3. OA এর ডান দিকে ΔOBC এর সদৃশ করে ΔOAD অঙ্কন করি যেন $\angle BOC = \angle AOD$ এবং $\angle OCB = \angle OAD$ হয়। তাহলে D বিন্দু জটিল সংখ্যা দুইটির ভাগফল $\frac{z_1}{z_2} = z$ এর অবস্থান নির্দেশ করে।

$$\therefore \quad z = \frac{z_1}{z_2} = \frac{4+11i}{11+7i} = \frac{(4+11i)(11-7i)}{(11+7i)(11-7i)} = \frac{44+77+(-28+121)i}{11^2+7^2} = \frac{121+93i}{170} = \frac{121}{170} + \frac{93}{170}i$$

জটিল সংখ্যাটিকে $D(\frac{121}{170}\times 10, \frac{93}{170}\times 10)$ বা $D(7.12, 5.47)$ দ্বারা চিহ্নিত করি।

তাহলে, $z = \frac{z_1}{z_2}$ এর পরমমান $= \frac{OD}{10}$ এবং z এর নতি $= \theta = \angle CO(D)$

ফল সংকলন : $z = \frac{z_1}{z_2} = \frac{121}{170} + \frac{93}{170}i$

$\therefore$ z এর পরমমান $=$ OD $= \sqrt{(\frac{121}{170})^2 + (\frac{93}{170})^2} = \sqrt{\frac{14641+8649}{28900}} = 0.89$ এবং z এর নতি $=$ $\tan^{-1}\frac{93/170}{121/170} = 37.55^0$

আবার, z_1 এর পরমমান $= r_1 = \sqrt{4^2+11^2} = 11.705$, z_1 এর নতি $= \theta_1 = \tan^{-1}\frac{11}{4} = 70\cdot02^0$

z_2 এর পরমমান $= r_2 = \sqrt{11^2+7^2} = 13.038$, z_2 এর নতি $= \theta_2 = \tan^{-1}\frac{7}{11} = 32\cdot47^0$

z এর পরমমান $= \frac{r_1}{r_2} = \frac{11.705}{13.038} = 0.89$ এবং z এর নতি $= \theta_1 - \theta_2 = 70\cdot02^0 - 32\cdot47^0 = 37.55^0$

লেখচিত্র হতে পাই,

$\therefore$ z এর পরমমান $= \frac{OD}{10} = \frac{8.7}{10} = 0.87$ এবং z এর নতি $= \theta = \angle COD = 37.25^0$

ফলাফল : নির্ণেয় পরমমান $= 0.89$ একক এবং নতি $= 37.55^0$.

মন্তব্য : লেখচিত্র হতে প্রাপ্তমান এবং গণিতিকভাবে নির্ণয়কৃত মান প্রায় সমান। অতএব ফলাফল সঠিক।

1 উৎপাদকের সাহায্যে সমাধান কর:

সমাধান: (a) $x^2 - 6x + 9 = 0$

$\Rightarrow x^2 - 2.x.3 + 3^2 = 0 \Rightarrow (x-3)^2 = 0$

$\Rightarrow x = 3, 3$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান, $x = 3, 3$

(b) $7x - 2 - 3x^2 = 0$

$\Rightarrow 3x^2 - 7x + 2 = 0$

$\Rightarrow 3x^2 - 6x - x + 2 = 0;$

$[\because ac = 3\times 2 = 6 > 0$ এবং $b = -7 < 0]$

$\Rightarrow 3x(x-2) - 1(x-2) = 0$

$\Rightarrow (x-2)(3x-1) = 0$

$x - 2 = 0$ হলে, $x = 2$; $3x - 1 = 0$ হলে, $x = \frac{1}{3}$.

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান, $x = 2, \frac{1}{3}$

1(c) $2^{2x} - 3.2^{x+2} = -32$

$\Rightarrow 2^{2x} - 3.2^x.2^2 + 32 = 0$

$\Rightarrow (2^x)^2 - 12.2^x + 32 = 0$

$\Rightarrow (2^x)^2 - 8.2^x - 4.2^x + 32 = 0$

$\Rightarrow 2^x(2^x - 8) - 4(2^x - 8) = 0$

$\Rightarrow (2^x - 8)(2^x - 4) = 0$

$2^x - 8 = 0$ হলে, $2^x = 2^3 \Rightarrow x = 3$

$2^x - 4 = 0$ হলে, $2^x = 2^2 \Rightarrow x = 2$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান, $x = 2, 3$

2(a) দেখাও যে, $x^2 + 4x + 2 = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় $-2 + \sqrt{2}$ এবং $-2 - \sqrt{2}$.

প্রমাণ: $x^2 + 4x + 2 = 0$

$$\therefore x = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4.1.2}}{2.1} = \frac{-4 \pm \sqrt{16-8}}{2}$$

$$= \frac{-4 \pm \sqrt{8}}{2} = \frac{-4 \pm 2\sqrt{2}}{2} = -2 \pm \sqrt{2}$$

$\therefore$ প্রদত্ত সমীকরণের মূলদ্বয় $-2 + \sqrt{2}$ এবং $-2 - \sqrt{2}$

2(b) বাস্তব সহগের একটি দ্বিঘাত সমীকরণের একটি মূল $3 + 2i$ হলে, সমীকরণটি নির্ণয় কর।[SUST'10-11]

সমাধান: দ্বিঘাত সমীকরণের প্রদত্ত মূলটি $3 + 2i$, যা জটিল সংখ্যা।

$\therefore$ সমীকরণের অপর মূলটি হবে $3 - 2i$

[$\because$ জটিল মূল যুগল রূপে আসে।]

$\therefore$ এদের যোগফল $= 3 + 2i + 3 - 2i = 6$

এবং গুণফল $= (3+2i)(3-2i) = 3^2 - (2i)^2$

$= 9 - 4i^2 = 9 - 4(-1) = 13$

$\therefore$ নির্ণেয় দ্বিঘাত সমীকরণ, $x^2 - 6x + 13 = 0$

2(c) মূলদ সহগ বিশিষ্ট দ্বিঘাত সমীকরণ গঠন কর যার একটি মূল $\frac{1}{2-\sqrt{5}}$. [SUST'07-08]

সমাধান: $\frac{1}{2-\sqrt{5}} = \frac{2+\sqrt{5}}{(2-\sqrt{5})(2+\sqrt{5})}$

$= \frac{2+\sqrt{5}}{2^2 - (\sqrt{5})^2} = \frac{2+\sqrt{5}}{4-5} = -2 - \sqrt{5}$, যা অমূলদ সংখ্যা।

$\therefore$ দ্বিঘাত সমীকরণের অপর মূলটি হবে $-2 + \sqrt{5}$

[$\because$ অমূলদ মূল যুগল রূপে আসে।]

$\therefore$ এদের যোগফল $= -2 - \sqrt{5} - 2 + \sqrt{5} = -4$

এবং গুণফল $= (-2-\sqrt{5})(-2+\sqrt{5})$

$= (-2)^2 - (\sqrt{5})^2 = 4 - 5 = -1$

$\therefore$ নির্ণেয় দ্বিঘাত সমীকরণ, $x^2 - (-4)x - 1 = 0$

$\Rightarrow x^2 + 4x - 1 = 0$

3(a) দেখাও যে, $a = b$ না হলে $2x^2 - 2(a+b)x + a^2 + b^2 = 0$ সমীকরণের মূলগুলো বাস্তব হতে পারে না। [ঢা.'০০ ; য.'০৪,'১০; কু.'১৪]

প্রমাণঃ পৃথায়ক $= \{-2(a+b)\}^2 - 4.2(a^2+b^2)$

$= 4(a^2 + b^2 + 2ab - 2a^2 - 2b^2)$

$= 4(-a^2 - b^2 + 2ab)$

$= -4(a^2 + b^2 - 2ab) = -4(a-b)^2$

কেবল $a = b$ হলেই $-4(a-b)^2$ অঋণাত্মক হবে।

অতএব, $a \neq b$ না হলে প্রদত্ত সমীকরণের মূলগুলি বাস্তব হতে পারে না।

3(b) $(x-a)(x-b) + (x-b)(x-c) + (x-c)(x-a)$ রাশিটি একটি পূর্ণ বর্গ হলে দেখাও যে, $a = b = c$. [রা.'১৩; কু.'১৫]

প্রমাণঃ $(x-a)(x-b) + (x-b)(x-c) + (x-c)(x-a)$ রাশিটি পূর্ণ বর্গ বলে,

$(x-a)(x-b)+(x-b)(x-c) + (x-c)(x-a)= 0$

$\Rightarrow 3x^2 - 2(a+b+c)x + (ab+bc+ca) = 0$ সমীকরণের মূলগুলি সমান হবে এবং ফলে পৃথায়ক শূন্য হবে।

$\therefore \{-2(a+b+c)\}^2 - 4.3(ab+bc+ca) = 0$

$\Rightarrow 4\{a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab+bc+ca) - 3(ab+bc+ca)\} = 0$

$\Rightarrow 4\{a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca\} = 0$

$\Rightarrow 2\{(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2\} = 0$

$\Rightarrow (a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 = 0$

$\therefore a - b = 0 \Rightarrow a = b$, $b - c = 0 \Rightarrow b = c$

এবং $c - a = 0 \Rightarrow c = a$

$\therefore a = b = c$. (Proved)

3(c) k এর মান কত হলে, $(k+1)x^2 + 2(k+3)x + 2k + 3$ রাশিটি পূর্ণ বর্গ হবে? [কু.'০৬; বুয়েট'০৮-০৯, ১১-১২]

সমাধান : $(k+1)x^2 + 2(k+3)x + 2k + 3$ রাশিটি পূর্ণ বর্গ বলে,

$(k+1)x^2 + 2(k+3)x + 2k + 3 = 0$ সমীকরণের মূলগুলি সমান হবে এবং ফলে পৃথায়ক শূন্য হবে।

$\therefore \{2(k+3)\}^2 - 4(k+1)(2k+3) = 0$

$\Rightarrow 4\{k^2 + 6k + 9 - 2k^2 - 5k - 3\} = 0$

$\Rightarrow 4\{-k^2 + k + 6\} = 0 \Rightarrow k^2 - k - 6 = 0$

$\Rightarrow (k+2)(k-3) = 0 \therefore k = -2, 3$ (Ans.)

3(d) $x^2 + bx + c = 0$ সমীকরণের মূল দুইটি বাস্তব ও অসমান হলে দেখাও যে, $2x^2 - 4(1+c)x + (b^2 + 2c^2 + 2) = 0$ সমীকরণের মূল দুইটি জটিল হবে।

প্রমাণঃ দেওয়া আছে, $x^2 + bx + c = 0$ সমীকরণের মূলগুলো বাস্তব ও অসমান।

$\therefore$ পৃথায়ক, $b^2 - 4.1.c > 0$

$\Rightarrow b^2 - 4c > 0$ ......(i)

এখন, $2x^2 - 4(1+c)x + (b^2 + 2c^2 + 2) = 0$ সমীকরণের পৃথায়ক $= \{-4(1+c)\}^2 - 4.2(b^2 + 2c^2 + 2)$

$= 16(1 + 2c + c^2) - 8(b^2 + 2c^2 + 2)$

$= 8(2 + 4c + 2c^2 - b^2 - 2c^2 - 2)$

$= 8(4c - b^2) < 0$, যেহেতু $b^2 - 4c > 0$

$\therefore 2x^2 - 4(1+c)x + (b^2 + 2c^2 + 2) = 0$ সমীকরণের মূলগুলি জটিল।

3(e) k এর মান কত হলে, $(k-1)x^2 - (k+2)x + 4 = 0$ সমীকরণের মূলগুলো বাস্তব ও সমান হবে? [ব.'০৬; রা.'০৮; য.'১২; ঢা, দি..'১৩]

প্রমাণঃ পৃথায়ক $= \{-(k+2)\}^2 - 4.(k-1).4$

$= k^2 + 4k + 4 - 16k + 16$

$= k^2 - 12k + 20$

প্রদত্ত সমীকরণের মূলগুলো বাস্তব ও সমান বলে,

$k^2 - 12k + 20 = 0$

$\Rightarrow k^2 - 10k - 2k + 20 = 0$

$\Rightarrow k(k-10) - 2(k-10) = 0$

$\Rightarrow (k-10)(k-2) = 0$

$\therefore k = 2$ বা ,10

3(f) k এর মান কত হলে, $(3k+1)x^2 - (k+11)x + 9 = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় জটিল সংখ্যা হবে? [বুয়েট'১১-১২]

সমাধান: প্রদত্ত সমীকরণের পৃথায়ক

$= \{-(k+11)\}^2 - 4(3k+1).9$

$= k^2 + 2.k.11 + 121 - 108k - 36$

$= k^2 + 22k - 108k + 85$

$= k^2 - 86k + 85 = (k-85)(k-1)$

মূলদ্বয় জটিল সংখ্যা হলে, পৃথায়ক < 0

$\therefore (k-85)(k-1) < 0 \Rightarrow 1 < k < 85$

4(a) $x^3 - px^2 + qx - r = 0$ সমীকরণের মূলগুলো α, β, γ, হলে মান নির্ণয় করঃ

(i) $\Sigma\frac{1}{\alpha^2}$ [কু.'০১; য.'০৩; দি.'০৯; চ.'১৪]

সমাধানঃ প্রদত্ত সমীকরণের মূলগুলো α, β, γ.

$\therefore \Sigma\alpha = \alpha + \beta + \gamma = p$,

$\Sigma\alpha\beta = \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = q$ এবং $\alpha\beta\gamma = r$

এখন, $\Sigma\frac{1}{\alpha^2} = \frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\beta^2} + \frac{1}{\gamma^2}$

$= \frac{\beta^2\gamma^2 + \alpha^2\gamma^2 + \alpha^2\beta^2}{\alpha^2\beta^2\gamma^2}$

$= \frac{(\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha)^2 - 2(\alpha\beta.\beta\gamma + \beta\gamma.\gamma\alpha + \gamma\alpha.\alpha\beta)}{\alpha^2\beta^2\gamma^2}$

$= \frac{(\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha)^2 - 2\alpha\beta\gamma(\beta + \gamma + \alpha)}{\alpha^2\beta^2\gamma^2}$

$= \frac{q^2 - 2rp}{r^2}$ (Ans.)

(ii) $\Sigma\frac{1}{\alpha^2\beta^2}$ [রা.'০৩; য.'০৬; সি. '০৯]

$\Sigma\frac{1}{\alpha^2\beta^2} = \frac{1}{\alpha^2\beta^2} + \frac{1}{\beta^2\gamma^2} + \frac{1}{\gamma^2\alpha^2}$

$= \frac{\gamma^2 + \alpha^2 + \beta^2}{\alpha^2\beta^2\gamma^2}$

$= \frac{(\alpha + \beta + \gamma)^2 - 2(\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha)}{\alpha^2\beta^2\gamma^2} = \frac{p^2 - 2q}{r^2}$

4(b) $x^3 + px^2 + qx + r = 0$ সমীকরণের মূলগুলো α, β, γ হলে $\Sigma\alpha^3$ এর মান নির্ণয় কর। [সি.'০৫; চ.'০৬]

সমাধানঃ প্রদত্ত সমীকরণের মূলগুলি α, β, γ.

$\therefore \Sigma\alpha = \alpha + \beta + \gamma = -p$,

$\Sigma\alpha\beta = \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = q$ এবং $\alpha\beta\gamma = -r$

এখন, $\Sigma\alpha^3 = \alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3$

$= \alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 - 3\alpha\beta\gamma + 3\alpha\beta\gamma$

$= (\alpha + \beta + \gamma)\{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - (\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha)\} + 3(-r)$

$= -p\{(\alpha + \beta + \gamma)^2 - 2(\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha) - (\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha)\} - 3r$

$= -p\{(-p)^2 - 3q\} - 3r = 3pq - p^3 - 3r$

4(c) $x^3 + qx + r = 0$ সমীকরণের মূলগুলো α, β, γ হলে $(\alpha - \beta)^2 + (\beta - \gamma)^2 + (\gamma - \alpha)^2$ এর মান নির্ণয় কর। [চ.'০৫]

সমাধানঃ প্রদত্ত সমীকরণের মূলগুলো α, β, γ.

$\therefore \Sigma\alpha = \alpha + \beta + \gamma = 0$,

$\Sigma\alpha\beta = \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = q$ এবং $\alpha\beta\gamma = -r$

এখন, $(\alpha - \beta)^2 + (\beta - \gamma)^2 + (\gamma - \alpha)^2$

$= \alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha\beta + \beta^2 + \gamma^2 - 2\beta\gamma + \gamma^2 + \alpha^2 - 2\gamma\alpha$

$= 2(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) - 2(\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha)$

$= 2\{(\alpha + \beta + \gamma)^2 - 2(\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha)\} - 2q$

$= 2\{0 - 2q\} - 2q$

$= -4q - 2q = -6q$ (Ans.)

4(d) $3x^3 - 2x^2 + 1 = 0$ **সমীকরণের মূলগুলো** α, β, γ **হলে** $\sum \alpha^2 \beta$ **এর মান নির্ণয় কর।** **[য.'০৫]**

সমাধানঃ প্রদত্ত সমীকরণের মূলগুলো α, β, γ.

$\therefore \sum\alpha = \alpha + \beta + \gamma = -(-\frac{2}{3}) = \frac{2}{3}$,

$\sum\alpha\beta = \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = 0$ এবং $\alpha\beta\gamma = -\frac{1}{3}$

এখন, $\sum\alpha^2\beta = \alpha^2\beta + \alpha\beta^2 + \beta^2\gamma + \beta\gamma^2 + \gamma^2\alpha + \gamma\alpha^2$

$= \alpha\beta(\alpha + \beta) + \beta\gamma(\beta + \gamma) + \gamma\alpha(\gamma + \alpha)$

$= \alpha\beta(\alpha + \beta + \gamma - \gamma) + \beta\gamma(\beta + \gamma + \alpha - \alpha) + \gamma\alpha(\gamma + \alpha + \beta - \beta)$

$= (\alpha + \beta + \gamma)(\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha) - 3\alpha\beta\gamma$

$= \frac{2}{3}.0 - 3(-\frac{1}{3}) = 1$ (Ans.)

4(e) $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ **সমীকরণের মূলগুলো** α, β, γ **হলে মান নির্ণয় করঃ (i)** $\sum(\beta + \gamma)^{-1}$

(ii) $\sum \alpha^3$ **[চ.'০৪]**

সমাধানঃ প্রদত্ত সমীকরণের মূলগুলো α, β, γ.

$\therefore \sum\alpha = \alpha + \beta + \gamma = -a$.

$\sum\alpha\beta = \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = b$ এবং $\alpha\beta\gamma = -c$

(i) $\sum(\beta + \gamma)^{-1} = \frac{1}{\beta + \gamma} + \frac{1}{\gamma + \alpha} + \frac{1}{\alpha + \beta}$

$= \frac{1}{-a-\alpha} + \frac{1}{-a-\beta} + \frac{1}{-a-\gamma}$

$= -\frac{(a+\beta)(a+\gamma) + (a+\alpha)(a+\gamma) + (a+\alpha)(a+\beta)}{(a+\alpha)(a+\beta)(a+\gamma)}$

$= -\frac{3a^2 + 2a(\alpha+\beta+\gamma) + (\beta\gamma + \gamma\alpha + \alpha\beta)}{a^3 + a^2(\alpha+\beta+\gamma) + a(\beta\gamma+\gamma\alpha+\alpha\beta)}$

$= -\frac{3a^2 + 2a(-a) + b}{a^3 + a^2(-a) + ab - c} = \frac{a^2 + b}{c - ab}$

(ii) $\sum\alpha^3 = \alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3$

$= \alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 - 3\alpha\beta\gamma + 3\alpha\beta\gamma$

$= (\alpha + \beta + \gamma)\{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - (\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha)\} + 3(-c)$

$= -a\{(\alpha+\beta+\gamma)^2 - 2(\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha) - (\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha)\} - 3c$

$= -a\{(-a)^2 - 3b\} - 3c = -a^3 + 3ab - 3c$

$= 3ab - a^3 - 3c$ (Ans.)

4(f) $x^3 + qx + r = 0$ **সমীকরণের মূলগুলো** α, β **হলে দেখাও যে,** $(\beta - \gamma)^2 = \frac{3r - q\alpha}{\alpha}$

[টেক্সটাইল'০২-০৩]

প্রমাণঃ প্রদত্ত সমীকরণের মূলগুলো α, β, γ.

$\therefore \alpha + \beta + \gamma = 0$, $\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = q$ এবং $\alpha\beta\gamma = -r$

$\therefore (\beta - \gamma)^2 = (\beta + \gamma)^2 - 4\beta\gamma$

$= (-\alpha)^2 - 4(-\frac{r}{\alpha})$

$[\because \alpha + \beta + \gamma = 0$ এবং $\alpha\beta\gamma = -r]$

$= \frac{\alpha^3 + 4r}{\alpha}$

এখন, $x^3 + qx + r = 0$ সমীকরণের একটি মূল α বলে

$\alpha^3 + q\alpha + r = 0 \Rightarrow \alpha^3 = -q\alpha - r$

$\therefore (\beta - \gamma)^2 = \frac{-q\alpha - r + 4r}{\alpha} = \frac{3r - q\alpha}{\alpha}$

4(g) $r(1 - r) = 1$ **এর জটিল মূলদ্বয়** z_1 **ও** z_2 **হলে, প্রমাণ কর যে,** $z_1^3 + z_2^3 = -2$. **[বুয়েট'০৪-০৫]**

প্রমাণ : দেওয়া আছে, $r(1-r) = 1$ অর্থাৎ $r^2 - r + 1 = 0$ এর জটিল মূলদ্বয় z_1 ও z_2.

$\therefore z_1 + z_2 = 1$ এবং $z_1 z_2 = 1$

L.H.S. $= z_1^3 + z_2^3$

$= (z_1 + z_2)^3 - 3z_1z_2(z_1 + z_2)$

$= 1^3 - 3 \times 1 \times 1$

$= 1 - 3 = -2 =$ R.H.S. (Proved)

5(a) **যদি** $ax^2 + bx + c = 0$ **সমীকরণের মূলদ্বয়** α, β **হয়, তবে নিম্নের মূল দ্বারা গঠিত সমীকরণ নির্ণয় করঃ (i)** $\alpha + \frac{1}{\beta}, \beta + \frac{1}{\alpha}$ **[কু.'০৮]**

(ii) $\frac{\alpha + \beta}{2}, \sqrt{\alpha\beta}$

(iii) $\frac{1}{\alpha^3}, \frac{1}{\beta^3}$. **[ব.'১২; বুয়েট'১১-১২]**

সমাধানঃ দেওয়া আছে, $ax^2 + bx + c = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় α এবং β.

$\therefore \alpha + \beta = -\frac{b}{a}$ এবং $\alpha\beta = \frac{c}{a}$

(i) $\alpha + \frac{1}{\beta}$ এবং $\beta + \frac{1}{\alpha}$ মূলদ্বয়ের সমষ্টি

$= \alpha + \beta + \frac{\alpha + \beta}{\alpha\beta} = -\frac{b}{a} + \frac{-\frac{b}{a}}{\frac{c}{a}} = -\frac{b}{a} - \frac{b}{c}$

এবং গুণফল $= (\alpha + \frac{1}{\beta})(\beta + \frac{1}{\alpha}) = \frac{(\alpha\beta + 1)^2}{\alpha\beta}$

$= \frac{(\frac{c}{a} + 1)^2}{\frac{c}{a}} = \frac{(c+a)^2}{a^2} \times \frac{a}{c} = \frac{(c+a)^2}{ca}$

$\therefore$ নির্ণেয় সমীকরণ, $x^2 - (-\frac{b}{a} - \frac{b}{c})x + \frac{(c+a)^2}{ca} = 0$

$\therefore cax^2 + b(a + c)x + (c + a)^2 = 0$

(ii) $\frac{\alpha + \beta}{2}$ এবং $\sqrt{\alpha\beta}$ মূলদ্বয়ের সমষ্টি

$\frac{\alpha + \beta}{2} + \sqrt{\alpha\beta} = -\frac{b}{2a} + \sqrt{\frac{c}{a}} = \frac{2\sqrt{ca} - b}{2a}$

এবং গুণফল $= \frac{\alpha + \beta}{2}.\sqrt{\alpha\beta} = -\frac{b}{2a}.\sqrt{\frac{c}{a}}$

$= -\frac{b\sqrt{c}}{2a\sqrt{a}}$

$\therefore$ নির্ণেয় সমীকরণ,

$x^2 - \frac{2\sqrt{ca} - b}{2a}x - \frac{b\sqrt{c}}{2a\sqrt{a}} = 0$

$\therefore 2a\sqrt{a}\,x^2 - (2a\sqrt{c} - b\sqrt{a})x - b\sqrt{c} = 0$

(iii) $\frac{1}{\alpha^3}$ এবং $\frac{1}{\beta^3}$ মূলদ্বয়ের সমষ্টি

$= \frac{1}{\alpha^3} + \frac{1}{\beta^3} = \frac{\alpha^3 + \beta^3}{\alpha^3\beta^3}$

$= \frac{a^3}{c^3}\{(\alpha + \beta)^3 - 3\alpha\beta(\alpha + \beta)\}$

$= \frac{a^3}{c^3}\{-\frac{b^3}{a^3} - 3\frac{c}{a}(-\frac{b}{a})\} = \frac{a^3}{c^3}\frac{3abc - b^3}{a^3}$

$= \frac{3abc - b^3}{c^3}$

এবং গুণফল $= \frac{1}{\alpha^3}.\frac{1}{\beta^3} = \frac{1}{\alpha^3\beta^3} = \frac{a^3}{c^3}$

$\therefore$ নির্ণেয় সমীকরণ,

$x^2 - \frac{3abc - b^3}{c^3}x + \frac{a^3}{c^3} = 0$

$\therefore c^3x^2 - (3abc - b^3)x + a^3 = 0$

5(b) **এমন একটি সমীকরণ নির্ণয় কর যার মূল দুইটি যথাক্রমে** $x^2 - 2bx + b^2 - a^2 = 0$ **সমীকরণের মূলদ্বয়ের সমষ্টি এবং অন্তরফলের ধনাত্মক মান হবে।**

[রা.'১৪; য.'০৪,'০৮,'১২; ব.'০৮,'১৫; কু.'০৯; দি.'১৪]

সমাধানঃ ধরি, প্রদত্ত সমীকরণের মূলদ্বয় α এবং β

$\therefore \alpha + \beta = 2b$ এবং $\alpha\beta = b^2 - a^2$

প্রশ্নমতে, নির্ণেয় সমীকরণের মূলদ্বয় $\alpha + \beta$ এবং $|\alpha - \beta|$

এখন, $|\alpha - \beta| = \sqrt{(\alpha+\beta)^2 - 4\alpha\beta}$

$= \sqrt{4b^2 - 4(b^2 - a^2)}$

$= \sqrt{4b^2 - 4b^2 + 4a^2} = \sqrt{4a^2}$

$= 2a$, যখন $a > 0$

$= -2a$, যখন $a < 0$

$\therefore$ নির্ণেয় সমীকরণ,

$x^2 - \{(\alpha+\beta) + |\alpha - \beta|\}x + (\alpha+\beta)|\alpha-\beta| = 0$

$\Rightarrow x^2 - (2b + 2a)x + 2b.2a = 0$, যখন $a > 0$

$\therefore x^2 - 2(a+b)x + 4ab = 0$ (Ans.)

আবার, $x^2 - (2b - 2a)x + 2b.(-2a) = 0$, যখন $a < 0$

$\Rightarrow x^2 + 2(a - b)x - 4ab = 0$

5(c) একপ সমীকরণ নির্ণয় কর যার মূল দুইটি $17x^2 - 3x + 14 = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয়ের যোগফল এবং গুণফল। [চ.'০২]

সমাধানঃ ধরি, প্রদত্ত সমীকরণের মূলদ্বয় α এবং β.

$\therefore \alpha + \beta = \frac{3}{17}$ এবং $\alpha\beta = \frac{14}{17}$

প্রশ্নমতে, নির্ণেয় সমীকরণের মূলদ্বয় $\alpha + \beta$ এবং $\alpha\beta$

$\therefore$ নির্ণেয় সমীকরণ,

$x^2 - (\alpha + \beta + \alpha\beta)x + (\alpha+\beta)\alpha\beta = 0$

$\Rightarrow x^2 - (\frac{3}{17} + \frac{14}{17})x + \frac{3}{17}.\frac{14}{17} = 0$

$\Rightarrow x^2 - \frac{17}{17}x + \frac{42}{289} = 0$

$\therefore 289(x^2 - x) + 42 = 0$ (Ans.)

5(d) $7x^2 - 5x - 3 = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় α, β হলে $\frac{1}{\alpha} + \frac{2}{\beta}$ এবং $\frac{1}{\beta} + \frac{2}{\alpha}$ মূল বিশিষ্ট সমীকরণ নির্ণয় কর। [কুয়েট'০৪-০৫]

সমাধান : দেওয়া আছে, $7x^2 - 5x - 3 = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় α এবং β

$\alpha + \beta = \frac{5}{7}$, $\alpha\beta = -\frac{3}{7}$

$\frac{1}{\alpha} + \frac{2}{\beta}$ এবং $\frac{1}{\beta} + \frac{2}{\alpha}$ মূলদ্বয়ের সমষ্টি

$= (\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}) + 2(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}) = 3(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta})$

$= 3\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta} = 3.\frac{5}{7}(-\frac{7}{3}) = -5$

এবং গুণফল $= (\frac{1}{\alpha} + \frac{2}{\beta})(\frac{1}{\beta} + \frac{2}{\alpha})$

$= \frac{1}{\alpha\beta} + 2(\frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\beta^2}) + 4\frac{1}{\alpha\beta}$

$= 5\frac{1}{\alpha\beta} + 2(\frac{\alpha^2 + \beta^2}{\alpha^2\beta^2})$

$= 5(-\frac{7}{3}) + 2\frac{(\alpha+\beta)^2 - 2\alpha\beta}{\alpha^2\beta^2}$

$= -\frac{35}{3} + 2\{(\frac{5}{7})^2 - 2(-\frac{3}{7})\}.(-\frac{7}{3})^2$

$= -\frac{35}{3} + 2(\frac{25}{49} + \frac{6}{7}).\frac{49}{9}$

$= -\frac{35}{3} + 2\frac{25 + 42}{49}.\frac{49}{9}$

$= -\frac{35}{3} + 2\frac{67}{9} = \frac{-105 + 134}{9} = \frac{29}{9}$

$\therefore$ নির্ণেয় সমীকরণ, $x^2 - (-5)x + \frac{29}{9} = 0$

$\Rightarrow 9x^2 + 45x + 29 = 0$

5(e) $2x^2 + 3x + 5 = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় α এবং β হলে, $\frac{1}{\alpha^3}$ এবং $\frac{1}{\beta^3}$ দ্বারা গঠিত সমীকরণ নির্ণয় কর।

সমাধানঃ দেওয়া আছে, $2x^2 + 3x + 5 = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় α এবং β

$\therefore \alpha + \beta = -\frac{3}{2}$, $\alpha\beta = \frac{5}{2}$

$\frac{1}{\alpha^3}$ এবং $\frac{1}{\beta^3}$ মূলদ্বয়ের সমষ্টি $= \frac{1}{\alpha^3} + \frac{1}{\beta^3}$

$= \frac{\alpha^3 + \beta^3}{\alpha^3\beta^3} = \frac{(\alpha+\beta)^3 - 3\alpha\beta(\alpha+\beta)}{\alpha^3\beta^3}$

$= \frac{(-3/2)^3 - 3(5/2)(-3/2)}{(5/2)^3}$

$= \frac{8}{125}(-\frac{27}{8} + \frac{45}{4}) = \frac{8}{125}(\frac{-27 + 90}{8}) = \frac{63}{125}$

এবং গুণফল $= \frac{1}{\alpha^3\beta^3} = (\frac{2}{5})^3 = \frac{8}{125}$

$\therefore$ নির্ণেয় সমীকরণ, $x^2 - (\frac{63}{125})x + \frac{8}{125} = 0$

$\Rightarrow 125x^2 - 63x + 8 = 0$

5(f) যদি $x^2 + 2bx + c = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় α, β হয়, তবে α^2 ও β^2 সম্বলিত সমীকরণটি নির্ণয় কর।

সমাধানঃ দেওয়া আছে, $x^2 + 2bx + c = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় α এবং β

$\therefore \alpha + \beta = -\frac{2b}{1} = -2b$, $\alpha\beta = \frac{c}{1} = c$

α^2 ও β^2 মূলদ্বয়ের সমষ্টি $= \alpha^2 + \beta^2$

$= (\alpha+\beta)^2 - 2\alpha\beta = (-2b)^2 - 2c = 4b^2 - 2c$

এবং গুণফল $= \alpha^2\beta^2 = c^2$

$\therefore$ নির্ণেয় সমীকরণ, $x^2 - (4b^2 - 2c)x + c^2 = 0$

6(a) চতুর্ঘাত বিশিষ্ট সমীকরণ গঠন কর যার দুইটি মূল যথাক্রমে 2, 3 এবং বাকী মূল $x^2 + 4x + 5 = 0$ সমীকরণের মূল। [বুয়েট'০২-০৩]

সমাধান : 2 এবং 3 মূল বিশিষ্ট সমীকরণ

$x^2 - (2 + 3)x + 2.3 = 0$

$\Rightarrow x^2 - 5x + 6 = 0$

$\therefore$ চতুর্ঘাত বিশিষ্ট সমীকরণ,

$(x^2 - 5x + 6)(x^2 + 4x + 5) = 0$

$\Rightarrow x^4 + 4x^3 + 5x^2 - 5x^3 - 20x^2 - 25x + 6x^2 + 24x + 30 = 0$

$\therefore x^4 - x^3 - 9x^2 - x + 30 = 0$

6(b) যদি α ও β অসমান হয় অথচ $\alpha^2 = 5\alpha - 3$ এবং $\beta^2 = 5\beta - 3$ হয় তবে $\frac{\alpha}{\beta}$ এবং $\frac{\beta}{\alpha}$ মূল বিশিষ্ট সমীকরণ নির্ণয় কর। [বুয়েট'০০-০১]

সমাধানঃ দেওয়া আছে,

$\alpha^2 = 5\alpha - 3 \cdots$ (i) এবং $\beta^2 = 5\beta - 3 \cdots$ (ii)

(i) − (ii) $\Rightarrow \alpha^2 - \beta^2 = 5(\alpha - \beta)$

$\Rightarrow (\alpha - \beta)(\alpha + \beta) = 5(\alpha - \beta)$

$\Rightarrow \alpha + \beta = 5$ [$\because \alpha \neq \beta$]

(i) + (ii) $\Rightarrow \alpha^2 + \beta^2 = 5(\alpha + \beta) - 6$

$\Rightarrow (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta = 5.5 - 6$

$\Rightarrow 25 - 2\alpha\beta = 25 - 6 \therefore \alpha\beta = 3$

$\therefore$ নির্ণেয় সমীকরণ, [কুয়েট'০৬-০৭]

$x^2 - (\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha})x + \frac{\alpha}{\beta}.\frac{\beta}{\alpha} = 0$

$\Rightarrow x^2 - \frac{\alpha^2 + \beta^2}{\alpha\beta}x + 1 = 0$

$\Rightarrow x^2 - \frac{(\alpha+\beta)^2 - 2\alpha\beta}{\alpha\beta}x + 1 = 0$

$\Rightarrow x^2 - \frac{25 - 6}{3}x + 1 = 0$

$\therefore 3x^2 - 19x + 3 = 0$

7(a) $ax^2 + bx + c = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় α, β হলে $cx^2 - 2bx + 4a = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয়কে α, β এর মাধ্যমে প্রকাশ কর। [দি.'১০; রা.'১১]

সমাধানঃ দেওয়া আছে, $ax^2 + bx + c = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় α এবং β

$\therefore \alpha + \beta = -\frac{b}{a} \Rightarrow b = -a(\alpha + \beta)$ এবং

