(3+\cos\theta)+i\sin\theta\}\{(3+\cos\theta)-i\sin\theta\}}$$

$$=\frac{2(3+\cos\theta)-2i\sin\theta}{(3+\cos\theta)^2-i^2\sin^2\theta}$$

$$=\frac{2(3+\cos\theta)-2i\sin\theta}{9+6\cos\theta+\cos^2\theta+\sin^2\theta}$$ ১

$$\Rightarrow x+iy=\frac{2(3+\cos\theta)}{2(5+3\cos\theta)}+\frac{-2i\sin\theta}{2(5+3\cos\theta)}$$

$$\therefore x=\frac{3+\cos\theta}{5+3\cos\theta},\ y=\frac{-\sin\theta}{5+3\cos\theta}$$ ১

L.H.S. $=x^2+y^2$

$$=\frac{9+6\cos\theta+\cos^2\theta}{(5+3\cos\theta)^2}+\frac{\sin^2\theta}{(5+3\cos\theta)^2}$$

$$=\frac{9+6\cos\theta+\cos^2\theta+\sin^2\theta}{(5+3\cos\theta)^2}$$

$$=\frac{2(5+3\cos\theta)}{(5+3\cos\theta)^2}=\frac{2}{5+3\cos\theta}$$

$$\therefore 2(x^2+y^2)=\frac{4}{5+3\cos\theta}$$ ১

R.H.S. $=3x-1=3\times\frac{3+\cos\theta}{5+3\cos\theta}-1$

$$=\frac{9+3\cos\theta}{5+3\cos\theta}-1$$

$$=\frac{9+3\cos\theta-5-3\cos\theta}{5+3\cos\theta}=\frac{4}{5+3\cos\theta}$$

∴ L.H.S. = R.H.S. (Proved) ১

39. $a, b, c \in \mathbb{R}$; $a<b$, $d=a-c$

$\sqrt[3]{a+ib}=x+iy$ এবং $P=\frac{a+bk}{1+k}$

(বাস্তব সংখ্যা ও অসমতা + জটিল সংখ্যা)

ক. প্রমাণ কর যে, $|d|\le|a-b|+|b-c|$

খ. দেখাও যে, $4(x^2-y^2)=\frac{a}{x}+\frac{b}{y}$

গ. k ধনাত্মক মূলদ সংখ্যা হলে প্রমাণ কর যে, $a<P<b$

ক. প্রমাণ : আমরা জানি,

$|a+b|\le|a|+|b|$ ………(i)

$|d|=|a-c|$

$=|(a-b)+(b-c)|\le|a-b|+|b-c|$ ১

∴ $|d|\le|a-b|+|b-c|$ (Proved) ১

খ. প্রমাণ : দেওয়া আছে, $\sqrt[3]{a+ib}=x+iy$

⇒ $(\sqrt[3]{a+ib})^3=(x+iy)^3$

⇒ $a+ib=x^3+3x^2.(iy)+3x.(iy)^2+(iy)^3$ ১

$=x^3+3ix^2y-3xy^2-iy^3$ ১

⇒ $a+ib=x^3-3xy^2+i(3x^2y-y^3)$

বাস্তব ও কাল্পনিক অংশ সমীকৃত করে পাই,

$a=x^3-3xy^2 \Rightarrow \frac{a}{x}=x^2-3y^2$ এবং

$b=3x^2y-y^3 \Rightarrow \frac{b}{y}=3x^2-y^2$ ১

এখন, $\frac{a}{x}+\frac{b}{y}=x^2-3y^2+3x^2-y^2$

$=4(x^2-y^2)$

∴ $4(x^2-y^2)=\frac{a}{x}+\frac{b}{y}$ (Showed) ১

গ. প্রমাণঃ দেওয়া আছে, $a<b$

∴ $ak<bk$, [∵ k ধনাত্মক সংখ্যা] ১

⇒ $a+ak<a+bk$ [উভয় পক্ষে a যোগ করে।] ১

⇒ $a(1+k)<a+bk$

⇒ $a<\frac{a+bk}{1+k}$ ···(1) [উভয় পক্ষকে $1+k>0$ দ্বারা ভাগ করে] ১

আবার, $ak<bk$

⇒ $ak+b<bk+b$ [উভয় পক্ষে b যোগ করে।]

⇒ $ak+b<b(k+1)$

⇒ $\frac{a+bk}{1+k}<b$ ···(2) [উভয় পক্ষকে $1+k>0$ দ্বারা ভাগ করে]

(1) ও (2) হতে পাই, $a<\frac{a+bk}{1+k}<b$

∴ $a<P<b$ ১

40. $a=\sqrt5$ এবং $b=\sqrt[4]{-144}$

(বাস্তব সংখ্যা ও অসমতা + জটিল সংখ্যা)

ক. $2\le x\le 8$ অসমতাটি পরমমান চিহ্নের সাহায্যে প্রকাশ কর।

খ. b এর মান চারটি নির্ণয় কর।

গ. প্রমাণ কর যে, a একটি অমূলদ সংখ্যা

ক. সমাধান: $2\le x\le 8$

সকল পক্ষে $-\frac{2+8}{2}=-5$ যোগ করে পাই, ১

$2-5\le x-5\le 8-5$

⇒ $-3\le x-5\le 3 \Rightarrow |x-5|\le 3$ ১

খ. মনে করি, $x=\sqrt[4]{-144}$

⇒ $x^4=-144=144i^2$ ১

⇒ $(x^2)^2=(12i)^2$ ∴ $x^2=\pm12i$ ১

⇒ $x^2=6(\pm2i)$

$=6(1^2+i^2\pm2.1.i)=6(1\pm i)^2$ ১

∴ $x=\pm\sqrt6(1\pm i)$.

সুতরাং, $\sqrt[4]{-144}=\pm\sqrt6(1\pm i)$ ১

গ. প্রমাণ : $2^2=4$, $(\sqrt5)^2=5$, $3^2=9$

∴ $2<\sqrt5<3$

∴ $\sqrt5$ পূর্ণ (স্বাভাবিক) সংখ্যা নয়। ১

[∵ 2 এবং 3 এর মধ্যে কোন স্বাভাবিক সংখ্যা নেই।]

যদি সম্ভব হয় তবে মনে করি, $\sqrt5$ একটি মূলদ সংখ্যা অর্থাৎ মূলদ ভগ্নাংশ এবং

$\sqrt5=\frac{p}{q}$; যেখানে $p, q\in\mathbb{N}$ এবং p . q সহমৌলিক। ১

[$\sqrt5$ ধনাত্মক সংখ্যা বলে $p, q\in\mathbb{Z}$ কে $p, q\in\mathbb{N}$ লিখা যায়]

বা, $5=\frac{p^2}{q^2}$ [উভয় পক্ষকে বর্গ করে।]

বা, $5q=\frac{p}{q}\cdot p$

[উভয় পক্ষকে q ($q\ne0$) দ্বারা ভাগ করে।]

স্পষ্টত 5 এবং q স্বাভাবিক (পূর্ণ) সংখ্যা বলে তাদের গুণফল 5q পূর্ণ সংখ্যা। কিন্তু $\frac{p}{q}$ ভগ্নাংশ এবং p পূর্ণ সংখ্যা বলে তাদের গুণফল $\frac{p}{q}\cdot p$ একটি ভগ্নাংশ, অর্থাৎ পূর্ণ সংখ্যা নয়; কেননা p, q সহমৌলিক। আর একটি পূর্ণ সংখ্যা একটি প্রকৃত ভগ্নাংশের সমান হতে পারেনা।

∴ $5q\ne\frac{p}{q}\cdot p$ ১

∴ $\sqrt5$ এর মান $\frac{p}{q}$ আকারের কোনো সংখ্যা হতে পারেনা

∴ $\sqrt5$ একটি মূলদ সংখ্যা। (প্রমানিত) ১

41. $z=x+iy$, $z_1=\sqrt3+i$, $z_2=\sqrt3-i$

(জটিল সংখ্যা + বহুপদী সমীকরণ)

ক. $13x^2-28xy+17y^2=0$ হলে, $x:y$ কত?

