বহুপদী ও বহুপদী সমীকরণ

1. উৎপাদকের সাহায্যে সমাধান কর:

সমাধান: (a) $x^2 - 6x + 9 = 0$

$\Rightarrow \quad x^2 - 2.x.3 + 3^2 = 0 \Rightarrow (x-3)^2 = 0$

$\Rightarrow \quad x = 3, 3$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান, $x = 3, 3$

1(b) $7x - 2 - 3x^2 = 0$

$\Rightarrow \quad 3x^2 - 7x + 2 = 0$

$\Rightarrow \quad 3x^2 - 6x - x + 2 = 0;$

[$\because ac = 3 \times 2 = 6 > 0$ এবং $b = -7 < 0$]

$\Rightarrow \quad 3x(x-2) - 1(x-2) = 0$

$\Rightarrow \quad (x-2)(3x-1) = 0$

$x - 2 = 0$ হলে, $x = 2$; $3x - 1 = 0$ হলে, $x = \frac{1}{3}$.

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান, $x = 2, \frac{1}{3}$

1(c) $2^{2x} - 3.2^{x+2} = -32$

$\Rightarrow \quad 2^{2x} - 3.2^x.2^2 + 32 = 0$

$\Rightarrow \quad (2^x)^2 - 12.2^x + 32 = 0$

$\Rightarrow \quad (2^x)^2 - 8.2^x - 4.2^x + 32 = 0$

$\Rightarrow \quad 2^x(2^x - 8) - 4(2^x - 8) = 0$

$\Rightarrow \quad (2^x - 8)(2^x - 4) = 0$

$2^x - 8 = 0$ হলে, $2^x = 2^3 \Rightarrow x = 3$

$2^x - 4 = 0$ হলে, $2^x = 2^2 \Rightarrow x = 2$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান, $x = 2, 3$

2(a) দেখাও যে, $x^2 + 4x + 2 = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় $-2 + \sqrt{2}$ এবং $-2 - \sqrt{2}$.

প্রমাণ: $x^2 + 4x + 2 = 0$

$$\therefore \quad x = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4.1.2}}{2.1} = \frac{-4 \pm \sqrt{16-8}}{2}$$

$$= \frac{-4 \pm \sqrt{8}}{2} = \frac{-4 \pm 2\sqrt{2}}{2} = -2 \pm \sqrt{2}$$

$\therefore$ প্রদত্ত সমীকরণের মূলদ্বয় $-2 + \sqrt{2}$ এবং $-2 - \sqrt{2}$.

2(b) $e^{2x} + 4e^x + 2 = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় x_1 ও x_2 হলে, দেখাও যে, $x_1 + x_2 = \ln 2$.

প্রমাণ: $e^{2x} + 4e^x + 2 = 0$

অর্থাৎ $(e^x)^2 + 4e^x + 2 = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় x_1 ও x_2 বলে, $e^{x_1} e^{x_2} = \frac{2}{1} \Rightarrow e^{x_1 + x_2} = 2$

$\therefore \quad x_1 + x_2 = \ln 2.$

2(c) কোন একটি দ্বিঘাত সমীকরণের একটি মূল $\frac{1}{2}(-1 - \sqrt{-3})$ হলে সমীকরণটি নির্ণয় কর।

[SUST'12-13]

সমাধান: দ্বিঘাত সমীকরণের প্রদত্ত মূলটি $\frac{1}{2}(-1 - \sqrt{-3})$, যা জটিল সংখ্যা।

$\therefore$ সমীকরণের অপর মূলটি হবে $\frac{1}{2}(-1 + \sqrt{-3})$

[$\because$ জটিল মূল যুগল রূপে আসে।]

$\therefore$ এদের যোগফল $= \frac{1}{2}(-1 - \sqrt{-3} \ -1 + \sqrt{-3})$

$$= \frac{1}{2}(-2) = -1$$

এবং গুণফল $= \frac{1}{4}(-1 - \sqrt{-3})(-1 + \sqrt{-3})$

$$= \frac{1}{4}\{(-1)^2 - (\sqrt{-3})^2\}$$

$$= \frac{1}{4}(1 + 3) = 1$$

$\therefore$ নির্ণেয় দ্বিঘাত সমী...

$\Rightarrow \quad x^2 + x + 1 = 0$ (Ans.)

2(d) বাস্তব সহগের একটি দ্বিঘাত সমীকরণের একটি মূল $3 + 2i$ হলে, সমীকরণটি নির্ণয় কর।[SUST'10-11]

সমাধানঃ দ্বিঘাত সমীকরণের প্রদত্ত মূলটি $3 + 2i$, যা জটিল সংখ্যা।

$\therefore$ সমীকরণের অপর মূলটি হবে $3 - 2i$

[$\because$ জটিল মূল যুগল রূপে আসে।]

$\therefore$ এদের যোগফল $= 3 + 2i + 3 - 2i = 6$

এবং গুণফল $= (3 + 2i)(3 - 2i) = 3^2 - (2i)^2$

$= 9 - 4i^2 = 9 - 4(-1) = 13$

$\therefore$ নির্ণেয় দ্বিঘাত সমীকরণ, $x^2 - 6x + 13 = 0$

2(e) মূলদ সহগ বিশিষ্ট দ্বিঘাত সমীকরণ গঠন কর যার একটি মূল $\dfrac{1}{2-\sqrt{5}}$. [SUST'07-08]

সমাধানঃ $\dfrac{1}{2-\sqrt{5}} = \dfrac{2+\sqrt{5}}{(2-\sqrt{5})(2+\sqrt{5})}$

$= \dfrac{2+\sqrt{5}}{2^2-(\sqrt{5})^2} = \dfrac{2+\sqrt{5}}{4-5} = -2-\sqrt{5}$, যা অমূলদ সংখ্যা।

$\therefore$ দ্বিঘাত সমীকরণের অপর মূলটি হবে $-2+\sqrt{5}$

[$\because$ অমূলদ মূল যুগল রূপে আসে।]

$\therefore$ এদের যোগফল $= -2-\sqrt{5}-2+\sqrt{5} = -4$

এবং গুণফল $= (-2-\sqrt{5})(-2+\sqrt{5})$

$= (-2)^2 - (\sqrt{5})^2 = 4 - 5 = -1$

$\therefore$ নির্ণেয় দ্বিঘাত সমীকরণ, $x^2 - (-4)x - 1 = 0$

$\Rightarrow x^2 + 4x - 1 = 0$

3.(a) $3x^2 + 2x + 1 = 0$ সমীকরণের মূলের প্রকৃতি নির্ণয় কর এবং সমাধান করে তোমার উক্তির সত্যতা যাচাই কর।

সমাধানঃ পৃথায়ক $= 2^2 - 4.3.1 = 4 - 12 = -8 < 0$

$\therefore$ প্রদত্ত সমীকরণের মূলগুলি জটিল ও অসমান।

এখন, $3x^2 + 2x + 1 = 0$

$\therefore \quad x = \dfrac{-2 \pm \sqrt{4-4.3.1}}{2.1} = \dfrac{-2 \pm \sqrt{-8}}{2}$