$\alpha\beta = \frac{c}{a} \Rightarrow c = a\alpha\beta$

এখন, $cx^2 - 2bx + 4a = 0$

$\Rightarrow a\alpha\beta x^2 - 2\{-a(\alpha+\beta)\}x + 4a = 0$

$\Rightarrow \alpha\beta x^2 + 2\alpha x + 2\beta x + 4 = 0$

$\Rightarrow \alpha x(\beta x + 2) + 2(\beta x + 2) = 0$

$\Rightarrow (\alpha x + 2)(\beta x + 2) = 0 \quad \therefore x = -\frac{2}{\alpha}, -\frac{2}{\beta}$

অতএব, $cx^2 - 2bx + 4a = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় $-\frac{2}{\alpha}$ এবং $-\frac{2}{\beta}$

7(b) $ax^2 + bx + c = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় α, β হলে $ac(x^2+1) - (b^2 - 2ac)x = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় α, β এর মাধ্যমে প্রকাশ কর। [চ.'০২,'১০; বুয়েট'১২-১৩]

সমাধানঃ দেওয়া আছে, $ax^2 + bx + c = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় α এবং β

$\therefore \alpha + \beta = -\frac{b}{a} \Rightarrow b = -a(\alpha+\beta)$ এবং

$\alpha\beta = \frac{c}{a} \Rightarrow c = a\alpha\beta$

এখন, $ac(x^2+1) - (b^2 - 2ac)x = 0$

$\Rightarrow acx^2 - (b^2 - 2ac)x + ac = 0$

$\Rightarrow a^2\alpha\beta x^2 - \{a^2(\alpha+\beta)^2 - 2a^2\alpha\beta\}x + a^2\alpha\beta = 0$

$\Rightarrow \alpha\beta x^2 - \{\alpha^2 + \beta^2 + 2\alpha\beta - 2\alpha\beta\}x + \alpha\beta = 0$

$\Rightarrow \alpha\beta x^2 - \alpha^2 x - \beta^2 x + \alpha\beta = 0$

$\Rightarrow \alpha x(\beta x - \alpha) - \beta(\beta x - \alpha) = 0$

$\Rightarrow (\beta x - \alpha)(\alpha x - \beta) = 0 \Rightarrow x = \frac{\alpha}{\beta}, \frac{\beta}{\alpha}$

$\therefore ac(x^2+1) - (b^2 - 2ac)x = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় $\frac{\alpha}{\beta}$ এবং $\frac{\beta}{\alpha}$

7(c) $x^2 - bx + c = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় α, β এবং $x^2 - cx + b = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় γ, δ হলে এরূপ সমীকরণ নির্ণয় কর যার মূলদ্বয় $\frac{1}{\alpha\gamma} + \frac{1}{\beta\delta}$ এবং $\frac{1}{\alpha\delta} + \frac{1}{\beta\gamma}$ হয়।

প্রমাণ: $x^2 - bx + c = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় α ও β হলে, $\alpha + \beta = b$ এবং $\alpha\beta = c$

আবার, $x^2 - cx + b = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় γ, δ হলে, $\gamma + \delta = c$ এবং $\gamma\delta = b$

$\frac{1}{\alpha\gamma} + \frac{1}{\beta\delta}$ এবং $\frac{1}{\alpha\delta} + \frac{1}{\beta\gamma}$ মূলদ্বয়ের সমষ্টি

$= \frac{1}{\alpha\gamma} + \frac{1}{\beta\delta} + \frac{1}{\alpha\delta} + \frac{1}{\beta\gamma}$

$= \left(\frac{1}{\alpha\gamma} + \frac{1}{\alpha\delta}\right) + \left(\frac{1}{\beta\delta} + \frac{1}{\beta\gamma}\right)$

$= \frac{1}{\alpha}\left(\frac{\gamma+\delta}{\gamma\delta}\right) + \frac{1}{\beta}\left(\frac{\gamma+\delta}{\gamma\delta}\right)$

$= \left(\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}\right)\left(\frac{\gamma+\delta}{\gamma\delta}\right) = \frac{b}{c}\cdot\frac{c}{b} = 1$

এবং গুণফল $= \left(\frac{1}{\alpha\gamma} + \frac{1}{\beta\delta}\right)\left(\frac{1}{\alpha\delta} + \frac{1}{\beta\gamma}\right)$

$= \frac{\beta\delta + \alpha\gamma}{\alpha\beta\gamma\delta} \times \frac{\beta\gamma + \alpha\delta}{\alpha\beta\gamma\delta}$

$= \left(\frac{1}{\alpha\beta}\frac{1}{\gamma\delta}\right)^2 (\beta^2\gamma\delta + \alpha\beta\delta^2 + \alpha\beta\gamma^2 + \alpha^2\gamma\delta)$

$= \frac{1}{(cb)^2}\{\alpha\beta(\gamma^2 + \delta^2) + \gamma\delta(\alpha^2 + \beta^2)\}$

$= \frac{1}{b^2c^2}[c\{(\gamma+\delta)^2 - 2\gamma\delta\} + b\{(\alpha+\beta)^2 - 2\alpha\beta\}]$

$= \frac{1}{b^2c^2}\{c(c^2 - 2b) + b(b^2 - 2c)\}$

$= \frac{1}{b^2c^2}(c^3 - 2bc + b^3 - 2bc)$

$= \frac{1}{b^2c^2}(b^3 + c^3 - 4bc)$

নির্ণেয় সমীকরণ,

$x^2 - 1x + \frac{1}{b^2c^2}(b^3 + c^3 - 4bc) = 0$

$\Rightarrow b^2c^2(x^2 - x) + b^3 + c^3 - 4bc = 0$.

7(d) $x^2 + ax + \frac{1}{4}(a^2 - b^2) = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় α, β হলে দেখাও যে, $x^2 + (a \pm b)x \pm ab = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় $\alpha + \beta, \alpha - \beta$ হবে। [রা.'০২]

প্রমাণ: দেওয়া আছে, $x^2 + ax + \frac{1}{4}(a^2 - b^2) = 0$

সমীকরণের মূলদ্বয় α এবং β.

$\therefore \alpha + \beta = -a$ এবং

$\alpha\beta = \frac{1}{4}(a^2 - b^2) \Rightarrow a^2 - 4\alpha\beta = b^2$

$\Rightarrow (\alpha+\beta)^2 - 4\alpha\beta = b^2$

$\Rightarrow (\alpha-\beta)^2 = b^2 \quad \therefore \alpha - \beta = \mp b$

এখন, $x^2 + (a \pm b)x \pm ab = 0$

$\Rightarrow x^2 + \{a - (\mp b)\} - a(\mp b) = 0$

$\Rightarrow x^2 + \{-(\alpha+\beta) - (\alpha-\beta)\}x - \{-(\alpha+\beta)(\alpha-\beta)\} = 0$

$\Rightarrow x^2 - \{(\alpha+\beta) + (\alpha-\beta)\}x + (\alpha+\beta)(\alpha-\beta) = 0$

$\therefore x^2 + (a \pm b)x \pm ab = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় $\alpha + \beta$ এবং $\alpha - \beta$ (Proved)

7(e) যদি $\alpha \pm \sqrt{\beta}$ রাশি দুইটি $x^2 + px + q = 0$ সমীকরণের মূল হয়, তবে দেখাও যে, $(p^2 - 4q)(p^2x^2 + 4px) - 16q = 0$ সমীকরণের মূল দুইটি হবে $\frac{1}{\alpha} \pm \frac{1}{\sqrt{\beta}}$. [চুয়েট'০৭-০৮]

প্রমাণ: দেওয়া আছে, $x^2 + px + q = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় $\alpha + \sqrt{\beta}$ ও $\alpha - \sqrt{\beta}$.

$\therefore \alpha + \sqrt{\beta} + \alpha - \sqrt{\beta} = -p$

$\Rightarrow 2\alpha = -p \Rightarrow p = 2\alpha$ এবং

$(\alpha + \sqrt{\beta})(\alpha - \sqrt{\beta}) = q \Rightarrow q = \alpha^2 - \beta$

এখন, $(p^2 - 4q)(p^2x^2 + 4px) - 16q = 0$

$\Rightarrow \{(-2\alpha)^2 - 4(\alpha^2 - \beta)\}\{(-2\alpha)^2 x^2 + 4(-2\alpha)x\} - 16(\alpha^2 - \beta) = 0$

$\Rightarrow (4\alpha^2 - 4\alpha^2 + 4\beta)(4\alpha^2x^2 - 8\alpha x) - 16(\alpha^2 - \beta) = 0$

$\Rightarrow 16\beta(\alpha^2x^2 - 2\alpha x) - 16(\alpha^2 - \beta) = 0$

$\Rightarrow \beta\alpha^2x^2 - 2\alpha\beta x - \alpha^2 + \beta = 0$

$\Rightarrow x = \frac{2\alpha\beta \pm \sqrt{4\alpha^2\beta^2 + 4\alpha^2\beta(\beta - \alpha^2)}}{2\alpha^2\beta}$

$= \frac{2\alpha\beta \pm \sqrt{4\alpha^2\beta^2 - 4\alpha^2\beta^2 + 4\alpha^4\beta}}{2\alpha^2\beta}$

$= \frac{2\alpha\beta \pm \sqrt{4\alpha^4\beta}}{2\alpha^2\beta} = \frac{2\alpha\beta \pm 2\alpha^2\sqrt{\beta}}{2\alpha^2\beta}$

$= \frac{1}{\alpha} \pm \frac{1}{\sqrt{\beta}}$

$\therefore (p^2 - 4q)(p^2x^2 + 4px) - 16q = 0$

সমীকরণের মূল দুইটি হবে $\frac{1}{\alpha} \pm \frac{1}{\sqrt{\beta}}$

8(a) $x^2 - bx + c = 0$ ও $x^2 - cx + b = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয়ের পার্থক্য একটি ধ্রুবরাশি হলে প্রমাণ কর যে, $b + c + 4 = 0$ [চ.'০১; ব.'০৪; ব.'০৮,'১০; সি.'০২,'১২; কু.'০২,'১২; দি.'১০; টেক্সটাইল'০৩-০৪]

প্রমাণঃ মনে করি, $x^2 - bx + c = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় α এবং β

$\therefore \alpha + \beta = b, \alpha\beta = c$

প্রশ্নানুসারে, $x^2 - cx + b = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় $\alpha + k$ এবং $\beta + k$, যেখানে k ধ্রুবক।

$\therefore \alpha + k + \beta + k = c \Rightarrow \alpha + \beta + 2k = c$

$\Rightarrow b + 2k = c$ [$\because \alpha + \beta = b$]

$\Rightarrow k = \frac{1}{2}(c-b)$......(i) এবং $(\alpha - k)(\beta - k) = b$

$\Rightarrow \alpha\beta - k(\alpha+\beta) - k^2 = b \Rightarrow c - kb - k^2 = b$

$\Rightarrow c - \frac{1}{2}(c-b).b - \frac{1}{4}(c-b)^2 = b$ [(i) দ্বারা]

$\Rightarrow 4c - 2bc - 2b^2 - c^2 - b^2 - 2bc - 4b = 0$

$\Rightarrow 4c - b^2 - c^2 - 4b = 0$

$\Rightarrow 4(c-b) - (c-b)(c-b) = 0$

$\Rightarrow (c-b)(b-c+4) = 0$

$\therefore\ b - c + 4 = 0\ [\because b \neq c]$ (Proved)

8(b) $a_1x^2 + b_1x + c_1 = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয়ের অনুপাত $a_2x^2 + b_2x + c_2 = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয়ের অনুপাতের সমান হলে দেখাও যে, $\frac{b_1^2}{b_2^2} = \frac{a_1c_1}{a_2c_2}$ [য.'০৩]

প্রমাণঃ ধরি, $a_1x^2 + b_1x + c_1 = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় α, β এবং $a_2x^2 + b_2x + c_2 = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় γ, δ.

প্রশ্নমতে, $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta} \Rightarrow \frac{\alpha+\beta}{\alpha-\beta} = \frac{\gamma+\delta}{\gamma-\delta}$

$$\Rightarrow \frac{(\alpha+\beta)^2}{(\gamma+\delta)^2} = \frac{(\alpha-\beta)^2}{(\gamma-\delta)^2}$$

$$\Rightarrow \frac{(\alpha+\beta)^2}{(\gamma+\delta)^2} = \frac{(\alpha+\beta)^2 - 4\alpha\beta}{(\gamma+\delta)^2 - 4\gamma\delta}$$

$$= \frac{(\alpha+\beta)^2 - \{(\alpha+\beta)^2 - 4\alpha\beta\}}{(\gamma+\delta)^2 - \{(\gamma+\delta)^2 - 4\gamma\delta\}}$$

$$\Rightarrow \frac{(\alpha+\beta)^2}{(\gamma+\delta)^2} = \frac{4\alpha\beta}{4\gamma\delta} = \frac{\alpha\beta}{\gamma\delta}$$

$$\Rightarrow \frac{(-b_1/a_1)^2}{(-b_2/a_2)^2} = \frac{c_1/a_1}{c_2/a_2}$$

$$\Rightarrow \frac{b_1^2/a_1^2}{b_2^2/a_2^2} = \frac{c_1/a_1}{c_2/a_2} \Rightarrow \frac{b_1^2}{a_1^2} \times \frac{a_2^2}{b_2^2} = \frac{c_1}{a_1} \times \frac{a_2}{c_2}$$

$$\Rightarrow \frac{b_1^2}{b_2^2} = \frac{c_1}{a_1} \times \frac{a_2}{c_2} \times \frac{a_1^2}{a_2^2}\ \therefore \frac{b_1^2}{b_2^2} = \frac{a_1c_1}{a_2c_2}$$

9(a) $ax^2 + bx + b = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয়ের অনুপাত $m : n$ হলে দেখাও যে, $\sqrt{\frac{m}{n}} + \sqrt{\frac{n}{m}} + \sqrt{\frac{b}{a}} = 0$ [কু.'০৭,'১০,'১৫; ব.'০৮, '০৯; ঢা.'০৮; চ.'০২,'১৫; রা.সি.দি.'১২,'১৫; মা.'১৫]

প্রমাণঃ মনে করি, $ax^2 + bx + b = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় $m\alpha$ এবং $n\alpha$.

$\therefore\ (m+n)\alpha = -\frac{b}{a} \Rightarrow m + n = -\frac{b}{a\alpha}$ এবং

$mn\alpha^2 = \frac{b}{a} \Rightarrow mn = \frac{b}{a\alpha^2}$

এখন, $\sqrt{\frac{m}{n}} + \sqrt{\frac{n}{m}} + \sqrt{\frac{b}{a}} = \frac{\sqrt{m}}{\sqrt{n}} + \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{m}} + \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}}$

$$= \frac{m+n}{\sqrt{mn}} + \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}} = -\frac{b}{a\alpha} \times \sqrt{\frac{a\alpha^2}{b}} + \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}}$$

$$= -\frac{b}{a\alpha} \times \frac{\alpha\sqrt{a}}{\sqrt{b}} + \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}} = -\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}} + \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}} = 0$$

$\therefore\ \sqrt{\frac{m}{n}} + \sqrt{\frac{n}{m}} + \sqrt{\frac{b}{a}} = 0$ (Showed)

9(b) $27x^2 + 6x - (p+2) = 0$ সমীকরণের একটি মূল অপরটির বর্গ হলে, p এর মান নির্ণয় কর। [রা.'০৫,'১২; ব.'১৪, '০৯; ঢা.'০৪; কু.'০৫; চ.'০৭,'১২; য. '০৯,'১৩; সি.'১১,'১৫; চুয়েট'০৮-০৯]

সমাধানঃ মনে করি, $27x^2 + 6x - (p+2) = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় α এবং α^2.

$\therefore\ \alpha + \alpha^2 = -\frac{2}{9}$ ......(i) এবং

$\alpha.\alpha^2 = -\frac{p+2}{27} \Rightarrow \alpha^3 = -\frac{p+2}{27}$ ......(ii)

(i) হতে আমরা পাই, $9\alpha + 9\alpha^2 = -2$

$\Rightarrow 9\alpha^2 + 9\alpha + 2 = 0$

$\Rightarrow 9\alpha^2 + 6\alpha + 3\alpha + 2 = 0$

$\Rightarrow 3\alpha(3\alpha + 2) + 1(3\alpha + 2) = 0$

$\Rightarrow (3\alpha + 2)(3\alpha + 1) = 0$

$\therefore\ 3\alpha + 2 = 0 \Rightarrow \alpha = -\frac{2}{3}$

অথবা $3\alpha + 1 = 0 \Rightarrow \alpha = -\frac{1}{3}$

$\alpha = -\frac{1}{3}$ হলে (ii) হতে $(-\frac{1}{3})^3 = -\frac{p+2}{27}$

$\Rightarrow -(p+2) = -1 \Rightarrow p = 1 - 2 = -1$

$\alpha = -\frac{2}{3}$ হলে (ii) হতে $(-\frac{2}{3})^3 = -\frac{p+2}{27}$

$\Rightarrow -(p+2) = -8 \Rightarrow p = 8 - 2 = 6$

$\therefore\ p = -1, 6$ (Ans.)

9(c) $x^2 + px + q = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয়ের পার্থক্য 1 হলে দেখাও যে, $p^2 + 4q^2 = (1+2q)^2$ [ঢা.'০২,'০৭; চ.'০৫; রা.'০৬,'১৩; ব.'০৮; মা.'১৪]

প্রমাণঃ মনে করি, $x^2 + px + q = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় α এবং $\alpha + 1$

$\therefore\ \alpha + \alpha + 1 = -p \Rightarrow 2\alpha = -p - 1$

$\Rightarrow \alpha = \frac{1}{2}(-p-1)$ এবং

$\alpha(\alpha + 1) = q \Rightarrow \alpha^2 + \alpha = q$

$\Rightarrow \frac{1}{4}(p+1)^2 - \frac{1}{2}(p+1) = q$

$\Rightarrow p^2 + 2p + 1 - 2p - 2 = 4q \Rightarrow p^2 = 4q + 1$

এখন, L.H.S. $= p^2 + 4q^2 = 4q + 1 + 4q^2$

$= (2q)^2 + 2.2q.1 + 1^2 = (2q+1)^2 =$ R.H.S.

9(d) k এর মান কত হলে, $(k^2 - 3)x^2 + 3kx + 3k + 1 = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় পরস্পর উল্টো হবে? [ব.'০১; কু. '১০; বুয়েট'০৪-০৫]

প্রমাণঃ ধরি, $(k^2 - 3)x^2 + 3kx + 3k + 1 = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় α এবং α^{-1}

$\therefore$ মূলদ্বয়ের গুনফল, $\alpha\alpha^{-1} = \frac{3k+1}{k^2-3}$

$\Rightarrow 1 = \frac{3k+1}{k^2-3} \Rightarrow k^2 - 3 = 3k + 1$

$\Rightarrow k^2 - 3k - 4 = 0 \Rightarrow (k-4)(k+1) = 0$

$\therefore\ k = -1, 4$

9(e) $\frac{1}{x} + \frac{1}{p-x} = \frac{1}{q}$ সমীকরণের মূলদ্বয়ের অন্তর r হলে p কে q ও r এর মাধ্যমে প্রকাশ কর। [য.'০২; রা.'০৫; সি.'০৪,'০৮; ঢা.'০২; চ.বি.'১১]

সমাধানঃ $\frac{1}{x} + \frac{1}{p-x} = \frac{1}{q}$

$\Rightarrow \frac{p - x + x}{x(p-x)} = \frac{1}{q} \Rightarrow pq = px - x^2$

$\Rightarrow x^2 - px + pq = 0$

এখন মনে করি, $x^2 - px + pq = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় α এবং $\alpha + r$.

$\therefore\ \alpha + \alpha + r = p \Rightarrow 2\alpha = p - r$

$\Rightarrow \alpha = \frac{1}{2}(p-r)$......(i) এবং

$\alpha(\alpha + r) = pq \Rightarrow \alpha^2 + r\alpha = pq$

$\Rightarrow \frac{1}{4}(p-r)^2 + \frac{1}{2}r(p-r) - pq = 0$

$\Rightarrow p^2 - 2pr + r^2 + 2pr - 2r^2 - 4pq = 0$

$\Rightarrow p^2 - 4pq - r^2 = 0$

$$\therefore\ p = \frac{4q \pm \sqrt{16q^2 - 4.1.(-r^2)}}{2.1}$$

$$= \frac{4q \pm 2\sqrt{4q^2 + r^2}}{2} = 2q \pm \sqrt{4q^2 + r^2}$$

9(f) $ax^2 + bx + c = 0$ সমীকরণের একটি মূল অপরটির বর্গ হলে প্রমাণ কর যে,

(i) $a^2c + ac^2 + b^3 = 3abc$ [ঢা. '০৯]

(ii) $c(a-b)^3 = a(c-b)^3$ [চ.'০২; ব.'০৭]

প্রমাণঃ মনে করি, $ax^2 + bx + c = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় α এবং α^2

$\therefore \alpha + \alpha^2 = -\frac{b}{a}$ ……(i) এবং

$\alpha.\alpha^2 = \frac{c}{a} \Rightarrow \alpha^3 = \frac{c}{a}$ ……(ii)

(i) হতে পাই, $(\alpha + \alpha^2)^3 = (-\frac{b}{a})^3$

$\Rightarrow \alpha^3 + \alpha^6 + 3\alpha^3(\alpha + \alpha^2) = -\frac{b^3}{a^3}$

$\Rightarrow \frac{c}{a} + (\frac{c}{a})^2 + 3\frac{c}{a}(-\frac{b}{a}) = -\frac{b^3}{a^3}$

$\Rightarrow ca^2 + c^2a - 3abc = -b^3$

$\Rightarrow a^2c + ac^2 + b^3 = 3abc$

(ii) $\frac{(a-b)^3}{(c-b)^3} = \frac{\left\{\frac{a}{a} - \frac{b}{a}\right\}^3}{\left\{\frac{c}{a} - \frac{b}{a}\right\}^3}$

$= \frac{(1+\alpha+\alpha^2)^3}{(\alpha^3+\alpha+\alpha^2)^3} = \frac{(1+\alpha+\alpha^2)^3}{\{\alpha(1+\alpha+\alpha^2)\}^3}$

$= \frac{(1+\alpha+\alpha^2)^3}{\alpha^3(1+\alpha+\alpha^2)^3} = \frac{1}{\alpha^3} = \frac{a}{c}$

$\therefore c(a-b)^3 = a(c-b)^3$

9(g) যদি $x^2 - px + q = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় ক্রমিক পূর্ণ সংখ্যা হয়, তবে প্রমাণ কর যে, $p^2 - 4q - 1 = 0$

[ঢা.'০৩,'১৩; দি.'০৯; ব. '১০; য.'১১]

প্রমাণঃ মনে করি, $x^2 - px + q = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় α এবং $\alpha + 1$

$\therefore \alpha + \alpha + 1 = p \Rightarrow 2\alpha = p - 1$

$\Rightarrow \alpha = \frac{1}{2}(p-1)$ এবং

$\alpha(\alpha+1) = q \Rightarrow \alpha^2 + \alpha = q$

$\Rightarrow \frac{1}{4}(p-1)^2 + \frac{1}{2}(p-1) = q$

$\Rightarrow p^2 - 2p + 1 + 2p - 2 - 4q = 0$

$\Rightarrow p^2 - 4q - 1 = 0$

9(h) $2bx^2 + 2(a+b)x + 3a = 2b$ সমীকরণের একটি মূল অপরটির দ্বিগুণ হলে দেখাও যে, $a = 2b$ অথবা, $4a = 11b$. [রা.'০৪; চ.'১০]

প্রমাণঃ ধরি, $2bx^2 + 2(a+b)x + 3a = 2b$

$\Rightarrow 2bx^2 + 2(a+b)x + 3a - 2b = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় α এবং 2α.

$\therefore \alpha + 2\alpha = -\frac{2(a+b)}{2b} \Rightarrow 3\alpha = -\frac{(a+b)}{b}$

$\Rightarrow \alpha = -\frac{(a+b)}{3b}$ এবং

$\alpha.2\alpha = \frac{3a-2b}{2b} \Rightarrow \alpha^2 = \frac{3a-2b}{4b}$

$\Rightarrow \left\{-\frac{a+b}{3b}\right\}^2 = \frac{3a-2b}{4b}$ $[\because \alpha = -\frac{(a+b)}{3b}]$

$\Rightarrow 4b(a+b)^2 = 9b^2(3a-2b)$

$\Rightarrow 4(a^2 + 2ab + b^2) = 9b(3a-2b)$

$\Rightarrow 4a^2 + 8ab + 4b^2 = 27ab - 18b^2$

$\Rightarrow 4a^2 - 19ab + 22b^2 = 0$

$\Rightarrow 4a^2 - 11ab - 8ab + 22b^2 = 0$

$\Rightarrow a(4a - 11b) - 2b(4a - 11b) = 0$

$\Rightarrow (a - 2b)(4a - 11b) = 0$

$\therefore a = 2b$ অথবা, $4a = 11b$

9(i) $ax^2 + bx + c = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয়ের অনুপাত 3 : 4 হলে, দেখাও যে, $12b^2 = 49ac$

[চ.'১১,'১৩ ; টেক্সটেইল'০৪-০৫]

প্রমাণঃ ধরি, প্রদত্ত সমীকরণের মূলদ্বয় 3α ও 4α।

তাহলে, $3\alpha + 4\alpha = -\frac{b}{a} \Rightarrow \alpha = -\frac{b}{7a}$ …(i)

এবং $3\alpha \times 4\alpha = \frac{c}{a} \Rightarrow 12\alpha^2 = \frac{c}{a}$

$\Rightarrow 12 \times (-\frac{b}{7a})^2 = \frac{c}{a}$. [(i) দ্বারা]

$\Rightarrow 12 \times \frac{b^2}{49a^2} = \frac{c}{a}$

$\therefore 12b^2 = 49ac$

10(a) $x^2 - (1+k^2)x + \frac{1}{2}(1+k^2+k^4) = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় α, β হলে দেখাও যে, $\alpha^2 + \beta^2 = k^2$;

প্রমাণঃ $x^2 - (1+k^2)x + \frac{1}{2}(1+k^2+k^4) = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় α এবং β বলে,

$\alpha + \beta = 1 + k^2$ ……(i) এবং

$\alpha\beta = \frac{1}{2}(1+k^2+k^4)$………(ii)

এখন, $\alpha^2 + \beta^2 = (\alpha+\beta)^2 - 2\alpha\beta$

$= (1+k^2)^2 - 2\frac{1}{2}(1+k^2+k^4)$

$= 1 + 2k^2 + k^4 - 1 - k^2 - k^4$

$\therefore \alpha^2 + \beta^2 = k^2$ (Showed)

10(b) $\frac{h^2}{a^2} + \frac{k^2}{b^2} = 1$ হলে দেখাও যে, $(h^2 - a^2)x^2 - 2hkx + k^2 - b^2$ রাশিটি পূর্ণ বর্গ হবে। [সি.'০৪ '১০]

প্রমাণঃ $(h^2 - a^2)x^2 - 2hkx + k^2 - b^2$ রাশিটি পূর্ণবর্গ হলে, $(h^2 - a^2)x^2 - 2hkx + k^2 - b^2 = 0$ …(i) সমীকরণটির মূলদ্বয় সমান হবে এবং ফলে (i) সমীকরণের নিশ্চায়ক শূন্য হবে।

$\therefore (-2hk)^2 - 4(k^2 - b^2)(h^2 - a^2) = 0$

$\Rightarrow 4h^2k^2 - 4(h^2k^2 - a^2k^2 - b^2h^2 + a^2b^2) = 0$

$\Rightarrow h^2k^2 - h^2k^2 + a^2k^2 + b^2h^2 - a^2b^2 = 0$

$\Rightarrow b^2h^2 + a^2k^2 = a^2b^2 \Rightarrow \frac{b^2h^2}{a^2b^2} + \frac{a^2k^2}{a^2b^2} = 1$

$\therefore \frac{h^2}{a^2} + \frac{k^2}{b^2} = 1$ (Showed)

10(c) $mx^2 + nx + l = 0$ সমীকরণের মূল দুইটির অনুপাত r হলে দেখাও যে, $\frac{(r+1)^2}{r} = \frac{n^2}{ml}$

[ব.'০১; কু.'০৮, বুয়েট'১০-১১]

প্রমাণঃ মনে করি, $mx^2 + nx + l = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় α এবং $r\alpha$.

$\therefore \alpha + \alpha r = -\frac{n}{m} \Rightarrow \alpha = -\frac{n}{m(1+r)}$ …(i),

$\alpha.\alpha r = \frac{l}{m} \Rightarrow \alpha^2 r = \frac{l}{m}$

$\Rightarrow r\left\{-\frac{n}{m(1+r)}\right\}^2 = \frac{l}{m} \Rightarrow r\frac{n^2}{m^2(1+r)^2} = \frac{l}{m}$

$\therefore \frac{(1+r)^2}{r} = \frac{n^2}{ml}$ (Showed)

11(a) $x^2 + kx - 6k = 0$ এবং $x^2 - 2x - k = 0$ সমীকরণদ্বয়ের একটি সাধারণ মূল থাকলে k এর মান নির্ণয় কর। [ঢা.'০০ ; চ.'০১;রা. '০১,'০৭; ব.'০৭]

সমাধানঃ মনে করি, প্রদত্ত সমীকরণদ্বয়ের সাধারণ মূলটি α । তাহলে,

$\alpha^2 + k\alpha - 6k = 0$ ……(1), এবং

$\alpha^2 - 2\alpha - k = 0$……(2)

বজ্রগুণন প্রণালীর সাহায্যে আমরা পাই,

$\frac{\alpha^2}{-k^2 - 12k} = \frac{\alpha}{-6k + k} = \frac{1}{-2-k}$

$\Rightarrow \frac{\alpha^2}{k^2 + 12k} = \frac{\alpha}{5k} = \frac{1}{k+2}$

$\therefore (5k)^2 = k(k+12)(k+2)$

$\Rightarrow k(k^2 + 14k + 24) - 25k^2 = 0$

$\Rightarrow k(k^2 + 14k + 24 - 25k) = 0$

$\Rightarrow k(k^2 - 11k + 24) = 0$

$\Rightarrow k(k-3)(k-8) = 0$

$\therefore k = 0, 3, 8$

11(b) $ax^2 + bx + c = 0$ ও $cx^2 + bx + a = 0$ সমীকরণদ্বয়ের একটি সাধারণ মূল থাকলে দেখাও যে, $c + a = \pm b$ [য.'০২; মা.বো.'০৯; ব., দি.'১৩]

প্রমাণঃ মনে করি, প্রদত্ত সমীকরণদ্বয়ের সাধারণ মূলটি α।
তাহলে, $a\alpha^2 + b\alpha + c = 0$ এবং

$$c\alpha^2 + b\alpha + a = 0$$

বজ্রগুণন প্রণালীর সাহায্যে আমরা পাই,

$$\frac{\alpha^2}{ab - bc} = \frac{\alpha}{c^2 - a^2} = \frac{1}{ab - bc}$$

$\therefore (c^2 - a^2)^2 = (ab - bc)(ab - bc)$

$\Rightarrow b(a - c)b(a - c) - (a - c)^2(a + c)^2 = 0$

$\Rightarrow (a - c)^2\{b^2 - (a + c)^2\} = 0$

এখানে, $a \neq c$. কারণ, $a = c$ হলে, প্রদত্ত সমীকরণদ্বয়ের উভয় মূলই সাধারণ হবে।

$\therefore b^2 - (a + c)^2 = 0 \Rightarrow (a + c)^2 = b^2$

$\therefore a + c = \pm b$ (Showed)

11(c) যে শর্তে $a_1x^2 + b_1x + c_1 = 0$ এবং $a_2x^2 + b_2x + c_2 = 0$ সমীকরণদ্বয়ের একটি মূল সাধারণ হতে পারে তা নির্ণয় কর। [সি.'০৩]

সমাধানঃ মনে করি, প্রদত্ত সমীকরণদ্বয়ের সাধারণ মূলটি α। তাহলে,

$$a_1\alpha^2 + b_1\alpha + c_1 = 0 \text{ এবং}$$

$$a_2\alpha^2 + b_2\alpha + c_2 = 0$$

বজ্রগুণন প্রণালীর সাহায্যে আমরা পাই,

$$\frac{\alpha^2}{b_1c_2 - b_2c_1} = \frac{\alpha}{c_1a_2 - c_2a_1} = \frac{1}{a_1b_2 - a_2b_1}$$

১ম এবং শেষ অনুপাত হতে আমরা পাই,

$$\alpha = \frac{c_1a_2 - c_2a_1}{a_1b_2 - a_2b_1}$$

আবার, ১ম ও ২য় অনুপাত হতে আমরা পাই,

$$\frac{\alpha^2}{b_1c_2 - b_2c_1} = \frac{\alpha}{c_1a_2 - c_2a_1}$$

$$\Rightarrow \frac{\alpha}{b_1c_2 - b_2c_1} = \frac{1}{c_1a_2 - c_2a_1} \quad [\because \text{এখানে } \alpha \neq 0]$$

$$\therefore \alpha = \frac{b_1c_2 - b_2c_1}{c_1a_2 - c_2a_1}$$

$$\therefore \frac{c_1a_2 - c_2a_1}{a_1b_2 - a_2b_1} = \frac{b_1c_2 - b_2c_1}{c_1a_2 - c_2a_1}$$

$\Rightarrow (c_1a_2 - c_2a_1)^2 = (b_1c_2 - b_2c_1)(a_1b_2 - a_2b_1)$
ইহাই নির্ণেয় শর্ত।

11(d) যদি $x^2 + bx + c = 0$ ও $x^2 + mx + n = 0$ সমীকরণ দুইটির একটি সাধারণ মূল থাকে, তাহলে দেখাও যে, ঐ মূলটি $(bn - cm)/(m - b)$ এর বর্গমূল হবে।

প্রমাণঃ ধরি, প্রদত্ত সমীকরণদ্বয়ের সাধারণ মূলটি α।
তাহলে, $\alpha^2 + b\alpha + c = 0$ ও $\alpha^2 + m\alpha + n = 0$
বজ্রগুণন প্রণালীর সাহায্যে আমরা পাই,

$$\frac{\alpha^2}{bn - cm} = \frac{\alpha}{c - n} = \frac{1}{m - b}$$

১ম এবং শেষ অনুপাত হতে আমরা পাই,

$$\frac{\alpha^2}{bn - cm} = \frac{1}{m - b} \Rightarrow \alpha^2 = \frac{bn - cm}{m - b}$$

$\therefore$ সাধারণ মূলটি $\dfrac{bn - cm}{m - b}$ এর বর্গমূল। (Showed)

12(a) $x^2 + px + q = 0$ এবং $x^2 + qx + p = 0$ সমীকরণ দুইটির একটি সাধারণ মূল থাকলে দেখাও যে, তাদের অপর মূল দুইটি $x^2 + x + pq = 0$ সমীকরণের মূল হবে।

[ব.'১১,'১৫; দি.'১২; টেক্সটাইল'০৪-০৫]

প্রমাণঃ মনে করি, প্রদত্ত সমীকরণদ্বয়ের সাধারণ মূলটি α।
তাহলে, $\alpha^2 + p\alpha + q = 0 \cdots\cdots(1)$ এবং

$$\alpha^2 + q\alpha + p = 0 \cdots\cdots(2)$$

$(1) - (2) \Rightarrow (p - q)\alpha + q - p = 0$

$\Rightarrow \alpha = \dfrac{p - q}{p - q} = 1$. ইহাই সাধারণ মূল।

(1)-এ $\alpha = 1$ বসিয়ে আমরা পাই, $1 + p + q = 0$

$\Rightarrow p + q = -1 \cdots\cdots(3)$

এখন, $x^2 + px + q = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয়ের গুণফল q
$\therefore$ অপর মূলটি q.