খ. প্রমাণ কর যে, $|z_1|+|z_2|>|z_1+z_2|$

গ. $\arg(z+1)=\frac{\pi}{6}$, $\arg(z-1)=\frac{2\pi}{3}$ হলে z নির্ণয় কর।

ক. সমাধান: $13x^2 - 28xy + 17y^2 = 0$

$$\Rightarrow x = \frac{28y \pm \sqrt{784y^2 - 4.13.17y^2}}{2.13}$$

$$= \frac{28 \pm \sqrt{784-884}}{26}y$$

$$= \frac{28 \pm \sqrt{-100}}{26}y = \frac{28 \pm \sqrt{(10i)^2}}{26}y$$

$$= \frac{28 \pm 10i}{26}y = \frac{14 \pm 5i}{13}y$$

∴ $x : y = 14 \pm 5i : 13$

খ. দেওয়া আছে, $z_1 = \sqrt{3} + i$, $z_2 = \sqrt{3} - i$

∴ $|z_1| = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + 1^2} = \sqrt{3+1} = 2$ এবং

$|z_2| = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + (-1)^2} = \sqrt{3+1} = 2$

∴ $|z_1| + |z_2| = 2 + 2 = 4$

এখন, $z_1 + z_2 = \sqrt{3} + i + \sqrt{3} - i = 2\sqrt{3} + 0i$

∴ $|z_1 + z_2| = \sqrt{(2\sqrt{3})^2 + 0^2} = 2\sqrt{3}$

∴ $|z_1| + |z_2| > |z_1 + z_2|$, [∵ $4 > 2\sqrt{3}$]

গ. সমাধান: $\arg(z+1) = \frac{\pi}{6}$

$\Rightarrow \arg(x + iy + 1) = \frac{\pi}{6}$

$\Rightarrow \arg\{(x+1) + iy\} = \frac{\pi}{6}$

$\Rightarrow \tan^{-1}\frac{y}{x+1} = \frac{\pi}{6} \Rightarrow \frac{y}{x+1} = \tan\frac{\pi}{6}$

$\Rightarrow \frac{y}{x+1} = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow y = \frac{x+1}{\sqrt{3}} \cdots$ (i)

আবার, $\arg(z-1) = \frac{2\pi}{3}$

$\Rightarrow \arg(x + yi - 1) = \frac{2\pi}{3}$

$\Rightarrow \arg\{x - 1 + yi\} = \frac{2\pi}{3}$

$\Rightarrow \frac{y}{x-1} = \tan\frac{2\pi}{3} = -\sqrt{3}$

$\Rightarrow y = -\sqrt{3}(x-1) \cdots\cdots\cdots$ (ii)

(i) ও (ii) হতে পাই, $\frac{x+1}{\sqrt{3}} = -\sqrt{3}(x-1)$

$\Rightarrow x + 1 = -3x + 3 \Rightarrow 4x = 2 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$

(ii) হতে, $y = -\sqrt{3}\left(\frac{1}{2} - 1\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

∴ $z = x + iy = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{3}i)$

42. $z = x + iy$, $f(x) = |3x - 4|$

(বাস্তব সংখ্যা ও অসমতা + জটিল সংখ্যা)

ক. $\text{Re}(z^2)$ নির্ণয় কর।

খ. $f(x) < 2$ অসমতাকে সংখ্যারেখায় দেখাও।

গ. $|z - i| \geq 3$ দ্বারা নির্দেশিত জ্যামিতিক অঞ্চল চিত্রের সাহায্যে দেখাও।

ক. সমাধান: $z = x + iy \Rightarrow z^2 = (x+iy)^2$

$\Rightarrow z^2 = x^2 + 2xyi + (iy)^2$

$= x^2 + 2xyi + i^2y^2$

$= x^2 + 2xyi + (-1)y^2$

$= x^2 - y^2 + 2xyi$

∴ $\text{Re}(z^2) = x^2 - y^2$ (Ans.)

খ. সমাধান: $f(x) < 2 \Rightarrow |3x - 4| < 2$

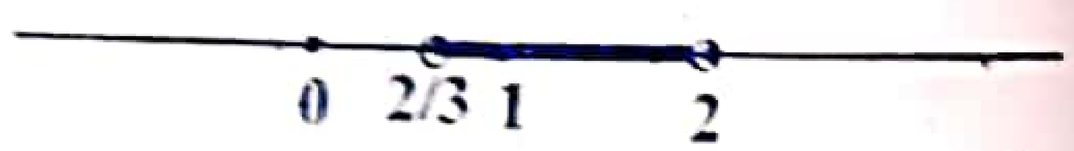
$\Rightarrow -2 < 3x - 4 < 2$

$-2 + 4 < 3x - 4 + 4 < 2 + 4$

$\Rightarrow 2 < 3x < 6 \Rightarrow \frac{2}{3} < x < 2$ [∵ $3 > 0$]

∴ সমাধান সেট, $S = \{x \in R: \frac{2}{3} < x < 2\}$

নিচে সংখ্যারেখায় সমাধান সেট দেখানো হল:



গ. সমাধান: $|z - i| > 3 \Rightarrow |x + iy - i| > 3$

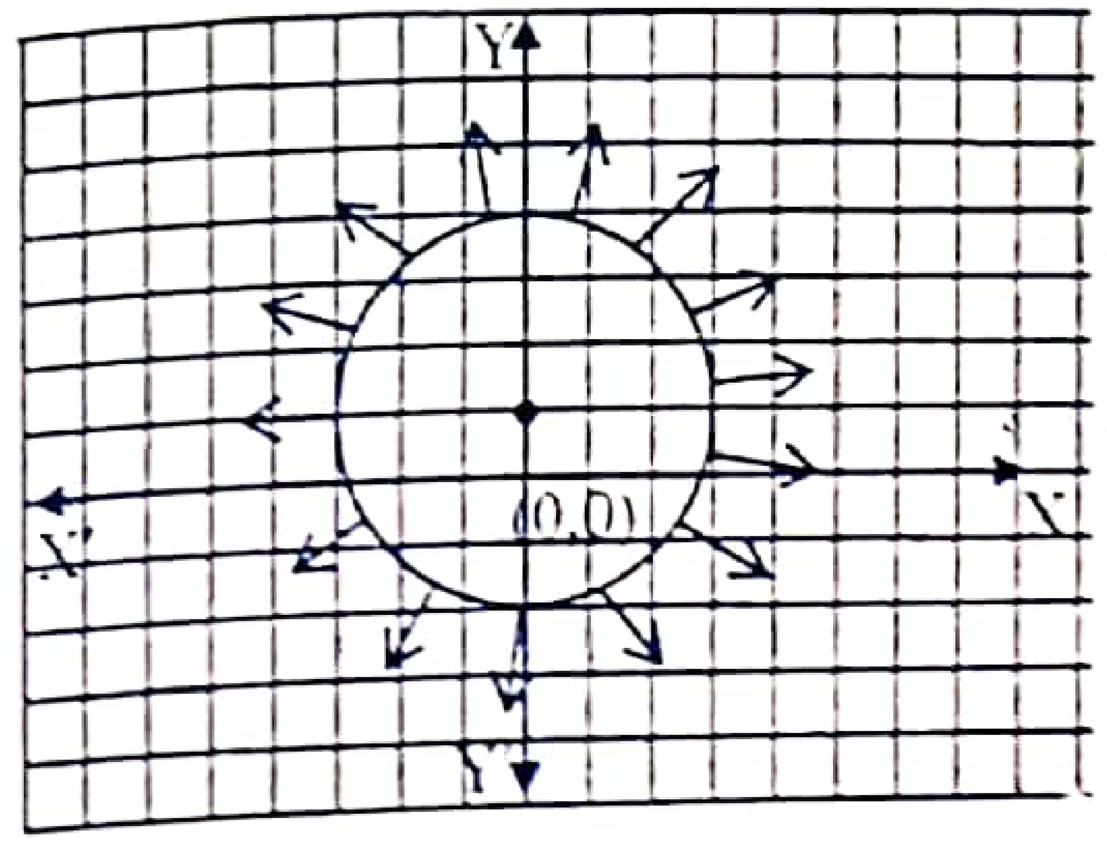
$\Rightarrow |x + (y-1)i| \geq 3$

$\Rightarrow \sqrt{x^2 + (y-1)^2} \geq 3$

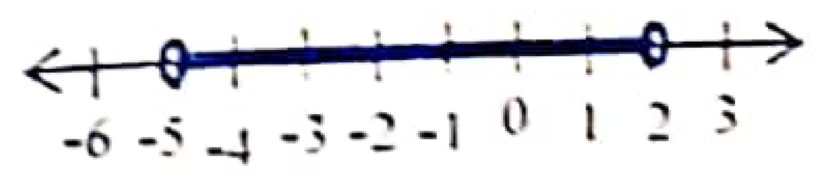
$\Rightarrow x^2 + (y-1)^2 \geq 3^2$

$x^2 + (y-1)^2 = 3^2$ একটি বৃত্তের সমীকরণ যার কেন্দ্র (0, 1) এবং ব্যাসার্ধ 3।

একটি ছক কাগজে x- অক্ষ ও y- অক্ষ বরাবর ক্ষুদ্রতম বর্গের 1 বাহুর দৈর্ঘ্য = 1 একক ধরে $x^2 + (y-1)^2 = 3^2$ বৃত্তের লেখচিত্র অঙ্কিত হয়েছে। প্রদত্ত অসমতা দ্বারা নির্দেশিত জ্যামিতিক অঞ্চল-যা বৃত্তস্থ বিন্দুসহ এর বাইরের সকল বিন্দুর সেট।



43. $z = -8 - 6i$ এবং



সংখ্যারেখা

(বাস্তব সংখ্যা ও অসমতা + জটিল সংখ্যা)