$= \dfrac{-2 \pm 2\sqrt{-2}}{2} = -1 \pm \sqrt{-2}$

$\therefore \quad x = -1 + \sqrt{-2}\,,\ -1 - \sqrt{-2}$

অতএব, প্রদত্ত সমীকরণের মূলগুলি জটিল ও অসমান।

(যাচাই করা হল)

(b) দেখাও যে, $\dfrac{1}{x-1} + \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x-k} = 0$ সমীকরণটির মূলগুলো k এর সকল বাস্তব মানের জন্য বাস্তব হবে।

প্রমাণ ঃ দেওয়া আছে, $\dfrac{1}{x-1} + \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x-k} = 0$

$\Rightarrow \dfrac{1}{x-1} + \dfrac{1}{x} = -\dfrac{1}{x-k}$

$\Rightarrow \dfrac{x+x-1}{x(x-1)} = -\dfrac{1}{x-k} \Rightarrow \dfrac{2x-1}{x^2-x} = -\dfrac{1}{x-k}$

$\Rightarrow 2x^2 - 2kx - x + k = -x^2 + x$

$\Rightarrow 3x^2 - 2kx - 2x + k = 0$

$\Rightarrow 3x^2 - 2(k+1)x + k = 0$

$\therefore$ পৃথায়ক $= \{-2(k+1)\}^2 - 4.3.k$

$= 4(k^2 + 2k + 1 - 3k)$

$= 4(k^2 - k + 1) = 4\{(k - \frac{1}{2})^2 + 1 - \frac{1}{4}\}$

$= 4\{(k - \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}\}$

k এর সকল বাস্তব মানের জন্য, $4\{(k - \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}\} \geq 0$

অতএব, k এর সকল বাস্তব মানের জন্য প্রদত্ত সমীকরণের মূলগুলি বাস্তব।

3(c) দেখাও যে, $a = b$ না হলে $2x^2 - 2(a+b)x + a^2 + b^2 = 0$ সমীকরণের মূলগুলো বাস্তব হতে পারে না।

[ঢা.'০০ ; য.'০৪,'১০]

প্রমাণ ঃ পৃথায়ক $= \{-2(a+b)\}^2 - 4.2(a^2 + b^2)$

$= 4(a^2 + b^2 + 2ab - 2a^2 - 2b^2)$

$= 4(-a^2 - b^2 + 2ab)$

$= -4(a^2 + b^2 - 2ab) = -4(a - b)^2$

কেবল $a = b$ হলেই $-4(a-b)^2$ অঋণাত্মক হবে।

অতএব, $a = b$ না হলে প্রদত্ত সমীকরণের মূলগুলি বাস্তব হতে পারে না।

3(d) $(x - a)(x - b) + (x - b)(x - c) + (x - c)(x - a)$ রাশিটি একটি পূর্ণ বর্গ হলে দেখাও যে, $a = b = c$. [রা.'১৩]

প্রমাণ ঃ $(x - a)(x - b) + (x - b)(x - c) + (x - c)(x - a)$ রাশিটি পূর্ণ বর্গ বলে,

$(x - a)(x - b) + (x - b)(x - c) + (x - c)(x - a) = 0$

$\Rightarrow 3x^2 - 2(a + b + c)x + (ab + bc + ca) = 0$

সমীকরণের মূলগুলি সমান হবে এবং ফলে পৃথায়ক শূন্য হবে।

$\therefore \{-2(a + b + c)\}^2 - 4.3(ab + bc + ca) = 0$

$\Rightarrow 4\{a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ca) - 3(ab + bc + ca)\} = 0$

$\Rightarrow 4\{a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca\} = 0$

$\Rightarrow 2\{(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2\} = 0$

$\Rightarrow (a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2 = 0$

$\therefore a - b = 0 \Rightarrow a = b$, $b - c = 0 \Rightarrow b = c$

এবং $c - a = 0 \Rightarrow c = a$

$\therefore a = b = c$. (Proved)

3(e) k এর মান কত হলে, $(k + 1)x^2 + 2(k + 3)x + 2k + 3$ রাশিটি পূর্ণ বর্গ হবে?

[কু.'০৬; বুয়েট'০৮-০৯, ১১-১২]

সমাধান ঃ $(k + 1)x^2 + 2(k + 3)x + 2k + 3$ রাশিটি পূর্ণ বর্গ বলে,

$(k + 1)x^2 + 2(k + 3)x + 2k + 3 = 0$ সমীকরণের মূলগুলি সমান হবে এবং ফলে পৃথায়ক শূন্য হবে।

$\therefore \{2(k + 3)\}^2 - 4(k + 1)(2k + 3) = 0$

$\Rightarrow 4\{k^2 + 6k + 9 - 2k^2 - 5k - 3)\} = 0$

$\Rightarrow 4\{-k^2 + k + 6\} = 0 \Rightarrow k^2 - k - 6 = 0$

$\Rightarrow (k + 2)(k - 3) = 0 \therefore k = -2, 3$ (Ans.)

3(f) $x^2 + bx + c = 0$ সমীকরণের মূল দুইটি বাস্তব ও অসমান হলে দেখাও যে, $2x^2 - 4(1 + c)x + (b^2 + 2c^2 + 2) = 0$ সমীকরণের মূল দুইটি জটিল হবে। [কুয়েট'০৫-০৬]

প্রমাণ ঃ দেওয়া আছে, $x^2 + bx + c = 0$ সমীকরণের মূলগুলো বাস্তব ও অসমান।

$\therefore$ পৃথায়ক, $b^2 - 4.1.c > 0$

$\Rightarrow b^2 - 4c > 0 \cdots\cdots(i)$

এখন, $2x^2 - 4(1 + c)x + (b^2 + 2c^2 + 2) = 0$

সমীকরণের পৃথায়ক $= \{-4(1 + c)\}^2 - 4.2(b^2 + 2c^2 + 2)$

$= 16(1 + 2c + c^2) - 8(b^2 + 2c^2 + 2)$

$= 8(2 + 4c + 2c^2 - b^2 - 2c^2 - 2)$

$= 8(4c - b^2) < 0$, যেহেতু $b^2 - 4c > 0$

$\therefore 2x^2 - 4(1 + c)x + (b^2 + 2c^2 + 2) = 0$ সমীকরণের মূলগুলি জটিল।

3(g) দেখাও যে, a ও b মূলদ হলে $(a^2 - b^2)x^2 + 2(a^2 + b^2)x + a^2 - b^2 = 0$ সমীকরণের মূল দুইটি সর্বদা মূলদ হবে।

প্রমাণ ঃ প্রদত্ত সমীকরণের পৃথায়ক

$= \{2(a^2 + b^2)\}^2 - 4(a^2 - b^2)(a^2 - b^2)$

$= 4\{a^4 + b^4 + 2a^2b^2 - a^4 - b^4 + 2a^2b^2\}$

$= 4.4a^2b^2 = (4ab)^2$, যা পূর্ণবর্গ এবং a, b বাস্তব

$\therefore$ প্রদত্ত সমীকরণের মূলগুলো মূলদ। (Showed)

3(h) k এর মান কত হলে, $(k - 1)x^2 - (k + 2)x + 4 = 0$ সমীকরণের মূলগুলো বাস্তব ও সমান হবে?