এবং $x^2 + qx + p = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয়ের গুণফল p
অপর মূলটি p.
$\therefore q$ এবং p মূল দ্বারা গঠিত সমীকরণ,
$x^2 - (q + p)x + qp = 0$
$\Rightarrow x^2 - (-1) + pq = 0$ [(3) দ্বারা]
$\Rightarrow x^2 + x + pq = 0$
অতএব, অপর মূল দুইটি $x^2 + x + pq = 0$ সমীকরণের মূল হবে।

12 (b) $p + q + r = 0$ হলে প্রমাণ কর যে, $x^2 + px + qr = 0$, $x^2 + qx + rp = 0$ এবং $x^2 + rx + pq = 0$ সমীকরণগুলোর প্রতি জোড়ার একটি করে সাধারণ মূল আছে।

সমাধানঃ $x^2 + px + qr = 0$
$\Rightarrow x^2 + (-q - r)x + qr = 0$, [$\because p + q + r = 0$]
$\Rightarrow x^2 + (-q - r)x + (-q)(-r) = 0$
$\Rightarrow (x - q)(x - r) = 0 \Rightarrow x = q, r$
$\therefore x^2 + px + qr = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় q, r.
অনুরূপে, $x^2 + qx + rp = 0$ এর মূলদ্বয় r, p এবং
$x^2 + rx + pq = 0$ এর মূলদ্বয় p, q.
$\therefore x^2 + px + qr = 0$ ও $x^2 + qx + rp = 0$ এর সাধারণ মূল r, $x^2 + qx + rp = 0$ ও $x^2 + rx + pq = 0$ এর সাধারণ মূল p এবং $x^2 + rx + pq = 0$ ও $x^2 + px + qr = 0$ এর সাধারণ মূল q.
$\therefore p + q + r = 0$ হলে প্রদত্ত সমীকরণগুলোর প্রতি জোড়ার একটি করে সাধারণ মূল আছে।

(c) যদি $x^2 + lx + m = 0$ এবং $x^2 + mx + l = 0$ $(m \neq l)$ সমীকরণ দুইটির একটি সাধারণ মূল থাকে, তাহলে $2x^2 + (l + m)x = (l + m)^2$ সমীকরণের মূলদ্বয় নির্ণয় কর।

সমাধান : মনে করি, প্রদত্ত সমীকরণদ্বয়ের সাধারণ মূলটি α। তাহলে

$\alpha^2 + l\alpha + m = 0 \cdots\cdots(1)$ এবং

$\alpha^2 + m\alpha + l = 0 \cdots\cdots(2)$

বজ্রগুণন প্রণালীর সাহায্যে আমরা পাই,

$$\frac{\alpha^2}{l^2 - m^2} = \frac{\alpha}{m - l} = \frac{1}{m - l}$$

$\therefore (m - l)^2 = (l^2 - m^2)(m - l)$

$\Rightarrow (m - l)^2 = -(m - l)(m - l)(m + l)$

$\Rightarrow (m - l)^2(m + l + 1) = 0$

$\therefore l + m + 1 = 0$ [$\because l = m$ হলে উভয় মূল সাধারণ হবে।]

এখন, $2x^2 + (l + m)x = (l + m)^2$

$\Rightarrow 2x^2 + (-1)x = (-1)^2$

$\Rightarrow 2x^2 - x - 1 = 0 \Rightarrow 2x^2 - 2x + x - 1 = 0$

$\Rightarrow 2x(x - 1) + 1(x - 1) = 0$

$\Rightarrow (x - 1)(2x + 1) = 0 \therefore x = -\dfrac{1}{2}, 1$ (Ans.)

12(d) যদি $x^2 + px + q = 0$ এবং $x^2 + qx + p = 0$ $(p \neq q)$ সমীকরণদ্বয়ের একটি সাধারণ মূল থাকে, তবে $2x^2 + (p + q - 2)x = (p + q - 2)^2$ সমীকরণটির মূল নির্ণয় কর। [বুয়েট'০২-০৩]

সমাধানঃ মনে করি, প্রদত্ত সমীকরণদ্বয়ের সাধারণ মূলটি α। তাহলে,

$\alpha^2 + p\alpha + q = 0 \cdots\cdots(1)$ এবং

$\alpha^2 + q\alpha + p = 0 \cdots\cdots(2)$

বজ্রগুণন প্রণালীর সাহায্যে আমরা পাই,

$$\frac{\alpha^2}{p^2 - q^2} = \frac{\alpha}{q - p} = \frac{1}{q - p}$$

$\therefore (q - p)^2 = (p^2 - q^2)(q - p)$

$\Rightarrow (q - l)^2 = -(q - p)(q - p)(q + p)$

$\Rightarrow (q - p)^2(q + p + 1) = 0$

$\therefore p + q + 1 = 0$ [$p = q$ হলে উভয় মূল সাধারণ হবে।]

এখন, $2x^2 + (p + q - 2)x = (p + q - 2)$

$\Rightarrow 2x^2 + (p + q + 1 - 3)x = (p + q + 1 - 3)^2$

$\Rightarrow 2x^2 - 3x - (-3)^2 = 0 \Rightarrow 2x^2 - 3x - 9 = 0$

$\Rightarrow 2x^2 - 6x + 3x - 9 = 0$

$\Rightarrow 2x(x-3)+3(x-3)=0$

$\Rightarrow (x-3)(2x+3)=0$

$\therefore x=3,\ -\frac{3}{2}$ (Ans.)

12(c) যদি $ax^2+2cx+b=0$ এবং $ax^2+2bx+c=0$ ($b \neq c$) সমীকরণ দুইটির একটি সাধারণ মূল থাকে, তবে $a+4b+4c$ এর মান নির্ণয় কর। [বুয়েট'০৯-১০]

সমাধানঃ মনে করি, প্রদত্ত সমীকরণদ্বয়ের সাধারণ মূলটি α। তাহলে,

$a\alpha^2+2c\alpha+b=0$ ……(1) এবং

$a\alpha^2+2b\alpha+c=0$……(2)

বিয়োগ করে, $(2c-2b)\alpha+(b-c)=0$

$\Rightarrow \alpha=\frac{b-c}{2(b-c)}=\frac{1}{2}$

(1) হতে পাই, $a\frac{1}{4}+2c\times\frac{1}{2}+b=0$

$\Rightarrow a+4b+4c=0$ (Ans.)

13. দেখাও যে, $2x^3-2bx^2-2b^2x-4b^3$ এর একটি উৎপাদক $x-2b$.

প্রমাণঃ ধরি, $f(x)=2x^3-2bx^2-2b^2x-4b^3$

$\therefore f(2b)=2.(2b)^3-2b(2b)^2-2b^2(2b)-4b^3$

$=16b^3-8b^3-4b^3-4b^3$

$=16b^3-16b^3=0$

$\therefore$ ভাগশেষ উপপাদ্যে সাহায্যে, $x-(2b)=x-2b$ হবে $f(x)=2x^3-2bx^2-2b^2x-4b^3$ বহুপদীর একটি উৎপাদক।

14(a) দুইটি মূলের অনুপাত 3 : 4 হলে, $2x^3-x^2-22x-24=0$ সমীকরণটি সমাধান কর।

[য.'০১; সি.'০৭,'১০; রা.'০৭; দি.'১১]

সমাধানঃ ধরি, প্রদত্ত সমীকরণের মূলগুলো $3\alpha, 4\alpha$ এবং β

$\therefore 3\alpha+4\alpha+\beta=-\left(\frac{-1}{2}\right)$

$\Rightarrow 7\alpha+\beta=\frac{1}{2} \Rightarrow \beta=\frac{1}{2}-7\alpha$……(i) এবং

$3\alpha.4\alpha+4\alpha.\beta+\beta.3\alpha=\frac{-22}{2}=-11$

$\Rightarrow 12\alpha^2+7\alpha\beta=-11$

$\Rightarrow 12\alpha^2+7\alpha(\frac{1}{2}-7\alpha)=-11$ [(i) নং দ্বারা]

$\Rightarrow 24\alpha^2+7\alpha-98\alpha^2=-22$

$\Rightarrow -74\alpha^2+7\alpha+22=0$

$\Rightarrow 74\alpha^2-7\alpha-22=0$

$\Rightarrow 74\alpha^2-44\alpha+37\alpha-22=0$

$\Rightarrow 2\alpha(37\alpha-22)+1(37\alpha-22)=0$

$\Rightarrow (37\alpha-22)(2\alpha+1)=0$

$\therefore 2\alpha+1 \Rightarrow \alpha=-\frac{1}{2}$

অথবা, $37\alpha-22=0 \Rightarrow \alpha=\frac{22}{37}$

এখানে, মূল তিনটির গুণফল = 12

$\alpha=-\frac{1}{2}$ হলে, $\beta=\frac{1}{2}-7(-\frac{1}{2})=\frac{1}{2}+\frac{7}{2}=4.$

এক্ষেত্রে প্রদত্ত সমীকরণের মূল তিনটি $-\frac{3}{2},\ -2,\ 4$;

যাদের গুণফল $=(-\frac{3}{2})(-2).4=12$

আবার, $\alpha=\frac{22}{37}$ হলে, $\beta=\frac{1}{2}-\frac{154}{37}=\frac{-271}{74}$

এক্ষেত্রে সমীকরণের মূল তিনটি $\frac{66}{37},\frac{88}{37},\frac{-271}{74}$;

যাদের গুণফল $=\frac{66}{37}.\frac{88}{37}.\frac{-271}{74}\neq 12$

$\therefore$ প্রদত্ত সমীকরণের মূলগুলো $-\frac{3}{2},\ -2,\ 4$

14(b) দুইটি মূলের যোগফল শূন্য হলে, $4x^3+16x^2-9x-36=0$ সমীকরণটি সমাধান কর। [কু.'০৩]

সমাধান: ধরি, প্রদত্ত সমীকরণের মূলগুলো $\alpha, -\alpha$ এবং β

$\therefore \alpha-\alpha+\beta=-\frac{16}{4} \Rightarrow \beta=-4$

$\alpha\times-\alpha\times\beta=-(\frac{-36}{4})$

$\Rightarrow -\alpha^2=\frac{9}{\beta}=\frac{9}{-4} \quad \therefore \alpha=\pm\frac{3}{2}$

অতএব, প্রদত্ত সমীকরণের মূলগুলো $-\frac{3}{2},\ \frac{3}{2},\ -4$

14(c) $3x^3-26x^2+52x-24=0$ সমীকরণের মূলগুলো গুণোত্তর শ্রেণীভুক্ত হলে, সমীকরণটি সমাধান কর। [কু.'০৪]

সমাধান: মনে করি, প্রদত্ত সমীকরণের মূলগুলো $\alpha/\beta,\ \alpha,\ \alpha\beta$

$\therefore \frac{\alpha}{\beta}.\alpha.\alpha\beta=-\left(\frac{-24}{3}\right) \Rightarrow \alpha^3=8 \ \therefore \alpha=2$

এবং $\frac{\alpha}{\beta}+\alpha+\alpha\beta=-\left(\frac{-26}{3}\right)$

$\Rightarrow \alpha(\frac{1}{\beta}+1+\beta)=\frac{26}{3}$

$\Rightarrow 2(\frac{1+\beta+\beta^2}{\beta})=\frac{26}{3} \Rightarrow \frac{1+\beta+\beta^2}{\beta}=\frac{13}{3}$

$\Rightarrow 3\beta^2+3\beta+3=13\beta \Rightarrow 3\beta^2-10\beta+3=0$

$\Rightarrow 3\beta^2-9\beta-\beta+3=0$

$\Rightarrow 3\beta(\beta-3)-1(\beta-3)=0$

$\Rightarrow (\beta-3)(3\beta-1)=0 \Rightarrow \beta=3,\ \frac{1}{3}$

$\beta=3$ হলে, $\frac{\alpha}{\beta}=\frac{2}{3}$, $\alpha\beta=2\times3=6$ এবং

$\beta=\frac{1}{3}$ হলে, $\frac{\alpha}{\beta}=6$, $\alpha\beta=\frac{2}{3}$

অতএব, প্রদত্ত সমীকরণের মূলগুলো $\frac{2}{3},\ 2,\ 6$

14(d) $x^4-5x^3+10x^2-10x+4=0$ সমীকরণের একটি মূল $1+i$ হলে, অপর মূলগুলো নির্ণয় কর। [চ.'০৩; কু.'১৫]

সমাধান: প্রদত্ত সমীকরণের একটি মূল $1+i$, যা জটিল।

$\therefore$ অপর একটি মূল $1-i$

[$\because$ জটিল মূল যুগল রূপে আসে।]

$\therefore$ এ জটিল মূল দুইটির যোগফল $=1+i+1-i=2$

এবং গুণফল $=(1+i)(1-i)=1-i^2=2$

$\therefore$ $1+i$ এবং $1-i$ মূল দ্বারা গঠিত সমীকরণ,

$x^2-2x+2=0$

এখন, $x^4-5x^3+10x^2-10x+4=0$

$\Rightarrow x^2(x^2-2x+2)-3x(x^2-2x+2)+2(x^2-2x+2)=0$

$\Rightarrow (x^2-2x+2)(x^2-3x+2)=0$

$\therefore x^2-3x+2=0 \Rightarrow x^2-2x-x+2$

$\Rightarrow x(x-2)-1(x-2)=0$

$\Rightarrow (x-1)(x-2)=0 \quad \therefore x=1,\ 2$

অতএব, প্রদত্ত সমীকরণের অপর মূলগুলো $1-i,\ 1,\ 2$

14(e) $x^3-px^2+qx-r=0$ সমীকরণের মূলগুলো সমান্তর শ্রেণীভুক্ত হবার শর্ত নির্ণয় কর।

সমাধানঃ মনে করি, প্রদত্ত সমীকরণের মূলগুলো $a-d,\ a,\ a+d.$

$\therefore a-d+a+a+d=-\frac{-p}{1}=p$

$\Rightarrow 3a=p \Rightarrow a=\frac{p}{3}$ ……… (1)

$(a-d)a+a(a+d)+(a+d)(a-d)=q$

$\Rightarrow a^2-ad+a^2+ad+a^2-d^2=q$

$\Rightarrow 3a^2-d^2=q$ ……… (2) এবং

$(a-d)a(a+d)=r$

$\Rightarrow a(a^2-d^2)=r$ ………… (3)

(3) নং সমীকরণে $a=\frac{p}{3}$ বসিয়ে পাই,

$\frac{p}{3}(\frac{p^2}{9}-d^2)=r \Rightarrow \frac{p^2}{9}-d^2=\frac{3r}{p}$

$\Rightarrow d^2=\frac{p^2}{9}-\frac{3r}{p}$

আবার, (2) নং সমীকরণে d^2 এবং a^2 এর মান বসিয়ে পাই, $3.\frac{p^2}{9}-\frac{p^2}{9}+\frac{3r}{p}=q \Rightarrow 2\frac{p^2}{9}+\frac{3r}{p}=q$

$\Rightarrow 2p^3+27r=9pq$

$\therefore$ $2p^3+27r-9pq=0$, ইহাই নির্ণেয় শর্ত।

14(f) $32x^3-48x^2+22x-3=0$ সমীকরণের মূলগুলো সমান্তর শ্রেণীভুক্ত হলে, সমীকরণটি সমাধান কর। [কু.'১২]

সমাধান: ধরি, প্রদত্ত সমীকরণের মূলগুলি $a-d, a, a+d$

$\therefore$ মূলগুলির যোগফল,

$a-d+a+a+d=-\frac{-48}{32}=\frac{3}{2}$

$\Rightarrow 3a=\frac{3}{2} \Rightarrow a=\frac{1}{2}$

মূলগুলির গুণফল, $(a-d)a(a+d)=\frac{-3}{32}$

$\Rightarrow a(a^2-d^2)=\frac{-3}{32} \Rightarrow \frac{1}{2}(\frac{1}{4}-d^2)=\frac{-3}{32}$

$\Rightarrow \frac{1}{4}-d^2=\frac{-3}{16} \Rightarrow d^2=\frac{1}{4}+\frac{3}{16}=\frac{7}{16}$

$\therefore d=\pm\frac{\sqrt{7}}{4}$

$d=\frac{\sqrt{7}}{4}$ নিয়ে আমরা পাই,

$a-d=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{7}}{4}=\frac{2-\sqrt{7}}{4}$

$a+d=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{7}}{4}=\frac{2+\sqrt{7}}{4}$

$d=-\frac{\sqrt{7}}{4}$ নিয়েও প্রদত্ত সমীকরণের একই মূল পাওয়া যায়।

অতএব, প্রদত্ত সমীকরণের মূলগুলি $\frac{2-\sqrt{7}}{4}, \frac{1}{2}, \frac{2+\sqrt{7}}{4}$.

14(g) $8x^4-2x^3-27x^2+6x+9=0$ সমীকরণের যেকোনো দুইটি মূলের যোগফল শূন্য হলে সমীকরণটির অপর দুইটি মূলের মান নির্ণয় কর। [চুয়েট' ০৯-১০]

সমাধান: ধরি, প্রদত্ত সমীকরণের মূলগুলি $\alpha, -\alpha, \beta$ ও γ. তাহলে,

$\alpha-\alpha+\beta+\gamma=-\frac{-2}{8}=\frac{1}{4} \Rightarrow \beta+\gamma=\frac{1}{4}$

আবার, $\alpha(-\alpha)\beta+\alpha(-\alpha)\gamma+\alpha\beta\gamma+(-\alpha)\beta\gamma=-\frac{6}{8}$

$\Rightarrow -\alpha^2\beta-\alpha^2\gamma+\alpha\beta\gamma-\alpha\beta\gamma=-\frac{3}{4}$

$\Rightarrow -\alpha^2(\beta+\gamma)=-\frac{3}{4} \Rightarrow \alpha^2\times\frac{1}{4}=\frac{3}{4} \Rightarrow \alpha^2=3$

এবং $-\alpha^2\beta\gamma=\frac{9}{8} \Rightarrow -3\beta\gamma=\frac{9}{8} \Rightarrow \beta\gamma=-\frac{3}{8}$

এখন, β, γ দ্বারা গঠিত সমীকরণ,

$x^2-(\beta+\gamma)x+\beta\gamma=0$

$\Rightarrow x^2-\frac{1}{4}x-\frac{3}{8}=0 \Rightarrow 8x^2-2x-3=0$

$\Rightarrow 8x^2-6x+4x-3=0$

$\Rightarrow 2x(4x-3)+1(4x-3)=0$

$\Rightarrow (4x-3)(2x+1)=0$

$\Rightarrow x=\frac{3}{4}, -\frac{1}{2}$

$\therefore$ নির্ণেয় মূলদ্বয় $\frac{3}{4}$ ও $-\frac{1}{2}$.

সম্ভাব্য ধাপসহ প্রশ্ন:

1. $3x^2+2x+1=0$ সমীকরণের মূলের প্রকৃতি নির্ণয় কর এবং সমাধান করে তোমার উক্তির সত্যতা যাচাই কর।

সমাধান: পৃথায়ক $=2^2-4.3.1=4-12=-8<0$ (১)

$\therefore$ প্রদত্ত সমীকরণের মূলগুলি জটিল ও অসমান। (১)

এখন, $3x^2+2x+1=0$

$\therefore x=\frac{-2\pm\sqrt{4-4.3.1}}{2.1}=\frac{-2\pm\sqrt{-8}}{2}$ (১)

$=\frac{-2\pm2\sqrt{-2}}{2}=-1\pm\sqrt{-2}$

$\therefore x=-1+\sqrt{-2}, -1-\sqrt{-2}$

$\therefore$ প্রদত্ত সমীকরণের মূলগুলি জটিল ও অসমান। (১)

(যাচাই করা হল)

2. দেখাও যে, $\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x}+\frac{1}{x-k}=0$ সমীকরণটির মূলগুলো k এর সকল বাস্তব মানের জন্য বাস্তব হবে।

প্রমাণ: দেওয়া আছে, $\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x}+\frac{1}{x-k}=0$

$\Rightarrow \frac{1}{x-1}+\frac{1}{x}=-\frac{1}{x-k}$

$\Rightarrow \frac{x+x-1}{x(x-1)}=-\frac{1}{x-k} \Rightarrow \frac{2x-1}{x^2-x}=-\frac{1}{x-k}$

$\Rightarrow 2x^2-2kx-x+k=-x^2+x$

$\Rightarrow 3x^2-2kx-2x+k=0$

$\Rightarrow 3x^2-2(k+1)x+k=0$

$\therefore$ পৃথায়ক $=\{-2(k+1)\}^2-4.3.k$ (১)

$=4(k^2+2k+1-3k)$

$=4(k^2-k+1)$

$=4\{(k-\frac{1}{2})^2+1-\frac{1}{4}\}$

$=4\{(k-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}\}$

k এর সকল বাস্তব মানের জন্য, $4\{(k-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}\}\geq0$

অতএব, k এর সকল বাস্তব মানের জন্য প্রদত্ত সমীকরণের মূলগুলি বাস্তব। (১)

3. $x^2+ax+b=0$ সমীকরণের মূলদ্বয় যদি সমান হয় এবং অপর সমীকরণ $x^2+ax+8=0$ এর একটি মূল যদি 4 হয়, তবে b এর মান নির্ণয় কর।

সমাধান: $x^2+ax+8=0$ এর একটি মূল 4 হলে,

$4^2+a\times4+8=0 \Rightarrow 4a=-24 \therefore a=-6$ (১)

আবার, $x^2+ax+b=0$ সমীকরণের মূলদ্বয় সমান হলে, $a^2-4.1.b=0 \Rightarrow (-6)^2=4b \therefore b=9$ (১)

4. $ax^2+bx+c=0$ সমীকরণের মূলগুলো α, β হলে মান নির্ণয় কর:

সমাধান: প্রদত্ত সমীকরণের মূলগুলো α, β.

$\therefore \alpha+\beta=\frac{-b}{a}$ এবং $\alpha\beta=\frac{c}{a}$ (১)

(a) $\alpha^4+\alpha^2\beta^2+\beta^4=(\alpha^2+\beta^2)^2-\alpha^2\beta^2$

$=\{(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta\}^2-(\alpha\beta)^2$

$=\{(\frac{-b}{a})^2-2\frac{c}{a}\}^2-(\frac{c}{a})^2$

$=(\frac{b^2}{a^2}-2\frac{c}{a})^2-\frac{c^2}{a^2}$

$=\frac{b^4}{a^4}+4\frac{c^2}{a^2}-4\frac{b^2}{a^2}.\frac{c}{a}-\frac{c^2}{a^2}$

$=\frac{b^4}{a^4}+3\frac{c^2}{a^2}-4\frac{b^2c}{a^3}$

$=\frac{1}{a^4}(b^4+3c^2a^2-4ab^2c)$ (Ans.) (১)

(b) $(a\alpha^2+b)^{-1}+(a\beta^2+b)^{-1}$

$=\frac{1}{a\alpha^2+b}+\frac{1}{a\beta^2+b}$

$=\frac{a\beta^2+b+a\alpha^2+b}{(a\alpha^2+b)(a\beta^2+b)}$

$$= \frac{a\{(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta\}+2b}{a^2\alpha^2\beta^2+ab(\alpha^2+\beta^2)+b^2}$$

$$= \frac{a\left\{\left(-\frac{b}{a}\right)^2-2\frac{c}{a}\right\}+2b}{a^2\left(\frac{c}{a}\right)^2+ab\left\{\left(-\frac{b}{a}\right)^2-2\frac{c}{a}\right\}+b^2}$$

$$= \frac{\frac{a}{a^2}(b^2-2ca)+2b}{c^2+\frac{ab}{a^2}(b^2-2ca)+b^2}$$

$$= \frac{b^2-2ca+2ab}{a}\times\frac{a}{c^2a+b^3-2abc+ab^2}$$

$$= \frac{b^2-2ca+2ab}{c^2a+b^3-2abc+ab^2} \quad \text{(Ans.)} \quad (১)$$

5. $x^2+bx+c=0$ সমীকরণের মূলদ্বয় α, β হলে $(\alpha+\beta)^2$ এবং $(\alpha-\beta)^2$ মূল বিশিষ্ট সমীকরণ নির্ণয় কর এবং b, c এর মাধ্যমে $(\alpha+b)^{-4}+(\beta+b)^{-4}$ এর মান নির্ণয় কর।

সমাধান : দেওয়া আছে, $x^2+bx+c=0$

সমীকরণের মূলদ্বয় α এবং β

$\therefore \alpha+\beta=-b, \alpha\beta=c$ (১)

$(\alpha+\beta)^2$ এবং $(\alpha-\beta)^2$ মূলদ্বয়ের সমষ্টি

$=(\alpha+\beta)^2+(\alpha-\beta)^2$

$=(-b)^2+(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta$

$=b^2+b^2-4c=2b^2-4c$ (১)

এবং গুণফল $=(\alpha+\beta)^2(\alpha-\beta)^2$

$=b^2\{(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta\}=b^2(b^2-4c)$ (১)

$\therefore$ নির্ণেয় সমীকরণ,

$x^2-2(b^2-2c)x+b^2(b^2-4c)=0$ (Ans.) (১)

দ্বিতীয় অংশ : $x^2+bx+c=0$ সমীকরণের একটি মূল α বলে, $\alpha^2+b\alpha+c=0$ (১)

$\Rightarrow \alpha(\alpha+b)=-c \Rightarrow \alpha+b=-\frac{c}{\alpha}$

$\therefore (\alpha+b)^{-4}=\left(-\frac{c}{\alpha}\right)^{-4}=\left(-\frac{\alpha}{c}\right)^4=\frac{\alpha^4}{c^4}$ (১)

অনুরূপভাবে আমরা পাই, $(\beta+b)^{-4}=\frac{\beta^4}{c^4}$ (১)

$\therefore (\alpha+b)^{-4}+(\beta+b)^{-4}=\frac{\alpha^4}{c^4}+\frac{\beta^4}{c^4}$

$=\frac{1}{c^4}(\alpha^4+\beta^4)=\frac{1}{c^4}\{(\alpha^2+\beta^2)^2-2\alpha^2\beta^2\}$

$=\frac{1}{c^4}[\{(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta\}^2-2c^2]$

$=\frac{1}{c^4}[\{b^2-2c\}^2-2c^2]$

$=\frac{1}{c^4}(b^4-4b^2c+4c^2-2c^2)$

$=\frac{1}{c^4}(b^4-4b^2c+2c^2)$ (১)

6(a) $x^2+px+q=0$ সমীকরণের মূলদ্বয় α, β এবং $x^2+px+q=0$ সমীকরণের মূলদ্বয় $\alpha+4, \beta+4$ হলে p, q এর মান নির্ণয় কর।

সমাধান : দেওয়া আছে, $x^2+px+q=0$ সমীকরণের মূলদ্বয় α, β এবং $2x^2+10px+q=0$ সমীকরণের মূলদ্বয় $\alpha+4, \beta+4$

$\therefore \alpha+\beta=-p\cdots(i), \alpha\beta=q\cdots(ii),$ (১)

$\alpha+4+\beta+4=-5p$

$\Rightarrow \alpha+\beta=-5p-8\cdots\cdots(iii)$ এবং

$(\alpha+4)(\beta+4)=\frac{q}{2}$

$\Rightarrow \alpha\beta+4(\alpha+\beta)+16=\frac{q}{2}$

$\Rightarrow q+4(-p)+16=\frac{q}{2}$ [(i)&(ii) হতে]

$\Rightarrow \frac{q}{2}-4p+16=0 \Rightarrow q=2(4p-16)\cdots(iv)$

(i) & (iii) হতে আমরা পাই, $-p=-5p-8$

$\Rightarrow 4p=-8 \therefore p=-2$

(iv) হতে আমরা পাই, $q=2(-8-16)=-48$

$\therefore p=-2$ এবং $q=-48$ (Ans.) (১)

6(b) $x^2-(a+b)x+ab=0$ সমীকরণের মূলদ্বয় $x^2+px+q=0$ সমীকরণের মূলদ্বয়ের অর্ধেক হলে p ও q এর মান a ও b এর মাধ্যমে প্রকাশ কর।

সমাধান : মনে করি, $x^2+px+q=0$

সমীকরণের মূলদ্বয় α এবং β

$\therefore \alpha+\beta=-p, \alpha\beta=q$ (১)

প্রশ্নমতে, $x^2-(a+b)x+ab=0$ সমীকরণের মূলদ্বয় 2α এবং 2β (১)

$\therefore 2(\alpha+\beta)=a+b \Rightarrow 2(-p)=a+b$

$\therefore p=-\frac{1}{2}(a+b)$ এবং $2\alpha.2\beta=ab$ (১)

$\Rightarrow 4\alpha\beta=ab \Rightarrow 4q=ab \therefore q=\frac{1}{4}ab$ (১)

7. $ax^2+bx+c=0$ সমীকরণের মূলদ্বয় α, β এবং $bx^2+cx+a=0$ সমীকরণের মূলদ্বয় γ, δ হলে কি শর্তে $\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\gamma}{\delta}$ হবে? [প্র.ভ.প.৮৬]

সমাধান : দেওয়া আছে, $ax^2+bx+c=0$ সমীকরণের মূলদ্বয় α, β এবং $bx^2+cx+a=0$ সমীকরণের মূলদ্বয় γ, δ

$\therefore \alpha+\beta=-\frac{b}{a}, \alpha\beta=\frac{c}{a}, \gamma+\delta=-\frac{c}{b}$ এবং

$\gamma\delta=\frac{a}{b}$ (১)

এখন, $\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\gamma}{\delta} \Rightarrow \frac{\alpha+\beta}{\alpha-\beta}=\frac{\gamma+\delta}{\gamma-\delta}$ (১)

$\Rightarrow \frac{\alpha+\beta}{\sqrt{(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta}}=\frac{\gamma+\delta}{\sqrt{(\gamma+\delta)^2-4\gamma\delta}}$

$\Rightarrow (\alpha+\beta)\sqrt{(\gamma+\delta)^2-4\gamma\delta}=(\gamma+\delta)\sqrt{(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta}$

$\Rightarrow -\frac{b}{a}\sqrt{\left(-\frac{c}{b}\right)^2-4\frac{a}{b}}=-\frac{c}{b}\sqrt{\left(-\frac{b}{a}\right)^2-4\frac{c}{a}}$ (১)

$\Rightarrow \frac{b^2}{a^2}\left(\frac{c^2}{b^2}-4\frac{a}{b}\right)=\frac{c^2}{b^2}\left(\frac{b^2}{a^2}-4\frac{c}{a}\right)$

$\Rightarrow \frac{b^2}{a^2}\times\frac{c^2-4ab}{b^2}=\frac{c^2}{b^2}\times\frac{b^2-4ca}{a^2}$

$\therefore b^2(c^2-4ab)=c^2(b^2-4ca)$, ইহাই নির্ণেয় শর্ত। (১)

8. যে শর্ত সাপেক্ষে px^2+qx+1 এবং qx^2+px+1 রাশি দুইটির একটি সাধারণ উৎপাদক হতে পারে তা নির্ণয় কর।

সমাধান : px^2+qx+1 এবং qx^2+px+1 রাশি দুইটির একটি সাধারণ উৎপাদক থাকলে, $px^2+qx+1=0$ এবং $qx^2+px+1=0$ সমীকরণ দুইটির একটি সাধারণ মূল থাকবে। (১)

মনে করি, সাধারণ মূলটি α। তাহলে,

$\therefore p\alpha^2+q\alpha+1=0$ এবং $q\alpha^2+p\alpha+1=0$ (১)

বজ্রগুণন প্রণালীর সাহায্যে আমরা পাই,

$$\frac{\alpha^2}{q-p}=\frac{\alpha}{q-p}=\frac{1}{p^2-q^2} \quad (১)$$

$\therefore (q-p)^2=(q-p)(p^2-q^2)$

$\Rightarrow (q-p)^2-(q-p)(p-q)(p+q)=0$

$\Rightarrow (q-p)^2+(q-p)(q-p)(p+q)=0$

$\Rightarrow (q-p)^2(1+p+q)=0$

এখানে, $p\neq q$. কারণ, $p=q$ হলে প্রদত্ত রাশিদ্বয়ের উভয় উৎপাদকই সাধারণ হবে। (১)

$\therefore p+q+1=0$, ইহাই নির্ণেয় শর্ত। (১)

9. যদি $x^2+bx+ac=0$ এবং $x^2+cx+ab=0$ সমীকরণ দুইটির একটি সাধারণ মূল থাকে, তাহলে দেখাও যে, $a+b+c=0$. আরও দেখাও যে, তাদের অপর দুইটি মূল দ্বারা $x^2+ax+bc=0$ সমীকরণটি সিদ্ধ হবে।

প্রমাণ : মনে করি, প্রদত্ত সমীকরণদ্বয়ের সাধারণ মূলটি α। তাহলে, $\alpha^2+b\alpha+ac=0$ ও $\alpha^2+c\alpha+ab=0$ (১)

বজ্রগুণন প্রণালীর সাহায্যে আমরা পাই,

$$\frac{\alpha^2}{ab^2-ac^2}=\frac{\alpha}{ac-ab}=\frac{1}{c-b} \quad (১)$$

$\therefore\ (ac-ab)^2=(ab^2-ac^2)(c-b)$

$\Rightarrow a^2(c-b)^2-a(b^2-c^2)(c-b)=0$

$\Rightarrow a^2(b-c)^2+a(b-c)^2(b+c)=0$

$\Rightarrow a(b-c)^2(a+b+c)=0$

$a=0$ হলে প্রদত্ত সমীকরণদ্বয়ের কোন সাধারণমূল থাকবে না এবং $b=c$ হলে উভয় মূলই সাধারণ হয়ে যাবে। (১)

$\therefore\ a+b+c=0.$

২য় এবং শেষ অনুপাত হতে আমরা পাই,

$\alpha=\frac{a(c-b)}{c-b}=a$, ইহাই নির্ণেয় শর্ত। (১)

এখন, $x^2+bx+ac=0$ সমীকরণের মূলদ্বয়ের গুণফল ac

$\therefore$ অপর মূলটি c (১)

আবার, $x^2+cx+ab=0$ সমীকরণের মূলদ্বয়ের গুণফল ab

$\therefore$ অপর মূলটি b

$\therefore$ b এবং c মূল দুইটি দ্বারা গঠিত সমীকরণ,

$x^2-(b+c)x+bc=0$ (১)

$\Rightarrow x^2-(-a)x+bc=0\ [\because a+b+c=0]$

$\Rightarrow x^2+ax+bc=0$

অতএব, অপর মূল দুইটি দ্বারা $x^2+ax+bc=0$ সমীকরণটি সিদ্ধ হবে।

10. দেখাও যে, $x^5-x^4+10x^3-9x^2+8x+699$ রাশিটির একটি উৎপাদক $x+3$.