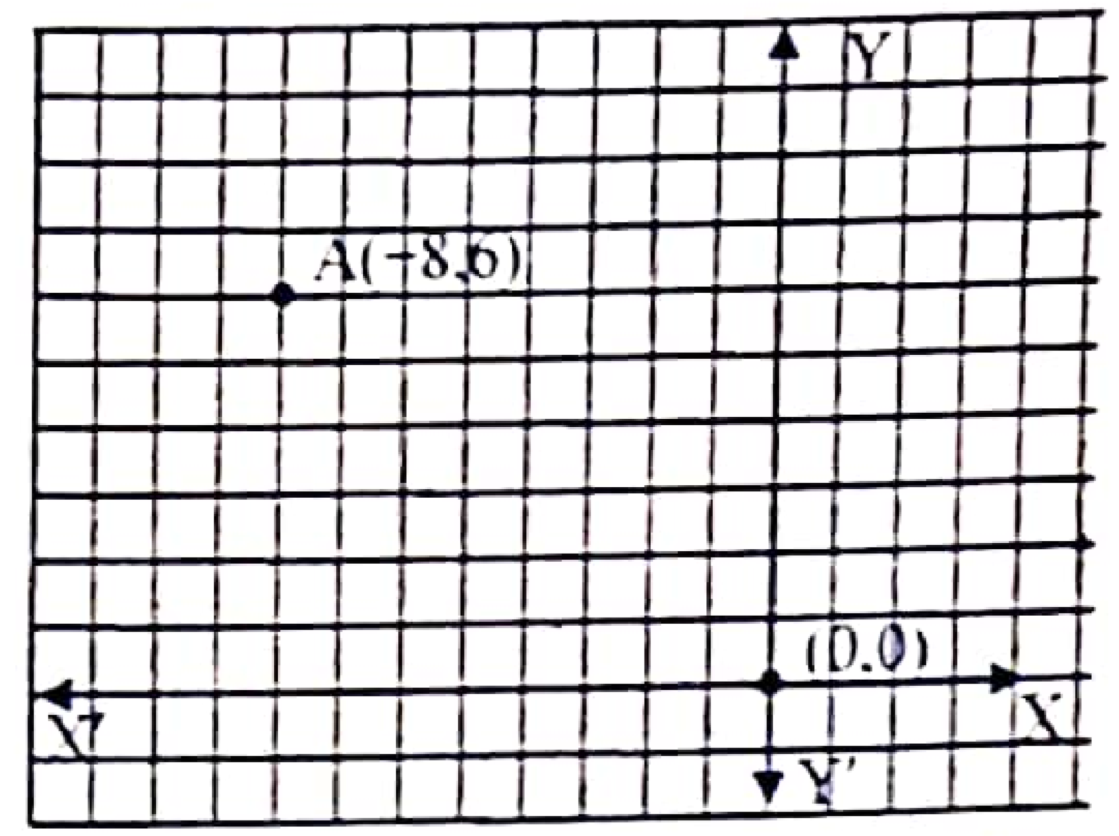
ক. আর্গন্ড চিত্রে $\bar{z}$ দ্বারা সূচিত বিন্দুর অবস্থান দেখাও।

খ. সংখ্যারেখায় নির্দেশিত অসমতাটিকে পরমমান চিত্রের সাহায্যে প্রকাশ কর।

গ. আর্গন্ড চিত্রে z এর বর্গমূল দুইটির মডুলাস ও আর্গুমেন্ট দেখাও।

ক. সমাধান: $z = -8 - 6i$ ∴ $\bar{z} = -8 + 6i$

x- অক্ষ (বাস্তব অক্ষ) ও y- অক্ষ (কাল্পনিক অক্ষ) বরাবর ক্ষুদ্রতম বর্গের 1 বাহুর দৈর্ঘ্য = 1 একক ধরে $\bar{z} = -8 + 6i$ দ্বারা সূচিত বিন্দু A(−8, 6) এর অবস্থান আর্গন্ড চিত্রে দেখানো হলো।



খ. সমাধান: সংখ্যারেখায় নির্দেশিত অসমতাটিকে নিম্নরূপে লেখা যায়-

$-5 < x < 2$

সকল পক্ষে $-\frac{-5+2}{2} = \frac{3}{2}$ যোগ করে পাই,

$-5 + \frac{3}{2} < x + \frac{3}{2} < 2 + \frac{3}{2}$

সকল পক্ষকে 2 দ্বারা গুণ করে পাই,

$\Rightarrow -10 + 3 < 2x + 3 < 4 + 3$

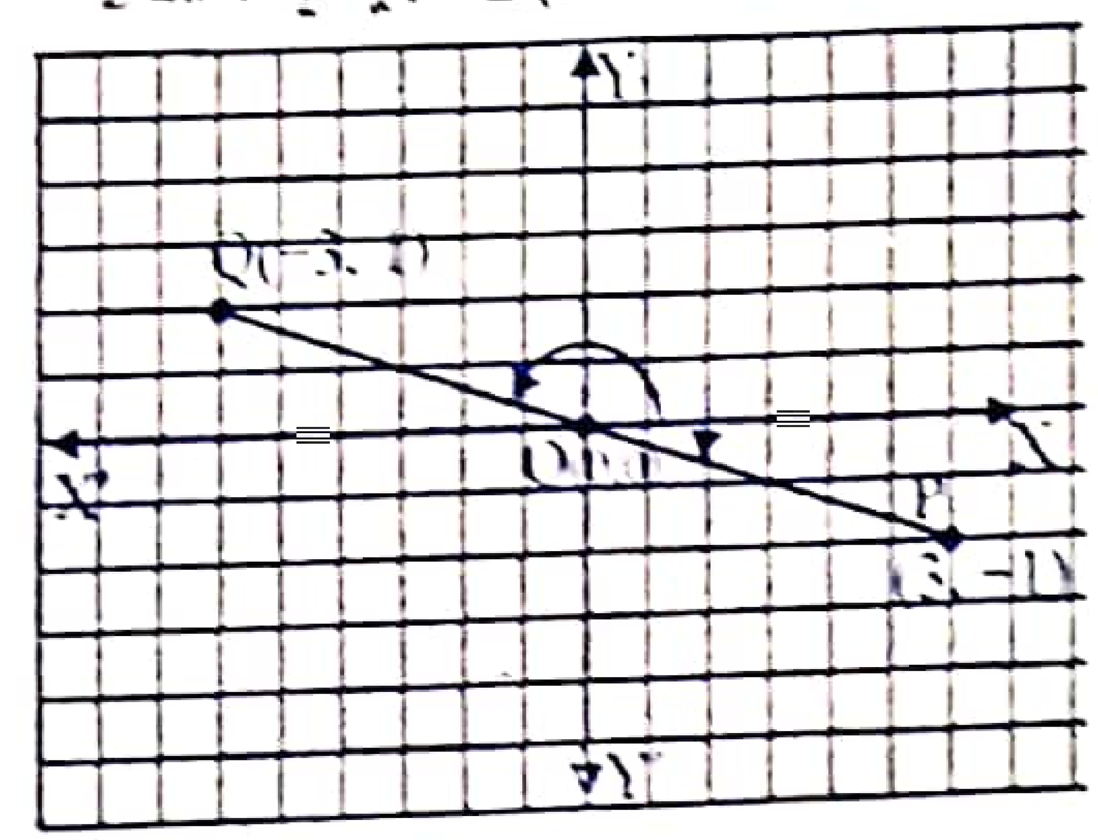
$\Rightarrow -7 < 2x + 3 < 7$

$\Rightarrow |2x + 3| < 7$ (Ans.)

গ. সমাধান: $z = -8 - 6i = 9 - 1 - 6i$

$\Rightarrow 3^2 + i^2 - 2.3.i = (3 - i)^2$

∴ z এর বর্গমূল দুইটি $\pm(3 - i) = 3 - i, -3 + i$



x- অক্ষ (বাস্তব অক্ষ) ও y- অক্ষ (কাল্পনিক অক্ষ) বরাবর ক্ষুদ্রতম বর্গের 2 বাহুর দৈর্ঘ্য = 1 একক ধরে z এর বর্গমূল $3 - i$ ও $-3 + i$ দ্বারা সূচিত বিন্দু P(3, −1) ও Q(−3, 1) এর অবস্থান আর্গন্ড চিত্রে দেখানো হলো। $3 - i$ ও $-3 + i$

এর মডুলাস OP ও OQ এবং আর্গুমেন্ট $\angle XOP$ ও $\angle XOQ$।

44. $z = 3x + 4y$, সীমাবদ্ধতা : $x + y \le 450$, $2x + y \le 600$, $x \ge 0$, $y \ge 0$.