[ব.'০৬; রা.'০৮; য.'১২; ঢা, দি.'১৩]

প্রমাণ ঃ পৃথায়ক $= \{-(k + 2)\}^2 - 4.(k - 1).4$

$= k^2 + 4k + 4 - 16k + 16$

$= k^2 - 12k + 20$

প্রদত্ত সমীকরণের মূলগুলো বাস্তব ও সমান হলে,

$k^2 - 12k + 20 = 0$

$\Rightarrow k^2 - 10k - 2k + 20 = 0$

$\Rightarrow k(k - 10) - 2(k - 10) = 0$

$\Rightarrow (k - 10)(k - 2) = 0$

$\therefore\ k = 2$ বা $,10$

3(i) k এর মান কত হলে, $(3k + 1)x^2 - (k + 11)x + 9 = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় জটিল সংখ্যা হবে ! [বুয়েট'১১-১২]

সমাধান: প্রদত্ত সমীকরণের পৃথায়ক

$= \{-(k + 11)\}^2 - 4(3k + 1).9$

$= k^2 + 2.k.11 + 121 - 108k - 36$

$= k^2 + 22k - 108k + 85$

$= k^2 - 86k + 85 = (k - 85)(k - 1)$

মূলদ্বয় জটিল সংখ্যা হলে, পৃথায়ক < 0

$\therefore (k - 85)(k - 1) < 0 \Rightarrow 1 < k < 85$

3(j) $x^2 + ax + b = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় যদি সমান হয় এবং অপর সমীকরণ $x^2 + ax + 8 = 0$ এর একটি মূল যদি 4 হয়, তবে b এর মান নির্ণয় কর।

সমাধান: $x^2 + ax + 8 = 0$ এর একটি মূল 4 হলে,

$4^2 + a \times 4 + 8 = 0 \Rightarrow 4a = -24\ \therefore a = -6$

আবার, $x^2 + ax + b = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় সমান হলে, $a^2 - 4.1.b = 0 \Rightarrow (-6)^2 = 4b\ \therefore\ b = 9$

3(k) $\frac{1}{x-a} + \frac{1}{x-b} + \frac{1}{x-c} = 0$ সমীকরণের মূলগুলি সর্বদা বাস্তব হবে এবং $a = b = c$ না হলে মূলগুলি সমান হতে পারেনা। [ব.'১৩]

প্রমাণ: দেওয়া আছে, $\frac{1}{x-a} + \frac{1}{x-b} + \frac{1}{x-c} = 0$

$\Rightarrow (x - a)(x - b) + (x - b)(x - c) + (x - c)(x - a) = 0$

$\Rightarrow 3x^2 - 2(a + b + c)x + ab + bc + ca = 0$

প্রদত্ত সমীকরণের পৃথায়ক

$= \{-2(a + b + c)\}^2 - 4.3(ab + bc + ca)$

$= 4\{a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ca) - 3(ab + bc + ca)$

$= 2\{(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2\}$

$= (a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2$

$a, b, c \in \mathbb{R}$ এর জন্য, পৃথায়ক $= (a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2$ অঋণাত্মক এবং ফলে প্রদত্ত সমীকরণের মূলগুলি সর্বদা বাস্তব হবে।

আবার, পৃথায়ক $= (a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2 = 0$ হবে কেবল $a = b = c$ হলে।

$\therefore$ $a = b = c$ না হলে প্রদত্ত সমীকরণের মূলগুলি সমান হতে পারেনা। (Proved)

4(a) $x^3 - px^2 + qx - r = 0$ সমীকরণের মূলগুলো α, β, γ হলে মান নির্ণয় কর ঃ

(i) $\Sigma\frac{1}{\alpha^2}$ [কু.'০১; য.'০৩; দি.'০৯]

সমাধান ঃ প্রদত্ত সমীকরণের মূলগুলো α, β, γ ..

$\therefore\ \sum\alpha = \alpha + \beta + \gamma = p$,

$\sum\alpha\beta = \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = q$ এবং $\alpha\beta\gamma = r$

এখন, $\sum\frac{1}{\alpha^2} = \frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\beta^2} + \frac{1}{\gamma^2}$

$= \frac{\beta^2\gamma^2 + \alpha^2\gamma^2 + \alpha^2\beta^2}{\alpha^2\beta^2\gamma^2}$

$= \frac{(\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha)^2 - 2(\alpha\beta.\beta\gamma + \beta\gamma.\gamma\alpha + \gamma\alpha.\alpha\beta)}{\alpha^2\beta^2\gamma^2}$

$= \frac{(\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha)^2 - 2\alpha\beta\gamma(\beta + \gamma + \alpha)}{\alpha^2\beta^2\gamma^2}$

$= \frac{q^2 - 2rp}{r^2}$ (Ans.)

(ii) $\Sigma\frac{1}{\alpha^2\beta^2}$ [রা.'০৩; য.'০৬; সি. '০৯]

$$\sum\frac{1}{\alpha^2\beta^2}=\frac{1}{\alpha^2\beta^2}+\frac{1}{\beta^2\gamma^2}+\frac{1}{\gamma^2\alpha^2}$$

$$=\frac{\gamma^2+\alpha^2+\beta^2}{\alpha^2\beta^2\gamma^2}$$

$$=\frac{(\alpha+\beta+\gamma)^2-2(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)}{\alpha^2\beta^2\gamma^2}=\frac{p^2-2q}{r^2}$$

4(b) $x^3+px^2+qx+r=0$ **সমীকরণের মূলগুলো** α, β, γ **হলে** $\sum\alpha^3$ **এর মান নির্ণয় কর।** [সি.'০৫; চ.'০৬]

সমাধান ঃ প্রদত্ত সমীকরণের মূলগুলি α, β, γ.

$\therefore\ \sum\alpha=\alpha+\beta+\gamma=-p,$

$\sum\alpha\beta=\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=q$ এবং $\alpha\beta\gamma=-r$

এখন, $\sum\alpha^3=\alpha^3+\beta^3+\gamma^3$

$=\alpha^3+\beta^3+\gamma^3-3\alpha\beta\gamma+3\alpha\beta\gamma$

$=(\alpha+\beta+\gamma)\{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)\}+3(-r)$

$=-p\{(\alpha+\beta+\gamma)^2-2(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)-(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)\}-3r$

$=-p\{(-p)^2-3q\}-3r = 3pq-p^3-3r$

4(c) $x^3+qx+r=0$ **সমীকরণের মূলগুলো** α, β, γ **হলে** $(\alpha-\beta)^2+(\beta-\gamma)^2+(\gamma-\alpha)^2$ **এর মান নির্ণয় কর।** [চ.'০৫]

সমাধান ঃ প্রদত্ত সমীকরণের মূলগুলো α, β, γ.