সমাধান ঃ ধরি,

$f(x)=x^5-x^4+10x^3-9x^2+8x+699$

$\therefore\ f(-3)=(-3)^5-(-3)^4+10(-3)^3-9(-3)^2+8(-3)+699$ (১)

$=-243-81-270-81-24+699$

$=-699+699=0$

$\therefore$ ভাগশেষ উপপাদ্যে সাহায্যে, $x-(-3)=x+3$ হবে $f(x)=x^5-x^4+10x^3-9x^2+8x+699$ বহুপদীর একটি উৎপাদক। (১)

11(a) $2x^4-15x^3+35x^2-30x+8=0$ সমীকরণের মূলগুলো গুণোত্তর শ্রেণীভুক্ত হলে, সমীকরণটি সমাধান কর।

সমাধান: মনে করি, প্রদত্ত সমীকরণের মূলগুলো,

$\frac{\alpha}{\beta^3},\ \frac{\alpha}{\beta},\ \alpha\beta,\ \alpha\beta^3$

$\therefore\ \frac{\alpha}{\beta^3}\cdot\frac{\alpha}{\beta}\cdot\alpha\beta\cdot\alpha\beta^3=\frac{8}{2}\Rightarrow\alpha^4=4$ (১)

$\therefore\ \alpha^2=2\Rightarrow\alpha=\sqrt{2}$ এবং

$\frac{\alpha}{\beta^3}\cdot\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\alpha}{\beta^3}\cdot\alpha\beta+\frac{\alpha}{\beta^3}\cdot\alpha\beta^3+\frac{\alpha}{\beta}\cdot\alpha\beta+\frac{\alpha}{\beta}\cdot\alpha\beta^3+\alpha\beta\cdot\alpha\beta^3=\frac{35}{2}$ (১)

$\Rightarrow\alpha^2\left(\frac{1}{\beta^4}+\frac{1}{\beta^2}+1+1+\beta^2+\beta^4\right)=\frac{35}{2}$

$\Rightarrow\frac{1}{\beta^4}+\frac{1}{\beta^2}+2+\beta^2+\beta^4=\frac{35}{2\alpha^2}=\frac{35}{2.2}$

$\Rightarrow\left(\beta^2+\frac{1}{\beta^2}\right)^2+\left(\beta^2+\frac{1}{\beta^2}\right)=\frac{35}{4}$

এখন মনে করি, $m=\beta^2+\frac{1}{\beta^2}$ ...... (i)

$\therefore\ m^2+m=\frac{35}{4}$

$\Rightarrow 4m^2+4m-35=0$

$\Rightarrow 4m^2+14m-10m-35=0$

$\Rightarrow 2m(2m+7)-5(2m+7)=0$

$\Rightarrow(2m+7)(2m-5)=0$ (১)

$\therefore\ m=\frac{5}{2},\ -\frac{7}{2}$

β^2 এবং $\frac{1}{\beta^2}$ ধনাত্মক বলে $m=\frac{5}{2}$ হবে।

$\therefore$ (i) নং হতে পাই, $\beta^2+\frac{1}{\beta^2}=\frac{5}{2}$

$\Rightarrow\beta^4+1=\frac{5}{2}\beta^2\Rightarrow 2\beta^4-5\beta^2+2=0$

$\Rightarrow 2\beta^4-4\beta^2-\beta^2+2=0$

$\Rightarrow 2\beta^2(\beta^2-2)-1(\beta^2-2)=0$

$\Rightarrow(2\beta^2-1)(\beta^2-2)=0$

$\therefore\ \beta=\frac{1}{\sqrt{2}},\ \sqrt{2}$

$\beta=\sqrt{2}$ নিয়ে আমরা পাই,

$\alpha\beta=\sqrt{2}.\sqrt{2}=2,\ \frac{\alpha}{\beta}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=1,$

$\alpha\beta^3=\sqrt{2}.(\sqrt{2})^3=4,\ \frac{\alpha}{\beta^3}=\frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}=\frac{1}{2}$

$\beta=\frac{1}{\sqrt{2}}$ নিয়েও প্রদত্ত সমীকরণের একই মূল পাওয়া যায়।

অতএব, প্রদত্ত সমীকরণের মূলগুলো $\frac{1}{2}$, 1, 2, 4 (১)

11(b) $4x^3-24x^2+23x+18=0$ সমীকরণের মূলগুলো সমান্তর শ্রেণীভুক্ত হলে, সমীকরণটি সমাধান কর।

সমাধানঃ ধরি, প্রদত্ত সমীকরণের মূলগুলি $a-d, a, a+d$

$\therefore$ মূলগুলোর যোগফল,

$a-d+a+a+d=-\frac{-24}{4}=6$ (১)

$\Rightarrow 3a=6\Rightarrow a=2$

মূলগুলির গুণফল, $(a-d)a(a+d)=-\frac{18}{4}$ (১)

$\Rightarrow a(a^2-d^2)=-\frac{9}{2}\Rightarrow 2(4-d^2)=-\frac{9}{2}$

$\Rightarrow 4-d^2=-\frac{9}{4}\Rightarrow d^2=4+\frac{9}{4}=\frac{25}{4}$

$\therefore\ d=\pm\frac{5}{2}$

$d=\frac{5}{2}$ নিয়ে আমরা পাই, $a-d=2-\frac{5}{2}=-\frac{1}{2}$

$a+d=2+\frac{5}{2}=\frac{9}{2}$

$d=-\frac{5}{2}$ নিয়েও প্রদত্ত সমীকরণের একই মূল পাওয়া যায়।

অতএব, প্রদত্ত সমীকরণের মূলগুলো $-\frac{1}{2}$, 2, $\frac{9}{2}$ (১)

12. $px^2+8(q-p)x+4(4p-8q+r)=0$ সমীকরণের মূলদ্বয় $4-2\alpha$, $4-2\beta$ হলে α এবং β মূল বিশিষ্ট সমীকরণ নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ দেওয়া আছে, $4-2\alpha$ এবং $4-2\alpha$ $px^2+8(q-p)x+4(4p-8q+r)=0$ সমীকরণের মূল।

$\therefore\ 4-2\alpha+4-2\beta=-\frac{8(q-p)}{p}$ (১)

$\Rightarrow 8-2(\alpha+\beta)=-8.\frac{q}{p}+8$

$\therefore\ \alpha+\beta=4.\frac{q}{p}$ এবং

$(4-2\alpha)(4-2\beta)=\frac{1}{p}4(4p-8q+r)$ (১)

$\Rightarrow 4(2-\alpha)(2-\beta)=\frac{1}{p}4(4p-8q+r)$

$\Rightarrow 4-2(\alpha+\beta)+\alpha\beta=\frac{1}{p}(4p-8q+r)$

$\Rightarrow 4-2.4.\frac{q}{p}+\alpha\beta=4-8\frac{q}{p}+\frac{r}{p}$

$\Rightarrow\alpha\beta=\frac{r}{p}$

$\therefore$ নির্ণেয় সমীকরণ, $x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta=0$ (১)

$\Rightarrow x^2-4\frac{q}{p}x+\frac{r}{p}=0$

$\therefore\ px^2-4qx+r=0$ (Ans.) (১)

13. α, β মূল বিশিষ্ট সমীকরণ নির্ণয় কর, যেখানে $\alpha+\beta=2$ এবং $\alpha^2+\beta^2=27$ হয়। [প্র.ভ.প.'৯২]

সমাধান ঃ দেওয়া আছে, $\alpha+\beta=2$ এবং $\alpha^2+\beta^2=27$

$\Rightarrow(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=27\Rightarrow 4-2\alpha\beta=27$

$\Rightarrow 2\alpha\beta = 4 - 27 \;\therefore\; \alpha\beta = -\frac{23}{2}$

$\therefore$ নির্ণেয় সমীকরণ, $x^2 - (\alpha + \beta)x + \alpha\beta = 0$ (১)

$\Rightarrow x^2 - 2x + (-\frac{23}{2}) = 0$

$\therefore 2x^2 - 4x - 23 = 0$ (Ans.) (১)

14. α, β মূল বিশিষ্ট সমীকরণ নির্ণয় কর, যেখানে $\alpha + \beta = 7$ এবং $\frac{\beta}{\alpha} + \frac{\alpha}{\beta} + \frac{5}{2} = 0$ হয়। [প্র.ভ.প.'৯১]

সমাধান ঃ দেওয়া আছে, $\alpha + \beta = 7$ এবং

$\frac{\beta}{\alpha} + \frac{\alpha}{\beta} + \frac{5}{2} = 0$

$\Rightarrow \frac{\alpha^2 + \beta^2}{\alpha\beta} = -\frac{5}{2} \Rightarrow \frac{(\alpha+\beta)^2 - 2\alpha\beta}{\alpha\beta} = -\frac{5}{2}$

$\Rightarrow \frac{49 - 2\alpha\beta}{\alpha\beta} = -\frac{5}{2} \Rightarrow 5\alpha\beta = -98 + 4\alpha\beta$

$\therefore \alpha\beta = -98$

$\therefore$ নির্ণেয় সমীকরণ, $x^2 - (\alpha + \beta)x + \alpha\beta = 0$ (১)

$\Rightarrow x^2 - 7x - 98 = 0$ (১)

15. $p + q + r = 0$ হলে প্রমাণ কর যে, $x^2 + px + qr = 0$, $x^2 + qx + rp = 0$ এবং $x^2 + rx + pq = 0$ সমীকরণত্রয়ের প্রতি জোড়ার একটি করে সাধারণ মূল আছে।

প্রমাণ ঃ দেওয়া আছে, $p + q + r = 0$

$\therefore p = -(q + r),\; q = -(r + p),\; r = -(p + q)$

এখন, $x^2 + px + qr = 0$

$\Rightarrow x^2 - (q + r)x + qr = 0$

$\Rightarrow x^2 - qx - rx + qr = 0$

$\Rightarrow x(x - q) - r(x - q) = 0$

$\Rightarrow (x - q)(x - r) = 0 \quad \therefore x = q, r.$ (১)

$x^2 + qx + rp = 0$

$\Rightarrow x^2 - (r + p)x + rp = 0$

$\Rightarrow x^2 - rx - px + rp = 0$

$\Rightarrow x(x - r) - p(x - r) = 0$

$\Rightarrow (x - r)(x - p) = 0 \quad \therefore x = r, p.$

$x^2 + rx + pq = 0$

$\Rightarrow x^2 - (p + q)x + pq = 0$

$\Rightarrow x^2 - px - qx + pq = 0$

$\Rightarrow x(x - p) - q(x - p) = 0$

$\Rightarrow (x - p)(x - q) = 0$

$\therefore x = p, q.$

অতএব, প্রদত্ত সমীকরণত্রয়ের প্রতি জোড়ার একটি করে সাধারণ মূল আছে। (১)

16. যদি $x^2 + lx + m = 0$ ও $x^2 + mx + l = 0$ $(m \neq l)$ সমীকরণ দুইটির একটি সাধারণ বীজ থাকে, তাহলে $2x^2 + (l + m)x = (l + m)^2$ সমীকরণের বীজদ্বয় নির্ণয় কর। [প্র.ভ.প.'৮৯]

সমাধান ঃ মনে করি, প্রদত্ত সমীকরণদ্বয়ের সাধারণ মূলটি α। তাহলে,

$\alpha^2 + l\alpha + m = 0 \;\cdots\cdots(1)$ এবং

$\alpha^2 + m\alpha + l = 0 \cdots\cdots(2)$ (১)

বজ্রগুণন প্রণালীর সাহায্যে আমরা পাই,

$\frac{\alpha^2}{l^2 - m^2} = \frac{\alpha}{m - l} = \frac{1}{m - l}$ (১)

$\therefore (m - l)^2 = (l^2 - m^2)(m - l)$

$\Rightarrow (m - l)^2 = -(m - l)(m - l)(m + l)$

$\Rightarrow (m - l)^2(m + l + 1) = 0$

$\therefore l + m + 1 = 0 \quad [\because m \neq l]$ (১)

এখন, $2x^2 + (l + m)x = (l + m)^2$

$\Rightarrow 2x^2 - x - (-1)^2 = 0 \Rightarrow 2x^2 - x - 1 = 0$

$\Rightarrow 2x^2 - 2x + x - 1 = 0$

$\Rightarrow 2x(x - 1) + 1(x - 1) = 0$

$\Rightarrow (x - 1)(2x + 1) = 0$

$\therefore x = 1, -\frac{1}{2}$ (Ans.) (১)

17. $4x^2 + 2x - 1 = 0$ সমীকরণের একটি মূল $\cos\alpha$ হলে দেখাও যে, অপর মূলটি $\cos 3\alpha$.

সমাধানঃ মনে করি, অপর মূলটি β.

$\therefore$ মূলদ্বয়ের সমষ্টি, $\cos\alpha + \beta = -\frac{1}{2}$ (১)

$\Rightarrow \beta = -\frac{1}{2} - \cos\alpha$

$4x^2 + 2x - 1 = 0$ সমীকরণের একটি মূল $\cos\alpha$ বলে

$4\cos^2\alpha + 2\cos\alpha - 1 = 0$ (১)

$\Rightarrow 4\cos^3\alpha + 2\cos^2\alpha - \cos\alpha = 0$

$\Rightarrow \cos 3\alpha + 3\cos\alpha + \frac{1}{2}.4\cos^2\alpha - \cos\alpha = 0$ (১)

$[\because \cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha]$

$\Rightarrow \cos 3\alpha + 2\cos\alpha + \frac{1}{2}.(1 - 2\cos\alpha) = 0$

$[\because 4\cos^2\alpha + 2\cos\alpha - 1 = 0]$

$\Rightarrow \cos 3\alpha + 2\cos\alpha + \frac{1}{2} - \cos\alpha = 0$

$\Rightarrow \cos 3\alpha = -\frac{1}{2} - \cos\alpha = \beta \quad \therefore \beta = \cos 3\alpha$

অতএব, প্রদত্ত সমীকরণের অপর মূলটি $\cos 3\alpha$. (১)

ভর্তি পরীক্ষার MCQ :

1. $x^2 - 5x + c = 0$ সমীকরণের একটি মূল 4 হলে অপর মূলটি- [DU 08-09; JU 09-10]

Sol^n: অপর মূলটি $= -\frac{-5}{1} - 4 = 5 - 4 = 1$

2. $2x^3 + px^2 + qx - 3 = 0$ সমীকরণের দুইটি মূল -3 এবং -1 হলে p এবং q এর মান- [SUST 07-08]

Sol^n: উভয় মূল দ্বারা সমীকরণ সিদ্ধ হবে।

$-54 + 9p - 3q - 3 = 0 \Rightarrow 3p - q = 19$

$-2 + p - q - 3 = 0 \Rightarrow p - q = 5$

$\therefore p = 7, q = 2$ (ক্যালকুলেটরের সাহায্যে)

3. $x^3 + 7x^2 - 10x - 16 = 0$ এর একটি মূল- [SUST 07-08]

Sol^n: ক্যালকুলেটরের সাহায্যে মূলগুলো 2, − 8, −1.

MODE 3 times 1 (EQN) 3 (Degree 3) 1 + 7 − 10 − 6 = $x_1 = 2$ = $x_2 = -8$ = $x_3 = -1$

কৌশল ঃ $f(x) = 0$ সমীকরণের মূলগুলো $\alpha, \beta, \gamma \cdots$ হলে,

(a) $-\alpha, -\beta, -\gamma \cdots$ মূল বিশিষ্ট সমী. $f(-x) = 0$

(b) $\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\beta}, \frac{1}{\gamma} \cdots$ মূল বিশিষ্ট সমী. $f(\frac{1}{x}) = 0$

(c) $\alpha + h, \beta + h, \gamma + h \cdots$ মূল বিশিষ্ট সমীকরণ $f(x - h) = 0$.

(d) $\alpha - h, \beta - h, \gamma - h \cdots$ মূল বিশিষ্ট সমীকরণ $f(x + h) = 0$.

4. $6x^2 - 5x + 1 = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় α, β হলে $\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\beta}$ মূল বিশিষ্ট সমীকরণটি হবে- [Jt.U 05-06; SUST 09-10]

Sol^n: $6(\frac{1}{x})^2 - 5(\frac{1}{x}) + 1 = 0$

$\Rightarrow x^2 - 5x + 6 = 0$

5. $x^2 - 5x - 1 = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় হতে 2 কম মূল বিশিষ্ট সমীকরণটি হল- [DU 07-08]

Sol^n: $(x + 2)^2 - 5(x + 2) - 1 = 0$

$\Rightarrow x^2 - x + 7 = 0$

6. $x^2 - 2x + 3 = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় α, β হলে $-\alpha, -\beta$ মূল বিশিষ্ট সমীকরণটি হবে- [DU 98-99, Jt.U 08-09]

Sol^n: $(-x)^2 - 2(-x) + 3 = 0$

$\Rightarrow x^2 + 2x + 3 = 0$

7. $3x^2 - 2x + 1 = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয়ের বর্গের সমষ্টি কত? [CU 06-007; IU 04-05; RU 08-09]

Sol^n : $\alpha+\beta=2/3$, $\alpha\beta=1/3$

$\therefore \alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=4/9-2/3$

$=-2/9$

কৌশল : ax^2+bx+c রাশির সর্বোচ্চ বা সর্বনিম্ন মান $c-\frac{b^2}{4a}$ হবে $x=-\frac{b}{2a}$ এর জন্য। $a>0, a<0$ হলে প্রদত্ত রাশির যথাক্রমে সর্বনিম্ন ও সর্বোচ্চ মান হবে।

8. $5+3x-x^2$ এর সর্বোচ্চ মান-[DU,CU'08-09]

Sol^n : সর্বোচ্চ মান $=5-\frac{3^2}{4.(-1)}=5+\frac{9}{4}=\frac{29}{4}$

9. $3x-x^2-5$ এর গরিষ্ঠ মান - [Jt.U 08-09]

Sol^n : গরিষ্ঠ মান $=-5-\frac{9}{4(-1)}=-\frac{11}{4}$

10 $5-3x-x^2$ এর সর্বোচ্চ মান- [DU 10-11]

Sol^n : সর্বোচ্চ মান $=5-\frac{(-3)^2}{4.(-1)}=5+\frac{9}{4}=\frac{29}{4}$

11. x^2-3x+5 এর ন্যূনতম মান- [DU 03-04, 06-07; Jt.U 07-08; JU 09-10; RU 08-09]

Sol^n : ন্যূনতম মান $=5-\frac{9}{4.1}=\frac{11}{4}$

12. x^2-2x+5 এর ন্যূনতম মান-

[BUET 09-10]

Sol^n : ন্যূনতম মান $=5-\frac{4}{4.1}=4$

13. $27x^4-195x^3+494x^2-520x+192=0$ সমীকরণের মূলগুলো গুণোত্তর প্রগমনন শ্রেণীভুক্ত হলে সমীকরণটি সমাধান কর।

A. 8/9, 2/3, 2, 3 (B) 8/9, 4/3, 2,3
(C) 8/9, 4/3, 3,4 (D) 8/9, 2/3, 8, 9

2 7 ALPHA X) ^ 4 − 1 9 5 ALPHA X) ^ 3 + 4 9 4 ALPHA X) x^2 − 5 2 0 ALPHA X) + 1 9 2 SOLVE= CALC X?

বহুনির্বাচনি প্রশ্ন:

1. Sol^n : ∵ ধ্রুবপদ (4) ধনাত্মক এবং x এর সহগ (−7) ঋণাত্মক, ∴ উভয় মূল ধনাত্মক হবে।
∴ উ: গ.

2. Sol^n : ∵ ধ্রুবপদ (12) ধনাত্মক এবং x এর সহগ (−7) ঋণাত্মক, ∴ উভয় মূল ধনাত্মক হবে।
∴ উ: ক.

3. Sol^n : $x=\frac{-6\pm\sqrt{36-12}}{2}=\frac{-6\pm2\sqrt{6}}{2}$
$=-3\pm\sqrt{6}$ ∴ উ: ঘ.

4. Sol^n : প্রদত্ত সমীকরণের মূলদ্বয়ের যোগফল $=-\frac{-5}{3}=\frac{5}{3}$ ∴ উ: খ.

5. Sol^n : মূলদ্বয়ের যোগফল $=-\frac{-5}{7}=\frac{5}{7}$ ∴ উ: ঘ.

6. Sol^n : মূলদ্বয়ের গুণফল $=-\frac{3}{7}$ ∴ উ; ক.

7. Sol^n : প্রদত্ত সমীকরণের মূলদ্বয় $2-\sqrt{3}i$ ও $2+\sqrt{3}i$. মূলদ্বয়ের সমষ্টি $=-a=4\Rightarrow a=-4$
∴ উ: খ.

8. Sol^n : ধরি, মূলদ্বয় 3x ও 4x . তাহলে,
$3x.4x=\frac{72}{6}=12\Rightarrow x^2=1\Rightarrow x=1$
$3x+4x=-\frac{-m}{6}\Rightarrow 7.1=\frac{m}{6}\Rightarrow m=42$
∴ উ: ক.

9. Sol^n : মূলদ্বয় α ও β হলে,
$\alpha+\beta=-b, \alpha\beta=c$
$\therefore \alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)$
$=(-b)^3-3c(-b)=-b^3+3bc$
∴ উ: ক.

10. Sol^n : মূলদ্বয় α ও $\alpha+1$ হলে,
$\alpha+\alpha+1=-a\Rightarrow 2\alpha=-a-1$
$\Rightarrow \alpha=-\frac{a+1}{2}$ এবং $\alpha(\alpha+1)=b$

$\Rightarrow \alpha^2+\alpha=b\Rightarrow(-\frac{a+1}{2})^2-\frac{a+1}{2}=b$
$\Rightarrow a^2+2a+1-2a-2=4b$
$\Rightarrow a^2-4b=1$ ∴ উ: ঘ.

11 Sol^n : $\alpha+\beta=-5, \alpha\beta=3$
$\therefore \alpha+\frac{1}{\alpha}+\beta+\frac{1}{\beta}=\alpha+\beta+\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}$
$=-5+\frac{-5}{3}=-\frac{20}{3}$ ∴ উ: গ.

12. Sol^n : $\alpha+\beta=-\frac{5}{6}, \alpha\beta=\frac{1}{6}$
$\therefore -\alpha+\alpha\beta-\beta=\frac{5}{6}+\frac{1}{6}=1$ ∴ উ: খ.

13. Sol^n : মূলদ্বয় α ও $\frac{1}{\alpha}$ হলে,
$\alpha.\frac{1}{\alpha}=\frac{3k+1}{k^2+1}\Rightarrow k^2+1=3k+1$
$\Rightarrow k(k-3)=0\Rightarrow k=0, 3$ ∴ উ: গ.

14. Sol^n : পৃথায়ক $=(-5)^2-4(2)(4)$
$=25-32=-7<0$
∴ মূলদ্বয় জটিল ও অসমান। ∴ উ: গ.

15. Sol^n : $\{2(k+3)\}^2-4(k+1)(2k+3)=0$
$\Rightarrow 4\{k^2+6k+9-2k^2-5k-3\}=0$
$\Rightarrow -k^2+k+6=0\Rightarrow k^2-k-6=0$
$\Rightarrow (k-3)(k+2)=0\Rightarrow x=3,-2$ ∴ উ: গ.

16. Sol^n : $|3x-x^2-5|=1$
$\Rightarrow x^2-3x+5=\pm1$
$\Rightarrow x^2-3x+4=0, x^2-3x+6=0$
পৃথায়ক $=9-16<0$, পৃথায়ক $=9-24<0$
∴ প্রদত্ত সমীকরণের বাস্তব মূল নাই। ∴ উ: ক.

17. Sol^n : $\frac{1}{x}+a-bx=0$
$\Rightarrow 1+ax-bx^2=0\Rightarrow bx^2-ax-1=0$
পৃথায়ক $=(-a)^2-4b(-1)=0$
$\Rightarrow a^2+4b=0$ ∴ উ: গ.

18. Sol^n : $k^2-4(k-1)(k+1)=0$
$\Rightarrow k^2-4k^2+4=0\Rightarrow 3k^2=4$
$\Rightarrow k=\pm\sqrt{\frac{4}{3}}=\pm\frac{2}{\sqrt{3}}$ ∴ উ: ঘ.

19. Sol^n : মূলদ্বয়ের গুণফল $-\frac{b}{a}$ নয় $\frac{c}{a}$. অন্য option দুইটি সত্য। ∴ উ: খ.

20. Sol^n : মূলদ্বয়ের যোগফল -2 নয় 2, মূলদ্বয়ের গুণফল -2 এবং পৃথায়ক $=4+8=12$; যা পূর্ণবর্গ নয় বলে অমূলদ। ∴ উ: ক.

21. Sol^n : সমীকরণ দুইটির প্রতিটির পৃথায়ক পূর্ণবর্গ বলে তাদের প্রতিটির মূলদ্বয় মূলদ; তাদের সাধারণ মূল 3 কিন্তু প্রথমটির মূলদ্বয়ের সমষ্টি 5. ∴ উ: গ.

22. Sol^n : একটি মূল $5+\sqrt{2}$ হলে,
$b=(5+\sqrt{2})(5-\sqrt{2})=25-2=23$
একটি মূল $5+\sqrt{2}i$ হলে
$b=(5+\sqrt{2}i)(5+\sqrt{2}i)=25+2=27$
∴ উ: ক.

23. Sol^n : $x^2-6x+3=0$
$\therefore x=\frac{6\pm\sqrt{36-12}}{2}=\frac{6\pm\sqrt{24}}{2}=3-\sqrt{6}$
∴ উ: গ.

24. Sol^n : $\alpha+\beta=6, \alpha\beta=3$
$\therefore x^2-(\alpha+1+\beta+1)x+(\alpha+1)(\beta+1)=0$
$\Rightarrow x^2-(6+2)x+(\alpha\beta+\alpha+\beta+1)=0$
$\Rightarrow x^2-8x+10=0$ ∴ উ: ক.

25. Sol^n : $\alpha^3+\beta^3=7$
$\Rightarrow (\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)=7$
$\Rightarrow 3^3-3\alpha\beta(3)=7\Rightarrow 9\alpha\beta=20$
$\Rightarrow \alpha\beta=\frac{20}{9}$
∴ নির্ণেয় সমীকরণ, $x^2-3x+\frac{20}{9}=0$
$\Rightarrow 9x^2-27x+20=0$ ∴ উ: গ.

নিয়ম: (i) $a+\sqrt{b}$ মূলবিশিষ্ট দ্বিঘাত সমীকরণ
$x^2-2ax+(a^2-b)=0$
(ii) $a+bi$ মূলবিশিষ্ট দ্বিঘাত সমীকরণ
$x^2-2ax+(a^2+b^2)=0$

26. Sol^n : $1+\sqrt{2}i$ মূলবিশিষ্ট দ্বিঘাত সমীকরণ,
$x^2-2.1.x+\{1^2+(\sqrt{2})^2\}=0$
$\Rightarrow x^2-2x+3=0$ ∴ উ: ক.

27. Sol^n : $-\alpha,-\beta$ মূলদ্বয়বিশিষ্ট সমীকরণ
$x^2-(-\alpha-\beta)x+(-\alpha)(-\beta)=0$
$\Rightarrow x^2+(\alpha+\beta)x+\alpha\beta=0$ ∴ উ: খ.

28. Sol^n : $(-4-\sqrt{-3})$ মূলবিশিষ্ট দ্বিঘাত সমীকরণ,
$x^2-2(-4)x+\{(-4)^2-(\sqrt{-3})^2\}=0$
$\Rightarrow x^2+8x+19=0$ ∴ উ: খ.

29. Sol^n : $\sum\alpha\beta=\dfrac{\text{coefficient of } x^2}{\text{coefficient of } x^4}$
$=0$ ∴ উ: ঘ.

30. Sol^n : $\alpha+\beta+\gamma=-a$,
$\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=b$
∴ $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=(\alpha+\beta+\gamma)^2-2(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)$
$=(-a)^2-2b=a^2-2b$ ∴ উ: খ.

31. Sol^n : $\sum\alpha=-\frac{6}{2}=-3, \sum\alpha\beta=0.$
$\sum\alpha\beta\gamma=-\frac{3}{2}, \alpha\beta\gamma\delta=\frac{10}{2}=5$ ∴ উ: ক.

32. Sol^n : জটিল মূলদ্বয় যুগলরূপে আসে। অতএব অপর মূলটি $-1-\sqrt{-1}$. ∴ উ: ঘ.

33. Sol^n : $(-3)^2-5(-3)+c=0$
$\Rightarrow 9+15+c=0\Rightarrow c=-24$ ∴ উ: গ.

34. Sol^n : ভাগশেষ $=2(-2)^3-3(-2)^2-5(-2)-1$
$=-16-12-10-1=-15$ ∴ উ: ঘ.

35. Sol^n : দ্বিঘাত সমীকরণের একটি মূল $2-\sqrt{3}$ হলে সমীকরণটি হবে
$x^2-2.2.x+\{2^2-(\sqrt{3})^2\}=0$
$\Rightarrow x^2-4x+1=0$ ∴ উ: ক.

36. Sol^n : $f(x)=0$ সমীকরণের দুইটি মূল $1,-2$ এবং এর মূল তিনটির গুণফল -6, সুতরাং অপর মূলটি হবে 3. ∴ উ: খ.

37. Sol^n : $\alpha+\beta=\frac{5}{7}, \alpha\beta=-\frac{3}{7}$
∴ নির্ণেয় সমীকরণ,
$x^2-(\alpha+\beta+\alpha\beta)x+(\alpha+\beta)\alpha\beta=0$
$\Rightarrow x^2-(\frac{5}{7}-\frac{3}{7})x+\frac{5}{7}(-\frac{3}{7})=0$
$\Rightarrow x^2-\frac{2}{7}x-\frac{15}{49}=0$
$\Rightarrow 49x^2-14x-15=0$ ∴ উ: গ.

38. x^3+3x^2+2 একটি বহুপদী। ∴ উ: খ.

39. Sol^n : $\Sigma\alpha\beta=\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=\frac{-6}{3}=-2$
∴ উ: গ.

40. Sol^n : $\alpha+\frac{a}{3}+\beta=a\Rightarrow\alpha+\beta=\frac{2a}{3}$
$\frac{a}{3}.\alpha\beta=6\Rightarrow\alpha\beta=\frac{18}{a}$ এবং
$\sum\alpha\beta=11$ ∴ উ: ঘ.

41. Sol^n : $x^2-7x-6-\{x^2-(p-1)x-p\}=0$
$\Rightarrow (-7+p-1)x-6+p=0$
$\Rightarrow x=\frac{p-6}{p-6}=1$ ∴ উ: ঘ.

42. Sol^n : $16x^2-8x+1$ রাশিটির ক্ষুদ্রতম মান
$=c-\frac{b^2}{4a}=1-\frac{8^2}{4(16)}=1-1=0$ ∴ উ: ক.

43. Sol^n : $4x-4x^2-5$ রাশিটির বৃহত্তম মান

$=-5-\frac{4^2}{4.(4)}=-5-1=-6$ ∴ উ: ঘ.

44. Sol^n : $3x^2-6x-2$ রাশির ক্ষুদ্রতম মান
$=-2-\frac{6^2}{4.(3)}=-2-3=-5$ এবং
ক্ষুদ্রতম মানের জন্য $x=-\frac{b}{2a}=-\frac{-6}{2.3}=1$
∴ উ: গ.

45. Sol^n : $x=-\sqrt{3}+5\Rightarrow(x-5)^2=(-\sqrt{3})^2$
$\Rightarrow x^2-10x+25=3$
$\Rightarrow x^2-10x+22=0$
$\Rightarrow x^2-10x+20=-2$ ∴ উ: ক.

46. Sol^n : $3(9^x-4.3^{x-1})+1=0$
$\Rightarrow 3.(3^x)^2-4.3^x+1=0$
$\Rightarrow 3.(3^x)^2-3.3^x-3^x+1=0$
$\Rightarrow 3.3^x(3^x-1)-1(3^x-1)=0$
$\Rightarrow (3^x-1)(3.3^x-1)=0$
∴ $3^x-1=0$ হলে, $3^x=1=3^0\Rightarrow x=0$
$3.3^x-1=0$ হলে, $3^{x+1}=1=3^0$
$\Rightarrow x+1=0\Rightarrow x=-1$ ∴ উ: ক.

47. Sol^n : $3x^2+7x-2=0$ সমীকরণের মূল দুইটির যোগফল ও গুণফলের সমষ্টি $=-\frac{7}{3}-\frac{2}{3}$
$=-\frac{9}{3}=-3$ ∴ উ: ঘ.

48. Sol^n : $\sqrt{-5}-1$ মূলবিশিষ্ট দ্বিঘাত সমীকরণ,
$x^2-2(-1)x+1^2-(\sqrt{-5})^2=0$
$\Rightarrow x^2+2x+6=0$ ∴ উ: ক.

49. Sol^n : অপর মূল α হলে, $4+\alpha=5\Rightarrow\alpha=1$
এবং $4\alpha=c\Rightarrow c=4.1=4$ ∴ উ: খ.

50. Sol^n : $(x-\alpha)(x-\beta)+(x-\beta)(x-\gamma)$
$+(x-\gamma)(x-\alpha)=0$
$\Rightarrow 3x^2+(\alpha-\beta-\beta+\gamma+\gamma+\alpha)x-\alpha\beta-\beta\gamma+\gamma\alpha=0$ সমীকরণের মূলগুলির যোগফল শূন্য হবে যদি $-\frac{2\alpha-2\beta+2\gamma}{3}=0$
$\Rightarrow \beta=\alpha+\gamma$ ∴ উ: গ.

51. Sol^n : প্রশ্নমতে,
$D=4(k^2+6k+9)-4(k+1)(2k+3)=0$
$\Rightarrow -(k^2-k-6)=0\Rightarrow k=3,-2$ ∴ Ans. **(b)**

52. Sol^n : $(3k+1)x^2+(11+k)x+9=0$ সমীকরণের মূলদ্বয় জটিল সংখ্যা হলে
$(11+k)^2<4(3k+1).9$
$\Rightarrow 121+22k+k^2<108k+36$
$\Rightarrow k^2-86k+85<0$
$\Rightarrow (k-85)(k-1)<0$
$\Rightarrow 1<k<85$ ∴ উ: ঘ.

53. Sol^n : $ax^2+bx+c=0$ দ্বিঘাত সমীকরণটির মূল দুইটি সমান হবে যদি $b^2=4ac$
∴ উ: গ.

54. Sol^n : $x^4+a^2x^2+a^4=0$
∴ $x^2=\frac{-a^2\pm\sqrt{a^4-4.1.a^4}}{2.1}$
$=\frac{-a^2\pm\sqrt{-3a^4}}{2}$, যা জটিল। ∴ উ: ঘ.

55. Sol^n : মূল দুইটি α ও 3α হলে,
$\alpha.3\alpha=\frac{4}{3}\Rightarrow\alpha^2=\frac{4}{9}\Rightarrow\alpha=\pm\frac{2}{3}$ এবং
$\alpha+3\alpha=\frac{k}{3}\Rightarrow k=12\alpha=12.(\pm\frac{2}{3})$
$\Rightarrow k=\pm8$ ∴ উ: ঘ.

56. Sol^n : $\alpha+\beta=-a, \alpha\beta=1$
∴ $\frac{\alpha}{\beta^2}+\frac{\beta}{\alpha^2}=\frac{\alpha^3+\beta^3}{\alpha^2\beta^2}$
$=\frac{(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)}{\alpha^2\beta^2}$

$= \frac{-q^3+3q}{1} = -q(q^2-3)$

$\frac{\alpha}{\beta^2} \cdot \frac{\beta}{\alpha^2} = \frac{1}{\alpha\beta} = \frac{1}{1} = 1$

$\therefore$ নির্ণেয় সমীকরণ, $x^2 + q(q^2-3)x + 1 = 0$

$\therefore$ উ: খ.

57. Sol^n : $x^2 - 5x - 1 = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় হতে 2 কম মূল বিশিষ্ট সমীকরণ,

$(x+2)^2 - 5(x+2) - 1 = 0$

$\Rightarrow x^2 + 4x + 4 - 5x - 10 - 1 = 0$

$\Rightarrow x^2 - x - 7 = 0 \quad \therefore$ উ: ব.

58. Sol^n : $6x^2 - 5x + 1 = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় α, β হলে $\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\beta}$ মূল বিশিষ্ট সমীকরণ,

$6\frac{1}{x^2} - 5\frac{1}{x} + 1 = 0 \Rightarrow 6 - 5x + x^2 = 0$

$\Rightarrow x^2 - 5x + 6 = 0 \quad \therefore$ উ: ক.

59. Sol^n : $x^3 - px^2 + qx - r = 0$ সমীকরণের মূলগুলির বিপরীত মূলগুলি দ্বারা গঠিত সমীকরণ,

$\frac{1}{x^3} - p\frac{1}{x^2} + q\frac{1}{x} - r = 0$

$\Rightarrow 1 - px + qx^2 - rx^3 = 0$

$\Rightarrow rx^3 - qx^2 + px - 1 = 0 \quad \therefore$ উ: ঘ.

60. Sol^n : $\alpha - \beta = 8$, $\alpha^3 - \beta^3 = 152$.

এখন, $\alpha^3 - \beta^3 = (\alpha - \beta)^3 + 3\alpha\beta(\alpha - \beta)$

$\Rightarrow 152 = 8^3 + 3\alpha\beta.8$

$\Rightarrow \alpha\beta = \frac{-360}{24} = -15$

আবার, $(\alpha+\beta)^2 = (\alpha-\beta)^2 + 4\alpha\beta$

$\Rightarrow (\alpha+\beta)^2 = 8^2 + 4.(-15) = 64 - 60 = 4$

$\Rightarrow \alpha + \beta = \pm 2$

সমীকরণটি $x^2 - 2x - 15 = 0$

অথবা $x^2 + 2x - 15 = 0 \quad \therefore$ উ: ঘ.