(বাস্তব সংখ্যা ও অসমতা + যোগাশ্রয়ী প্রোগ্রাম + জটিল সংখ্যা)

ক. $y = 1$ হলে $|z| < 1$ হতে x –এর সীমা নির্ণয় কর।

খ. যোগাশ্রয়ী প্রোগ্রামটি লিখচিত্রের সাহায্যে সমাধান করে সর্বোচ্চকরণ কর।

গ. $x = 1$, $y = \sqrt{-1}$ এবং $\frac{z}{\bar{z}} = A + iB$ হলে, $A - iB$ নির্ণয় কর।

ক. সমাধান: $y = 1$ হলে $z = 3x + 4$

$\therefore\ |z| < 1 \Rightarrow |3x + 4| < 1$

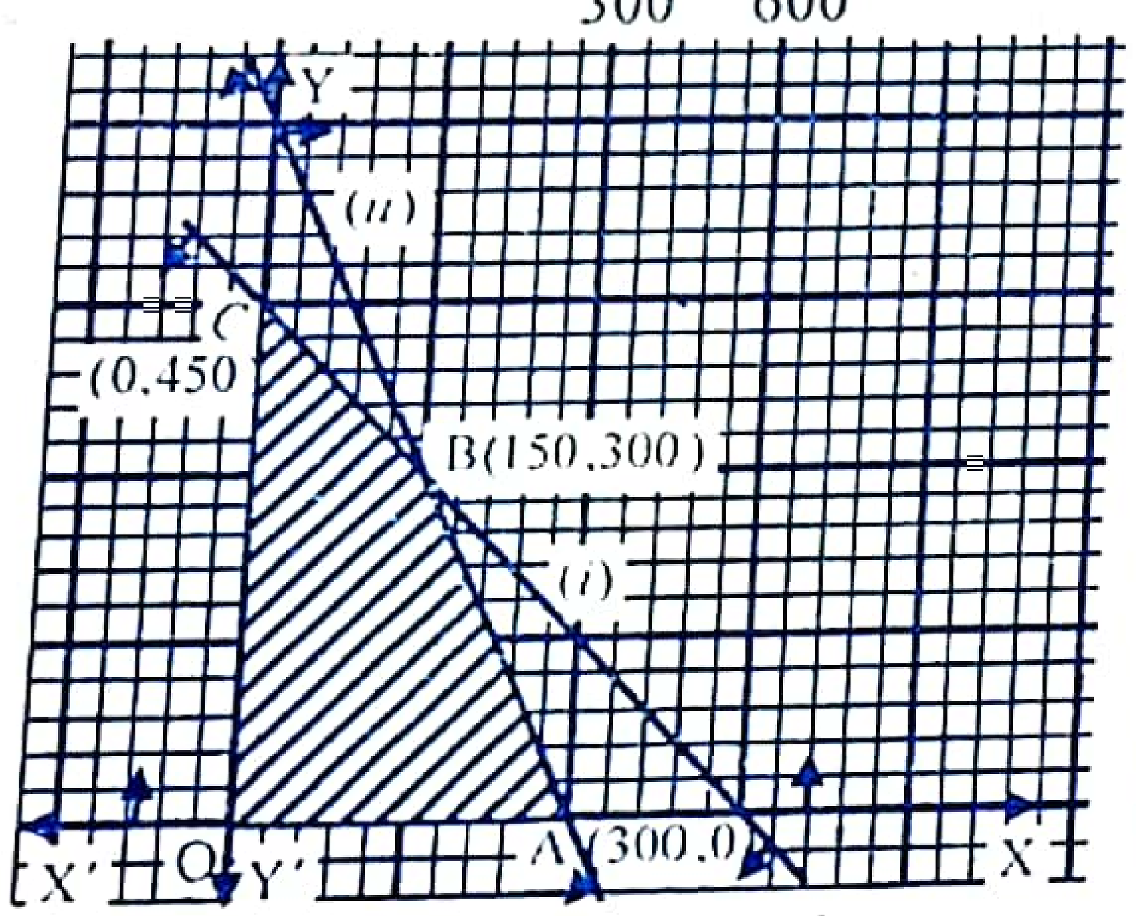
$\Rightarrow -1 < 3x + 4 < 1 \Rightarrow -1 - 4 < 3x < 1 - 4$

$\Rightarrow -5 < 3x < -3 \Rightarrow -\frac{5}{3} < x < -1$ (Ans.)

খ. সমাধান: প্রদত্ত অসমতাগুলির অনুরূপ রৈখিক সমীকরণ,

$x + y = 450 \Rightarrow \frac{x}{450} + \frac{y}{450} = 1 \cdots\cdots(i)$,

$2x + y = 600 \Rightarrow \frac{x}{300} + \frac{y}{600} = 1 \cdots (ii)$



একটি ছক কাগজে স্থানাঙ্কের অক্ষরেখা X'OX ও YOY' অঙ্কন করি। x-অক্ষ ও y-অক্ষ বরাবর ছোট 1 বর্গের বাহুর দৈর্ঘ্য = 30 একক ধরে (i) ও (ii) রেখার লেখচিত্র অঙ্কন করি।

OABC চতুর্ভুজ দ্বারা সীমাবদ্ধ এলাকার বিন্দুসমূহের সেট প্রদত্ত সকল শর্তকে সিদ্ধ করে। অতএব এই ক্ষেত্রটিই সমাধানের অনুকূল এলাকা।

এখানে, A(300,0), $x + y = 450$ ও $2x + y = 600$ এর ছেদবিন্দু B(150, 300) এবং C(0, 450)

O(0,0) বিন্দুতে $z = 3 \times 0 + 4 \times 0 = 0$,

A(300,0) বিন্দুতে $z = 3 \times 300 + 4 \times 0 = 900$,

B(150,300) বিন্দুতে $z = 3 \times 150 + 4 \times 300 = 1650$ এবং

C(0,450) বিন্দুতে $z = 3 \times 0 + 4 \times 450 = 1800$

$\therefore$ C(0,450) বিন্দুতে অভিষ্ট ফাংশন z এর সর্বোচ্চ মান =1800

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান $x = 0$, $y = 450$ এবং $Z_{max} = 1800$

গ. সমাধান: $x = 1$, $y = \sqrt{-1}$ হলে,

$z = 3 + 4\sqrt{-1} = 3 + 4\sqrt{i^2} = 3 + 4i$

$\therefore\ \bar{z} = 3 - 4i$ এবং

$A + iB = \frac{z}{\bar{z}} = \frac{3+4i}{3-4i} = \frac{(3+4i)^2}{(3-4i)(3+4i)}$

$= \frac{3^2 + 2.3.4i + (4i)^2}{(3)^2 - (4i)^2}$

$= \frac{9 + 24i - 16}{9 + 16} = \frac{24i - 7}{25}$

$= -\frac{7}{25} + \frac{24}{25}i$

i এর পরিবর্তে $(-i)$ লিখে পাই,

$A + (-i)B = -\frac{7}{25} + \frac{24}{25}(-i)$

$\therefore\ A - iB = -\frac{7}{25} - \frac{24}{25}i$

45. নিচের উদ্দীপকটি লক্ষ কর :- [চ.বো.'১৭]

$z = x + iy; |z + 5| + |z - 5| = 15 \ldots\ldots$ (১)

$\frac{2x+3}{x-3} < \frac{x+3}{x-1} \ldots\ldots$ (২)

ক. এককের ঘনমূলসমূহ নির্ণয় কর। ২

সমাধান: শিখনফল 3·6 দ্রষ্টব্য।

খ. উদ্দীপক-১ হতে, সঞ্চারপথের সমীকরণ নির্ণয় কর। ৪

সমাধান: $|z + 5| + |z - 5| = 15$

$\Rightarrow |(x + 5) + iy| + |(x - 5) + iy| = 15$

$\Rightarrow \sqrt{(x+5)^2 + y^2} + \sqrt{(x-5)^2 + y^2} = 15$

$\Rightarrow \sqrt{(x-5)^2 + y^2} = 15 - \sqrt{(x+5)^2 + y^2}$

উভয় পক্ষকে বর্গ করে পাই ,

$x^2 - 10x + 25 + y^2 = 225 - 30\sqrt{(x+5)^2 + y^2} + x^2 + 10x + 25 + y^2$

$\Rightarrow 20x + 225 = 30\sqrt{(x+5)^2 + y^2}$

$\Rightarrow 4x + 45 = 6\sqrt{x^2 + 10x + 25 + y^2}$

আবার উভয় পক্ষকে বর্গ করে পাই ,

$16x^2 + 360x + 2025 = 36(x^2 + 10x + 25 + y^2)$

$= 36x^2 + 360x + 900 + 36y^2$

$\Rightarrow 20x^2 + 36y^2 = 1125$; যা নির্ণেয় সঞ্চারপথের সমীকরণ।

বিকল্প পদ্ধতি: $|z + 5| + |z - 5| = 15$

$|(x + 5) + iy| + |(x - 5) + iy| = 15$

$\sqrt{(x+5)^2 + y^2} + \sqrt{(x-5)^2 + y^2} = 15;$

উপবৃত্তের সমীকরণ যার উপকেন্দ্র দুইটির স্থানাঙ্ক S(−5, 0) ,, S'(5,0) এবং বৃহৎ অক্ষের দৈর্ঘ্য , $2a = 15 \Rightarrow a = \frac{15}{2}$

SS' এর মধ্যবিন্দু $(\frac{-5+5}{2}, 0) = (0,0)$

উপবৃত্তটির কেন্দ্র এবং কেন্দ্র হতে উপকেন্দ্রের দূরত্ব, $\sqrt{a^2 - b^2} = 5 \Rightarrow a^2 - b^2 = 25$

$\Rightarrow b^2 = a^2 - 25 = \frac{225}{4} - 25 = \frac{125}{4}$

$\therefore$ নির্ণেয় সঞ্চারপথের সমীকরণ,

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{225/4} + \frac{y^2}{125/4} = 1$

$\Rightarrow \frac{4x^2}{225} + \frac{4y^2}{125} = 1$ (Ans.)