$\therefore\ \sum\alpha=\alpha+\beta+\gamma=0,$

$\sum\alpha\beta=\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=q$ এবং $\alpha\beta\gamma=-r$

এখন, $(\alpha-\beta)^2+(\beta-\gamma)^2+(\gamma-\alpha)^2$

$=\ \alpha^2+\beta^2-2\alpha\beta+\beta^2+\gamma^2-2\beta\gamma+\gamma^2+\alpha^2-2\gamma\alpha$

$=\ 2(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)-2(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)$

$=\ 2\{(\alpha+\beta+\gamma)^2-2(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)-2q$

$=\ 2\{0-2q\}-2q$

$=\ -4q-2q=-6q$ (Ans.)

4(d) $3x^3-2x^2+1=0$ **সমীকরণের মূলগুলো** α, β, γ **হলে** $\sum\alpha^2\beta$ **এর মান নির্ণয় কর।** [য.'০৭]

সমাধান ঃ প্রদত্ত সমীকরণের মূলগুলো α, β, γ.

$\therefore\ \sum\alpha=\alpha+\beta+\gamma=-(-\frac{2}{3})=\frac{2}{3},$

$\sum\alpha\beta=\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=0$ এবং $\alpha\beta\gamma=-\frac{1}{3}$

এখন, $\sum\alpha^2\beta=\alpha^2\beta+\alpha\beta^2+\beta^2\gamma+\beta\gamma^2+\gamma^2\alpha+\gamma\alpha^2$

$=\alpha\beta(\alpha+\beta)+\beta\gamma(\beta+\gamma)+\gamma\alpha(\gamma+\alpha)$

$=\alpha\beta(\alpha+\beta+\gamma-\gamma)+\beta\gamma(\beta+\gamma+\alpha-\alpha)+\gamma\alpha(\gamma+\alpha+\beta-\beta)$

$=(\alpha+\beta+\gamma)(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)-3\alpha\beta\gamma$

$=\frac{2}{3}.0-3(-\frac{1}{3})=1$ (Ans.)

4(e) $x^3+ax^2+bx+c=0$ **সমীকরণের মূলগুলো** α, β, γ **হলে মান নির্ণয় কর ঃ (i)** $\sum(\beta+\gamma)^{-1}$ **(ii)** $\sum\alpha^3$ [চ.'০৪]

সমাধান ঃ প্রদত্ত সমীকরণের মূলগুলো α, β, γ.

$\therefore\ \sum\alpha=\alpha+\beta+\gamma=-a.$

$\sum\alpha\beta=\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=b$ এবং $\alpha\beta\gamma=-c$

(i) $\sum(\beta+\gamma)^{-1}=\frac{1}{\beta+\gamma}+\frac{1}{\gamma+\alpha}+\frac{1}{\alpha+\beta}$

$$=\frac{1}{-a-\alpha}+\frac{1}{-a-\beta}+\frac{1}{-a-\gamma}$$

$$=-\frac{(a+\beta)(a+\gamma)+(a+\alpha)(a+\gamma)+(a+\alpha)(a+\beta)}{(a+\alpha)(a+\beta)(a+\gamma)}$$

$$=-\frac{3a^2+2a(\alpha+\beta+\gamma)+(\beta\gamma+\gamma\alpha+\alpha\beta)}{a^3+a^2(\alpha+\beta+\gamma)+a(\beta\gamma+\gamma\alpha+\alpha\beta)}$$

$$=-\frac{3a^2+2a(-a)+b}{a^3+a^2(-a)+ab-c}=\frac{a^2+b}{c-ab}$$

(ii) $\sum\alpha^3=\alpha^3+\beta^3+\gamma^3$

$= \alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 - 3\alpha\beta\gamma + 3\alpha\beta\gamma$

$= (\alpha + \beta + \gamma)\{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - (\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha)\} + 3(-c)$

$= -a\{(\alpha + \beta + \gamma)^2 - 2(\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha) - (\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha)\} - 3c$

$= -a\{(-a)^2 - 3b\} - 3c = -a^3 + 3ab - 3c$

$= 3ab - a^3 - 3c$ (Ans.)

4(f) $x^3 + qx + r = 0$ সমীকরণের মূলগুলো α, β হলে দেখাও যে, $(\beta - \gamma)^2 = \dfrac{3r - q\alpha}{\alpha}$

[টেক্সটাইল'০২-০৩]

প্রমাণ ঃ প্রদত্ত সমীকরণের মূলগুলো α, β, γ.

$\therefore \alpha + \beta + \gamma = 0$, $\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = q$ এবং $\alpha\beta\gamma = -r$

$\therefore (\beta - \gamma)^2 = (\beta + \gamma)^2 - 4\beta\gamma$

$= (-\alpha)^2 - 4(-\dfrac{r}{\alpha})$

$[\because \alpha + \beta + \gamma = 0$ এবং $\alpha\beta\gamma = -r]$

$= \dfrac{\alpha^3 + 4r}{\alpha}$

এখন, $x^3 + qx + r = 0$ সমীকরণের একটি মূল α বলে

$\alpha^3 + q\alpha + r = 0 \Rightarrow \alpha^3 = -q\alpha - r$

$\therefore (\beta - \gamma)^2 = \dfrac{-q\alpha - r + 4r}{\alpha} = \dfrac{3r - q\alpha}{\alpha}$

4(g) $ax^2 + bx + c = 0$ সমীকরণের মূলগুলো α, β হলে মান নির্ণয় কর ঃ

সমাধান ঃ প্রদত্ত সমীকরণের মূলগুলো α, β.

$\therefore \alpha + \beta = \dfrac{-b}{a}$ এবং $\alpha\beta = \dfrac{c}{a}$

(i) $\alpha^4 + \alpha^2\beta^2 + \beta^4 = (\alpha^2 + \beta^2)^2 - \alpha^2\beta^2$

$= \{(\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta\}^2 - (\alpha\beta)^2$

$= \{(\dfrac{-b}{a})^2 - 2\dfrac{c}{a}\}^2 - (\dfrac{c}{a})^2$

$= (\dfrac{b^2}{a^2} - 2\dfrac{c}{a})^2 - \dfrac{c^2}{a^2}$

$= \dfrac{b^4}{a^4} + 4\dfrac{c^2}{a^2} - 4\dfrac{b^2}{a^2}.\dfrac{c}{a} - \dfrac{c^2}{a^2}$

$= \dfrac{b^4}{a^4} + 3\dfrac{c^2}{a^2} - 4\dfrac{b^2c}{a^3}$

$= \dfrac{1}{a^4}(b^4 + 3c^2a^2 - 4ab^2c)$ (Ans.)