61. Sol^n : $\alpha^3 + \beta^3 = 7$

$\Rightarrow (\alpha+\beta)^3 - 3\alpha\beta(\alpha+\beta) = 7$

$\Rightarrow 3^3 - 3\alpha\beta \times 3 = 7 \Rightarrow 9\alpha\beta = 20$

$\Rightarrow \alpha\beta = \frac{20}{9}$

$\therefore$ নির্ণেয় সমীকরণ, $x^2 - 3x + \frac{20}{9} = 0$

$\Rightarrow 9x^2 - 27x + 20 = 0 \quad \therefore$ উ: গ.

62. Sol^n : $\alpha + \beta = 7$, $\alpha\beta = 12$

$\Rightarrow \alpha + \beta, \alpha\beta$ মূল বিশিষ্ট সমীকরণ,

$x^2 - (\alpha + \beta + \alpha\beta)x + (\alpha + \beta)\alpha\beta = 0$

$\Rightarrow x^2 - (7 + 12)x + 7.12 = 0$

$\Rightarrow x^2 - 19x + 84 = 0 \quad \therefore$ উ: ক.

63. Sol^n : $-\alpha, -\beta$ মূলবিশিষ্ট সমীকরণ,

$(-x)^2 - 2(-x) + 3 = 0$

$\Rightarrow x^2 + 2x + 3 = 0 \quad \therefore$ উ: ক.

64. Sol^n : $x^2 + ax + 8 = 0$ সমীকরণের একটি মূল 4 হলে, $4^2 + 4a + 8 = 0 \Rightarrow a = -6$

$x^2 + ax + b = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় সমান হলে, $a^2 = 4b.1 \Rightarrow 4b = (-6)^2 \Rightarrow b = 9$

$\therefore$ উ: গ.

65. Sol^n : $x^3 - 2x^2 - x + 2 = 0$ সমীকরণের মূলত্রয় 2, −1, 1 (ক্যালকুলেটরের সাহায্যে)। $a = -1$ মূলটি $-2 < x < 0$ সীমায় অবস্থান করে।

$\therefore 3a^3 + 2a^2 + 1 = -3 + 2 + 1 = 0 \therefore$ উ: খ.

66. Sol^n : যদি −1, 0 এবং 2 সমীকরণ $f(x) = 0$ সমীকরণের মূল হয়, তবে $f(3x) = 0$ সমীকরণের তিনটি মূল হবে $-\frac{1}{3}, \frac{0}{3}, \frac{2}{3} \quad \therefore$ উ: ঘ.

67. Sol^n : $27x^3 - 63x^2 + 42x - 8 = 0$ সমীকরণের মূল কোনগুলি $\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{4}{3}$ (ক্যালকুলেটরের সাহায্যে)। $\therefore$ উ: ঘ.

68. Sol^n : $x^2 - 11x + a - (x^2 - 14x + 2a) = 0$

$\Rightarrow 3x - a \Rightarrow x = \frac{a}{3}$

$\therefore (\frac{a}{3})^2 - 11.\frac{a}{3} + a = 0$

$\Rightarrow \frac{a^2}{9} - \frac{11a}{3} + a = 0 \Rightarrow a^2 - 33a + 9a = 0$

$\Rightarrow a^2 - 24a = 0 \Rightarrow a = 0, 24 \quad \therefore$ উ: ক.

69. Sol^n : $x^2 - 2x + 5$ এর ন্যূনতম মান

$= c - \frac{b^2}{4a} = 5 - \frac{4}{4.1} = 4 \quad \therefore$ উ: খ.

70. Sol^n : $\alpha + \beta = \frac{6}{13}, \alpha\beta = -\frac{7}{13}$

$\therefore \alpha^{-1} + 1 + \beta^{-1} + 1 = 2 + \frac{\alpha + \beta}{\alpha\beta}$

$= 2 + \frac{6/13}{-7/13} = 2 - \frac{6}{7} = \frac{8}{7}$

$(\alpha^{-1} + 1)(\beta^{-1} + 1) = \frac{1}{\alpha\beta} + \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + 1$

$= -\frac{13}{7} - \frac{6}{7} + 1 = -\frac{12}{7}$ [দি.বো.'১৭]

$\therefore$ নির্ণেয় সমীকরণ, $x^2 - \frac{8}{7}x - \frac{12}{7} = 0$

$\Rightarrow 7x^2 - 8x - 12 = 0 \quad \therefore$ উ: (ক)

71. Sol^n : বাস্তব মূল α হলে, [দি.বো.'১৭]

$\alpha + \frac{1}{2} - \sqrt{3}i + \frac{1}{2} + \sqrt{3}i = -\frac{12}{4}$

$\Rightarrow \alpha = -3 - 1 = -4 \therefore$ উ: (খ)

72. Sol^n : $x^2 = 0$ সমীকরণের পৃথায়ক

$= b^2 - 4ac = 0^2 - 4.1.0 = 0$ [চ.বো.'১৭]

$\therefore$ উ: (খ)

73. Sol^n : $\sum\alpha\beta = \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = \frac{-3}{2}$ [চ.বো.'১৭]

$\therefore$ উ: (ক)

74. Sol^n : iii নং শর্ত সঠিক নয়। [চ.বো.'১৭]

$\therefore$ উ: (ক)

75. Sol^n : $4x - x^2 - 4 = 0$ [ঢা.বো.'১৭]

$\Rightarrow x^2 - 4x + 4 = 0$

$\therefore \alpha + 2 = 4 \Rightarrow a = 2 \therefore$ উ: (ক)

76. Sol^n : $x^2 - 3x - 2 - k = 0$ [ঢা.বো.'১৭]

$\Rightarrow 3^2 - 3.3 - 2 - k = 0 \Rightarrow k = -2$

$\therefore$ উ: (ক)

77. Sol^n : মূল দুইটির যোগফল [ঢা.বো.'১৭]

$= 1 + i\sqrt{2} + 1 - i\sqrt{2} = 2 \therefore$ উ: (ক)

78. Sol^n : $3 + i + 3 - i = -p \Rightarrow p = -6$

$(3 + i)(3 - i) = q \Rightarrow 10 = q$

$\therefore$ উ: (খ) [রা.বো.'১৭]

79. Sol^n : $ab + bc + ca = -\frac{n}{m}$

$\therefore$ উ: (ক) [রা.বো.'১৭]

80. Sol^n : $2 + i + 2 - i = 4$, [কু.বো.'১৭]

$(2 + i)(2 - i) = 5$

$\therefore$ নির্ণেয় সমীকরণ, $x^2 - 4x + 5 = 0 \therefore$ উ: (গ)

81. Sol^n : $(-2)^2 - 3(-2) - p = 0$ [কু.বো.'১৭]

$\Rightarrow 4 + 6 = p \Rightarrow p = 10 \therefore$ উ: (খ)

82. Sol^n : $(-3)^2 = 4.1.(-p) \Rightarrow p = \frac{-9}{4}$

$\therefore$ উ: (খ) [কু.বো.'১৭]

83. Sol^n : $\sum a^2 = a^2 + b^2 + c^2$ [সি.বো.'১৭]

$= (a + b + c)^2 - 2(ab + bc + ca)$

$= (-\frac{3}{2})^2 - 2(-\frac{5}{2}) = \frac{9}{4} + 5 = \frac{29}{4}$

$\therefore$ উ: (গ)

84. Sol^n : x= −1, −2 প্রদত্ত সমীকরণকে সিদ্ধ করে এবং ধ্রুবপদ (−6) ঋণাত্মক বলে অপর মূল হবে ঋণাত্মক। $\therefore$ মূলত্রয় −1, −2, -3/2

$\therefore$ উ: (খ). [সি.বো.'১৭]

বি.দ্র.: ক্যালকুলেটর ব্যবহার করে সহজেই প্রদত্ত সমীকরণের মূল নির্ণয় করা যায়।

85. Sol^n : $1 + \sqrt{2}$ মূলবিশিষ্ট সমীকরণ,

$x^2 - 2.1x + 1^2 - (\sqrt{2})^2 = 0$

$\Rightarrow x^2 - 2x - 1 = 0$. উ: (ক)

86. Sol^n : $\sum\alpha\beta = \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = -\frac{3}{2}$ [য.বো.'১৭]

$\therefore$ উ: (ক)

সৃজনশীল প্রশ্ন (Creative Questions)

1 $P(x) = \frac{1}{x-a} + \frac{1}{x-b} + \frac{1}{x-c}$.

(a) $(x-a)(x-b)(x-c)P(x)$ বহুপদীর ধ্রুবপদ নির্ণয় কর।

সমাধান: $(x-a)(x-b)(x-c)P(x)$

$= (x-a)(x-b)(x-c)\{\frac{1}{x-a} + \frac{1}{x-b} + \frac{1}{x-c}\}$

$= (x-a)(x-b) + (x-b)(x-c) + (x-c)(x-a)$

$= 3x^2 - 2(a+b+c)x + ab + bc + ca$

$\therefore$ বহুপদীর ধ্রুবপদ $= ab + bc + ca$.

(b) দেখাও যে, $P(x) = 0$ সমীকরণের মূলগুলি সর্বদা বাস্তব হবে এবং $a = b = c$ না হলে মূলগুলি সমান হতে পারেনা।

প্রমাণ: $P(x) = 0$

$\Rightarrow 3x^2 - 2(a+b+c)x + ab + bc + ca$

সমীকরণের পৃথায়ক

$= \{-2(a+b+c)\}^2 - 4.3(ab+bc+ca)$

$= 4\{a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab+bc+ca) - 3(ab+bc+ca)\}$

$= 2\{(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2\}$

$= (a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2$

$a, b, c \in \mathbb{R}$ এর জন্য, পৃথায়ক $= (a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2$ অঋণাত্মক এবং ফলে প্রদত্ত সমীকরণের মূলগুলি সর্বদা বাস্তব হবে।

আবার, পৃথায়ক $= (a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 = 0$ হবে কেবল $a = b = c$ হলে।

$\therefore$ $a = b = c$ না হলে প্রদত্ত সমীকরণের মূলগুলি সমান হতে পারেনা। (Proved)

(c) যদি $a = 3, b = 2, c = 1$ হয় তবে $P(x) = 0$ সমীকরণটির মূলগুলি নির্ণয় করে তাদের প্রকৃতি উল্লেখ কর।

সমাধান: $P(x) = 0$

$\Rightarrow 3x^2 - 2(a+b+c)x + ab + bc + ca$

$\Rightarrow 3x^2 - 2(3+2+1)x + 6 + 2 + 3 = 0$ $[\because a = 3, b = 2, c = 1]$

$\Rightarrow 3x^2 - 12x + 11 = 0$

$\therefore x = \frac{12 \pm \sqrt{12^2 - 4\times3\times11}}{2\times3}$

$= \frac{12 \pm \sqrt{144-132}}{6} = \frac{12 \pm \sqrt{12}}{6} = \frac{12 \pm 2\sqrt{3}}{6}$

$= \frac{6 \pm \sqrt{3}}{3} = 2 \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$

$\therefore$ সমীকরণটির মূলদ্বয় $2 + \frac{1}{\sqrt{3}}, 2 - \frac{1}{\sqrt{3}}$; যারা পরস্পর অসমান ও অমূলদ।

উ: $2 \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$, মূলদ্বয় অমূলদ।

2. যদি $px^2 + qx - p = 0$ দ্বিঘাত সমীকরণের মূল দুইটি α, β.

(a) উৎপাদকের সাহায্যে $2x^2 - 3x - 35 = 0$ সমীকরণটি সমাধান কর।

সমাধান : $2x^2 - 3x - 35 = 0$

$\Rightarrow 2x^2 - 10x + 7x - 35 = 0$

$\Rightarrow 2x(x-5) + 7(x-5) = 0$

$\Rightarrow (x-5)(2x+7) = 0 \therefore x = 5, -\frac{7}{2}$ (Ans.)

(b) দ্বিঘাত সমীকরণটির মূল ও সহগের সম্পর্ক প্রতিষ্ঠা কর।

সমাধান : মনে করি, $px^2 + qx - p = 0$ অর্থাৎ $x^2 + \frac{q}{p}x - 1 = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় α এবং β.

তাহলে, $x^2 + \frac{q}{p}x - 1$ এর উৎপাদক দুইটি হবে $(x-\alpha)$ এবং $(x-\beta)$.

$\therefore x^2 + \frac{q}{p}x - 1 \equiv (x-\alpha)(x-\beta) = x^2 - (\alpha+\beta)x + \alpha\beta$

উভয় পক্ষ থেকে x এর সহগ এবং ধ্রুবপদ সমীকৃত করে পাই, $\frac{q}{p} = -(\alpha+\beta) \Rightarrow \alpha + \beta = -\frac{q}{p}$

এবং $-1 = \alpha\beta \Rightarrow \alpha\beta = -1$.

$\therefore$ $px^2 + qx - p = 0$ দ্বিঘাত সমীকরণের মূল ও সহগের সম্পর্ক $\alpha + \beta = -\frac{q}{p}$ এবং $\alpha\beta = -1$.

(c) $p\alpha + q$, $p\beta + q$ মূলবিশিষ্ট সমীকরণ নির্ণয় কর।

সমাধান : $px^2 + qx - p = 0$ দ্বিঘাত সমীকরণের মূল দুইটি α, β.

$\Rightarrow \alpha + \beta = -\frac{q}{p}$, $\alpha\beta = \frac{-p}{p} = -1$

$p\alpha + q$, $p\beta + q$ মূলবিশিষ্ট সমীকরণ

$x^2 - (p\alpha + q + p\beta + q)x + (p\alpha + q)(p\beta + q) = 0$

$\Rightarrow x^2 - \{p(\alpha+\beta) + 2q\}x + p^2\alpha\beta + pq(\alpha+\beta) + q^2 = 0$

$\Rightarrow x^2 - \{p(-\frac{q}{p}) + 2q\}x + p^2(-1) + pq(-\frac{q}{p}) + q^2 = 0$

$\Rightarrow x^2 - \{-q + 2q\}x - p^2 - q^2 + q^2 = 0$

$\therefore x^2 - qx - p^2 = 0$ (Ans.)

3. $px^2 + qx + 1 = 0$ এবং $qx^2 + px + 1 = 0$ দুইটি দ্বিঘাত সমীকরণ।

(a) $2x^2 - 5x - 1 = 0$ সমীকরণটি সমাধান কর।

সমাধান: আদর্শরূপ দ্বিঘাত সমীকরণের সাথে তুলনা করে পাওয়া যায়, $a = 2, b = -5, c = -1$.

অতএব সমীকরণটির মূলদ্বয়, $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

$= \frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4\times2\times(-1)}}{2\times2}$

$= \frac{5 \pm \sqrt{25+8}}{4} = \frac{5 \pm \sqrt{33}}{4}$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান, $x = \frac{5+\sqrt{33}}{4}, \frac{5-\sqrt{33}}{4}$

(b) ২য় সমীকরণের মূলদ্বয় মূলদ্বয়ের অনুপাত 3 : 4 হলে দেখাও যে, $12p^2 = 49q$

প্রমাণঃ ধরি, প্রদত্ত সমীকরণের মূলদ্বয় 3α ও 4α।

তাহলে, $3\alpha + 4\alpha = -\frac{p}{q} \Rightarrow \alpha = -\frac{p}{7q} \cdots$(i)

এবং $3\alpha \times 4\alpha = \frac{1}{q} \Rightarrow 12\alpha^2 = \frac{1}{q}$

$\Rightarrow 12 \times (-\frac{p}{7q})^2 = \frac{1}{q}$, [(i) দ্বারা]

$\Rightarrow 12 \times \frac{p^2}{49q^2} = \frac{1}{q}$ $\therefore 12p^2 = 49q$

(c) সমীকরণদ্বয়ের একটি সাধারণ মূল থাকলে দেখাও যে $p + q + 1 = 0$

[চ.'০৪; য.'০৬,'১০ ; ঢা.'০৯,'১৪; দি.'১০; রা.'১১ ; সি.'১১; চুয়েট'০৩-০৪; বুয়েট'০৯-১০]

প্রমাণ : ধরি, প্রদত্ত সমীকরণদ্বয়ের সাধারণ মূলটি α ।

তাহলে, $p\alpha^2 + q\alpha + 1 = 0$ এবং $q\alpha^2 + p\alpha + 1 = 0$

বজ্রগুণন প্রণালীর সাহায্যে আমরা পাই,

$\frac{\alpha^2}{q-p} = \frac{\alpha}{q-p} = \frac{1}{p^2-q^2}$ ......(1) উঃ $x^2 - qx - p^2 = 0$ [য.'১০]

$\therefore (q-p)^2 = (q-p)(p^2-q^2)$

$\Rightarrow (q-p)^2 - (q-p)(p-q)(p+q) = 0$

$\Rightarrow (q-p)^2 + (q-p)(q-p)(p+q) = 0$

$\Rightarrow (q-p)^2(1+p+q) = 0$

এখানে, $p \neq q$. কারণ, $p = q$ হলে, প্রদত্ত সমীকরণদ্বয়ের উভয় মূলই সাধারণ হবে।

$\therefore p + q + 1 = 0$ (Proved)

4 $P(x) = 2x^3 - 9x^2 + 9x + 2$

$Q(x) = (x-2)(ax^2 + bx + c)$, যেখানে a, b এবং c ধ্রুবক।

(a) $P(x) \equiv Q(x)$ হলে a, b, c এর মান নির্ণয় কর।

সমাধান:

$$2x^3-9x^2+9x+2 \equiv (x-2)(ax^2+bx+c)$$

$\Rightarrow 2x^3-9x^2+9x+2 \equiv ax^3+(-2a+b)x^2+(-2b+c)x-2c$

উভয় পক্ষ থেকে x^3, x^2 এর সহগ এবং ধ্রুবপদ সমীকৃত করে পাই, $a=2$,

$-2a+b=-9 \Rightarrow -2\times2+b=-9 \Rightarrow b=-5$

এবং $-2c=2 \Rightarrow c=-1$.

$\therefore\ a=2, b=-5$ এবং $c=-1$ (Ans.)

(b) $P(x)=0$ সমীকরণের মূলত্রয় α, β ও γ হলে, $\sum\alpha^3\beta$ নির্ণয় কর।

সমাধান: $P(x)=0 \Rightarrow 2x^3-9x^2+9x+2=0$ সমীকরণের মূলত্রয় α, β, γ

$\therefore\ \sum\alpha=\alpha+\beta+\gamma=-\left(\frac{-9}{2}\right)=\frac{9}{2}$,

$\sum\alpha\beta=\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=\frac{9}{2}$ এবং $\alpha\beta\gamma=-1$

এখন, $\sum\alpha^3\beta$

$=\alpha^3\beta+\alpha\beta^3+\beta^3\gamma+\beta\gamma^3+\gamma^3\alpha+\gamma\alpha^3$

$=\alpha\beta(\alpha^2+\beta^2)+\beta\gamma(\beta^2+\gamma^2)+\gamma\alpha(\gamma^2+\alpha^2)$

$=\alpha\beta(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-\gamma^2)+\beta\gamma(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-\alpha^2)+\gamma\alpha(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-\beta^2)$

$=\alpha\beta(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)-\alpha\beta\gamma^2+\beta\gamma(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)-\alpha^2\beta\gamma+\gamma\alpha(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)-\alpha\beta^2\gamma$

$=(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)-\alpha\beta\gamma^2-\alpha^2\beta\gamma-\alpha\beta^2\gamma$

$=\{(\alpha+\beta+\gamma)^2-2(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)\}(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)-\alpha\beta\gamma(\alpha+\beta+\gamma)$

$=\{(\frac{9}{2})^2-2\times\frac{9}{2}\}\times\frac{9}{2}-(-1)(\frac{9}{2})$

$=\frac{9}{2}(\frac{81}{4}-9+1)=\frac{9}{2}\times\frac{81-32}{4}=\frac{9}{2}\times\frac{49}{4}$

$=\frac{441}{8}$ (Ans.)

(c) $P(x)=0$ সমীকরণের মূলত্রয় 2, α ও β হলে, একটি দ্বিঘাত সমীকরণ নির্ণয় কর যার মূলদ্বয় $(\alpha+\frac{k}{\beta})$ এবং $(\beta+\frac{k}{\alpha})$, যেখানে k ধ্রুবক।

সমাধান: দেওয়া আছে, $2x^3-9x^2+9x+2=0$ সমীকরণের মূলত্রয় 2, α ও β.

$\therefore\ 2+\alpha+\beta=\frac{9}{2} \Rightarrow \alpha+\beta=\frac{9}{2}-2=\frac{5}{2}$

আবার, $2\alpha\beta=-\frac{2}{2}=-1 \Rightarrow \alpha\beta=-\frac{1}{2}$

এখন, $(\alpha+\frac{k}{\beta})$ ও $(\beta+\frac{k}{\alpha})$ মূলদ্বয়ের সমষ্টি

$=\alpha+\frac{k}{\beta}+\beta+\frac{k}{\alpha}=\alpha+\beta+k(\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\alpha})$

$=\alpha+\beta+k\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}=\frac{5}{2}+k\frac{5/2}{-1/2}=\frac{5}{2}-5k$

এবং মূলদ্বয়ের গুণফল $=(\alpha+\frac{k}{\beta})(\beta+\frac{k}{\alpha})$

$=\alpha\beta+\frac{k^2}{\alpha\beta}+2k=-\frac{1}{2}-2k^2+2k$

$\therefore$ নির্ণেয় সমীকরণ,

$x^2-(\frac{5}{2}-5k)x-\frac{1}{2}-2k^2+2k=0$

$\Rightarrow 2x^2-(5-10k)x-1-4k^2+4k=0$

5. একটি সমকোণী ত্রিভুজের সমকোণ সংলগ্ন বাহুদ্বয় $(x+1)$ সে.মি. ও $(3x-1)$ সে.মি.। অতিভুজের বর্গ দ্বিঘাত রাশিটি $F(x)$.

(a) ত্রিভুজটির ক্ষেত্রফল 2 বর্গ সে.মি. হলে, x এর ধনাত্মক মান নির্ণয় কর।

সমাধান: ত্রিভুজটির ক্ষেত্রফল $=\frac{1}{2}(x+1)(3x-1)$

প্রশ্নমতে, $\frac{1}{2}(3x^2+2x-1)=2$

$\Rightarrow 3x^2+2x-1=4 \Rightarrow 3x^2+2x-5=0$

$\Rightarrow 3x^2+5x-3x-5=0$

$\Rightarrow x(3x+5)-1(3x+5)=0$

$\Rightarrow (3x+5)(x-1)=0 \Rightarrow x=1, -\frac{5}{3}$

$\therefore$ x এর ধনাত্মক মান = 1

(b) $F(x)=9$ হলে, ত্রিভুজটির অপর বাহুদ্বয়ের দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

সমাধান: এখানে, $F(x)=(x+1)^2+(3x-1)^2$

$=x^2+2x+1+9x^2-6x+1$

$=10x^2-4x+2$

প্রশ্নমতে, $F(x)=9 \Rightarrow 10x^2-4x+2=9$

$\Rightarrow 10x^2-4x-7=0$

$\therefore\ x=\frac{4\pm\sqrt{16-4\times10\times(-7)}}{2\times10}$

$=\frac{4\pm\sqrt{296}}{20}=\frac{4\pm2\sqrt{74}}{20}=\frac{2\pm\sqrt{74}}{10}$

$=\frac{2+\sqrt{74}}{10}, \frac{2-\sqrt{74}}{10}$

$\therefore$ অপর বাহুদ্বয়ের দৈর্ঘ্য $=x+1=\frac{2+\sqrt{74}}{10}+1$

$=\frac{12+\sqrt{74}}{10}$ সে.মি. এবং

$3x-1=\frac{6+3\sqrt{74}}{10}-1$

$=\frac{-4+3\sqrt{74}}{10}$ সে.মি

(c) $F(x)=0$ দ্বিঘাত সমীকরণের মূলদ্বয় α ও β হলে $(\alpha+\beta)^2$ ও $(\alpha-\beta)^2$ মূল বিশিষ্ট সমীকরণ নির্ণয় কর।

সমাধান: $F(x)=0 \Rightarrow 10x^2-4x+2=0$

$\Rightarrow 5x^2-2x+1=0$ ...... (1) সমীকরণের মূলদ্বয় α ও β.

$\therefore\ \alpha+\beta=-\frac{-2}{5}=\frac{2}{5}, \alpha\beta=\frac{1}{5}$

এখন, $(\alpha+\beta)^2+(\alpha-\beta)^2$

$=(\alpha+\beta)^2+(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta$

$=2\times(\frac{2}{5})^2-4\times\frac{1}{5}=\frac{8}{25}-\frac{4}{5}$

$=\frac{8-20}{25}=-\frac{12}{25}$

$(\alpha+\beta)^2(\alpha-\beta)^2=(\alpha+\beta)^2\{(\alpha-\beta)^2-4\alpha\beta\}$

$=(\frac{2}{5})^2\{(\frac{2}{5})^2-4\times\frac{1}{5}\}$

$=\frac{4}{25}(\frac{4}{25}-\frac{4}{5})=\frac{4}{25}(\frac{4-20}{25})=-\frac{64}{625}$

$\therefore$ নির্ণেয় সমীকরণ, $x^2-(-\frac{12}{25})x+(-\frac{64}{625})=0$

$\Rightarrow 625x^2+300x-64=0$

6. $\alpha=\frac{1}{2}(-1-\sqrt{-3}), \beta=\frac{1}{2}(-1+\sqrt{-3})$

ক. দেখাও যে, $2x^3-2bx^2-2b^2x-4b^3$ এর একটি উৎপাদক $x-2b$.

সমাধান: ধরি, $f(x)=2x^3-2bx^2-2b^2x-4b^3$

$\therefore\ f(2b)=2.(2b)^3-2b(2b)^2-2b^2(2b)-4b^3$

$=16b^3-8b^3-4b^3-4b^3$

$=16b^3-16b^3=0$

$\therefore$ উৎপাদক উপপাদ্যের সাহায্যে, $x-2b$, $f(x)=2x^3-2bx^2-2b^2x-4b^3$ এর একটি উৎপাদক।

খ. দেখাও যে $(1-\alpha)(1-\beta)=3$

Proof: দেওয়া আছে, $\alpha=\frac{1}{2}(-1-\sqrt{-3})$,

$\beta=\frac{1}{2}(-1+\sqrt{-3})$

আমরা জানি, $\omega=\frac{1}{2}(-1-\sqrt{-3})$ হলে, $\omega^2=\frac{1}{2}(-1+\sqrt{-3})$, যেখানে একককের কাল্পনিক ঘনমূল ω। সুতরাং, আমরা লিখতে পারি $\alpha=\omega$ এবং $\beta=\omega^2$

এখন, $(1-\alpha)(1-\beta)=(1-\omega)(1-\omega^2)$

$=1-\omega-\omega^2+\omega^3=1+1+1$

$[\because 1 + \omega + \omega^2 = 0$ এবং $\omega^3 = 1]$

$\therefore (1 - \alpha)(1 - \beta) = 3$ (Showed)

গ. একটি দ্বিঘাত সমীকরণ নির্ণয় কর যার একটি মূল $\frac{\alpha}{\beta}$.

সমাধান: আমরা জানি, $\omega = \frac{1}{2}(-1-\sqrt{-3})$ হলে,

$\omega^2 = \frac{1}{2}(-1+\sqrt{-3})$, যেখানে এককের কাল্পনিক ঘনমূল ω। সুতরাং, আমরা লিখতে পারি $\alpha = \omega$ এবং $\beta = \omega^2$

$\therefore \frac{\alpha}{\beta} = \frac{\omega^2}{\omega} = \omega = \beta = \frac{1}{2}(-1+\sqrt{-3})$

$\therefore$ দ্বিঘাত সমীকরণের অপর মূলটি হবে $\frac{1}{2}(-1-\sqrt{-3}) = \alpha$

মূলদ্বয়ের যোগফল $= \alpha + \beta$

$= \frac{1}{2}(-1-\sqrt{-3} -1+\sqrt{-3}) = \frac{1}{2}(-2) = -1$

মূলদ্বয়ের গুণফল $= \alpha\beta$

$= \frac{1}{2}(-1-\sqrt{-3}) \times \frac{1}{2}(-1+\sqrt{-3})$

$= \frac{1}{4}\{(-1)^2 - (\sqrt{-3})^2\} = \frac{1}{4}\{1-(-3)\}$

$= 1$

$\therefore$ নির্ণেয় সমীকরণ, $x^2 - (\alpha + \beta)x + \alpha\beta = 0$

$\Rightarrow x^2 - (-1)x + 1 = 0 \Rightarrow x^2 + x + 1 = 0.$

7. $|2x - 5| - 3x > 6$ ...... (i)

$3x^3 - 26x^2 + 52x - 24 = 0$ ...... (ii),

$y = \frac{a+ib}{a-ib}$ ... (iii)

ক. (iii) নং সমীকরণ ব্যবহার করে প্রমাণ কর যে, $(a^2 + b^2)y^2 + a^2 + b^2 = 2(a^2 - b^2)y$

Proof: দেওয়া আছে, $y = \frac{a+ib}{a-ib}$

$\Rightarrow ay - iby = a + ib$

$\Rightarrow ay - a = i(b + by)$

$\Rightarrow (ay - a)^2 = i^2(b + by)^2$

$\Rightarrow a^2y^2 - 2a^2y + a^2 = -(b^2 + 2b^2y + b^2y^2)$

$\Rightarrow a^2y^2 - 2a^2y - a^2 + b^2 + 2b^2y + b^2y^2 = 0$

$\Rightarrow (a^2 + b^2)y^2 + a^2 + b^2 - 2(a^2 - b^2)y = 0$

$\therefore (a^2 + b^2)y^2 + a^2 + b^2 = 2(a^2 - b^2)y$

খ. (i) নং অসমতার সমাধান সেট নির্ণয় কর।

সমাধান: $|2x - 5| - 3x > 6$ ...... (i)

$2x - 5 \geq 0$ হলে, $|2x - 5| = 2x - 5$

$\therefore$ (i) হতে, $2x - 5 - 3x > 6$

$\Rightarrow -x - 5 > 6 \Rightarrow -x > 6 + 5$

$\Rightarrow x < -11$ ...... (2)

$2x - 5 < 0$ হলে, $|2x - 5| = -(2x - 5)$
$= -2x + 5$

$\therefore$ (i) হতে, $-2x + 5 - 3x > 6 \Rightarrow -5x > 1$

$\Rightarrow x < -\frac{1}{5}$ ...... (3)

(2) ও (3) হতে পাই, $x < -\frac{1}{5}$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান সেট, $S = \{x \in \mathbb{R}: x < -\frac{1}{5}\}$

গ. (ii) নং সমীকরণের মূলগুলি গুণোত্তর শ্রেণীভুক্ত হলে, সমীকরণটি সমাধান কর।

সমাধান: প্রশ্নমালা IV এর 14(c) দ্রষ্টব্য।

8. $P = x^2 + bx + ac$, $Q = x^2 + cx + ab$

এবং $R = \sqrt{-3+\sqrt{-3+\sqrt{-3+\cdots\cdots\infty}}}$

ক. $x = i$ হলে, $|P|$ নির্ণয় কর।

সমাধান: $P = x^2 + bx + ac$

$= i^2 + bi + ac = -1 + bi + ac$

$= ac - 1 + bi$

$\therefore |P| = |(ac-1) + bi| = \sqrt{(ac-1)^2 + b^2}$

খ. $P = 0$ ও $Q = 0$ সমীকরণদ্বয়ের একটি সাধারণ মূল থাকলে দেখাও যে, $a + b + c = 0$

Proof: ধরি, $P = 0 \Rightarrow x^2 + bx + ac = 0$

ও $Q = 0 \Rightarrow x^2 + cx + ab = 0$

সমীকরণদ্বয়ের সাধারণ মূল α.

$\therefore \alpha^2 + b\alpha + ac = 0$ এবং

$\alpha^2 + c\alpha + ab = 0$

বজ্রগুণন সূত্র প্রয়োগ করে পাই,

$\frac{\alpha^2}{ab^2 - ac^2} = \frac{\alpha}{ac - ab} = \frac{1}{c - b}$

$\therefore (ac - ab)^2 = (ab^2 - ac^2)(c - b)$

$\Rightarrow a^2(b - c)^2 = a(b^2 - c^2)\{-(b - c)\}$

$\Rightarrow a^2(b - c)^2 + a(b - c)(b + c)(b - c) = 0$

$\Rightarrow a(b - c)^2\{a + b + c\} = 0$

এখানে, $a \neq 0$ এবং $b \neq c$.

$\therefore a + b + c = 0$ (Proved)

গ. R এর আর্গুমেন্ট নির্ণয় কর।

সমাধান: $R = \sqrt{-3+\sqrt{-3+\sqrt{-3+\ldots..\infty}}}$

$= \sqrt{-3+\sqrt{-3+\sqrt{-3+\sqrt{-3\ldots..\infty}}}}$

$= \sqrt{-3+R}$

$\Rightarrow R^2 = -3 + R$, [উভয় পক্ষকে বর্গ করে।]

$\Rightarrow R^2 - R + 3 = 0$

$\Rightarrow R = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4.1.3}}{2.1}$

$= \frac{1 \pm \sqrt{1-12}}{2} = \frac{1}{2}(1 \pm \sqrt{-11})$

$\Rightarrow R = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{11}}{2} i$

$\therefore$ R এর আর্গুমেন্ট $= \tan^{-1}\left(\frac{\pm\sqrt{11}/2}{1/2}\right)$

$= \pm \tan^{-1}\sqrt{11}$

9. $f(x) = 1 - 9x + 20x^2$

ক. $|f(i)|$ নির্ণয় কর।

সমাধান: $f(x) = 1 - 9x + 20x^2$

$\therefore f(i) = 1 - 9i + 20i^2 = 1 - 9i + 20(-1)$

$= 1 - 20 - 9i = -19 - 9i$

$\therefore |f(i)| = |-19 - 9i|$

$= \sqrt{(-19)^2 + (-9)^2} = \sqrt{361+81}$

$= \sqrt{442}$

খ. $f(x) = 0$ সমীকরণের মূল দুইটি α, β হলে, একটি দ্বিঘাত সমীকরণ নির্ণয় কর যার মূলদ্বয় $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}$ ও $\frac{1}{\alpha\beta}$.

সমাধান: $f(x) = 0$

$\Rightarrow 1 - 9x + 20x^2 = 0$

$\Rightarrow 20x^2 - 9x + 1 = 0$ সমীকরণের মূল দুইটি α, β

$\therefore \alpha + \beta = -\frac{-9}{20} = \frac{9}{20}$, $\alpha\beta = \frac{1}{20}$

$\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}$ ও $\frac{1}{\alpha\beta}$ মূলদ্বয়ের যোগফল

$= \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\alpha\beta} = \frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta} + \frac{1}{\alpha\beta}$

$= \frac{9/20}{1/20} + 20 = 9 + 20 = 29$ এবং

$\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}$ ও $\frac{1}{\alpha\beta}$ মূলদ্বয়ের গুণফল

$= \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}\right)\frac{1}{\alpha\beta} = \left(\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}\right)\frac{1}{\alpha\beta}$

$= 9 \times 20 = 180$

$\therefore$ নির্ণেয় সমীকরণ,

$x^2 - \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\alpha\beta}\right)x + \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}\right)\frac{1}{\alpha\beta} = 0$

$\Rightarrow x^2 - 29x + 180 = 0$

গ. সংখ্যারেখা ব্যবহার করে $f(x) \leq 3x$ এর সমাধান নির্ণয় কর।

সমাধান: $f(x) \leq 3x \Rightarrow 1 - 9x + 20x^2 \leq 3x$

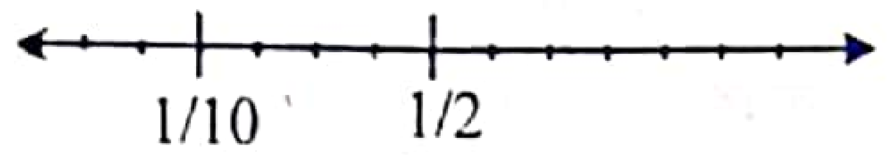
$\Rightarrow 20x^2 - 12x + 1 \leq 0$

$\Rightarrow (10x - 1)(2x - 1) \leq 0$ ...... (1)

$10x - 1 = 0$ হলে, $x = \frac{1}{10}$ এবং

$2x - 1 = 0$, $x = \frac{1}{2}$.