গ. উদ্দীপক -২ এ বর্ণিত অসমতাটির সমাধান কর এবং সংখ্যা রেখায় দেখাও। ৪

সমাধান: $\frac{2x+3}{x-3} < \frac{x+3}{x-1}$

$\Rightarrow \frac{2x+3}{x-3} - \frac{x+3}{x-1} < 0$

$\Rightarrow \frac{2x^2 + 3x - 2x - 3 - x^2 + 9}{(x-3)(x-1)} < 0$

$\Rightarrow \frac{x^2 + x + 6}{(x-3)(x-1)} < 0$

$\Rightarrow \frac{(x + \frac{1}{2})^2 + 6 - \frac{1}{4}}{(x-3)(x-1)} < 0$

$\Rightarrow \frac{(x + \frac{1}{2})^2 + \frac{23}{4}}{(x-3)(x-1)} < 0 \cdots\cdots$ (i)

x এর যেকোনো বাস্তব মানের জন্য $(x + \frac{1}{2})^2 + \frac{23}{4} > 0$.

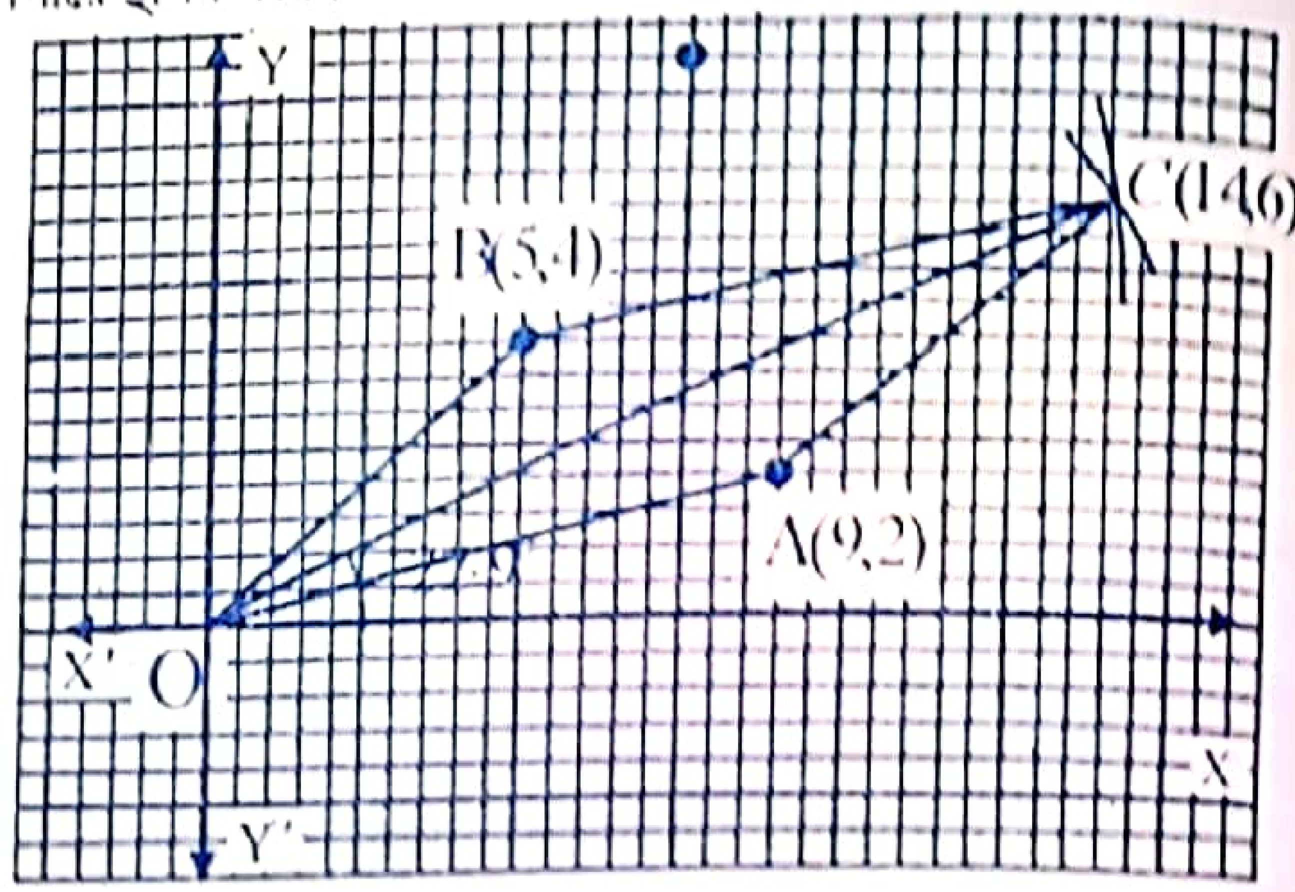
$\therefore$ (i) অসমতাটি সত্য হবে যদি ও কেবল যদি $(x - 3)$ ও $(x - 1)$ এর যেকোনো একটি ধনাত্মক ও অপরটি ঋণাত্মক হয়।

প্রয়োজনীয় উপকরণ ঃ (i) পেন্সিল (ii) স্কেল (iii) গ্রাফ পেপার (iv) ইরেজার (v) শার্পনার (vi) চাঁদা (vii) পেন্সিল কম্পাস (viii) ক্যালকুলেটর ইত্যাদি।

কার্যপদ্ধতি ঃ

1. x অক্ষ ও y অক্ষ বরাবর ক্ষুদ্রতম বর্গের 2 বাহুর দৈর্ঘ্য = 1 একক ধরে $z_1 = 9 + 2i$, $z_2 = 5 + 4i$ কে A(9, 2) এবং B(5, 4) দ্বারা নির্দেশ করে গ্রাফ পেপারে স্থাপন করি।

2. OA ও OB কে সন্নিহিত বাহু ধরে OACB সামান্তরিক সম্পূর্ণ করি এবং O, C যোগ করি। তাহলে C বিন্দু জটিল সংখ্যা দুইটির যোগফল $z_1 + z_2$ এর অবস্থান নির্দেশ করে।



তাহলে, $z_1 + z_2$ এর পরমমান = $|z_1 + z_2|$ = OC এবং $z_1 + z_2$ এর নতি = θ = ∠COX

হিসাব: $z_1 + z_2 = (9 + 2i) + (5 + 4i)$

$= 14 + 6i$

ফল সংকলন :

z_1 বিন্দুর স্থানাঙ্ক	z_2 বিন্দুর স্থানাঙ্ক	$z_1 + z_2$ বিন্দুর স্থানাঙ্ক	পরমমান নির্ণয়		নতি নির্ণয়	
			গ্রাফ হতে	সূত্র হতে	গ্রাফ হতে (চাঁদার সাহায্যে)	সূত্র হতে
A(9,2)	(5,4)	(14, 6)	OC = 30.5 ঘর =15.25 একক	$\sqrt{x^2+y^2}$ $=\sqrt{14^2+6^2}$ = 15.23	∠COX = θ = $22 \cdot 9^0$	$\tan^{-1}\frac{y}{x}$ = $\tan^{-1}\frac{6}{14}$ = $23 \cdot 2^0$

ফলাফল : নির্ণেয় পরমমান = 15.23 একক এবং নতি = $23 \cdot 2^0$.

মন্তব্য : লেখচিত্র হতে প্রাপ্তমান এবং গণিতিকভাবে নির্ণয়কৃত মান প্রায় সমান। অতএব ফলাফল সঠিক।