(ii) $(a\alpha^2 + b)^{-1} + (a\beta^2 + b)^{-1}$

$= \dfrac{1}{a\alpha^2 + b} + \dfrac{1}{a\beta^2 + b}$

$= \dfrac{a\beta^2 + b + a\alpha^2 + b}{(a\alpha^2 + b)(a\beta^2 + b)}$

$= \dfrac{a\{(\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta\} + 2b}{a^2\alpha^2\beta^2 + ab(\alpha^2 + \beta^2) + b^2}$

$$= \frac{a\left\{\left(-\frac{b}{a}\right)^2 - 2\frac{c}{a}\right\} + 2b}{a^2\left(\frac{c}{a}\right)^2 + ab\left\{\left(-\frac{b}{a}\right)^2 - 2\frac{c}{a}\right\} + b^2}$$

$$= \frac{\frac{a}{a^2}(b^2 - 2ca) + 2b}{c^2 + \frac{ab}{a^2}(b^2 - 2ca) + b^2}$$

$$= \frac{b^2 - 2ca + 2ab}{a} \times \frac{a}{c^2a + b^3 - 2abc + ab^2}$$

$= \dfrac{b^2 - 2ca + 2ab}{c^2a + b^3 - 2abc + ab^2}$ (Ans.)

4(f) $r(1 - r) = 1$ এর জটিল মূলদ্বয় z_1 ও z_2 হলে, প্রমাণ কর যে, $z_1^3 + z_2^3 = -2$. [রুয়েট'০৪-০৫]

প্রমাণ : দেওয়া আছে, $r(1-r)=1$ অর্থাৎ $r^2 - r + 1 = 0$ এর জটিল মূলদ্বয় z_1 ও z_2.

$\therefore\ z_1 + z_2 = 1$ এবং $z_1 z_2 = 1$

L.H.S. $= z_1^3 + z_2^3$

$= (z_1+z_2)^3 - 3z_1z_2(z_1+z_2)$

$= 1^3 - 3\times1\times1$

$= 1-3 = -2 =$ R.H.S. (Proved)

5(a) যদি $ax^2+bx+c=0$ সমীকরণের মূলদ্বয় α, β হয়, তবে নিম্নের মূল দ্বারা গঠিত সমীকরণ নির্ণয় কর: (i) $\alpha+\dfrac{1}{\beta}, \beta+\dfrac{1}{\alpha}$ [কু.'০৮]

(ii) $\dfrac{\alpha+\beta}{2}, \sqrt{\alpha\beta}$

(iii) $\dfrac{1}{\alpha^3}, \dfrac{1}{\beta^3}$. [ব.'১২; রুয়েট'১১-১২]

সমাধান : দেওয়া আছে, $ax^2+bx+c=0$ সমীকরণের মূলদ্বয় α এবং β.

$\therefore\ \alpha+\beta = -\dfrac{b}{a}$ এবং $\alpha\beta = \dfrac{c}{a}$

(i) $\alpha+\dfrac{1}{\beta}$ এবং $\beta+\dfrac{1}{\alpha}$ মূলদ্বয়ের সমষ্টি

$$= \alpha+\beta+\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta} = -\frac{b}{a}+\frac{-\frac{b}{a}}{\frac{c}{a}} = -\frac{b}{a}-\frac{b}{c}$$

এবং গুণফল $= (\alpha+\dfrac{1}{\beta})(\beta+\dfrac{1}{\alpha}) = \dfrac{(\alpha\beta+1)^2}{\alpha\beta}$

$$= \frac{(\frac{c}{a}+1)^2}{\frac{c}{a}} = \frac{(c+a)^2}{a^2}\times\frac{a}{c} = \frac{(c+a)^2}{ca}$$

$\therefore$ নির্ণেয় সমীকরণ, $x^2 - (-\dfrac{b}{a}-\dfrac{b}{c})x + \dfrac{(c+a)^2}{ca} = 0$

$\therefore\ ca\,x^2 + b(a+c)x + (c+a)^2 = 0$

(ii) $\dfrac{\alpha+\beta}{2}$ এবং $\sqrt{\alpha\beta}$ মূলদ্বয়ের সমষ্টি

$$= \frac{\alpha+\beta}{2}+\sqrt{\alpha\beta} = -\frac{b}{2a}+\sqrt{\frac{c}{a}} = \frac{2\sqrt{ca}-b}{2a}$$

এবং গুণফল $= \dfrac{\alpha+\beta}{2}.\sqrt{\alpha\beta} = -\dfrac{b}{2a}.\sqrt{\dfrac{c}{a}}$

$$= -\frac{b\sqrt{c}}{2a\sqrt{a}}$$

$\therefore$ নির্ণেয় সমীকরণ,

$$x^2 - \frac{2\sqrt{ca}-b}{2a}x - \frac{b\sqrt{c}}{2a\sqrt{a}} = 0$$

$\therefore\ 2a\sqrt{a}\,x^2 - (2a\sqrt{c} - b\sqrt{a})x - b\sqrt{c} = 0$

(iii) $\dfrac{1}{\alpha^3}$ এবং $\dfrac{1}{\beta^3}$ মূলদ্বয়ের সমষ্টি

$$= \frac{1}{\alpha^3}+\frac{1}{\beta^3} = \frac{\alpha^3+\beta^3}{\alpha^3\beta^3}$$

$$= \frac{a^3}{c^3}\{(\alpha+\beta)^3 - 3\alpha\beta(\alpha+\beta)\}$$

$$= \frac{a^3}{c^3}\{-\frac{b^3}{a^3} - 3\frac{c}{a}(-\frac{b}{a})\} = \frac{a^3}{c^3}\ \frac{3abc-b^3}{a^3}$$

$$= \frac{3abc-b^3}{c^3}$$

এবং গুণফল $= \dfrac{1}{\alpha^3}.\dfrac{1}{\beta^3} = \dfrac{1}{\alpha^3\beta^3} = \dfrac{a^3}{c^3}$

$\therefore$ নির্ণেয় সমীকরণ,

$$x^2 - \frac{3abc-b^3}{c^3}x + \frac{a^3}{c^3} = 0$$

$\therefore\ c^3x^2 - (3abc-b^3)x + a^3 = 0$

5(b) এমন একটি সমীকরণ নির্ণয় কর যার মূল দুইটি যথাক্রমে $x^2 - 2bx + b^2 - a^2 = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয়ের সমষ্টি এবং অনমশন্ন ফলের ধনাত্মক মান হবে। [রা.'০৩; য.'০৪,'০৮,'১২; ব.'০৮; কু.'০১]

সমাধান : ধরি, প্রদত্ত সমীকরণের

$\therefore\ \alpha+\beta=2b$ এবং $\alpha\beta=b^2-a^2$

প্রশ্নমতে, নির্ণেয় সমীকরণের মূলদ্বয় $\alpha+\beta$ এবং $|\alpha-\beta|$

এখন, $|\alpha-\beta|=\sqrt{(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta}$

$=\sqrt{4b^2-4(b^2-a^2)}$

$=\sqrt{4b^2-4b^2+4a^2}=\sqrt{4a^2}$

$=2a$, যখন $a>0$

$=-2a$, যখন $a<0$

$\therefore$ নির্ণেয় সমীকরণ,

$x^2-\{(\alpha+\beta)+|\alpha-\beta|\}x+(\alpha+\beta)|\alpha-\beta|=0$

$\Rightarrow x^2-(2b+2a)x+2b.2a=0$, যখন $a>0$

$\therefore\ x^2-2(a+b)x+4ab=0$ (Ans.)