সংখ্যারেখার উপর $\frac{1}{10}$ ও $\frac{1}{2}$ সংখ্যা দুইটির প্রতিরূপী বিন্দু চিহ্নিত করি।



বিন্দু দুইটি সংখ্যারেখাকে (i) $x<\frac{1}{10}$ (ii) $\frac{1}{10}\le x\le\frac{1}{2}$ এবং (iii) $x>\frac{1}{2}$ ব্যবধিতে বিভক্ত করে।.

$x<\frac{1}{10}$ হলে, $10x-1<0$ এবং $2x-1<0$.

$\therefore$ $(10x-1)(2x-1)>0$, যা (1) এর সঙ্গে সঙ্গতিপূর্ণ নয়।

$\frac{1}{10}\le x\le\frac{1}{2}$ হলে, $10x-1\ge 0$ ও $2x-1\le 0$

$\therefore$ $(10x-1)(2x-1)\le 0$, যা (1) এর সঙ্গে সঙ্গতিপূর্ণ।

$x>\frac{1}{2}$ হলে, $10x-1>0$ ও $2x-1>0$

$\therefore$ $(10x-1)(2x-1)>0$, যা (1) এর সঙ্গে সঙ্গতিপূর্ণ নয়।

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান : $\frac{1}{10}\le x\le\frac{1}{2}$

10. অভীষ্ট ফাংশন, $z = 4x + 3y$

সীমাবদ্ধতা: $5x + 4y\le 20$, $2x + 4y\ge 12$, $y\ge 2x$, $x\ge 0$, $y\ge 0$

ক. $x^2 - 5x + 7 = 0$ এর মূলদ্বয় নির্ণয় কর।

সমাধান: $x^2 - 5x + 7 = 0$

$\therefore$ $x = \frac{-(-5)\pm\sqrt{(-5)^2-4.1.7}}{2.1}$

$= \frac{5\pm\sqrt{25-28}}{2} = \frac{5\pm\sqrt{-3}}{2}$

$\therefore$ প্রদত্ত সমীকরণের মূলদ্বয় $\frac{5+\sqrt{-3}}{2}$ ও $\frac{5-\sqrt{-3}}{2}$

খ. $x = 1$ ও $y = \sqrt{-1}$ হলে, $\frac{1}{z}$ বিশিষ্ট একটি দ্বিঘাত সমীকরণ নির্ণয় কর।

সমাধান: $z = 4x + 3y = 4\times 1 + 3\times\sqrt{-1}$

$\Rightarrow z = 4 + 3i$, $[\because i = \sqrt{-1}]$

$\therefore$ $\frac{1}{z} = \frac{1}{4+3i} = \frac{4-3i}{(4+3i)(4-3i)}$

$= \frac{4-3i}{4^2-(3i)^2} = \frac{4-3i}{16-9i^2} = \frac{4-3i}{16-9(-1)}$

$= \frac{4-3i}{25}$, যা একটি জটিল সংখ্যা।

$\therefore$ দ্বিঘাত সমীকরণটির অপর মূল হবে $\frac{4+3i}{25}$.

$\therefore$ নির্ণেয় দ্বিঘাত সমীকরণ,

$x^2-(\frac{4-3i}{25}+\frac{4+3i}{25})x+\frac{4-3i}{25}.\frac{4+3i}{25}=0$

$\Rightarrow x^2-\frac{4-3i+4+3i}{25}x+\frac{16-9i^2}{25^2}=0$

$\Rightarrow x^2-\frac{8}{25}x+\frac{25}{25^2}=0$

$\Rightarrow 25x^2-8x+1=0$

গ. প্রদত্ত শর্তের আলোকে অভীষ্ট ফাংশন z এর সর্বোচ্চ মান নির্ণয় কর।

সমাধান: প্রদত্ত অসমতাগুলির অনুরূপ রৈখিক সমীকরণ,

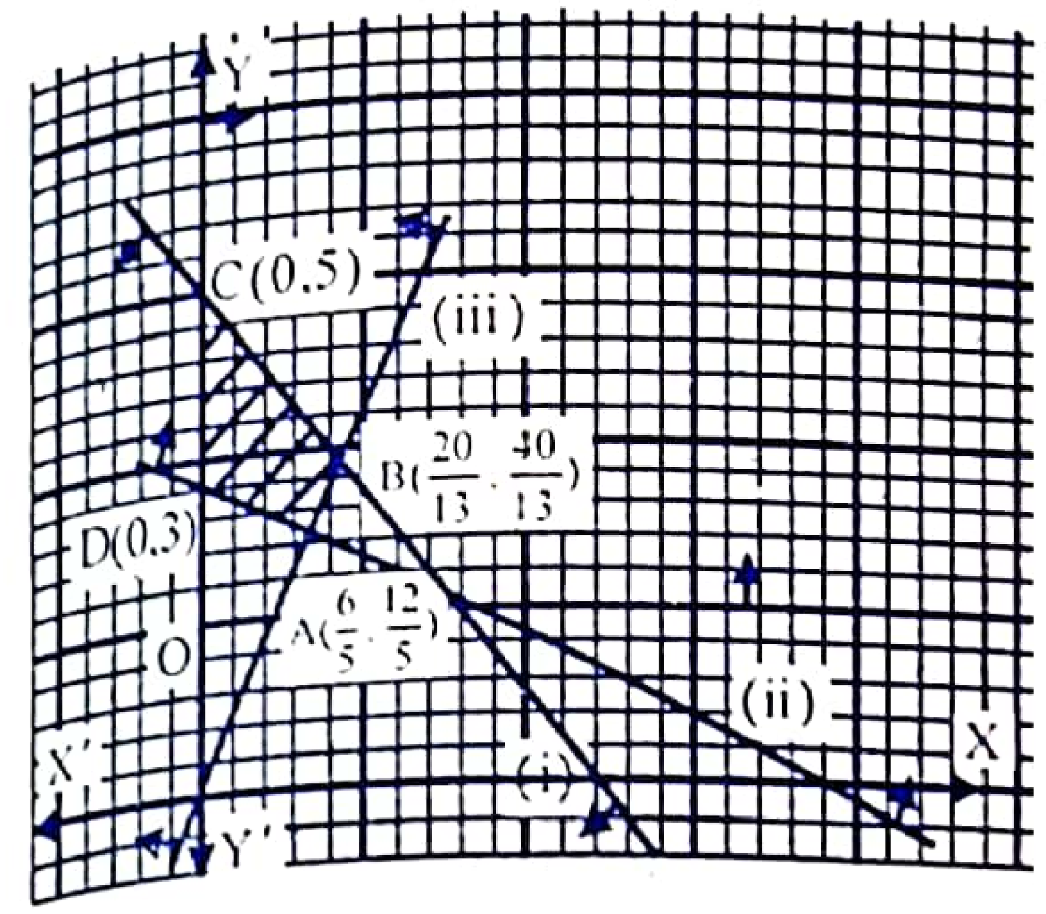
$5x + 4y = 20 \Rightarrow \frac{x}{4}+\frac{y}{5}=1 \cdots$(i),

$2x + 4y=12 \Rightarrow \frac{x}{6}+\frac{y}{3}=1 \cdots\cdots$ (ii)

$y = 2x \cdots\cdots$ (iii) এবং $x = 0, y = 0$

একটি ছক কাগজে স্থানাঙ্কের অক্ষরেখা $X'OX$ ও YOY' অঙ্কন করি। x-অক্ষ ও y-অক্ষ বরাবর ছোট 3 বর্গের বাহুর দৈর্ঘ্য = 1 একক ধরে (i) (ii) ও (iii) রেখার লেখচিত্র অঙ্কন করি।

$ABCD$ চতুর্ভুজ দ্বারা সীমাবদ্ধ এলাকার বিন্দুসমূহের সেট প্রদত্ত সকল শর্তকে সিদ্ধ করে। অতএব এই ক্ষেত্রটিই সমাধানের অনুকূল এলাকা।



$2x + 4y =12$ ও $y = 2x$ এর ছেদবিন্দু $A(\frac{6}{5},\frac{12}{5})$, $5x + 4y = 20$ ও $y = 2x$ এর ছেদবিন্দু $B(\frac{20}{13},\frac{40}{13})$, $C(0,5)$, $D(0,3)$.

$A(\frac{6}{5},\frac{12}{5})$ বিন্দুতে, $z = 4\times\frac{6}{5} + 3\times\frac{12}{5} = 12$

$B(\frac{20}{13},\frac{40}{13})$ বিন্দুতে, $z = 4\times\frac{20}{13} + 3\times\frac{40}{13}$

$= \frac{320}{13} = 24\frac{8}{13}$

$C(0,5)$ বিন্দুতে, $z = 4\times 0 + 3\times 5 = 15$

$D(0,3)$ বিন্দুতে, $z = 4\times 0 + 3\times 3 = 9$

$\therefore$ $B(\frac{20}{13},\frac{40}{13})$ বিন্দুতে অভিষ্ট ফাংশন z এর সর্বোচ্চ মান $= z = 24\frac{8}{13}$. (Ans.)

11. $ax^2 + bx + c = 0$ একটি দ্বিঘাত সমীকরণ।

ক. (i) এর মূলদ্বয়ের অনুপাত 2 : 3 হলে সহগগুলির মধ্যে সম্পর্ক স্থাপন কর।

সমাধান: মনে করি, মূলদ্বয় 2α ও 3α .

$\therefore$ $2\alpha + 3\alpha = -\frac{b}{a} \Rightarrow \alpha = -\frac{b}{5a}$ এবং

$2\alpha . 3\alpha = \frac{c}{a} \Rightarrow 6\alpha^2 = \frac{c}{a}$

$\Rightarrow 6(-\frac{b}{5a})^2 = \frac{c}{a} \Rightarrow \frac{6b^2}{25a^2} = \frac{c}{a}$

$\Rightarrow 6b^2 = 25ac$

খ. উদ্দীপকের $ax^2 + bx + c = 0$ সমীকরণের একটি মূল যদি উদ্দীপকের সমীকরণে a ও c স্থান বিনিময় করলে যে সমীকরণ পাওয়া যায় তার একটি মূল সমান হলে প্রমাণ কর যে, $c + a = \pm b$.

প্রমাণ: $ax^2 + bx + c = 0$ সমীকরণে a ও c স্থান বিনিময় করলে সমীকরণ পাওয়া যায় $cx^2 + bx + a = 0$.

মনে করি, এ সমীকরণ দুইটির সমান মূলটি α .

অতপর প্রশ্নমালা IV এর উদাহরণ-7 দ্রষ্টব্য।

গ. উদ্দীপকে $a = 6$, $b = 5$, $c = 4$ এর জন্য দ্বিঘাত সমীকরণের মূলদ্বয় α, β হলে $\alpha^2 + \beta^2$ ও $\alpha\beta$ মূল বিশিষ্ট সমীকরণ গঠন কর।

সমাধান: উদ্দীপকের দ্বিঘাত সমীকরণে $a = 6$, $b = 5$, $c = 4$ বসিয়ে পাই,

$6x^2 + 5x + 4 = 0 \cdots\cdots$ (i)

(i) এর মূলদ্বয় α, β হলে, $\alpha + \beta = -\frac{5}{6}$,

$\alpha\beta = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$

এখন, $\alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta$

$= (-\frac{5}{6})^2 - \frac{4}{3} = \frac{25}{36} - \frac{4}{3} = \frac{25-48}{36} = \frac{-23}{36}$

$\therefore$ নির্ণেয় সমীকরণ,

$x^2-(\alpha^2 + \beta^2 +\alpha\beta)x +(\alpha^2 + \beta^2).\alpha\beta=0$

$\Rightarrow x^2 - (\frac{-23}{36}+\frac{2}{3})x + (\frac{-23}{36})(\frac{2}{3}) = 0$

$\Rightarrow x^2 - (\frac{-23+24}{36})x - \frac{23}{54} = 0$

$\Rightarrow 108x^2 - 3x - 46 = 0$ (Ans.)

12. $f(x) = ax^2 + bx + c,\ g(x) = 6x^2 - 5x - 1$

ক. $g(x) = 0$ দ্বিঘাত সমীকরণের মূলদ্বয় α ও β হলে $\alpha^4 + \alpha^2\beta^2 + \beta^4$ এর মান নির্ণয় কর।

সমাধান: $g(x) = 0 \Rightarrow 6x^2 - 5x - 1 = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় α ও β.

$\therefore\ \alpha + \beta = -\frac{-5}{6} = \frac{5}{6},\ \alpha\beta = -\frac{1}{6}$

$\therefore\ \alpha^4 + \alpha^2\beta^2 + \beta^4 = (\alpha^2)^2 + 2\alpha^2\beta^2 + (\beta^2)^2 - \alpha^2\beta^2$

$= (\alpha^2 + \beta^2)^2 - \alpha^2\beta^2$

$= \{(\alpha+\beta)^2 - 2\alpha\beta\}^2 - \alpha^2\beta^2$

$= \{(\frac{5}{6})^2 - 2.(-\frac{1}{6})\}^2 - (-\frac{1}{6})^2$

$= \{\frac{25}{36} + \frac{1}{3}\}^2 - \frac{1}{36} = \{\frac{25+12}{36}\}^2 - \frac{1}{36}$

$= \frac{1369}{1296} - \frac{1}{36} = \frac{1369-36}{1296} = \frac{1333}{1296}$ (Ans.)

খ. $g(x) < 0$ অসমতাকে পরমমান চিহ্নের সাহায্যে লিখ।

সমাধান: $g(x) < 0 \Rightarrow 6x^2 - 5x - 1 < 0$

$\Rightarrow 6x^2 - 6x + x - 1 < 0$

$\Rightarrow 6x(x-1) + 1(x-1) < 0$

$\Rightarrow (x-1)(6x+1) < 0$

$\Rightarrow (x-1)(x + \frac{1}{6}) < 0$

$\Rightarrow (x-1)\{x - (-\frac{1}{6})\} < 0$

$\Rightarrow -\frac{1}{6} < x < 1 \Rightarrow -1 < 6x < 6$

সকল পক্ষে $-\frac{-1+6}{2} = -\frac{5}{2}$ যোগ করে

পাই, $-1 - \frac{5}{2} < 6x - \frac{5}{2} < 6 - \frac{5}{2}$

$\Rightarrow -\frac{7}{2} < \frac{12x-5}{2} < \frac{7}{2}$

$\Rightarrow -7 < 12x - 5 < 7$

$\Rightarrow |12x - 5| < 7$ (Ans.)

গ. $f(x) = 0$ ও $g(x) = 0$ সমীকরণদ্বয়ের একটি সাধারণ মূল থাকার শর্ত নির্ণয় কর।

সমাধান: $f(x) = 0 \Rightarrow ax^2 + bx + c = 0$ ও $g(x) = 0 \Rightarrow 6x^2 - 5x - 1 = 0$ সমীকরণ দুইটির সাধারণ মূল α হলে,

$a\alpha^2 + b\alpha + c = 0 \cdots\cdots$ (i)

$6\alpha^2 - 5\alpha - 1 = 0 \cdots\cdots$ (ii)

বজ্রগুণন সূত্র প্রয়োগ করে (i) ও (ii) হতে পাই,

$\frac{\alpha^2}{-b+5c} = \frac{\alpha}{6c+a} = \frac{1}{-5a-6b}$

$\therefore\ (6c+a)^2 = (5c-b)(-5a-6b)$

$\Rightarrow 36c^2 + 12ca + a^2 = -25ca - 30bc + 5ab + 6b^2$

$\Rightarrow 36c^2 + 37ca + a^2 + 30bc - 5ab - 6b^2 = 0$

$\therefore\ a^2 - 6b^2 + 36c^2 - 5ab + 30bc + 37ca = 0$

13. $2x^2 + 3x + 5 = 0$ দ্বিঘাত সমীকরণের মূলদ্বয় α ও β

ক. সমীকরণটির মূলের প্রকৃতি নির্ণয় কর।

সমাধান: প্রদত্ত সমীকরণের পৃথায়ক $= 3^2 - 4.2.5 = 9 - 40 = -31 < 0$

$\therefore$ প্রদত্ত সমীকরণের মূলদ্বয় অসমান ও কাল্পনিক।

খ. এমন একটি সমীকরণ নির্ণয় কর যার মূলদ্বয় হবে $\frac{1}{\alpha^3}, \frac{1}{\beta^3}$

সমাধান: প্রশ্নমালা IV এর 5(e) দ্রষ্টব্য।

গ. সমীকরণটির মূলের বর্গমূল নির্ণয় কর।

সমাধান: প্রদত্ত সমীকরণ $2x^2 + 3x + 5 = 0$

$\Rightarrow x = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4.2.5}}{2.2} = \frac{-3 \pm \sqrt{9-40}}{4}$

$= \frac{-3 \pm \sqrt{-31}}{4} = \frac{1}{4}(-3 \pm \sqrt{31}\,i)$

$\therefore\ x = \frac{1}{4}(-3 \pm \sqrt{31}\,i)$ এর বর্গমূল

$= \pm\frac{1}{2}\sqrt{(-3 \pm \sqrt{31}\,i)}$

$= \pm \frac{1}{2}.\frac{1}{\sqrt{2}}\{(\sqrt{(-3)^2 + (\sqrt{31})^2} - 3)^{\frac{1}{2}}$
$\pm i(\sqrt{(-3)^2 + (\sqrt{31})^2} + 3)^{\frac{1}{2}}\}$

[$a \pm ib$ এর বর্গমূল $= \pm\frac{1}{\sqrt{2}}\{(\sqrt{a^2+b^2} + a)^{\frac{1}{2}} \pm i(\sqrt{a^2+b^2} - a)^{\frac{1}{2}}\}$]

$= \pm\frac{1}{2\sqrt{2}}\{(\sqrt{9+31} - 3)^{\frac{1}{2}} \pm i(\sqrt{9+31} + 3)^{\frac{1}{2}}\}$

$= \pm\frac{1}{2\sqrt{2}}\{(2\sqrt{10} - 3)^{\frac{1}{2}} \pm i(2\sqrt{10} + 3)^{\frac{1}{2}}\}$ (Ans.)

14. $\alpha = \frac{1}{2}(-1 - \sqrt{-3}),\ \beta = \frac{1}{2}(-1 + \sqrt{-3})$

ক. β^3 নির্ণয় কর।

সমাধান: $\beta^3 = \frac{1}{2^3}(-1 + \sqrt{-3})^3$

$= \frac{1}{8}\{(-1)^3 + 3.(-1)^2.\sqrt{-3} + 3.(-1).(\sqrt{-3})^2 + (\sqrt{-3})^3\}$

$= \frac{1}{8}\{-1 + 3\sqrt{-3} + 3.(-1).(-3) + (-3)\sqrt{-3}\}$

$= \frac{1}{8}\{-1 + 3\sqrt{-3} + 9 - 3\sqrt{-3}\}$

$= \frac{1}{8}(8) = 1$ (Ans.)

খ. $\sqrt{\alpha}$ এর আর্গুমেন্ট নির্ণয় কর।

সমাধান: $\alpha = \frac{1}{2}(-1 - \sqrt{-3})$

$= \frac{1}{2}(-1 - \sqrt{3i^2}) = \frac{1}{4}(-2 - 2\sqrt{3}i)$

$= \frac{1}{4}(1 - 3 - 2\sqrt{3}i)$

$= \frac{1}{4}\{1^2 + (\sqrt{3}i)^2 - 2.1.\sqrt{3}i\}$

$= \frac{1}{4}(1 - \sqrt{3}i)^2$

$\therefore\ \sqrt{\alpha} = \frac{1}{2}(1 - \sqrt{3}i) = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$

$\therefore\ \sqrt{\alpha} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$ আর্গুমেন্ট

$= \tan^{-1}\frac{-\sqrt{3}/2}{1/2} = -\tan^{-1}\sqrt{3} = -\frac{\pi}{3}$

গ. কোনো একটি দ্বিঘাত সমীকরণের একটি মূল α হলে সমীকরণটি নির্ণয় কর।

সমাধান: দ্বিঘাত সমীকরণের একটি মূল $\alpha = \frac{1}{2}(-1 - \sqrt{-3}) = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$; যা জটিল।

$\therefore$ এর অপর মূলটি হবে $-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$.

মূলদ্বয়ের যোগফল $= -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i + (-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i)$

$= -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i - \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i = -1$

মূলদ্বয়ের গুণফল $= (-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i)(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i)$

$= (-\frac{1}{2})^2 - (\frac{\sqrt{3}}{2}i)^2 = \frac{1}{4} - \frac{3}{4}i^2$

$= \frac{1}{4} - \frac{3}{4}(-1) = \frac{1+3}{4} = \frac{4}{4} = 1$

$\therefore$ নির্ণেয় দ্বিঘাত সমীকরণ,

$x^2 -$ (মূলদ্বয়ের যোগফল)$x +$ মূলদ্বয়ের গুণফল $= 0$

$\Rightarrow x^2 - (-1)x + 1 = 0 \Rightarrow x^2 + x + 1 = 0$

15. দৃশ্যকল্প -১: $x = \sqrt[4]{-1}$

দৃশ্যকল্প -২: $x^2 + bx + c = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় α, β.

ক. দেখাও যে, $x^5 - x^4 + 10x^3 - 9x^2 + 8x + 699$ রাশিটির একটি উৎপাদক $x + 3$.

প্রমাণ: ধরি, $f(x) = x^5 - x^4 + 10x^3 - 9x^2 + 8x + 699$

$\therefore$ $f(-3) = (-3)^5 - (-3)^4 + 10(-3)^3 - 9(-3)^2 + 8(-3) + 699$

$= -243 - 81 - 270 - 81 - 24 + 699$

$= -699 + 699 = 0$

$\therefore$ $x - (-3) = x + 3$, $f(x) = x^5 - x^4 + 10x^3 - 9x^2 + 8x + 699$ এর একটি উৎপাদক।

খ. b, c এর মাধ্যমে $(\alpha + b)^{-4} + (\beta + b)^{-4}$ এর মান নির্ণয় কর।

সমাধান: $x^2 + bx + c = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় α, β বলে, $\alpha + \beta = -b$, $\alpha\beta = c$ এবং

$\alpha^2 + b\alpha + c = 0 \Rightarrow \alpha(\alpha + b) = -c$

$\Rightarrow \alpha + b = -\dfrac{c}{\alpha}$

তদ্রূপ, $\beta + b = -\dfrac{c}{\beta}$

এখন, $(\alpha + b)^{-4} + (\beta + b)^{-4}$

$= (-\dfrac{c}{\alpha})^{-4} + (-\dfrac{c}{\beta})^{-4} = \dfrac{\alpha^4}{c^4} + \dfrac{\beta^4}{c^4}$

$= \dfrac{\alpha^4 + \beta^4}{c^4} = \dfrac{(\alpha^2 + \beta^2)^2 - 2\alpha^2\beta^2}{c^4}$

$= \dfrac{\{(\alpha+\beta)^2 - 2\alpha\beta\}^2 - 2\alpha^2\beta^2}{c^4}$

$= \dfrac{\{(-b)^2 - 2c\}^2 - 2c^2}{c^4}$

$= \dfrac{(b^2 - 2c)^2 - 2c^2}{c^4}$

$= \dfrac{b^4 - 4b^2c + c^2 - 2c^2}{c^4}$

$= \dfrac{b^4 - 4b^2c - c^2}{c^4}$ (Ans.)

গ. দৃশ্যকল্প -১ এর আলোকে x এর যে মানটি আর্গাঁড চিত্রে ১ম চতুর্ভাগে অবস্থান করে তার বর্গমূল নির্ণয় কর।

সমাধান: $x = \sqrt[4]{-1} \Rightarrow x^4 = -1 = i^2$

$\Rightarrow (x^2)^2 = i^2 \Rightarrow x^2 = \pm i = \dfrac{1}{2}(\pm 2i)$

$= \dfrac{1}{2}(1^2 + i^2 \pm 2i) = \dfrac{1}{2}(1 \pm i)^2$

$\therefore$ $x = \pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}(1 \pm i)$; যাদের মধ্যে $\dfrac{1}{\sqrt{2}}(1 + i)$ মানটি ১ম চতুর্ভাগে অবস্থিত।

এখন, $\dfrac{1}{\sqrt{2}}(1 + i) = \dfrac{1}{2\sqrt{2}}(2 + 2i)$

$= \dfrac{1}{2\sqrt{2}}(2 + 2i) = \dfrac{1}{2\sqrt{2}}\{2 + 2\sqrt{1}\, i\}$

$= \dfrac{1}{2\sqrt{2}}\{(\sqrt{2} + 1) - (\sqrt{2} - 1) + 2\sqrt{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)}\, i\}$

$= \dfrac{1}{2\sqrt{2}}\{(\sqrt{2} + 1) + (\sqrt{2} - 1)i^2 + 2(\sqrt{2}+1)^{\frac{1}{2}}(\sqrt{2}-1)^{\frac{1}{2}}\, i\}$

$= \dfrac{1}{2\sqrt{2}}\left[\left\{(\sqrt{2}+1)^{\frac{1}{2}}\right\}^2 + \left\{(\sqrt{2}-1)^{\frac{1}{2}}i\right\}^2 + 2(\sqrt{2}+1)^{\frac{1}{2}}(\sqrt{2}-1)^{\frac{1}{2}}i\right]$

$= \dfrac{1}{2\sqrt{2}}\left\{(\sqrt{2}+1)^{\frac{1}{2}} + (\sqrt{2}-1)^{\frac{1}{2}}i\right\}^2$

$\therefore$ $\dfrac{1}{\sqrt{2}}(1 + i)$ এর বর্গমূল

$= \dfrac{1}{2\sqrt{2}}\left\{(\sqrt{2}+1)^{\frac{1}{2}} + (\sqrt{2}-1)^{\frac{1}{2}}i\right\}^2$

16. $x^2 + ax + b = 0 \cdots\cdots$ (i),

$x^2 + ax + 8 = 0 \cdots\cdots$ (ii)

ক. $3x^2 + 2x + 1 = 0$ সমীকরণের মূলের প্রকৃতি নির্ণয় কর।

সমাধান: $3x^2 + 2x + 1 = 0$ সমীকরণের পৃথায়ক $= 2^2 - 4.2.1 = 4 - 8 = -4 < 0$

$\therefore$ প্রদত্ত সমীকরণের মূলদ্বয় জটিল ও অসমান।

খ. (i) নং সমীকরণের মূলদ্বয় সমান হয় এবং (ii) নং সমীকরণের একটি মূল যদি 4 হয়, তবে a ও b মূলবিশিষ্ট সমীকরণ নির্ণয় কর।

সমাধান: $x^2 + ax + 8 = 0 \cdots$(ii) সমীকরণের একটি মূল 4।

$\therefore$ $4^2 + a.4 + 8 = 0 \Rightarrow 16 + 4a + 8 = 0$

$\Rightarrow 4a = -24 \Rightarrow a = -6$

আবার, $x^2 + ax + b = 0 \cdots$(i) সমীকরণের মূলদ্বয় সমান।

$\therefore$ $a^2 = 4.1.b \Rightarrow (-6)^2 = 4b$

$\Rightarrow 4b = 36 \Rightarrow b = 9$

$\therefore$ a ও b মূলবিশিষ্ট সমীকরণ,

$x^2 - (a + b)x + ab = 0$

$\Rightarrow x^2 - (-6 + 9) + (-6)(9) = 0$

$\Rightarrow x^2 - 3x - 54 = 0$ (Ans.)

গ. $a = 2\sqrt{3}$, $b = 4$ এর জন্য (i) নং সমীকরণের মূলদ্বয় z_1 ও z_2 হলে দেখাও যে, $\arg(z_1z_2) = \arg z_1 + \arg z_2$.

প্রমাণ: $a = 2\sqrt{3}$, $b = 4$ এর জন্য $x^2 + ax + b = 0$ সমীকরণ হতে পাই,

$\Rightarrow x^2 + 2\sqrt{3}x + 4 = 0$

$\therefore$ $x = \dfrac{-2\sqrt{3} \pm \sqrt{(2\sqrt{3})^2 - 4.1.4}}{2.1}$

$= \dfrac{-2\sqrt{3} \pm \sqrt{12 - 16}}{2} = \dfrac{-2\sqrt{3} \pm \sqrt{-4}}{2}$

$= \dfrac{-2\sqrt{3} \pm 2\sqrt{-1}}{2} = -\sqrt{3} \pm i$

$z_1 = -\sqrt{3} + i$ এবং $z_2 = -\sqrt{3} - i$ ধরে,

$z_1z_2 = (-\sqrt{3} + i)(-\sqrt{3} - i)$

$= (-\sqrt{3})^2 - (i)^2 = 3 + 1 = 4 = 4 + 0i$

এখন, $\arg z_1 = \tan^{-1}\dfrac{1}{-\sqrt{3}}$

$= \pi - \tan^{-1}\dfrac{1}{\sqrt{3}} = \pi - \dfrac{\pi}{6} = \dfrac{5\pi}{6}$

$\arg z_2 = \tan^{-1}\dfrac{-1}{-\sqrt{3}}$

$= -\pi + \tan^{-1}\dfrac{1}{\sqrt{3}} = -\pi + \dfrac{\pi}{6} = -\dfrac{5\pi}{6}$

$\arg(z_1z_2) = \arg(4 + 0i)$

$= \tan^{-1}\dfrac{0}{4} = \tan^{-1}0 = 0$

$\therefore$ $\arg z_1 + \arg z_2 = \dfrac{5\pi}{6} - \dfrac{5\pi}{6}$

$= 0 = \arg(z_1z_2)$

$\therefore$ $\arg(z_1z_2) = \arg z_1 + \arg z_2$ (Showed)

17. (i) $x^2 + px + q = 0$ (ii) $x^2 + qx + p = 0$

(iii) $x^2 - (p + q)x + (p + q)^2 = 0$

ক. দেখাও যে, $a = b$ না হলে $2x^2 - 2(a + b)x + a^2 + b^2 = 0$ সমীকরণের মূলগুলি বাস্তব হতে পারে না।

প্রমাণ: প্রশ্নমালা IV এর 3(a) দ্রষ্টব্য।

খ. (i) ও (ii) এর মূলদ্বয়ের পার্থক্য একটি ধ্রুব রাশি হলে প্রমাণ কর যে, $p + q + 4 = 0$

প্রমাণ: (i) $x^2 + px + q = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয়

$= \dfrac{-p \pm \sqrt{p^2 - 4.1.q}}{2.1} = \dfrac{-p \pm \sqrt{p^2 - 4q}}{2}$

$= \dfrac{-p + \sqrt{p^2 - 4q}}{2}, \dfrac{-p - \sqrt{p^2 - 4q}}{2}$

(ii) $x^2 + qx + p = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয়

$= \dfrac{-q \pm \sqrt{q^2 - 4.1.p}}{2.1} = \dfrac{-q \pm \sqrt{q^2 - 4p}}{2}$

$= \dfrac{-q + \sqrt{q^2 - 4p}}{2}, \dfrac{-q - \sqrt{q^2 - 4p}}{2}$

প্রশ্নমতে, (i) এর মূলদ্বয়ের পার্থক্য = (ii) এর মূলদ্বয়ের পার্থক্য

$$\Rightarrow \frac{-p+\sqrt{p^2-4q}}{2} - \frac{-p-\sqrt{p^2-4q}}{2} = \frac{-q+\sqrt{q^2-4p}}{2} - \frac{-q-\sqrt{q^2-4p}}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{2\sqrt{p^2-4q}}{2} = \frac{2\sqrt{q^2-4p}}{2}$$

$\Rightarrow p^2-4q = q^2-4p$

$\Rightarrow p^2-q^2+4p-4q = 0$

$\Rightarrow (p+q)(p-q)+4(p-q) = 0$

$\Rightarrow (p-q)(p+q+4) = 0$

এখানে, $p \neq q$

$\therefore p+q+4 = 0$ (Proved)

গ. (i) ও (ii) এর একটি সাধারণ মূল থাকলে এবং (iii) এর মূলদ্বয় α ও β হলে প্রমাণ কর যে, $\alpha^3+\beta^3 = 2$.

প্রমাণ: ধরি, (i) ও (ii) এর একটি সাধারণ মূল α.

$\therefore \alpha^2+p\alpha+q = 0$ এবং

$\alpha^2+q\alpha+p = 0$

বজ্রগুণন সূত্র প্রয়োগ করে পাই,

$$\frac{\alpha^2}{p^2-q^2} = \frac{\alpha}{q-p} = \frac{1}{q-p}$$

$\therefore (q-p)^2 = (q-p)(p^2-q^2)$

$\Rightarrow (q-p)^2 = -(q-p)^2(p+q)$

$\Rightarrow (q-p)^2(1+p+q) = 0$

কিন্তু $q = p$ হলে, প্রদত্ত সমীকরণের উভয় মূলই সাধারণ হয়।

$\therefore p+q+1 = 0 \Rightarrow p+q = -1$

এখন, (iii) $x^2-(p+q)x+(p+q)^2 = 0$ এর মূলদ্বয় α ও β হলে,

$\alpha+\beta = -\frac{-(p+q)}{1} = p+q = -1$

$\alpha\beta = (p+q)^2 = (-1)^2 = 1$

L.H.S. $= \alpha^3+\beta^3$

$= (\alpha+\beta)^3 - 3\alpha\beta(\alpha+\beta)$

$= (-1)^3 - 3.1(-1) = -1+3$

$= 2 =$ R.H.S. (Proved)

18. (i) $ax^2+bx+c = 0$
(ii) $bx^2+cx+a = 0$

ক. দ্বিঘাত সমীকরণের একটি মূল $-4-\sqrt{-5}$ হলে সমীকরণটির মূলদ্বয়ের গুণফল নির্ণয় কর।

সমাধান: দ্বিঘাত সমীকরণের একটি মূল $-4-\sqrt{-5} = -4-\sqrt{5i^2} = -4-\sqrt{5}i$, যা জটিল সংখ্যা।

$\therefore$ দ্বিঘাত সমীকরণটির অপর মূলটি হবে $-4+\sqrt{5}i$

দ্বিঘাত সমীকরণটির মূলদ্বয়ের গুণফল

$= (-4-\sqrt{5}i)(-4+\sqrt{5}i)$

$= (-4)^2-(\sqrt{5}i)^2 = 16-5i^2$

$= 16+5 = 21$ (Ans.)

খ. (i) এর মূলদ্বয় α, β হলে $cx^2+2bx+4a = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয়কে α ও β এর মাধ্যমে প্রকাশ কর।

সমাধান : দেওয়া আছে, $ax^2+bx+c = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় α এবং β

$\therefore \alpha+\beta = -\frac{b}{a} \Rightarrow b = -a(\alpha+\beta)$ এবং

$\alpha\beta = \frac{c}{a} \Rightarrow c = a\alpha\beta$

এখন, $cx^2+2bx+4a = 0$

$\Rightarrow a\alpha\beta x^2 + 2\{-a(\alpha+\beta)\}x + 4a = 0$

$\Rightarrow \alpha\beta x^2 - 2\alpha x - 2\beta x + 4 = 0$

$\Rightarrow \alpha x(\beta x-2) - 2(\beta x-2) = 0$

$\Rightarrow (\alpha x-2)(\beta x-2) = 0 \quad \therefore x = \frac{2}{\alpha}, \frac{2}{\beta}$

অতএব, $cx^2+2bx+4a = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় $\frac{2}{\alpha}$ এবং $\frac{2}{\beta}$.

গ. (i) এর মূলদ্বয় α, β এবং (ii) এর মূলদ্বয় γ, δ হলে কি শর্তে $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta}$ হবে?