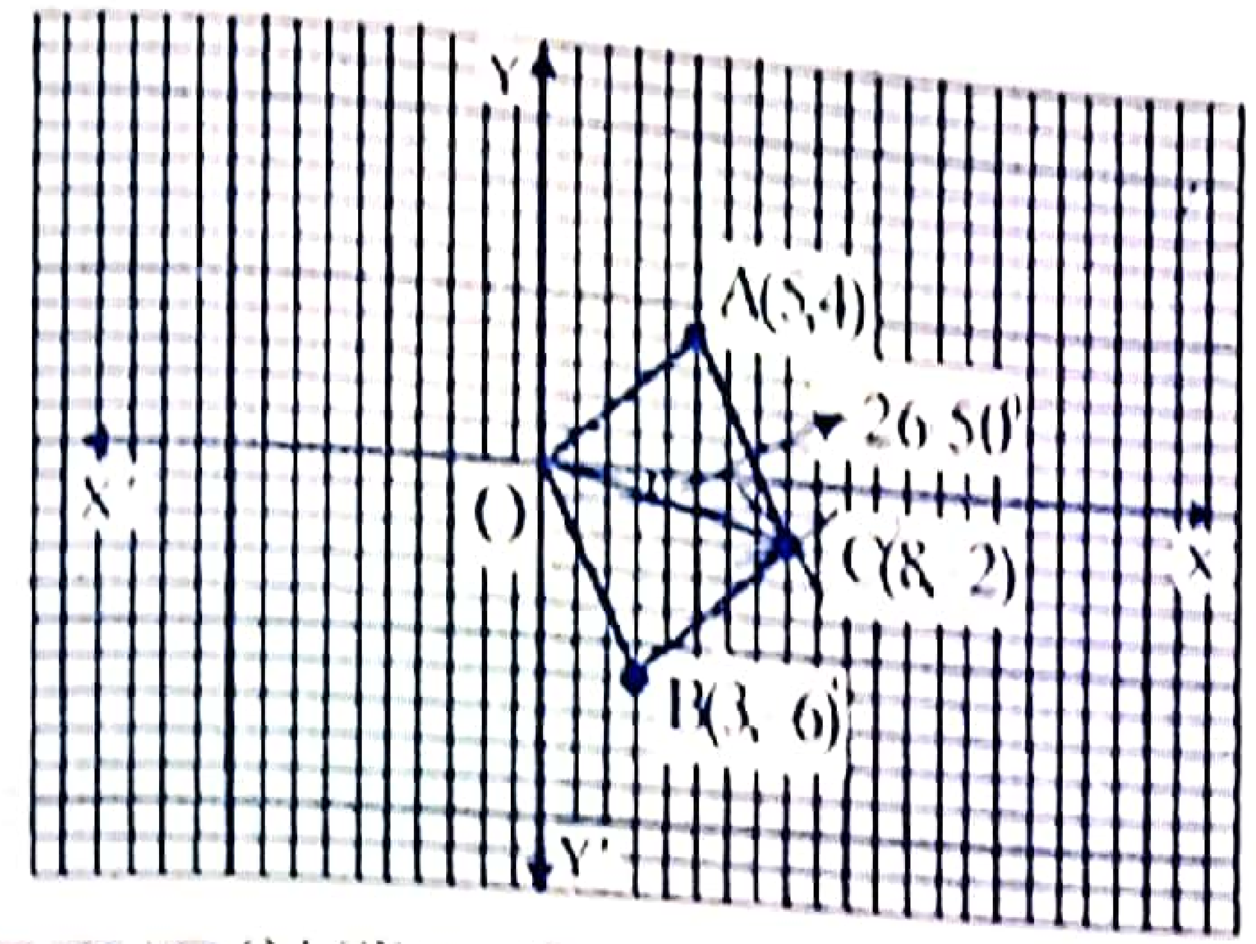
2. আর্গন্ড চিত্রে $z_1 = 5 + 4i$, $z_2 = -3 + 6i$ জটিল সংখ্যা দুইটি চিহ্নিত করে এদের বিয়োগফলের পরমমান (মডুলাস) ও নতি (আর্গুমেন্ট) নির্ণয়।

মূলতত্ত্ব : O মূলবিন্দু, x-অক্ষকে বাস্তব অক্ষ এবং y-অক্ষকে কাল্পনিক অক্ষ ধরে z_1 ও $-z_2$ জটিল সংখ্যাদ্বয়কে আর্গন্ড চিত্রে চিহ্নিত করলে মূলবিন্দুর সাথে এদের সংযোগ রেখাদ্বয়কে সন্নিহিত বাহু ধরে অঙ্কিত সামান্তরিকের কর্ণটি হবে $z_1 - z_2$ এর পরমমান এবং x- অক্ষের ধনাত্মক দিকের সাথে কর্ণটির উৎপন্ন কোণ হবে নতি।

প্রয়োজনীয় উপকরণ ঃ (i) পেন্সিল (ii) স্কেল (iii) গ্রাফ পেপার (iv) ইরেজার (v) শার্পনার (vi) চাঁদা (vii) পেন্সিল কম্পাস (viii) ক্যালকুলেটর ইত্যাদি।

কার্যপদ্ধতি ঃ

1. x অক্ষ ও y অক্ষ বরাবর ক্ষুদ্রতম বর্গের 1 বাহুর দৈর্ঘ্য = 1 একক ধরে $z_1 = 5 + 4i$, $-z_2 = 3 - 6i$ কে A(5, 4) এবং B(3, −6) দ্বারা নির্দেশ করে গ্রাফ পেপারে স্থাপন করি।



2. OA ও OB কে সন্নিহিত বাহু ধরে OACB সামান্তরিক সম্পূর্ণ করি এবং O, C যোগ করি। তাহলে C বিন্দু জটিল সংখ্যা দুইটির বিয়োগফল $z_1 - z_2$ এর অবস্থান নির্দেশ করে।

তাহলে, $z_1 - z_2$ এর পরমমান = $|z_1 - z_2|$ = OC এবং

$z_1 - z_2$ এর নতি = θ = ∠COX

হিসাব: $z_1 - z_2 = (5 + 4i) - (-3 + 6i) = 8 - 2i$

ফল সংকলন :

z_1 বিন্দুর স্থানাঙ্ক	z_2 বিন্দুর স্থানাঙ্ক	$z_1 - z_2$ বিন্দুর স্থানাঙ্ক	পরমমান নির্ণয়		নতি নির্ণয়	
			গ্রাফ হতে	সূত্র হতে	গ্রাফ হতে (চাঁদার সাহায্যে)	সূত্র হতে
A(5,4)	(-3,6)	(8, −2)	OC = 8.25 ঘর =8.25 একক	$\sqrt{x^2+y^2}$ $=\sqrt{8^2+2^2}$ = 8.246	∠COX = θ = -14^0	$\tan^{-1}\frac{y}{x}$ = $\tan^{-1}\frac{-2}{8}$ = $-14 \cdot 036^0$

ফলাফল : নির্ণেয় পরমমান = 8.246 একক এবং নতি = $-14 \cdot 036^0$.

মন্তব্য : লেখচিত্র হতে প্রাপ্তমান এবং গণিতিকভাবে নির্ণয়কৃত মান প্রায় সমান। অতএব ফলাফল সঠিক।

3. আর্গন্ড চিত্রে $z_1 = 2 + i$, $z_2 = 5 + 3i$ জটিল সংখ্যা দুইটি চিহ্নিত করে এদের গুণফলের পরমমান (মডুলাস) ও নতি (আর্গুমেন্ট) নির্ণয়।

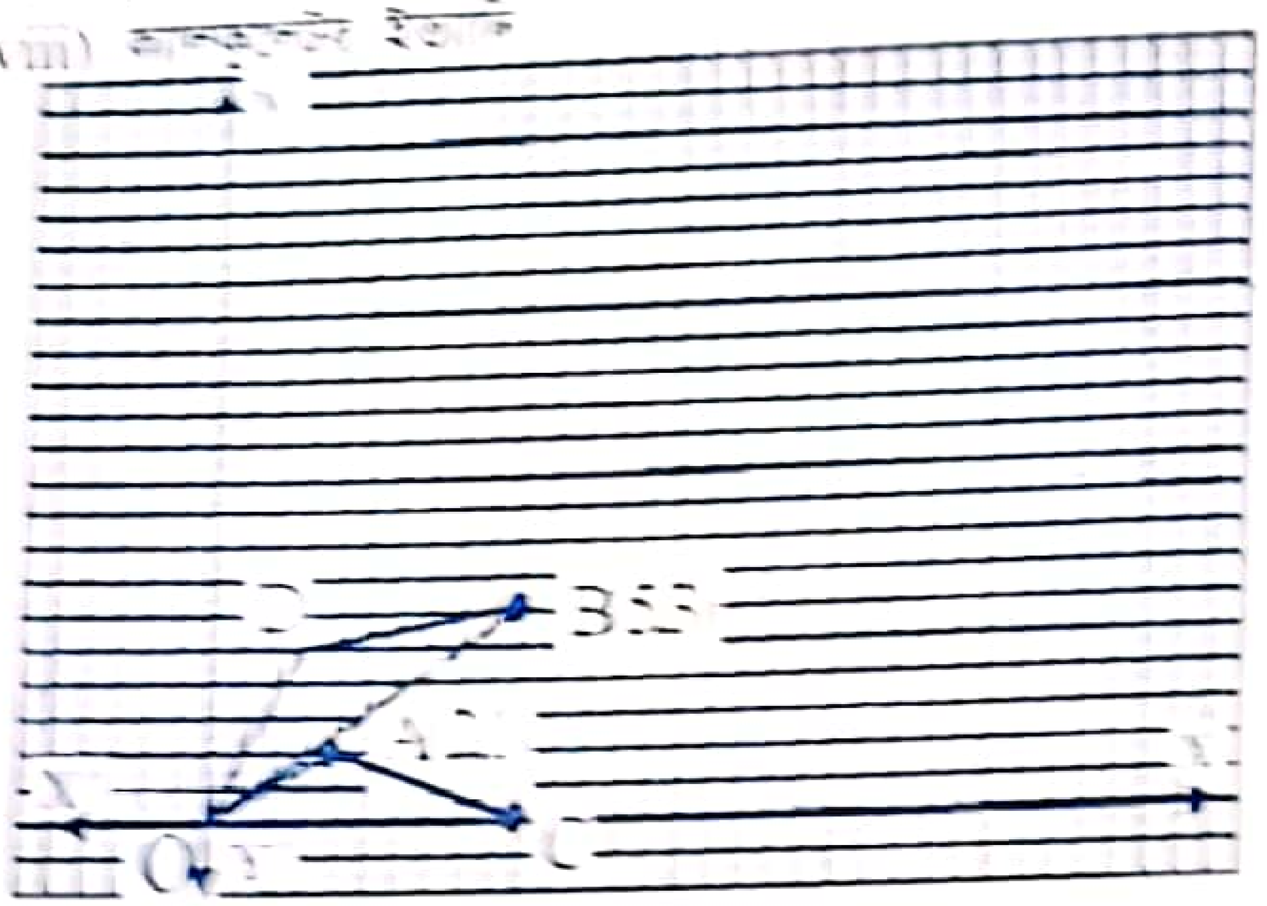
মূলতত্ত্ব : দেওয়া আছে, $z_1 = 2 + i$ এবং $z_2 = 5 + 3i$. $z_1 . z_2 = z$ এবং $z = x + iy$ হলে, z এর পরমমান $= |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ এবং z এর নতি $= \tan^{-1}\frac{y}{x}$.