আবার, $x^2-(2b-2a)x+2b.(-2a)=0$, যখন $a<0$

$\Rightarrow x^2+2(a-b)x-4ab=0$

5(c) এরূপ সমীকরণ নির্ণয় কর যার মূল দুইটি $17x^2-3x+14=0$ সমীকরণের মূলদ্বয়ের যোগফল এবং গুণফল। [চ.'০২]

সমাধান: ধরি, প্রদত্ত সমীকরণের মূলদ্বয় α এবং β.

$\therefore\ \alpha+\beta=\dfrac{3}{17}$ এবং $\alpha\beta=\dfrac{14}{17}$

প্রশ্নমতে, নির্ণেয় সমীকরণের মূলদ্বয় $\alpha+\beta$ এবং $\alpha\beta$

$\therefore$ নির্ণেয় সমীকরণ,

$x^2-(\alpha+\beta+\alpha\beta)x+(\alpha+\beta)\alpha\beta=0$

$\Rightarrow x^2-(\dfrac{3}{17}+\dfrac{14}{17})x+\dfrac{3}{17}.\dfrac{14}{17}=0$

$\Rightarrow x^2-\dfrac{17}{17}x+\dfrac{42}{289}=0$

$\therefore\ 289(x^2-x)+42=0$ (Ans.)

5(d) $7x^2-5x-3=0$ সমীকরণের মূলদ্বয় α, β হলে $\dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{2}{\beta}$ এবং $\dfrac{1}{\beta}+\dfrac{2}{\alpha}$ মূল বিশিষ্ট সমীকরণ নির্ণয় কর। [কুয়েট'০৪-০৫]

সমাধান: দেওয়া আছে, $7x^2-5x-3=0$ সমীকরণের মূলদ্বয় α এবং β

$\therefore\ \alpha+\beta=\dfrac{5}{7}$, $\alpha\beta=-\dfrac{3}{7}$

$\dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{2}{\beta}$ এবং $\dfrac{1}{\beta}+\dfrac{2}{\alpha}$ মূলদ্বয়ের সমষ্টি

$=(\dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{1}{\beta})+2(\dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{1}{\beta})=3(\dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{1}{\beta})$

$=3\dfrac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}=3.\ \dfrac{5}{7}(-\dfrac{7}{3})=-5$

এবং গুণফল $=(\dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{2}{\beta})(\dfrac{1}{\beta}+\dfrac{2}{\alpha})$

$=\dfrac{1}{\alpha\beta}+2(\dfrac{1}{\alpha^2}+\dfrac{1}{\beta^2})+4\dfrac{1}{\alpha\beta}$

$=5\dfrac{1}{\alpha\beta}+2(\dfrac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha^2\beta^2})$

$=5(-\dfrac{7}{3})+2\dfrac{(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta}{\alpha^2\beta^2}$

$=-\dfrac{35}{3}+2\{(\dfrac{5}{7})^2-2(-\dfrac{3}{7})\}.(-\dfrac{7}{3})^2$

$=-\dfrac{35}{3}+2\{\dfrac{25}{49}+\dfrac{6}{7}\}.\dfrac{49}{9}$

$=-\dfrac{35}{3}+2\dfrac{25+42}{49}.\dfrac{49}{9}$

$=-\dfrac{35}{3}+2\dfrac{67}{9}=\dfrac{-105+134}{9}=\dfrac{29}{9}$

$\therefore$ নির্ণেয় সমীকরণ, $x^2-(-5)x+\dfrac{29}{9}=0$

$\Rightarrow 9x^2+45x+29=0$

5(e) $x^2+bx+c=0$ সমীকরণের মূলদ্বয় α, β হলে $(\alpha+\beta)^2$ এবং $(\alpha-\beta)^2$ মূল বিশিষ্ট সমীকরণ নির্ণয় কর এবং b, c এর মাধ্যমে $(\alpha+b)^{-4}+(\beta+b)^{-4}$ এর মান নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ দেওয়া আছে, $x^2 + bx + c = 0$

সমীকরণের মূলদ্বয় α এবং β

$\therefore \alpha + \beta = -b, \alpha\beta = c$

$(\alpha+\beta)^2$ এবং $(\alpha-\beta)^2$ মূলদ্বয়ের সমষ্টি

$= (\alpha+\beta)^2 + (\alpha-\beta)^2$

$= (-b)^2 + (\alpha+\beta)^2 - 4\alpha\beta$

$= b^2 + b^2 - 4c = 2b^2 - 4c$

এবং গুণফল $= (\alpha+\beta)^2(\alpha-\beta)^2$

$= b^2\{(\alpha+\beta)^2 - 4\alpha\beta\} = b^2(b^2-4c)$

$\therefore$ নির্ণেয় সমীকরণ,

$x^2 - 2(b^2-2c)x + b^2(b^2-4c) = 0$ (Ans.)

দ্বিতীয় অংশ : $x^2 + bx + c = 0$ সমীকরণের একটি মূল α বলে, $\alpha^2 + b\alpha + c = 0$

$\Rightarrow \alpha(\alpha+b) = -c \Rightarrow \alpha + b = -\frac{c}{\alpha}$

$\therefore (\alpha+b)^{-4} = \left(-\frac{c}{\alpha}\right)^{-4} = \left(-\frac{\alpha}{c}\right)^4 = \frac{\alpha^4}{c^4}$

অনুরূপভাবে আমরা পাই, $(\beta+b)^{-4} = \frac{\beta^4}{c^4}$

$\therefore (\alpha+b)^{-4} + (\beta+b)^{-4} = \frac{\alpha^4}{c^4} + \frac{\beta^4}{c^4}$

$= \frac{1}{c^4}(\alpha^4+\beta^4) = \frac{1}{c^4}\{(\alpha^2+\beta^2)^2 - 2\alpha^2\beta^2\}$

$= \frac{1}{c^4}[\{(\alpha+\beta)^2 - 2\alpha\beta\}^2 - 2c^2]$

$= \frac{1}{c^4}[\{b^2-2c\}^2 - 2c^2]$

$= \frac{1}{c^4}(b^4 - 4b^2c + 4c^2 - 2c^2)$

$= \frac{1}{c^4}(b^4 - 4b^2c + 2c^2)$

5(f) যদি $px^2 + qx - p = 0$ এর মূল দুইটি α, β হয়, তাহলে প্রমাণ কর যে, $(p\alpha+q)(p\beta+q) = -p^2$ এবং $p\alpha+q$, $p\beta+q$ মূলবিশিষ্ট সমীকরণ নির্ণয় কর। [য.'১০]

সমাধান ঃ প্রদত্ত সমীকরণ $px^2 + qx - p = 0$ এর মূল দুইটি α, β বলে, $\alpha+\beta = -\frac{q}{p}, \alpha\beta = \frac{-q}{q} = -1$

আবার, $p\alpha^2 + q\alpha - p = 0 \Rightarrow \alpha(p\alpha+q) = p$

$\Rightarrow p\alpha + q = \frac{p}{\alpha}$ এবং এরূপে, $p\beta + q = \frac{p}{\beta}$

এখন, L.H.S. $= (p\alpha+q)(p\beta+q) = \frac{p}{\alpha} \times \frac{p}{\beta}$

$= \frac{p^2}{\alpha\beta} = \frac{p^2}{-1} = -p =$ R.H.S.