সমাধান : দেওয়া আছে, $ax^2+bx+c = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় α, β এবং $bx^2+cx+a = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় γ, δ

$\alpha+\beta = -\frac{b}{a}, \alpha\beta = \frac{c}{a}, \gamma+\delta = -\frac{c}{b}$ এবং $\gamma\delta = \frac{a}{b}$.

এখন, $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta} \Rightarrow \frac{\alpha+\beta}{\alpha-\beta} = \frac{\gamma+\delta}{\gamma-\delta}$

$$\Rightarrow \frac{\alpha+\beta}{\sqrt{(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta}} = \frac{\gamma+\delta}{\sqrt{(\gamma+\delta)^2-4\gamma\delta}}$$

$$\Rightarrow (\alpha+\beta)\sqrt{(\gamma+\delta)^2-4\gamma\delta} = (\gamma+\delta)\sqrt{(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta}$$

$$\Rightarrow -\frac{b}{a}\sqrt{\left(-\frac{c}{b}\right)^2-4\frac{a}{b}} = -\frac{c}{b}\sqrt{\left(-\frac{b}{a}\right)^2-4\frac{c}{a}}$$

$$\Rightarrow \frac{b^2}{a^2}\left(\frac{c^2}{b^2}-4\frac{a}{b}\right) = \frac{c^2}{b^2}\left(\frac{b^2}{a^2}-4\frac{c}{a}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{b^2}{a^2}\times\frac{c^2-4ab}{b^2} = \frac{c^2}{b^2}\times\frac{b^2-4ca}{a^2}$$

$\therefore b^2(c^2-4ab) = c^2(b^2-4ca)$, ইহাই নির্ণেয় শর্ত।

19. (i) $3x^2+2x+1 = 0$ একটি দ্বিঘাত সমীকরণ।
(ii) $z = 4+3i$ একটি জটিল সংখ্যা।

ক. $8x^4-2x^3-27x^2+6x+9$ বহুপদীকে $(2x+1)$ দ্বারা ভাগ করলে ভাগশেষ নির্ণয় কর।

সমাধান: $f(x) = 8x^4-2x^3-27x^2+6x+9$

বহুপদীকে $(2x+1) = 2\{x-(-\frac{1}{2})\}$ দ্বারা ভাগ করলে ভাগশেষ হবে $f(-\frac{1}{2})$

এখন, $f(-\frac{1}{2}) = 8(-\frac{1}{2})^4 - 2(-\frac{1}{2})^3 - 27(-\frac{1}{2})^2 + 6(-\frac{1}{2}) + 9$

$= 8.\frac{1}{16} + 2.\frac{1}{8} - 27.\frac{1}{4} - 3 + 9$

$= \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{27}{4} + 6 = \frac{2+1-27+24}{4}$

$= \frac{27-27}{4} = 0$

$\therefore$ নির্ণেয় ভাগশেষ $= 0$.

খ. একটি দ্বিঘাত সমীকরণ নির্ণয় কর যার একটি মূল $\frac{1}{z}$.

সমাধান: $z = 4+3i$

$\therefore \frac{1}{z} = \frac{1}{4+3i} = \frac{4-3i}{(4+3i)(4-3i)}$

$= \frac{4-3i}{4^2-3^2i^2} = \frac{4-3i}{16+9} = \frac{4-3i}{25}$, যা জটিল সংখ্যা।

$\therefore$ দ্বিঘাত সমীকরণটির অপর মূলটি $\frac{4+3i}{25}$,

নির্ণেয় দ্বিঘাত সমীকরণ,

$x^2 - (\frac{4-3i}{25} + \frac{4+3i}{25})x + \frac{4-3i}{25}.\frac{4+3i}{25} = 0$

$\Rightarrow x^2 - (\frac{4-3i+4+3i}{25})x + \frac{4^2-3^2i^2}{25^2} = 0$

$\Rightarrow x^2 - \frac{8}{25}x + \frac{25}{25^2} = 0$

$\Rightarrow x^2 - \frac{8}{25}x + \frac{1}{25} = 0$

$\Rightarrow 25x^2 - 8x + 1 = 0$

গ. আর্গন্ড চিত্রে (i) এর যে মূলটি তৃতীয় চতুর্ভাগে অবস্থান করে তার মডুলাস নির্ণয় কর।

সমাধান: $3x^2+2x+1 = 0$

$\therefore x = \frac{-2\pm\sqrt{4-4.3.1}}{2.3} = \frac{-2\pm\sqrt{4-12}}{6}$

$= \frac{-2\pm\sqrt{-8}}{6} = \frac{-2\pm\sqrt{8i^2}}{6}$

$= \frac{-2 \pm 2\sqrt{2}i}{6} = \frac{-1 \pm \sqrt{2}i}{3}$, যাদের মধ্যে $-\frac{1}{3} - \frac{\sqrt{2}}{3}i$ মূলটি আর্গান চিত্রে তৃতীয় চতুর্ভাগে অবস্থান করে।

$\therefore -\frac{1}{3} - \frac{\sqrt{2}}{3}i$ এর মডুলাস $= \left|-\frac{1}{3} - \frac{\sqrt{2}}{3}i\right|$

$= \sqrt{\left(-\frac{1}{3}\right)^2 + \left(-\frac{\sqrt{2}}{3}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{9} + \frac{2}{9}}$

$= \sqrt{\frac{3}{9}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$ (Ans.)

20. $P(x) \equiv x^3 - 5x^2 + 17x - 13 = 0$ সমীকরণের মূলত্রয় α, β, λ এবং $Q(x) \equiv x^2 - cx + b = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় γ, δ.

ক. দেখাও যে, $P(x) = 0$ সমীকরণের একটি মূল $\lambda = 1$.

প্রমাণ : $P(x) = x^3 - 5x^2 + 17x - 13$

$\therefore P(1) = 1^3 - 5.1^2 + 17.1 - 13$
$= 1 - 5 + 17 - 13 = 18 - 18 = 0$

$\therefore \lambda = 1$, $P(x) = 0$ সমীকরণের একটি মূল।

খ. $P(x) = 0$ এর ক্ষেত্রে $\sum \alpha^3\beta$ এর মান নির্ণয় কর।

সমাধান: $P(x) = 0 \Rightarrow x^3 - 5x^2 + 17x - 13 = 0$ সমীকরণের মূলত্রয় α, β, γ

$\therefore \sum \alpha = \alpha + \beta + \gamma = -(-5) = 5$,
$\sum \alpha\beta = \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = 17$ এবং
$\alpha\beta\gamma = -(-13) = 13$

$\sum \alpha^3\beta = \alpha^3\beta + \alpha\beta^3 + \beta^3\gamma + \beta\gamma^3 + \gamma^3\alpha + \gamma\alpha^3$

$= \alpha\beta(\alpha^2 + \beta^2) + \beta\gamma(\beta^2 + \gamma^2) + \gamma\alpha(\gamma^2 + \alpha^2)$

$= \alpha\beta(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - \gamma^2) + \beta\gamma(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - \alpha^2) + \gamma\alpha(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - \beta^2)$

$= \alpha\beta(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) - \alpha\beta\gamma^2 + \beta\gamma(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) - \alpha^2\beta\gamma + \gamma\alpha(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) - \alpha\beta^2\gamma$

$= (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)(\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha) - \alpha\beta\gamma^2 - \alpha^2\beta\gamma - \alpha\beta^2\gamma$

$= \{(\alpha + \beta + \gamma)^2 - 2(\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha)\}(\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha) - \alpha\beta\gamma(\alpha + \beta + \gamma)$

$= (5^2 - 2.17)17 - 13.5$
$= (25 - 34)17 - 65$
$= -153 - 65 = -218$ (Ans.)

গ. এরূপ একটি সমীকরণ নির্ণয় কর যার মূলদ্বয় $\frac{1}{\alpha\gamma} + \frac{1}{\beta\delta}$ এবং $\frac{1}{\alpha\delta} + \frac{1}{\beta\gamma}$ হয়।

সমাধান: $x^3 - 5x^2 + 17x - 13 = 0$
$\Rightarrow x^2(x - 1) - 4x(x - 1) + 13(x - 1) = 0$
$\Rightarrow (x - 1)(x^2 - 4x + 13) = 0$

$\therefore x^2 - 4x + 13 = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় α, β এবং $x^2 - cx + b = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় γ, δ.

$\therefore \alpha + \beta = 4, \alpha\beta = 13$
$\gamma + \delta = c, \gamma\delta = b$

$\frac{1}{\alpha\gamma} + \frac{1}{\beta\delta}$ এবং $\frac{1}{\alpha\delta} + \frac{1}{\beta\gamma}$ মূলদ্বয়ের

সমষ্টি $= \frac{1}{\alpha\gamma} + \frac{1}{\beta\delta} + \frac{1}{\alpha\delta} + \frac{1}{\beta\gamma}$

$= \left(\frac{1}{\alpha\gamma} + \frac{1}{\alpha\delta}\right) + \left(\frac{1}{\beta\delta} + \frac{1}{\beta\gamma}\right)$

$= \frac{1}{\alpha}\left(\frac{\gamma + \delta}{\gamma\delta}\right) + \frac{1}{\beta}\left(\frac{\gamma + \delta}{\gamma\delta}\right)$

$= \left(\frac{\alpha + \beta}{\alpha\beta}\right)\left(\frac{\gamma + \delta}{\gamma\delta}\right) = \frac{4}{13} \cdot \frac{c}{b} = \frac{4c}{13b}$

এবং গুণফল $= \left(\frac{1}{\alpha\gamma} + \frac{1}{\beta\delta}\right)\left(\frac{1}{\alpha\delta} + \frac{1}{\beta\gamma}\right)$

$= \frac{\beta\delta + \alpha\gamma}{\alpha\beta\gamma\delta} \times \frac{\beta\gamma + \alpha\delta}{\alpha\beta\gamma\delta}$

$= \left(\frac{1}{\alpha\beta} \frac{1}{\gamma\delta}\right)^2 (\beta^2\gamma\delta + \alpha\beta\delta^2 + \alpha\beta\gamma^2 + \alpha^2\gamma\delta)$

$= \frac{1}{169b^2}\{\alpha\beta(\gamma^2 + \delta^2) + \gamma\delta(\alpha^2 + \beta^2)\}$

$= \frac{1}{169b^2}[13\{(\gamma + \delta)^2 - 2\gamma\delta\} + b\{(\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta\}]$

$= \frac{1}{169b^2}\{13(c^2 - 2b) + b(4^2 - 2.13)\}$

$= \frac{1}{169b^2}\{13c^2 - 26b + b(16 - 26)\}$

$= \frac{1}{169b^2}\{13c^2 - 26b - 10b\}$

$= \frac{1}{169b^2}(13c^2 - 36b)$

$\therefore$ নির্ণেয় সমীকরণ,

$x^2 - \frac{4c}{13b}x + \frac{1}{169b^2}(13c^2 - 36b) = 0$

$\Rightarrow 169b^2x^2 - 52bcx + 13c^2 - 36b = 0$

21. $\alpha = \frac{1}{2}(-1 + \sqrt{-3}), \beta = \frac{1}{2}(-1 - \sqrt{-3})$

(বহুপদী সমীকরণ ও জটিল সংখ্যা)

ক. দেখাও যে, $3x^2 - 2(k + 1)x + k = 0$ সমীকরণটির মূলগুলি k এর সকল বাস্তব মানের জন্য বাস্তব হবে।

খ. দেখাও যে, $\sqrt{\alpha - \beta} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1 + i)$

গ. কোনো একটি দ্বিঘাত সমীকরণের একটি মূল α হলে সমীকরণটি নির্ণয় কর।

ক. প্রমাণ : $3x^2 - 2(k + 1)x + k = 0$

সমীকরণের পৃথায়ক $= \{-2(k + 1)\}^2 - 4.3.k$

$= 4(k^2 + 2k + 1 - 3k)$

$= 4(k^2 - k + 1) = 4\{(k - \frac{1}{2})^2 + 1 - \frac{1}{4}\}$

$= 4\{(k - \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}\}$

k এর সকল বাস্তব মানের জন্য $(k - \frac{1}{2})^2$ অঋণাত্মক বলে $(k - \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4} > 0$ সুতরাং k এর সকল বাস্তব মানের জন্য, পৃথায়ক ≥ 0

$\therefore$ k এর সকল বাস্তব মানের জন্য প্রদত্ত সমীকরণের মূলগুলি বাস্তব।

খ. প্রমাণ : দেওয়া আছে, $\alpha = \frac{1}{2}(-1 + \sqrt{-3})$,

$\beta = \frac{1}{2}(-1 - \sqrt{-3})$

$\therefore \sqrt{\alpha - \beta} = \sqrt{\frac{1}{2}(-1 + \sqrt{-3}) - \frac{1}{2}(-1 - \sqrt{-3})}$

$= \sqrt{\frac{1}{2}(-1 + \sqrt{-3} + 1 + \sqrt{-3})}$

$= \sqrt{\frac{1}{2}(2\sqrt{-3})} = \sqrt{\sqrt{-3}}$

$= (i^2 \cdot 3)^{\frac{1}{4}} = (\sqrt{3}\,i)^{\frac{1}{2}}$

$= (\frac{1}{2} \cdot 2i)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1 - 1 + 2i)^{\frac{1}{2}}$

$= \frac{1}{\sqrt{2}}(1 + i^2 + 2i)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\{(1 + i)^2\}^{\frac{1}{2}}$

$= \frac{1}{\sqrt{2}}(1 + i)$

গ. সমাধান: দ্বিঘাত সমীকরণের প্রদত্ত মূলটি $\frac{1}{2}(-1 + \sqrt{-3})$, যা জটিল সংখ্যা।

$\therefore$ সমীকরণের অপর মূলটি হবে $\frac{1}{2}(-1 - \sqrt{-3})$

[$\because$ জটিল মূল যুগল যুগল আসে।]

$\therefore$ এদের যোগফল $= \frac{1}{2}(-1-\sqrt{-3}, -1+\sqrt{-3})$

$= \frac{1}{2}(-2) = -1$ ১

এবং গুণফল $= \frac{1}{4}(-1-\sqrt{-3})(-1+\sqrt{-3})$

$= \frac{1}{4}\{(-1)^2 - (\sqrt{-3})^2\}$

$= \frac{1}{4}(1+3) = 1$ ১

$\therefore$ নির্ণেয় দ্বিঘাত সমীকরণ, $x^2 - (-1)x + 1 = 0$

$\Rightarrow x^2 + x + 1 = 0$ (Ans.) ১

22. $|x-5| - 2x > 4 \cdots\cdots$ (i),

$4x^3 - 24x^2 + 23x + 18 = 0 \cdots\cdots$ (ii)

(বাস্তব সংখ্যা ও অসমতা + জটিল সংখ্যা + বহুপদী সমীকরণ)

ক. $-7 < x < -1$ কে পরম মানের সাহায্যে প্রকাশ কর।

খ. (i) অসমতাটি সমাধান সেট নির্ণয় কর।

গ. (ii) সমীকরণের মূলগুলি সমান্তর শ্রেণীভুক্ত হলে, সমীকরণটি সমাধান কর।

সমাধান: ক. $-7 < x < -1$

সকল পক্ষে $-\frac{-7-1}{2} = 4$ যোগ করে পাই, ১

$-7+4 < x+4 < -1+4$

$\Rightarrow -3 < x+4 < 3 \therefore |x+4| < 3$ ১

খ. $x-5$ অঋণাত্মক হলে, $|x-5| = x-5$ ১

প্রদত্ত অসমতা হতে পাই, $x-5-2x > 4$

$\Rightarrow -x > 4+5 \Rightarrow x < -9$ ১

$x-5$ ঋণাত্মক হলে, $|x-5| = -(x-5)$ ১

প্রদত্ত অসমতা হতে পাই $-(x-5) - 2x > 4$

$\Rightarrow -x+5-2x > 4 \Rightarrow -3x > 4-5$

$\Rightarrow -3x > -1 \Rightarrow 3x < 1 \Rightarrow x < \frac{1}{3}$

সমাধান সেট $S = \{x \in R : x < \frac{1}{3}\}$ ১

গ. সমাধান: ধরি, প্রদত্ত সমীকরণের মূলগুলি $a-d, a, a+d$ ১

$\therefore$ মূলগুলোর যোগফল,

$a-d+a+a+d = -\frac{-24}{4} = 6$ ১

$\Rightarrow 3a = 6 \Rightarrow a = 2$

মূলগুলির গুণফল, $(a-d)\,a\,(a+d) = -\frac{18}{4}$ ১

$\Rightarrow a(a^2-d^2) = -\frac{9}{2} \Rightarrow 2(4-d^2) = -\frac{9}{2}$

$\Rightarrow 4-d^2 = -\frac{9}{4} \Rightarrow d^2 = 4+\frac{9}{4} = \frac{25}{4}$

$\therefore d = \pm\frac{5}{2}$

$d = \frac{5}{2}$ নিয়ে আমরা পাই, $a-d = 2-\frac{5}{2} = -\frac{1}{2}$

$a+d = 2+\frac{5}{2} = \frac{9}{2}$

$d = -\frac{5}{2}$ নিয়েও প্রদত্ত সমীকরণের একই মূল পাওয়া যায়।

$\therefore$ প্রদত্ত সমীকরণের মূলগুলি $-\frac{1}{2}, 2, \frac{9}{2}$ ১

23. দৃশ্যকল্প -১: $4x^2 + 2x - 1 = 0$ সমীকরণের একটি মূল $\cos\alpha$.

দৃশ্যকল্প -২: $a, b, c \in R$, $ac = bc$ এবং $c \neq 0$.

(বাস্তব সংখ্যা + বহুপদী সমীকরণ + ত্রিকোণমিতি)

ক. $|3-2x| < 7$ অসমতাটি পরম মান চিহ্ন ব্যতীত প্রকাশ কর।

খ. দৃশ্যকল্প -২ এর সাহায্যে প্রমাণ কর যে, $a = b$.

গ. দেখাও যে, দৃশ্যকল্প -১ এ বর্ণিত সমীকরণটির অপর মূলটি $\cos 3\alpha$.

সমাধান: ক. $|3-2x| < 7$

$\Rightarrow -7 < 3-2x < 7$ ১

$-7-3 < 3-2x-3 < 7-3$

$\Rightarrow -10 < -2x < 4$

$\Rightarrow \frac{-10}{-2} > \frac{-2x}{-2} > \frac{4}{-2}$

$\Rightarrow 5 > x > -2 \Rightarrow -2 < x < 5$ (Ans.) ১

খ. প্রমাণ : $c \neq 0$ বলে c^{-1} বিদ্যমান। ১

এখন, $ac = bc$

$\Rightarrow (ac)c^{-1} = (bc)c^{-1}$ [গুণনের অনন্যতা অনুযায়ী] ১

$\Rightarrow a(cc^{-1}) = b(cc^{-1})$ [গুণনের সংযোজন বিধি অনুযায়ী] ১

$\Rightarrow a.1 = b.1$ [গুণনের বিপরীতকের অস্তিত্ব অনুযায়ী]

$\therefore a = b$. [গুণনের অভেদকের অস্তিত্ব অনুযায়ী] ১

গ. সমাধান: মনে করি, অপর মূলটি β।

$\therefore$ মূলদ্বয়ের সমষ্টি, $\cos\alpha + \beta = -\frac{1}{2}$ ১

$\Rightarrow \beta = -\frac{1}{2} - \cos\alpha$

$4x^2 + 2x - 1 = 0$ সমীকরণের একটি মূল $\cos\alpha$ বলে $4\cos^2\alpha + 2\cos\alpha - 1 = 0$ ১

$\Rightarrow 4\cos^3\alpha + 2\cos^2\alpha - \cos\alpha = 0$

$\Rightarrow \cos 3\alpha + 3\cos\alpha + \frac{1}{2}.4\cos^2\alpha - \cos\alpha = 0$ ১

$[\because \cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha]$

$\Rightarrow \cos 3\alpha + 2\cos\alpha + \frac{1}{2}.(1-2\cos\alpha) = 0$

$[\because 4\cos^2\alpha + 2\cos\alpha - 1 = 0]$

$\Rightarrow \cos 3\alpha + 2\cos\alpha + \frac{1}{2} - \cos\alpha = 0$

$\Rightarrow \cos 3\alpha = -\frac{1}{2} - \cos\alpha = \beta \therefore \beta = \cos 3\alpha$

$\therefore$ প্রদত্ত সমীকরণের অপর মূলটি $\cos 3\alpha$. ১

24. $P = x^2 + bx + ac$, $Q = x^2 + cx + ab$

এবং $R = \sqrt{-3+\sqrt{-3+\sqrt{-3+\cdots\cdots\infty}}}$

(জটিল সংখ্যা ও অসমতা + বহুপদী সমীকরণ)

ক. $x = \frac{a+ib}{a-ib}$ হলে প্রমাণ কর যে $(a^2+b^2)x^2 + a^2 + b^2 = 2(a^2-b^2)x$

খ. $P = 0$ এবং $Q = 0$ সমীকরণ দুইটির একটি সাধারণ মূল থাকলে দেখাও যে, $a+b+c = 0$

গ. R এর বর্গমূল নির্ণয় কর।

ক. প্রমাণঃ দেওয়া আছে $x = \frac{a+ib}{a-ib}$

$\Rightarrow ax - ibx = a + ib \Rightarrow ax - a = i(b+bx)$

$\Rightarrow (ax-a)^2 = i^2(b+bx)^2$

$\Rightarrow a^2x^2 - 2a^2x + a^2 = -(b^2 + 2b^2x + b^2x^2)$ ১

$\Rightarrow a^2x^2 - 2a^2x + a^2 + b^2 + 2b^2x + b^2x^2 = 0$

$\Rightarrow (a^2+b^2)x^2 + a^2 + b^2 - 2(a^2-b^2)x = 0$

$\therefore (a^2+b^2)x^2 + a^2 + b^2 = 2(a^2-b^2)x$ ১

খ. প্রমাণ : মনে করি, প্রদত্ত সমীকরণদ্বয়ের সাধারণ মূলটি α। তাহলে,

$\alpha^2 + b\alpha + ac = 0$

$\alpha^2 + c\alpha + ab = 0$ ১

বজ্রগুণন প্রণালীর সাহায্যে আমরা পাই,

$\frac{\alpha^2}{ab^2 - ac^2} = \frac{\alpha}{ac - ab} = \frac{1}{c-b}$ ১

$\therefore (ac-ab)^2 = (ab^2-ac^2)(c-b)$ ১

$\Rightarrow a^2(c-b)^2 - a(b^2-c^2)(c-b) = 0$

$\Rightarrow a^2(b-c)^2 + a(b-c)^2(b+c) = 0$

$\Rightarrow a(b-c)^2(a+b+c) = 0$

$a = 0$ হলে প্রদত্ত সমীকরণদ্বয়ের কোন সাধারণমূল থাকবে না এবং $b = c$ হলে উভয় মূলই সাধারণ হয়ে যাবে।

$\therefore a+b+c = 0$ ১

গ. সমাধান: মনে করি,

$x = \sqrt{-3+\sqrt{-3+\sqrt{-3+\cdots\cdots\infty}}}$

$\Rightarrow\ y = \sqrt{-3+\sqrt{-3+\sqrt{-3+\sqrt{-3\cdots\cdots\infty}}}}$

$\Rightarrow\ y = \sqrt{-3+y}$ ১

$\Rightarrow\ y^2 = -3 + y$ [উভয় পক্ষকে বর্গ করে।]

$\Rightarrow\ y^2 - y + 3 = 0$

$\Rightarrow\ y = \dfrac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4.1.3}}{2.1}$ ১

$= \dfrac{1 \pm \sqrt{1-12}}{2} = \dfrac{1}{2}(1 \pm \sqrt{-11})$

$\therefore\ R = \dfrac{1}{2}(1 \pm i\sqrt{11}) = \dfrac{1}{2} \pm i\dfrac{\sqrt{11}}{2}$ ১

নির্ণেয় মডুলাস $= (\frac{1}{2})^2 + (\frac{\sqrt{11}}{2})^2$

$= \dfrac{1}{4} + \dfrac{11}{4} = \dfrac{1+11}{4} = \dfrac{12}{4} = 3$ ১

25. দৃশ্যকল্প-১: $x = \sqrt[3]{-1}$

দৃশ্যকল্প-২: $px^2 + 8(q-p)x + 4(4p - 8q + r) = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় $4 - 2\alpha$, $4 - 2\beta$ (জটিল সংখ্যা + বহুপদী সমীকরণ)

ক. $-8 - 6i$ এর আর্গুমেন্ট ষাটমূলক পদ্ধতিতে দুই দশমিক স্থান পর্যন্ত নির্ণয় কর।

খ. দৃশ্যকল্প-১ হতে x এর জটিল মানদ্বয় নির্ণয় করে তাদের যেকোনো একটি মানের বর্গমূল নির্ণয় কর।

গ. α এবং β মূল বিশিষ্ট সমীকরণ নির্ণয় কর।

ক. সমাধান. ধরি, $-8 - 6i$ এর আর্গুমেন্ট θ.

$\therefore\ \theta = \tan^{-1}\dfrac{-6}{-8}$, [$\because\ \theta = \tan^{-1}\dfrac{y}{x}$] ১

$= \tan^{-1}\dfrac{3}{4} - 180^0 = 36{\cdot}87^0$

$= -143{\cdot}13^0$ (প্রায়) ১

খ. সমাধান: $x = \sqrt[3]{-1} \Rightarrow x^3 = -1$

$\Rightarrow\ x^3 + 1 = 0 \Rightarrow (x+1)(x^2 - x + 1) = 0$

$x + 1 = 0$ হলে, $x = -1$, যা বাস্তব।

$x^2 - x + 1 = 0$ হলে,

$x = \dfrac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4.1.1}}{2.1}$ ১

$= \dfrac{1 \pm \sqrt{1-4}}{2} = \dfrac{1 \pm \sqrt{-3}}{2} = \dfrac{1 \pm \sqrt{3i^2}}{2}$ ১

$= \dfrac{1 \pm \sqrt{3}i}{2} = \dfrac{1+\sqrt{3}i}{2}, \dfrac{1-\sqrt{3}i}{2}$

$\therefore$ x এর জটিল মূলদ্বয় $\dfrac{1+\sqrt{3}i}{2}$ ও $\dfrac{1-\sqrt{3}i}{2}$

এখন, $\dfrac{1}{2}(1+\sqrt{3}i) = \dfrac{1}{4}(2 + 2\sqrt{3}i)$

$= \dfrac{1}{4}(3 - 1 + 2\sqrt{3}i)$

$= \dfrac{1}{4}\{(\sqrt{3})^2 + (i)^2 + 2.\sqrt{3}.i\}$

$= \dfrac{1}{4}(\sqrt{3}+i)^2$ ১

$\therefore$ x এর জটিল মানদ্বয়ের যেকোনো একটি মান $\dfrac{1}{2}(1 + \sqrt{-3})$ এর বর্গমূল $= \pm\dfrac{1}{2}(\sqrt{3}+i)$ ১

গ. সমাধান: দেওয়া আছে, $4 - 2\alpha$ এবং $4 - 2\alpha$ $px^2 + 8(q-p)x + 4(4p - 8q + r) = 0$ সমীকরণের মূল।

$\therefore\ 4 - 2\alpha + 4 - 2\beta = -\dfrac{8(q-p)}{p}$ ১

$\Rightarrow\ 8 - 2(\alpha + \beta) = -8.\dfrac{q}{p} + 8$

$\therefore\ \alpha + \beta = 4.\dfrac{q}{p}$ এবং

$(4 - 2\alpha)(4 - 2\beta) = \dfrac{1}{p}4(4p - 8q + r)$ ১

$\Rightarrow\ 4(2-\alpha)(2-\beta) = \dfrac{1}{p}4(4p - 8q + r)$

$\Rightarrow\ 4 - 2(\alpha+\beta) + \alpha\beta = \dfrac{1}{p}(4p - 8q + r)$

$\Rightarrow\ 4 - 2.4.\dfrac{q}{p} + \alpha\beta = 4 - 8\dfrac{q}{p} + \dfrac{r}{p}$

$\Rightarrow\ \alpha\beta = \dfrac{r}{p}$

নির্ণেয় সমীকরণ, $x^2 - (\alpha+\beta)x + \alpha\beta = 0$ ১

$\Rightarrow\ x^2 - 4\dfrac{q}{p}x + \dfrac{r}{p} = 0$

$\therefore\ px^2 - 4qx + r = 0$ (Ans.) ১

26. $z_1 = 1 + i\sqrt{3}$, $z_2 = \sqrt{3} - i$.

(জটিল সংখ্যা + বহুপদী সমীকরণ)

ক. দেখাও যে, $(1-i)^{-2} - (1+i)^{-2} = i$

খ. কোনো একটি দ্বিঘাত সমীকরণের একটি মূল z_1 হলে সমীকরণটি নির্ণয় কর।

গ. দেখাও যে, $\arg(\dfrac{z_1}{z_2}) = \arg z_1 - \arg z_2$

ক. প্রমাণ: $(1-i)^{-2} - (1+i)^{-2}$

$= \dfrac{1}{(1-i)^2} + \dfrac{1}{(1+i)^2} =$

$\dfrac{(1+i)^2 - (1-i)^2}{(1-i)^2(1+i)^2}$

$= \dfrac{4i}{\{(1-i)(1+i)\}^2} = \dfrac{4i}{(1^2 - i^2)^2}$

$= \dfrac{4i}{(1+1)^2} = \dfrac{4i}{4}$ ১

$\therefore\ (1-i)^{-2} - (1+i)^{-1} = i$ (Showed) ১

খ. সমাধান: দ্বিঘাত সমীকরণের প্রদত্ত মূলটি $z_1 = 1 + i\sqrt{3}$, যা জটিল সংখ্যা।

$\therefore$ সমীকরণটির অপর মূলটি হবে $1 - i\sqrt{3}$ ১

[$\because$ জটিল মূল যুগল রূপে আসে।]

$\therefore$ মূল দুইটির যোগফল $= 1 + i\sqrt{3} + 1 - i\sqrt{3}$
$= 2$ ১

এবং গুণফল $= (1 + i\sqrt{3})(1 - i\sqrt{3})$

$= \{(1)^2 - (i\sqrt{3})^2\}$

$= 1 - 3i^2 = 1 - 3(-1)$

$= 1 + 3 = 4$ ১

$\therefore$ নির্ণেয় দ্বিঘাত সমীকরণ, $x^2 - 2x + 4 = 0$ ১

গ. প্রমাণ: দেওয়া আছে, $z_1 = 1 + i\sqrt{3}$, $z_2 = \sqrt{3} - i$

$\therefore\ \arg z_1 = \arg(1 + i\sqrt{3}) = \tan^{-1}\dfrac{\sqrt{3}}{1} = \dfrac{\pi}{3}$ ১

এবং $\arg z_2 = \arg(\sqrt{3} - i) = \tan^{-1}(\dfrac{-1}{\sqrt{3}}) = -\dfrac{\pi}{6}$ ১

$\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{1+i\sqrt{3}}{\sqrt{3}-i} = \dfrac{(1+i\sqrt{3})(\sqrt{3}+i)}{(\sqrt{3}-i)(\sqrt{3}+i)}$

$= \dfrac{\sqrt{3} - \sqrt{3} + i + 3i}{3+1} = \dfrac{4i}{4} = i = 0 + i$

$\therefore\ \arg(\dfrac{z_1}{z_2}) = \tan^{-1}(\dfrac{1}{0}) = \cot^{-1}\dfrac{0}{1}$

$= \cot^{-1} 0 = \dfrac{\pi}{2}$ ১

এখন, $\arg z_1 - \arg z_2 = \dfrac{\pi}{3} + \dfrac{\pi}{6} = \dfrac{2\pi + \pi}{6}$

$= \dfrac{3\pi}{6} = \dfrac{\pi}{2}$

$\therefore\ \arg(\dfrac{z_1}{z_2}) = \dfrac{\pi}{2} = \arg z_1 - \arg z_2$ (Showed) ১

27. (i) $3x^2 + 2x + 1 = 0$

(ii) $z = \left\{\dfrac{1+(i)^{4n+1}}{1+(i)^{4n+3}}\right\}^{2(2m+1)}$

(জটিল সংখ্যা + বহুপদী সমীকরণ)

ক. $\omega = \dfrac{-1-\sqrt{3}i}{2}$ এর আর্গুমেন্ট নির্ণয় কর।

খ. $m, n \in \mathbb{N}$ এর জন্য, প্রমাণ কর যে, $z = -1$

গ. আর্গন্ড চিত্রে (i) এর যে মূলটি তৃতীয় চতুর্ভাগে অবস্থান করে তার মডুলাস নির্ণয় কর।

সমাধান: ক (i) $\frac{-1-\sqrt{3}i}{2} = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$

(i) এর আর্গুমেন্ট $= \tan^{-1}\frac{-\sqrt{3}/2}{-1/2}$ ১

$= -\pi + \tan^{-1}\sqrt{3} = -\pi + \frac{\pi}{3} = -\frac{2\pi}{3}$ ১

খ. L.H.S. $= \left\{\frac{1+(i)^{4n+1}}{1+(i)^{4n+3}}\right\}^{2(2m+1)}$

$= \left\{\frac{1+i}{1-i}\right\}^{2(2m+1)}$ ১

[$\because n \in N$ এবং $i^{4m+1} = i.\ i^{4m+3} = -i$]

$= \left\{\frac{1+i}{1-i}\right\}^{4m+2} = \left\{\frac{(1+i)^2}{(1-i)(1+i)}\right\}^{4m+2}$ ১

$= \left\{\frac{1+2i+i^2}{1-i^2}\right\}^{4m+2} = \left\{\frac{1+2i-1}{1+1}\right\}^{4m+2}$ ১

[$\because i^2 = -1$]

$= \left\{\frac{2i}{2}\right\}^{4m+2} = i^{4m+2}$

$= -1 =$ R.H.S. ১

[$\because m \in N$ এবং $i^{4m+2} = -1$]

গ. সমাধান : $3x^2 + 2x + 1 = 0$

$\therefore x = \frac{-2 \pm \sqrt{4-4.3.1}}{2.3}$ ১

$= \frac{-2\pm\sqrt{-8}}{6} = \frac{-2\pm 2\sqrt{-2}}{6}$

$= \frac{-1\pm\sqrt{-2}}{3} = \frac{-1\pm\sqrt{2}i}{3}$

$= \frac{-1+\sqrt{2}i}{3}, \frac{-1-\sqrt{2}i}{3}$ ১

আর্গন্ড চিত্রে, $\frac{-1-\sqrt{2}i}{3} = -\frac{1}{3} - \frac{\sqrt{2}i}{3}$ মূলটি তৃতীয় চতুর্ভাগে অবস্থান করবে। ১

$\therefore$ এ মূলটির মডুলাস $= \left|-\frac{1}{3} - \frac{\sqrt{2}i}{3}\right|$

$= \sqrt{(-\frac{1}{3})^2 + (-\frac{\sqrt{2}}{3})^2} = \sqrt{\frac{1}{9}+\frac{2}{9}}$

$= \sqrt{\frac{3}{9}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$ (Ans.) ১

28. $z = 4+3i$ এর একটি বর্গমূল দুইটি z_1 ও z_2। (জটিল সংখ্যা + বহুপদী সমীকরণ)

ক. দেখাও যে, $\sqrt{i} + \sqrt{-i} = \sqrt{2}$

খ. একটি দ্বিঘাত সমীকরণ নির্ণয় কর যার একটি মূল $\frac{1}{z}$.