ধরি, জটিল সংখ্যা দুইটি $z_1 = 2 + i = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$ ও $z_2 = 5 + 3i = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$

তাহলে, $z = z_1 . z_2 = r_1 r_2\{\cos(\theta_1 + \theta_2) + i\sin(\theta_1 + \theta_2)\}$

∴ z এর পরমমান r_1r_2 এবং z এর নতি $=(\theta_1+\theta_2)$.

প্রয়োজনীয় উপকরণ : (i) পেন্সিল (ii) স্কেল (iii) গ্রাফ পেপার (iv) ইরেজার (v) শার্পনার (vi) চাঁদা (vii) পেন্সিল কম্পাস (viii) ক্যালকুলেটর ইত্যাদি



কার্যপদ্ধতি :

1. x অক্ষ ও y অক্ষ বরাবর ক্ষুদ্রতম বর্গের 5 বাহুর দৈর্ঘ্য = 1 একক ধরে $z_1=2+i$, $z_2=5+3i$ কে A(2, 1) এবং B(5, 3) দ্বারা নির্দেশ করে গ্রাফ পেপারে স্থাপন করি। O, A এবং O, B যোগ করি।
2. OX বরাবর যেকোনো একক দৈর্ঘ্য OC (10 বাহু) কেটে নেই এবং A, C যোগ করি।
3. ΔOAC এর সদৃশ করে ΔOBD অঙ্কন করি যেন $\angle AOC=\angle BOD$ এবং $\angle OCA=\angle OBD$ হয়। তাহলে D বিন্দু জটিল সংখ্যা দুইটির গুণফল $z_1.z_2=z$ এর অবস্থান নির্দেশ করে।

∴ $z=z_1.z_2=(2+i).(5+3i)=(10-3)+(5+6)i=7+11i$

জটিল সংখ্যাটিকে $D(\frac{7}{10},\frac{11}{10})$ বা $D(0\cdot7,1\cdot1)$ দ্বারা চিহ্নিত করি। তাহলে, $z=z_1.z_2$ এর পরমমান $=10\times OD$ এবং z এর নতি $=\theta=\angle COD$

ফল সংকলন :

$z=z_1.z_2=(2+i).(5+3i)=7+11i$

∴ $z_1.z_2$ এর পরমমান $=OD=\sqrt{(7)^2+11^2}=\sqrt{170}=13\cdot038$

$z_1.z_2$ এর নতি $=\tan^{-1}\frac{11}{7}=57\cdot528^{\circ}$

আবার, z_1 এর পরমমান $=r_1=\sqrt{2^2+1^2}=2\cdot236$, z_1 এর নতি $=\theta_1=\tan^{-1}\frac{1}{2}=26\cdot565^{\circ}$

z_2 এর পরমমান $=r_2=\sqrt{(5)^2+3^2}=5.83$, z_2 এর নতি $=\theta_2=\tan^{-1}\frac{3}{5}=30\cdot964^{\circ}$

$z_1.z_2$ এর পরমমান $=r_1r_2=2\cdot236\times5.83=13.036$ এবং

$z_1.z_2$ এর নতি $=\theta_1+\theta_2=26\cdot565^{\circ}+30\cdot964^{\circ}=57\cdot928^{\circ}$

লেখচিত্র হতে পাই,

$z_1.z_2$ এর পরমমান $=10\times OD=10\times1\cdot3=13$ এবং

∴ $z_1.z_2$ এর নতি $=\theta=\angle COD=57\cdot5^{\circ}$

ফলাফল : নির্ণেয় পরমমান $=13\cdot038$ একক এবং নতি $=57\cdot928^{\circ}$

মন্তব্য : লেখচিত্র হতে প্রাপ্তমান এবং গাণিতিকভাবে নির্ণয়কৃত মান প্রায় সমান। অতএব ফলাফল সঠিক।

4. আর্গন্ড চিত্রে $z_1=11+7i$, $z_2=4+11i$ জটিল সংখ্যা দুইটি চিহ্নিত করে এদের ভাগফলের পরমমান (মডুলাস) ও নতি (আর্গুমেন্ট) নির্ণয়।

মূলতত্ত্ব : দেওয়া আছে, $z_1=11+7i$ এবং $z_2=4+11i$, $\frac{z_1}{z_2}=z$ এবং $z=x+iy$ হলে z এর পরমমান $=|z|=\sqrt{x^2+y^2}$ এবং z এর নতি $=\tan^{-1}\frac{y}{x}$

আবার, জটিল সংখ্যা দুইটি $z_1=11+7i=r_1(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)$ ও

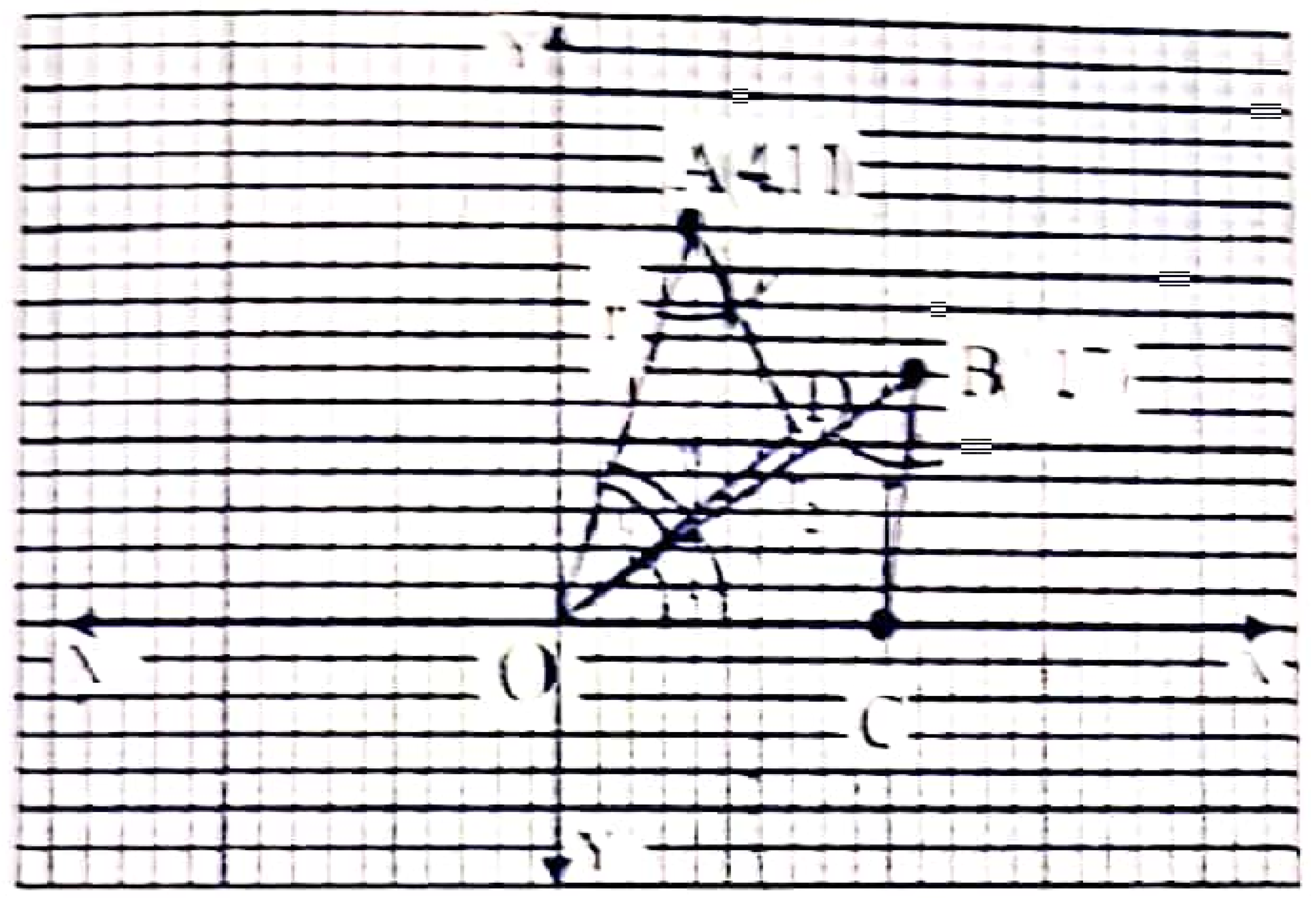
$z_2=4+11i=r_2(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)$ হলে, $z=\frac{z_1}{z_2}=\frac{r_1}{r_2}\{\cos(\theta_1-\theta_2)+i\sin(\theta_1-\theta_2)\}$

z এর পরমমান $\frac{r_1}{r_2}$ এবং z এর নতি $=(\theta_1-\theta_2)$

প্রয়োজনীয় উপকরণ : (i) পেন্সিল (ii) স্কেল (iii) গ্রাফ পেপার (iv) ইরেজার (v) শার্পনার (vi) চাঁদা (vii) পেন্সিল কম্পাস (viii) ক্যালকুলেটর ইত্যাদি