আবার, $p\alpha+q$; $p\beta+q$ মূলবিশিষ্ট সমীকরণ

$x^2 - (p\alpha+q+p\beta+q)x + (p\alpha+q)(p\beta+q) = 0$

$\Rightarrow x^2 - \{p(\alpha+\beta) + 2q\}x + p^2\alpha\beta + pq(\alpha+\beta) + q^2 = 0$

$\Rightarrow x^2 - \{p(-\frac{q}{p}) + 2q\}x + p^2(-1) + pq(-\frac{q}{p}) + q^2 = 0$

$\Rightarrow x^2 - \{-q+2q\}x - p^2 - q^2 + q^2 = 0$

$\therefore x^2 - qx - p^2 = 0$ (Ans.)

5(g) $2x^2 + 3x + 5 = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় α এবং β হলে, $\frac{1}{\alpha^3}$ এবং $\frac{1}{\beta^3}$ দ্বারা গঠিত সমীকরণ নির্ণয় কর। [বুয়েট'০৫-০৬]

সমাধান ঃ দেওয়া আছে, $2x^2 + 3x + 5 = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় α এবং β

$\therefore \alpha+\beta = -\frac{3}{2}, \alpha\beta = \frac{5}{2}$

$\frac{1}{\alpha^3}$ এবং $\frac{1}{\beta^3}$ মূলদ্বয়ের সমষ্টি $= \frac{1}{\alpha^3} + \frac{1}{\beta^3}$

$= \frac{\alpha^3+\beta^3}{\alpha^3\beta^3} = \frac{(\alpha+\beta)^3 - 3\alpha\beta(\alpha+\beta)}{\alpha^3\beta^3}$

$= \frac{(-3/2)^3 - 3(5/2)(-3/2)}{(5/2)^3}$

$= \frac{8}{125}(-\frac{27}{8} + \frac{45}{4}) = \frac{8}{125}(\frac{-27+90}{8}) = \frac{63}{125}$

এবং গুণফল $= \frac{1}{\alpha^3\beta^3} = (\frac{2}{5})^3 = \frac{8}{125}$

$\therefore$ নির্ণেয় সমীকরণ , $x^2 - (\frac{63}{125})x + \frac{8}{125} = 0$

$\Rightarrow 125x^2 - 63x + 8 = 0$

5(h) যদি $x^2 + 2bx + c = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় α , β হয়, তবে α^2 ও β^2 সম্বলিত সমীকরণটি নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ দেওয়া আছে , $x^2 + 2bx + c = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় α এবং β

$\therefore \alpha + \beta = -\frac{2b}{1} = -2b$, $\alpha\beta = \frac{c}{1} = c$

α^2 ও β^2 মূলদ্বয়ের সমষ্টি $= \alpha^2 + \beta^2$

$= (\alpha+\beta)^2 - 2\alpha\beta = (-2b)^2 - 2c = 4b^2 - 2c$

এবং গুণফল $= \alpha^2\beta^2 = c^2$

$\therefore$ নির্ণেয় সমীকরণ, $x^2 - (4b^2 - 2c)x + c^2 = 0$

6(a) চতুর্থঘাত বিশিষ্ট সমীকরণ গঠন কর যার দুইটি মূল যথাক্রমে 2 , 3 এবং বাকী মূল $x^2 + 4x + 5 = 0$ সমীকরণের মূল। [বুয়েট'০২-০৩]

সমাধান ঃ 2 এবং 3 মূল বিশিষ্ট সমীকরণ

$x^2 - (2+3)x + 2.3 = 0$

$\Rightarrow x^2 - 5x + 6 = 0$

$\therefore$ চতুর্থঘাত বিশিষ্ট সমীকরণ ,

$(x^2 - 5x + 6)(x^2 + 4x + 5) = 0$

$\Rightarrow x^4 + 4x^3 + 5x^2 - 5x^3 - 20x^2 - 25x + 6x^2 + 24x + 30 = 0$

$\therefore x^4 - x^3 - 9x^2 - x + 30 = 0$

6(b) যদি α ও β অসমান হয় অথচ $\alpha^2 = 5\alpha - 3$ এবং $\beta^2 = 5\beta - 3$ হয় তবে $\frac{\alpha}{\beta}$ এবং $\frac{\beta}{\alpha}$ মূল বিশিষ্ট সমীকরণ নির্ণয় কর। [বুয়েট'০০-০১]

সমাধান ঃ দেওয়া আছে ,

$\alpha^2 = 5\alpha - 3 \cdots$ (i) এবং $\beta^2 = 5\beta - 3 \cdots$ (ii)

(i) – (ii) $\Rightarrow \alpha^2 - \beta^2 = 5(\alpha - \beta)$

$\Rightarrow (\alpha - \beta)(\alpha + \beta) = 5(\alpha - \beta)$

$\Rightarrow \alpha + \beta = 5 \; [\because \alpha \neq \beta]$

(i) + (ii) $\Rightarrow \alpha^2 + \beta^2 = 5(\alpha + \beta) - 6$

$\Rightarrow (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta = 5.5 - 6$

$\Rightarrow 25 - 2\alpha\beta = 25 - 6 \quad \therefore \alpha\beta = 3$

$\therefore$ নির্ণেয় সমীকরণ , [কুয়েট'০৬-০'

$x^2 - (\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha})x + \frac{\alpha}{\beta}.\frac{\beta}{\alpha} = 0$

$\Rightarrow x^2 - \frac{\alpha^2 + \beta^2}{\alpha\beta}x + 1 = 0$

$\Rightarrow x^2 - \frac{(\alpha+\beta)^2 - 2\alpha\beta}{\alpha\beta}x + 1 = 0$

$\Rightarrow x^2 - \frac{25-6}{3}x + 1 = 0$

$\therefore 3x^2 - 19x + 3 = 0$

7(a) $ax^2 + bx + c = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় α , β হলে $cx^2 - 2bx + 4a = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয়কে α , β এর মাধ্যমে প্রকাশ কর।

[চ.'০৬; দি.'১০; রা.'১১]

সমাধান ঃ দেওয়া আছে , $ax^2 + bx + c = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় α এবং β