গ. আর্গন্ড চিত্রে z_1 ও z_2 দ্বারা সূচিত বিন্দুদ্বয়ের দূরত্ব নির্ণয় কর।

ক. প্রমাণ : $\sqrt{i} + \sqrt{-i} = \sqrt{\frac{1}{2}.2i} + \sqrt{\frac{1}{2}.(-2i)}$

$= \sqrt{\frac{1}{2}.(1^2+i^2+2.1.i)} + \sqrt{\frac{1}{2}.(1^2+i^2-2.1.i)}$

$= \sqrt{\frac{1}{2}.(1+i)^2} + \sqrt{\frac{1}{2}.(1-i)^2}$

$= \frac{1}{\sqrt{2}}(1+i+1-i) = \frac{2}{\sqrt{2}}$

$\therefore \sqrt{i}+\sqrt{-i} = \sqrt{2}$ (Showed)

খ. $\frac{1}{z} = \frac{1}{4+3i} = \frac{4-3i}{(4+3i)(4-3i)}$

$= \frac{4-3i}{4^2-(3i)^2} = \frac{4-3i}{16+9} = \frac{4-3i}{25}$, যা জটিল সংখ্যা।

$\therefore$ দ্বিঘাত সমীকরণের অপর মূলটি হবে $\frac{4+3i}{25}$

$\therefore$ দ্বিঘাত সমীকরণটির নির্ণেয় সমীকরণ,

$x^2 - (\frac{4-3i}{25} + \frac{4+3i}{25})x$

$+ \frac{4-3i}{25}.\frac{4+3i}{25} = 0$

$\Rightarrow x^2 - \frac{4-3i+4+3i}{25}x + \frac{16+9}{625} = 0$

$\Rightarrow x^2 - \frac{8}{25}x + \frac{25}{625} = 0$

$\therefore 25x^2 - 8x + 1 = 0$

গ. $z = 4+3i = \frac{1}{2}(8+6i) = \frac{1}{2}(9-1+6i)$

$= \frac{1}{2}(3^2+i^2+2.3.i) = \frac{(3+i)^2}{2}$

z এর বর্গমূল $= \pm\frac{3+i}{\sqrt{2}} = \pm(\frac{3}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}})$

$\therefore z_1 = \frac{3}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}}$ হলে, $z_2 = -\frac{3}{\sqrt{2}} - \frac{i}{\sqrt{2}}$

$\therefore$ আর্গন্ড চিত্রে z_1 ও z_2 দ্বারা সূচিত বিন্দুদ্বয়ের দূরত্ব $= |z_1 - z_2|$

$= |(\frac{3}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}}) - (-\frac{3}{\sqrt{2}} - \frac{i}{\sqrt{2}})|$

$= |(\frac{3}{\sqrt{2}} + \frac{3}{\sqrt{2}}) + (\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}})i|$

$= |2\times\frac{3}{\sqrt{2}} + 2\times\frac{1}{\sqrt{2}}i|$

$= |3\sqrt{2} + \sqrt{2}i|$

$= \sqrt{(3\sqrt{2})^2 + (\sqrt{2})^2} = \sqrt{18+2}$

$= 2\sqrt{5}$

29. $z = 3+4i$ (জটিল সংখ্যা + বহুপদী সমীকরণ)

ক. $x^2 - 5x + 7 = 0$ দ্বিঘাত সমীকরণের জটিল মূলদ্বয় নির্ণয় কর।

খ. আর্গন্ড চিত্রে $\bar{z}$ দ্বারা সূচিত বিন্দুর অবস্থান দেখিয়ে এর মডুলাস ও আর্গুমেন্ট চিহ্নিত কর।

গ. $\sqrt{z} = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ হলে, $\sin\theta$ এর মান নির্ণয় কর।

ক. সমাধান: $x^2 - 5x + 7 = 0$

$\therefore x = \frac{-(-5)\pm\sqrt{(-5)^2-4.1.7}}{2.1}$

$= \frac{5\pm\sqrt{(-5)^2-4.1.7}}{2.1}$

$= \frac{5\pm\sqrt{25-28}}{2} = \frac{5\pm\sqrt{-3}}{2}$

$= \frac{5\pm\sqrt{3i^2}}{2} = \frac{5\pm\sqrt{3}i}{2}$

প্রদত্ত সমীকরণের জটিল মূল দুইটি $\frac{5+\sqrt{3}i}{2}$ ও $\frac{5-\sqrt{3}i}{2}$।

খ. সমাধান: $z = 3+4i \therefore \bar{z} = 3-4i$

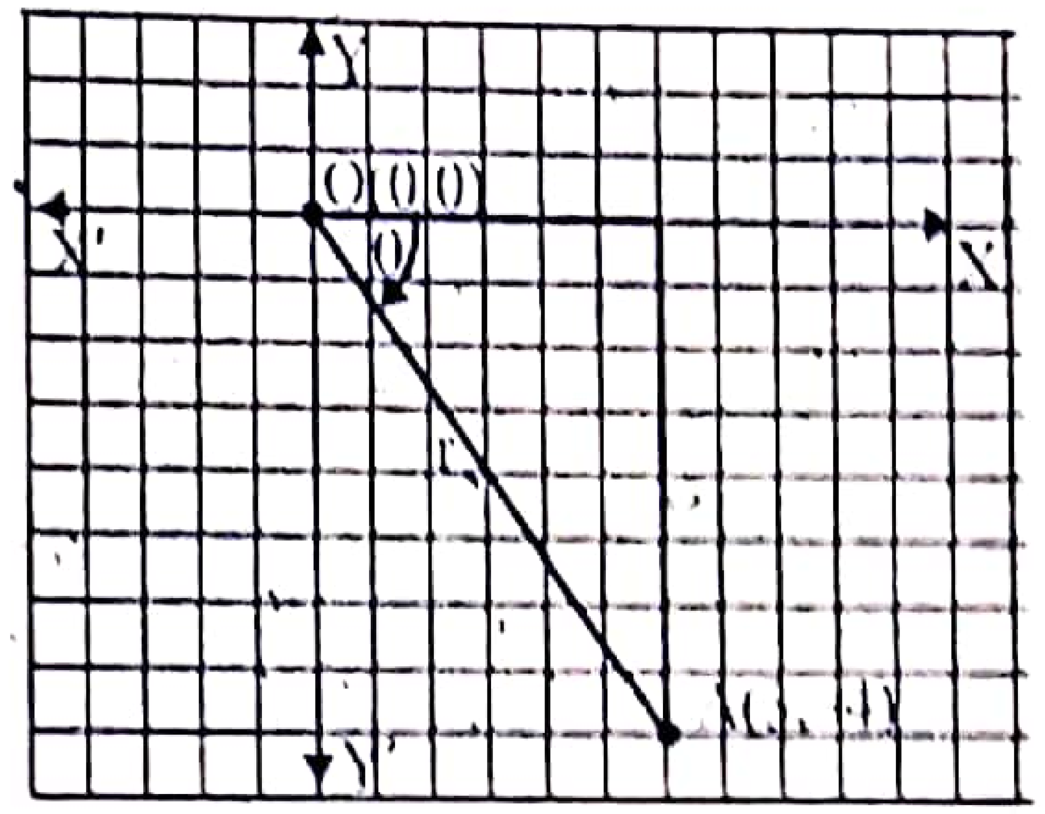
x- অক্ষ (বাস্তব অক্ষ) ও y- অক্ষ (কাল্পনিক অক্ষ) বরাবর ক্ষুদ্রতম বর্গের 2 বাহুর দৈর্ঘ্য = 1 একক ধরে $\bar{z} = 3-4i$ দ্বারা সূচিত বিন্দু $A(3, -4)$ এর অবস্থান আর্গন্ড চিত্রে দেখানো হলো।

জটিল সংখ্যাটির মডুলাস,

$r = OA = \sqrt{3^2+(-4)^2} = 5$ এবং

আর্গুমেন্ট $\theta = \tan^{-1}\frac{-4}{3} = -\tan^{-1}\frac{4}{3}$

$= -53.13^0$



গ. $\sqrt{z} = \sqrt{3+4i} = \sqrt{4-1+4i}$

$= \sqrt{2^2+i^2+2.2.i}$

$= \sqrt{(2+i)^2} = 2+i$

প্রশ্নমতে, $\sqrt{z} = r(\cos\theta + i\sin\theta)$

$\Rightarrow 2+i = r\cos\theta + r\,i\sin\theta$

উভয় পক্ষ হতে বাস্তব ও কাল্পনিক অংশ সমীকৃত করে পাই,

$r\cos\theta = 2 \cdots (i)$ ও $r\sin\theta = 1 \cdots (ii)$

$(i)^2 + (ii)^2 \Rightarrow r^2 = 4+1 \Rightarrow r = \sqrt{5}$

$\therefore$ (ii) হতে পাই, $\sqrt{5}\sin\theta = 1$

$\therefore \sin\theta = \frac{1}{\sqrt{5}}$ (Ans.)

30. $x^2 + bx + c = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় α, β. (বহুপদী সমীকরণ)

ক. $\alpha - \beta = \pm 1$ হলে, দেখাও যে, $b^2 = 4c + 1$

খ. $(b\alpha + c)^{-2} + (b\beta + c)^{-2}$ *এর মান নির্ণয় কর।*

গ. $(\alpha+\beta)^2$ এবং $(\alpha-\beta)^2$ মূল বিশিষ্ট সমীকরণ নির্ণয় কর।

ক. **সমাধান:** দেওয়া আছে, $x^2 + bx + c = 0$

সমীকরণের মূলদ্বয় α এবং β

$\therefore \alpha + \beta = -b, \alpha\beta = c$

এখন, $\alpha - \beta = \pm 1$

$\Rightarrow (\alpha-\beta)^2 = (\pm 1)^2$

$\Rightarrow (\alpha+\beta)^2 - 4\alpha\beta = 1$

$\Rightarrow (-b)^2 - 4c = 1$

$\therefore b^2 = 4c + 1$ (Showed)

খ. $(\alpha+\beta)^2$ ও $(\alpha-\beta)^2$ মূলদ্বয়ের

সমষ্টি $= (\alpha+\beta)^2 + (\alpha-\beta)^2$

$= (\alpha+\beta)^2 + (\alpha+\beta)^2 - 4\alpha\beta$

$= 2(-b)^2 - 4c = 2b^2 - 4c$ এবং

গুণফল $= (\alpha+\beta)^2(\alpha-\beta)^2$

$= (\alpha+\beta)^2\{(\alpha+\beta)^2 - 4\alpha\beta\}$

$= (-b)^2\{(-b)^2 - 4c\}$

$= b^2(b^2 - 4c)$

$\therefore$ নির্ণেয় সমীকরণ,

x^2 –(মূলদ্বয়ের সমষ্টি)x + মূলদ্বয়ের গুণফল = 0

$\Rightarrow x^2 - (2b^2 - 4c)x + b^2(b^2 - 4c) = 0$

গ. **সমাধান:** দেওয়া আছে, $x^2 + bx + c = 0$

সমীকরণের মূলদ্বয় α এবং β

$\therefore \alpha + \beta = -b, \alpha\beta = c$

$(\alpha+\beta)^2$ এবং $(\alpha-\beta)^2$ মূলদ্বয়ের

সমষ্টি $= (\alpha+\beta)^2 + (\alpha-\beta)^2$

$= (-b)^2 + (\alpha+\beta)^2 - 4\alpha\beta$

$= b^2 + b^2 - 4c = 2b^2 - 4c$ এবং

গুণফল $= (\alpha+\beta)^2(\alpha-\beta)^2$

$= b^2\{(\alpha+\beta)^2 - 4\alpha\beta\} = b^2(b^2 - 4c)$

$\therefore$ নির্ণেয় সমীকরণ,

$x^2 - 2(b^2 - 2c)x + b^2(b^2 - 4c) = 0$

31. $x^2 + bx + c = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় α, β.

ক. বাস্তব সহগ বিশিষ্ট একটি দ্বিঘাত সমীকরণের মূলদ্বয়ের সমষ্টি $-\frac{b}{a}$, গুণফল $\frac{c}{a}$। সমীকরণটির একটি মূল $m + \sqrt{n}$ হলে দেখাও যে, এর অপর মূলটি হবে $m - \sqrt{n}$ ।

খ. $cx^2 - (b^2 - 2c)x + c = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয়কে α, β এর মাধ্যমে প্রকাশ কর।

গ. b, c এর মাধ্যমে $(\alpha + b)^{-4} + (\beta + b)^{-4}$ এর মান নির্ণয় কর।

ক. **সমাধান:** ধরি, সমীকরণটির অপর মূলটি α.

$\therefore m + \sqrt{n} + \alpha = -\frac{b}{a} \Rightarrow \alpha = -\frac{b}{a} - m - \sqrt{n}$

$\Rightarrow \alpha = k - \sqrt{n} \cdots$(ii), [যেখানে $-\frac{b}{a} - m = k$]

এবং $(m + \sqrt{n})\alpha = \frac{c}{a}$

$\Rightarrow (m + \sqrt{n})(k - \sqrt{n}) = \frac{c}{a}$

$\Rightarrow mk - n + (k - m)\sqrt{n} = \frac{c}{a}$

কিন্তু $\frac{c}{a}$ মূলদ হওয়ায় $mk - n + (k-m)\sqrt{n}$ মূলদ।

$k - m = 0 \Rightarrow k = m$

$\therefore$ (ii) হতে $\alpha = m - \sqrt{n}$

$\therefore$ সমীকরণটির অপর মূলটি হবে $m - \sqrt{n}$ ।

খ. **সমাধান:** প্রদত্ত সমীকরণের মূলদ্বয় α এবং β বলে, $\alpha + \beta = -b,\ \alpha\beta = c.$

এখন, $cx^2 - (b^2 - 2c)x + c = 0$

$\Rightarrow \alpha\beta x^2 - \{(-\alpha-\beta)^2 - 2\alpha\beta\}x + \alpha\beta = 0$

$\Rightarrow \alpha\beta x^2 - \{(\alpha+\beta)^2 - 2\alpha\beta\}x + \alpha\beta = 0$

$\Rightarrow \alpha\beta x^2 - (\alpha^2 + \beta^2)x + \alpha\beta = 0$

$\Rightarrow \alpha\beta x - \alpha^2 x - \beta^2 x + \alpha\beta = 0$

$\Rightarrow \alpha x(\beta x - \alpha) - \beta(\beta x - \alpha) = 0$

$\Rightarrow (\beta x - \alpha)(\alpha x - \beta) = 0$

$\therefore \beta x - \alpha = 0$ হলে, $x = \frac{\alpha}{\beta}$

$\alpha x - \beta = 0$ হলে, $x = \frac{\beta}{\alpha}$

$\therefore$ প্রদত্ত সমীকরণের মূলদ্বয় $\frac{\alpha}{\beta}$ ও $\frac{\beta}{\alpha}$.

গ. **সমাধান:** দেওয়া আছে, $x^2 + bx + c = 0$

সমীকরণের মূলদ্বয় α এবং β

$\therefore \alpha + \beta = -b, \alpha\beta = c$

আবার, $x^2 + bx + c = 0$ সমীকরণের একটি মূল α বলে, $\alpha^2 + b\alpha + c = 0$

$\Rightarrow \alpha(\alpha + b) = -c \Rightarrow \alpha + b = -\frac{c}{\alpha}.$

$\therefore (\alpha + b)^{-4} = \left(-\frac{c}{\alpha}\right)^{-4} = \left(-\frac{\alpha}{c}\right)^4 = \frac{\alpha^4}{c^4}$

অনুরূপভাবে আমরা পাই, $(\beta + b)^{-4} = \frac{\beta^4}{c^4}$

$\therefore (\alpha + b)^{-4} + (\beta + b)^{-4} = \frac{\alpha^4}{c^4} + \frac{\beta^4}{c^4}$

$= \frac{1}{c^4}(\alpha^4 + \beta^4)$

$= \frac{1}{c^4}\{(\alpha^2 + \beta^2)^2 - 2\alpha^2\beta^2\}$

$= \frac{1}{c^4}[\{(\alpha+\beta)^2 - 2\alpha\beta\}^2 - 2c^2]$

$= \frac{1}{c^4}[\{b^2 - 2c\}^2 - 2c^2]$

$= \frac{1}{c^4}(b^4 - 4b^2c + 4c^2 - 2c^2)$

$= \frac{1}{c^4}(b^4 - 4b^2c + 2c^2)$

32. $x^2 + px + q = 0 \cdots\cdots$ (i) এবং $x^2 + px + q = 0 \cdots\cdots$ (ii) (বহুপদী সমীকরণ)

ক. বাস্তব সহগ বিশিষ্ট একটি দ্বিঘাত সমীকরণের মূলদ্বয়ের সমষ্টি $-\frac{b}{a}$, গুণফল $\frac{c}{a}$। সমীকরণটির একটি মূল $m + in$ হলে দেখাও যে, এর অপর মূলটি হবে $m - in$।

খ. (i) সমীকরণের মূলদ্বয় α, β এবং (ii) সমীকরণের মূলদ্বয় $\alpha + 4, \beta + 4$ হলে p , q এর মান নির্ণয় কর।

গ. যদি (i) ও (ii) সমীকরণদ্বয়ের একটি সাধারণ মূল থাকে তবে তাদের অপর মূলগুলি দ্বারা গঠিত সমীকরণ নির্ণয় কর।

ক. **প্রমাণ:** ধরি, সমীকরণটির অপর মূলটি α.

$\therefore \quad m + ni + \alpha = -\frac{b}{a} \Rightarrow \alpha = -\frac{b}{a} - m - ni$

$\Rightarrow \quad \alpha = k - ni \cdots$(ii), [যেখানে $-\frac{b}{a} - m = k$]

এবং $(m + ni)\alpha = \frac{c}{a}$

$\Rightarrow \quad (m + ni)(k - ni) = \frac{c}{a}$

$\Rightarrow \quad mk + n + (k - m)ni = \frac{c}{a}$

কিন্তু $\frac{c}{a}$ বাস্তব হওয়ায় $mk - n + (k - m)ni$ বাস্তব।

$\therefore \quad k - m = 0 \Rightarrow k = m$

(ii) হতে $\alpha = m - ni$

$\therefore$ সমীকরণটির অপর মূলটি হবে $m - \sqrt{n}$ ।

খ. সমাধান: দেওয়া আছে, $x^2 + px + q = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় α, β এবং $2x^2 + 10px + q = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় $\alpha + 4$, $\beta + 4$

$\therefore \quad \alpha + \beta = -p \cdots\cdots$(i), $\alpha\beta = q \cdots$(ii),

$\alpha + 4 + \beta + 4 = -5p$

$\Rightarrow \quad \alpha + \beta = -5p - 8 \cdots\cdots$(iii) এবং

$(\alpha + 4)(\beta + 4) = \frac{q}{2}$

$\Rightarrow \quad \alpha\beta + 4(\alpha + \beta) + 16 = \frac{q}{2}$

$\Rightarrow \quad q + 4(-p) + 16 = \frac{q}{2}$ [(i)&(ii) হতে]

$\Rightarrow \quad \frac{q}{2} - 4p + 16 = 0$

$\Rightarrow \quad q = 2(4p - 16) \cdots$(iv)

(i) & (iii) হতে আমরা পাই, $-p = -5p - 8$

$\Rightarrow 4p = -8 \quad \therefore p = -2$

(iv) হতে, $q = 2(-8-16) = -48$

$\therefore \quad p = -2$ এবং $q = -48$ (Ans.)

গ. সমাধান: মনে করি, প্রদত্ত সমীকরণদ্বয়ের সাধারণ মূলটি α। তাহলে,

$\alpha^2 + p\alpha + q = 0 \cdots\cdots(1)$ এবং

$\alpha^2 + q\alpha + p = 0 \cdots\cdots(2)$

$(1) - (2) \Rightarrow (p - q)\alpha + q - p = 0$

$\Rightarrow \quad \alpha = \frac{p-q}{p-q} = 1$, ইহাই সাধারণ মূল।

(1)-এ $\alpha = 1$ বসিয়ে আমরা পাই, $1 + p + q = 0$

$\Rightarrow \quad p + q = -1 \cdots\cdots(3)$

এখন, $x^2 + px + q = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয়ের গুণফল q $\therefore$ অপর মূলটি q.

আবার, $x^2 + qx + p = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয়ের গুণফল p $\therefore$ অপর মূলটি p.

$\therefore$ q এবং p মূল দ্বারা গঠিত সমীকরণ,

$x^2 - (q + p)x + qp = 0$

$\Rightarrow \quad x^2 - (-1) + pq = 0$ [(3) দ্বারা]

$\therefore \quad x^2 + x + pq = 0$ (Ans.)

33. $ax^2 + bx + c = 0 \cdots\cdots$ (i) এবং

$bx^2 + cx + a = 0 \cdots\cdots$ (ii)

(বহুপদী সমীকরণ)

ক. দেখাও যে, $x^5 - x^4 + 10x^3 - 9x^2 + 8x + 699$ রাশিটির একটি উৎপাদক $x + 3$

খ. (i) সমীকরণের একটি মূল অপরটির বর্গ হলে দেখাও যে, $c(a - b)^3 = a(c - b)^3$

গ. (i) ও (ii) সমীকরণের মূলদ্বয়ের পার্থক্য একটি ধ্রুবরাশি হলে প্রমাণ কর যে, $4ab(bc - a^2) = b^4 - a^2c^2$

ক. সমাধান: ধরি,

$f(x) = x^5 - x^4 + 10x^3 - 9x^2 + 8x + 699$

$\therefore \quad f(-3) = (-3)^5 - (-3)^4 + 10(-3)^3 - 9(-3)^2 + 8(-3) + 699$

$= -243 - 81 - 270 - 81 - 24 + 699$

$= -699 + 699 = 0$

$\therefore$ ভাগশেষ উপপাদ্যের সাহায্যে, $x - (-3) = x + 3$ হবে $f(x) = x^5 - x^4 + 10x^3 - 9x^2 + 8x + 699$ বহুপদীর একটি উৎপাদক।

খ. প্রমাণ : মনে করি, $x^2 + bx + c = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় α এবং α^2

$\therefore \quad \alpha + \alpha^2 = -\frac{b}{a} \cdots\cdots$(i) এবং

$\alpha.\alpha^2 = \frac{c}{a} \Rightarrow \alpha^3 = \frac{c}{a} \cdots\cdots$(ii)

এখন, $\frac{(a-b)^3}{(c-b)^3} = \frac{\left\{\frac{a}{a} - \frac{b}{a}\right\}^3}{\left\{\frac{c}{a} - \frac{b}{a}\right\}^3}$

$= \frac{(1+\alpha+\alpha^2)^3}{(\alpha^3+\alpha+\alpha^2)^3} = \frac{(1+\alpha+\alpha^2)^3}{\{\alpha(1+\alpha+\alpha^2)\}^3}$

$= \frac{(1+\alpha+\alpha^2)^3}{\alpha^3(1+\alpha+\alpha^2)^3} = \frac{1}{\alpha^3} = \frac{a}{c}$

$\therefore \quad c(a - b)^3 = a(c - b)^3$

গ. প্রমাণঃ $ax^2 + bx + c = 0 \cdots\cdots$ (i) এবং $bx^2 + cx + a = 0$

মনে করি, $ax^2 + bx + c = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় α এবং β.

$\therefore \quad \alpha + \beta = -\frac{b}{a}, \alpha\beta = \frac{c}{a}$

প্রশ্নানুসারে, $bx^2 + cx + a = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় $\alpha + k$ এবং $\beta + k$, যেখানে k ধ্রুবক।

$\therefore \quad \alpha + k + \beta + k = -\frac{c}{b}$

$\Rightarrow \alpha + \beta + 2k = -\frac{c}{b}$

$\Rightarrow -\frac{b}{a} + 2k = -\frac{c}{b}$, [$\because \alpha + \beta = -\frac{b}{a}$]

$\Rightarrow 2k = \frac{b}{a} - \frac{c}{b} \Rightarrow k = \frac{b^2 - ac}{2ab} \cdots$(i) এবং

$(\alpha + k)(\beta + k) = \frac{a}{b}$

$\Rightarrow \alpha\beta + k(\alpha + \beta) + k^2 = \frac{a}{b}$

$\Rightarrow \frac{c}{a} + k(-\frac{b}{a}) + k^2 = \frac{a}{b}$

$\Rightarrow \frac{c}{a} + \frac{b^2 - ac}{2ab}(-\frac{b}{a}) + \frac{(b^2 - ac)^2}{4a^2b^2} = \frac{a}{b}$

$\Rightarrow \frac{c}{a} - \frac{b^3 - abc}{2a^2b} + \frac{b^4 - 2ab^2c + a^2c^2}{4a^2b^2} = \frac{a}{b}$

$\Rightarrow \frac{4ab^2c - 2b^4 + 2ab^2c + b^4 - 2ab^2c + a^2c^2}{4a^2b^2} = \frac{a}{b}$

$\Rightarrow 4ab^2c - b^4 + a^2c^2 = 4a^3b$

$\Rightarrow 4ab^2c - b^4 + a^2c^2 - 4a^3b = 0$

$\Rightarrow 4ab(bc - a^2) = b^4 - a^2c^2$ (Proved)

34. $mx^2 + nx + l = 0, lx^2 + nx + m = 0$ [দি.বো.'১৭]

ক. $2x^2 + 5x - 9 = 0$ সমীকরণটি সমাধান কর। ২

সমাধান: $2x^2 + 5x - 9 = 0$

$\therefore \quad x = \frac{-5 \pm \sqrt{25 - 4.2.(-9)}}{2.2}$

$= \frac{-5 \pm \sqrt{25 + 72}}{4} = \frac{-5 \pm \sqrt{97}}{4}$

$= \frac{-5 + \sqrt{97}}{4}, \frac{-5 - \sqrt{97}}{4}$

খ. উদ্দীপকে উল্লিখিত সমীকরণদ্বয়ের একটি সাধারণ মূল থাকলে দেখাও যে, $m + l = \pm n$. ৪

প্রমাণ: মনে করি, প্রদত্ত সমীকরণদ্বয়ের সাধারণ মূলটি α। তাহলে, $m\alpha^2 + n\alpha + l = 0$ এবং

$l\alpha^2 + n\alpha + m = 0$

বজ্রগুণন প্রণালীর সাহায্যে আমরা পাই,

$$\frac{\alpha^2}{mn-nl}=\frac{\alpha}{l^2-m^2}=\frac{1}{mn-nl}$$

$\therefore\ (l^2-m^2)^2=(mn-nl)(mn-nl)$

$\Rightarrow n(m-l)n(m-l)-(m-l)^2(m+l)^2=0$

$\Rightarrow (m-l)^2\{n^2-(m+l)^2\}=0$

এখানে, $m\neq l$. কারণ, $m=l$ হলে, প্রদত্ত সমীকরণদ্বয়ের উভয় মূলই সাধারণ হবে।

$\therefore\ n^2-(m+l)^2=0\Rightarrow(m+l)^2=n^2$

$\therefore\ m+l=\pm n$ (Showed)

গ) উদ্দীপকের ১ম সমীকরণটির মূলদ্বয় α,β হলে $ml(x^2+1)-(n^2-2ml)x=0$ সমীকরণের মূলদ্বয় α,β এর মাধ্যমে প্রকাশ কর। ৪

সমাধান: দেওয়া আছে, $ax^2+bx+c=0$ সমীকরণের মূলদ্বয় α এবং β

$\therefore\ \alpha+\beta=-\frac{n}{m}\Rightarrow n=-m(\alpha+\beta)$ এবং

$\alpha\beta=\frac{l}{m}\Rightarrow l=m\alpha\beta$

এখন, $ml(x^2+1)-(n^2-2ml)x=0$

$\Rightarrow mlx^2-(n^2-2ml)x+ml=0$

$\Rightarrow m^2\alpha\beta x^2-\{m^2(\alpha+\beta)^2-2m^2\alpha\beta\}x+m^2\alpha\beta=0$

$\Rightarrow \alpha\beta x^2-\{\alpha^2+\beta^2+2\alpha\beta-2\alpha\beta\}x+\alpha\beta=0$

$\Rightarrow \alpha\beta x^2-\alpha^2x-\beta^2x+\alpha\beta=0$

$\Rightarrow \alpha x(\beta x-\alpha)-\beta(\beta x-\alpha)=0$

$\Rightarrow (\beta x-\alpha)(\alpha x-\beta)=0\Rightarrow x=\frac{\alpha}{\beta},\frac{\beta}{\alpha}$

$\therefore\ ml(x^2+1)-(n^2-2ml)x=0$ সমীকরণের মূলদ্বয় $\frac{\alpha}{\beta}$ এবং $\frac{\beta}{\alpha}$

35. $x^2+bx+c=0$ সমীকরণের মূলদ্বয় α,β [চ.বো.'১৭]

ক) উদ্দীপকের সমীকরণটির নিশ্চায়ক কত? ২

সমাধান: $x^2+bx+c=0$ সমীকরণটির নিশ্চায়ক $=b^2-4ac$

খ. $c(x^2+1)-(b^2-2c)x=0$ এর মূল দুইটি α,β এর মাধ্যমে প্রকাশ কর। ৪

সমাধান: দেওয়া আছে, $x^2+bx+c=0$ সমীকরণের মূলদ্বয় α এবং β

$\therefore\ \alpha+\beta=-b\Rightarrow b=-(\alpha+\beta)$ এবং

$\alpha\beta=c\Rightarrow c=\alpha\beta$

এখন, $c(x^2+1)-(b^2-2c)x=0$

$\Rightarrow cx^2-(b^2-2c)x+c=0$

$\Rightarrow \alpha\beta x^2-\{(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta\}x+\alpha\beta=0$

$\Rightarrow \alpha\beta x^2-(\alpha^2+\beta^2)x+\alpha\beta=0$

$\Rightarrow \alpha\beta x^2-\alpha^2x-\beta^2x+\alpha\beta=0$

$\Rightarrow \alpha x(\beta x-\alpha)-\beta(\beta x-\alpha)=0$

$\Rightarrow (\beta x-\alpha)(\alpha x-\beta)=0\Rightarrow x=\frac{\alpha}{\beta},\frac{\beta}{\alpha}$

$\therefore\ c(x^2+1)-(b^2-2c)x=0$ সমীকরণের মূলদ্বয় $\frac{\alpha}{\beta}$ এবং $\frac{\beta}{\alpha}$

গ. এরূপ একটি সমীকরণ নির্ণয় কর যার মূলদ্বয় $\alpha+\frac{1}{\beta}$ ও $\beta+\frac{1}{\alpha}$ ৪

সমাধান: প্রশ্নমালা IV এর 5(a) দ্রষ্টব্য।

36. $f(x)=ax^2+bx+c$ এবং $g(x)=cx^2+bx+a$ [য.বো.'১৭]

ক. $f(x)=0$ এর মূলের প্রকৃতি নির্ণয় কর। ২

সমাধান: $f(x)=ax^2+bx+c$ এর নিশ্চায়ক, $D=b^2-4ac$

(i) $b^2-4ac>0$ হলে মূলদ্বয় বাস্তব ও অসমান হবে।

(ii) $b^2-4ac=0$ হলে মূলদ্বয় বাস্তব, মূলদ ও সমান হবে।

(iii) $b^2-4ac<0$ হলে মূলদ্বয় জটিল ও অসমান হবে। এক্ষেত্রে মূলদ্বয় পরস্পর দুইটি অনুবন্ধী জটিল বা কাল্পনিক সংখ্যা হয়।

(iv) $a,b,c\in Q$ এবং b^2-4ac পূর্ণ বর্গ হলে মূলদ্বয় মূলদ ও অসমান হবে।

খ. $f(x)=0$ সমীকরণের মূলদ্বয় যথাক্রমে α,β হলে দেখাও যে,

$$(a\alpha+b)^{-3}+(a\beta+b)^{-3}=\frac{b^3-3abc}{a^3c^3}$$ ৪

প্রমাণ: $f(x)=0\Rightarrow ax^2+bx+c=0$ ... (i) সমীকরণের মূলদ্বয় α,β বলে,

$\alpha+\beta=-\frac{b}{a},\ \alpha\beta=\frac{c}{a}$ এবং

$a\alpha^2+b\alpha+c=0$

$\Rightarrow \alpha(a\alpha+b)=-c\Rightarrow a\alpha+b=-\frac{c}{\alpha}$

অনুরূপ, $a\beta+b=-\frac{c}{\beta}$

এখন, L.H.S. $=(a\alpha+b)^{-3}+(a\beta+b)^{-3}$

$=(-\frac{c}{\alpha})^{-3}+(-\frac{c}{\beta})^{-3}=\frac{\alpha^3}{c^3}+\frac{\beta^3}{c^3}$

$=\frac{\alpha^3+\beta^3}{c^3}=\frac{(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)}{c^3}$

$=\frac{(-\frac{b}{a})^3-3(\frac{c}{a})(-\frac{b}{a})}{c^3}=\frac{-\frac{b^3}{a^3}+\frac{3bc}{a^2}}{c^3}$

$\therefore\ (a\alpha+b)^{-3}+(a\beta+b)^{-3}=\frac{b^3-3abc}{a^3c^3}$

গ. $f(x)=0$ এর একটি মূল, $g(x)=0$ সমীকরণের একটি মূলের দ্বিগুণ হলে, প্রমাণ কর যে, $2a=c$ অথবা $(2a+c)^2=2b^2$ ৪

প্রমাণ: প্রশ্নমালা IV এর উদাহরণ 9(c) দ্রষ্টব্য।

37. দৃশ্যকল্প ১: $z=2+4i-i^2$ [রা.বো.'১৭]

দৃশ্যকল্প ২: $px^2+qx+r=0$

ক. এককের জটিল ঘনমূল ω,ω^2 হলে $(-1+\sqrt{-3})^7+(-1-\sqrt{-3})^7$ এর মান নির্ণয় কর। ২

সমাধান: আমরা জানি, $\omega=\frac{1}{2}(-1+\sqrt{-3})$ এবং, $\omega^2=\frac{1}{2}(-1-\sqrt{-3})$ হবে।

$\therefore\ -1+\sqrt{-3}=2\omega,\ -1-\sqrt{-3}=2\omega^2$

এখন, $(-1+\sqrt{-3})^7+(-1-\sqrt{-3})^7$

$=(2\omega)^7+(2\omega^2)^7=128(\omega^7+\omega^{14})$

$=128(\omega+\omega^2)=128(-1)=-128$

খ. দৃশ্যকল্প ১ এ $\bar{z}$ এর বর্গমূলের মডুলাস সর্বদা $\sqrt{5}$ সঠিক কী না যাচাই কর। যেখানে $\bar{z}$ হচ্ছে z এর অনুবন্ধী জটিল সংখ্যা। ৪

সমাধান: দৃশ্যকল্প ১ হতে, $z=2+4i-i^2$

$\Rightarrow z=2+4i-(-1)=3+4i$

$\therefore\ \bar{z}=3-4i=4-1-4i$

$=2^2+i^2-2.2.i$

$=(2-i)^2$

$\therefore\ \bar{z}$ এর বর্গমূল $=\pm(2-i)$

$\therefore\ \pm(2-i)$ এর মডুলাস $=|\pm(2-i)|$

$=|2-i|=\sqrt{2^2+(-1)^2}=\sqrt{4+1}=\sqrt{5}$

$\therefore$ z এর অনুবন্ধী জটিল সংখ্যা $\bar{z}$ এর বর্গমূলের মডুলাস সর্বদা $\sqrt{5}$। সত্যতা যাচাই করা হলো।

গ. দৃশ্যকল্প ২ এ উল্লেখিত সমীকরণের মূলদ্বয় α,β হলে $\frac{2}{\alpha},\frac{2}{\beta}$ মূলবিশিষ্ট সমীকরণ নির্ণয় কর। ৪

সমাধান: $px^2+qx+r=0$ সমীকরণের মূলদ্বয় α,β বলে, $\alpha+\beta=-\frac{q}{p},\ \alpha\beta=\frac{r}{p}$

$\frac{2}{\alpha},\frac{2}{\beta}$ মূলদ্বয়ের সমষ্টি $=\frac{2}{\alpha}+\frac{2}{\beta}=\frac{2(\alpha+\beta)}{\alpha\beta}$

$=\frac{2(-q/p)}{r/p}=-\frac{2q}{r}$

$\frac{2}{\alpha},\frac{2}{\beta}$ মূলদ্বয়ের গুণফল $=\frac{4}{\alpha\beta}=\frac{4p}{r}$

$\therefore$ নির্ণেয় দ্বিঘাত সমীকরণ,

x^2-(মূলদ্বয়ের সমষ্টি)$x+$ মূলদ্বয়ের গুণফল $=0$

$\Rightarrow x^2-(-\frac{2q}{r})x+\frac{4p}{r}=0$

$\Rightarrow rx^2+2qx+4p=0$ (Ans.)