কার্যপদ্ধতি :

1. একটি ছক কাগজে স্থানাঙ্কের অক্ষদ্বয় XOX' এবং YOY' আঁকি। x অক্ষ ও y অক্ষ বরাবর ক্ষুদ্রতম বর্গের 1 বাহুর দৈর্ঘ্য = 1 একক ধরে $z_2=4+11i$, $z_1=11+7i$ কে A(4, 11) এবং B(11, 7) দ্বারা নির্দেশ করে গ্রাফ পেপারে স্থাপন করি। O, A এবং O, B যোগ করি।



2. OX বরাবর যেকোনো একক দৈর্ঘ্য OC (10 বর্গবাহু) কেটে নেই এবং B, C যোগ করি।

3. OA এর ডান দিকে ΔOBC এর সদৃশ করে ΔOAD অঙ্কন করি যেন $\angle BOC = \angle AOD$ এবং $\angle OCB = \angle OAD$ হয়। তাহলে D বিন্দু জটিল সংখ্যা দুইটির ভাগফল $\frac{z_1}{z_2} = z$ এর অবস্থান নির্দেশ করে।

$\therefore \quad z = \frac{z_1}{z_2} = \frac{4+11i}{11+7i} = \frac{(4+11i)(11-7i)}{(11+7i)(11-7i)} = \frac{44+77+(-28+121)i}{11^2+7^2} = \frac{121+93i}{170} = \frac{121}{170} + \frac{93}{170}i$

জটিল সংখ্যাটিকে $D(\frac{121}{170}\times 10, \frac{93}{170}\times 10)$ বা $D(7.12, 5.47)$ দ্বারা চিহ্নিত করি।

তাহলে, $z = \frac{z_1}{z_2}$ এর পরমমান $= \frac{OD}{10}$ এবং z এর নতি $= \theta = \angle CO(D)$

ফল সংকলন : $z = \frac{z_1}{z_2} = \frac{121}{170} + \frac{93}{170}i$

$\therefore \quad$ z এর পরমমান $= OD = \sqrt{(\frac{121}{170})^2 + (\frac{93}{170})^2} = \sqrt{\frac{14641+8649}{28900}} = 0.89$ এবং z এর নতি $= \tan^{-1}\frac{93/170}{121/170} = 37.55^0$

আবার, z_1 এর পরমমান $= r_1 = \sqrt{4^2+11^2} = 11.705$, z_1 এর নতি $= \theta_1 = \tan^{-1}\frac{11}{4} = 70\cdot 02^0$

z_2 এর পরমমান $= r_2 = \sqrt{11^2+7^2} = 13.038$, z_2 এর নতি $= \theta_2 = \tan^{-1}\frac{7}{11} = 32\cdot 47^0$

z এর পরমমান $= \frac{r_1}{r_2} = \frac{11.705}{13.038} = 0.89$ এবং z এর নতি $= \theta_1 - \theta_2 = 70\cdot 02^0 - 32\cdot 47^0 = 37.55^0$

লেখচিত্র হতে পাই,

$\therefore \quad$ z এর পরমমান $= \frac{OD}{10} = \frac{8.7}{10} = 0.87$ এবং z এর নতি $= \theta = \angle COD = 37.25^0$

ফলাফল : নির্ণেয় পরমমান = 0.89 একক এবং নতি = 37.55^0.

মন্তব্য : লেখচিত্র হতে প্রাপ্তমান এবং গণিতিকভাবে নির্ণয়কৃত মান প্রায় সমান। অতএব ফলাফল সঠিক।

প্রশ্নমালা IV

1. উৎপাদকের সাহায্যে সমাধান কর:

সমাধান: (a) $x^2 - 6x + 9 = 0$

$\Rightarrow x^2 - 2.x.3 + 3^2 = 0 \Rightarrow (x-3)^2 = 0$

$\Rightarrow x = 3, 3$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান, $x = 3, 3$

(b) $7x - 2 - 3x^2 = 0$

$\Rightarrow 3x^2 - 7x + 2 = 0$

$\Rightarrow 3x^2 - 6x - x + 2 = 0;$

$[\because ac = 3\times 2 = 6 > 0$ এবং $b = -7 < 0]$

$\Rightarrow 3x(x-2) - 1(x-2) = 0$

$\Rightarrow (x-2)(3x-1) = 0$

$x - 2 = 0$ হলে, $x = 2$; $3x - 1 = 0$ হলে, $x = \frac{1}{3}$.

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান, $x = 2, \frac{1}{3}$

1(c) $2^{2x} - 3.2^{x+2} = -32$

$\Rightarrow 2^{2x} - 3.2^x.2^2 + 32 = 0$

$\Rightarrow (2^x)^2 - 12.2^x + 32 = 0$

$\Rightarrow (2^x)^2 - 8.2^x - 4.2^x + 32 = 0$

$\Rightarrow 2^x(2^x - 8) - 4(2^x - 8) = 0$

$\Rightarrow (2^x - 8)(2^x - 4) = 0$

$2^x - 8 = 0$ হলে, $2^x = 2^3 \Rightarrow x = 3$

$2^x - 4 = 0$ হলে, $2^x = 2^2 \Rightarrow x = 2$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান, $x = 2, 3$

2(a) দেখাও যে, $x^2 + 4x + 2 = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় $-2+\sqrt{2}$ এবং $-2-\sqrt{2}$.

প্রমাণ: $x^2 + 4x + 2 = 0$

$\therefore x = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4.1.2}}{2.1} = \frac{-4 \pm \sqrt{16-8}}{2}$

$= \frac{-4 \pm \sqrt{8}}{2} = \frac{-4 \pm 2\sqrt{2}}{2} = -2 \pm \sqrt{2}$

$\therefore$ প্রদত্ত সমীকরণের মূলদ্বয় $-2+\sqrt{2}$ এবং $-2-\sqrt{2}$

2(b) বাস্তব সহগের একটি দ্বিঘাত সমীকরণের একটি মূল $3+2i$ হলে, সমীকরণটি নির্ণয় কর। [SUST'10-11]

সমাধান: দ্বিঘাত সমীকরণের প্রদত্ত মূলটি $3+2i$, যা জটিল সংখ্যা।

$\therefore$ সমীকরণের অপর মূলটি হবে $3-2i$

[$\because$ জটিল মূল যুগল রূপে আসে।]

$\therefore$ এদের যোগফল $= 3+2i+3-2i = 6$

এবং গুণফল $= (3+2i)(3-2i) = 3^2 - (2i)^2$

$= 9 - 4i^2 = 9 - 4(-1) = 13$

$\therefore$ নির্ণেয় দ্বিঘাত সমীকরণ, $x^2 - 6x + 13 = 0$

2(c) মূলদ সহগ বিশিষ্ট দ্বিঘাত সমীকরণ গঠন কর যার একটি মূল $\frac{1}{2-\sqrt{5}}$. [SUST'07-08]

সমাধান: $\frac{1}{2-\sqrt{5}} = \frac{2+\sqrt{5}}{(2-\sqrt{5})(2+\sqrt{5})}$

$= \frac{2+\sqrt{5}}{2^2-(\sqrt{5})^2} = \frac{2+\sqrt{5}}{4-5} = -2-\sqrt{5}$, যা অমূলদ সংখ্যা।

$\therefore$ দ্বিঘাত সমীকরণের অপর মূলটি হবে $-2+\sqrt{5}$

[$\because$ অমূলদ মূল যুগল রূপে আসে।]

$\therefore$ এদের যোগফল $= -2-\sqrt{5}-2+\sqrt{5} = -4$

এবং গুণফল $= (-2-\sqrt{5})(-2+\sqrt{5})$

$= (-2)^2 - (\sqrt{5})^2 = 4 - 5 = -1$

$\therefore$ নির্ণেয় দ্বিঘাত সমীকরণ, $x^2 - (-4)x - 1 = 0$

$\Rightarrow x^2 + 4x - 1 = 0$