$\therefore \alpha + \beta = -\frac{b}{a} \Rightarrow b = -a(\alpha + \beta)$ এবং

$\alpha\beta = \frac{c}{a} \Rightarrow c = a\alpha\beta$

এখন , $cx^2 - 2bx + 4a = 0$

$\Rightarrow a\alpha\beta x^2 - 2\{-a(\alpha + \beta)\}x + 4a = 0$

$\Rightarrow \alpha\beta x^2 + 2\alpha x + 2\beta x + 4 = 0$

$\Rightarrow \alpha x(\beta x + 2) + 2(\beta x + 2) = 0$

$\Rightarrow (\alpha x + 2)(\beta x + 2) = 0 \quad \therefore x = -\dfrac{2}{\alpha}, -\dfrac{2}{\beta}$

অতএব, $cx^2 - 2bx + 4a = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় $-\dfrac{2}{\alpha}$ এবং $-\dfrac{2}{\beta}$

7(b) $ax^2 + bx + c = 0$ **সমীকরণের মূলদ্বয় α, β হলে $ac(x^2 + 1) - (b^2 - 2ac)x = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় α, β এর মাধ্যমে প্রকাশ কর।**

[চ.'০৯,'১৩; কুয়েট'১২-১৩]

সমাধান ঃ দেওয়া আছে, $ax^2 + bx + c = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় α এবং β

$\therefore \alpha + \beta = -\dfrac{b}{a} \Rightarrow b = -a(\alpha + \beta)$ এবং

$\alpha\beta = \dfrac{c}{a} \Rightarrow c = a\alpha\beta$

এখন, $ac(x^2 + 1) - (b^2 - 2ac)x = 0$

$\Rightarrow acx^2 - (b^2 - 2ac)x + ac = 0$

$\Rightarrow a^2\alpha\beta x^2 - \{a^2(\alpha + \beta)^2 - 2a^2\alpha\beta\}x + a^2\alpha\beta = 0$

$\Rightarrow \alpha\beta x^2 - \{\alpha^2 + \beta^2 + 2\alpha\beta - 2\alpha\beta\}x + \alpha\beta = 0$

$\Rightarrow \alpha\beta x^2 - \alpha^2 x - \beta^2 x + \alpha\beta = 0$

$\Rightarrow \alpha x(\beta x - \alpha) - \beta(\beta x - \alpha) = 0$

$\Rightarrow (\beta x - \alpha)(\alpha x - \beta) = 0 \Rightarrow x = \dfrac{\alpha}{\beta}, \dfrac{\beta}{\alpha}$

$\therefore ac(x^2 + 1) - (b^2 - 2ac)x = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় $\dfrac{\alpha}{\beta}$ এবং $\dfrac{\beta}{\alpha}$

7(c) $x^2 - bx + c = 0$ **সমীকরণের মূলদ্বয় α, β এবং $x^2 - cx + b = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় γ, δ হলে এরূপ সমীকরণ নির্ণয় কর যার মূলদ্বয় $\dfrac{1}{\alpha\gamma} + \dfrac{1}{\beta\delta}$ এবং $\dfrac{1}{\alpha\delta} + \dfrac{1}{\beta\gamma}$ হয়।**

প্রমাণ ঃ $x^2 - bx + c = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় α ও β হলে, $\alpha + \beta = b$ এবং $\alpha\beta = c$

আবার, $x^2 - cx + b = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় γ, δ হলে, $\gamma + \delta = c$ এবং $\gamma\delta = b$

$\dfrac{1}{\alpha\gamma} + \dfrac{1}{\beta\delta}$ এবং $\dfrac{1}{\alpha\delta} + \dfrac{1}{\beta\gamma}$ মূলদ্বয়ের সমষ্টি

$= \dfrac{1}{\alpha\gamma} + \dfrac{1}{\beta\delta} + \dfrac{1}{\alpha\delta} + \dfrac{1}{\beta\gamma}$

$= (\dfrac{1}{\alpha\gamma} + \dfrac{1}{\alpha\delta}) + (\dfrac{1}{\beta\delta} + \dfrac{1}{\beta\gamma})$

$= \dfrac{1}{\alpha}(\dfrac{\gamma + \delta}{\gamma\delta}) + \dfrac{1}{\beta}(\dfrac{\gamma + \delta}{\gamma\delta})$

$= (\dfrac{\alpha + \beta}{\alpha\beta})(\dfrac{\gamma + \delta}{\gamma\delta}) = \dfrac{b}{c}.\dfrac{c}{b} = 1$

এবং গুণফল $= (\dfrac{1}{\alpha\gamma} + \dfrac{1}{\beta\delta})(\dfrac{1}{\alpha\delta} + \dfrac{1}{\beta\gamma})$

$= \dfrac{\beta\delta + \alpha\gamma}{\alpha\beta\gamma\delta} \times \dfrac{\beta\gamma + \alpha\delta}{\alpha\beta\gamma\delta}$

$= (\dfrac{1}{\alpha\beta}\dfrac{1}{\gamma\delta})(\beta^2\gamma\delta + \alpha\beta\delta^2 + \alpha\beta\gamma^2 + \alpha^2\gamma\delta)$

$= \dfrac{1}{cb}\{\alpha\beta(\gamma^2 + \delta^2) + \gamma\delta(\alpha^2 + \beta^2)\}$

$= \dfrac{1}{bc}[c\{(\gamma + \delta)^2 - 2\gamma\delta\} + b\{(\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta\}]$

$= \dfrac{1}{bc}\{c(c^2 - 2b) + b(b^2 - 2c)\}$

$= \dfrac{1}{bc}(c^3 - 2bc + b^3 - 2bc)$

$= \dfrac{1}{bc}(b^3 + c^3 - 4bc)$

$\therefore$ নির্ণেয় সমীকরণ,

$x^2 - 1.x + \dfrac{1}{bc}(b^3 + c^3 - 4bc) = 0$

$\Rightarrow bc(x^2 - x) + b^3 + c^3 - 4bc = 0$

7(d) $x^2 + ax + \frac{1}{4}(a^2 - b^2) = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় α, β হলে দেখাও যে, $x^2 + (a \pm b)x \pm ab = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় $\alpha + \beta, \alpha - \beta$ হবে। [রা.'০২]

প্রমাণ ঃ দেওয়া আছে, $x^2 + ax + \frac{1}{4}(a^2 - b^2) = 0$

সমীকরণের মূলদ্বয় α এবং β.

$\therefore \ \alpha + \beta = -a$ এবং

$\alpha\beta = \frac{1}{4}(a^2 - b^2) \Rightarrow a^2 - 4\alpha\beta = b^2$

$\Rightarrow (\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta = b^2$

$\Rightarrow (\alpha - \beta)^2 = b^2 \quad \therefore \alpha - \beta = \mp b$

এখন, $x^2 + (a \pm b)x \pm ab = 0$

$\Rightarrow x^2 + \{a - (\mp b)\} - a(\mp b) = 0$

$\Rightarrow x^2 + \{-(\alpha + \beta) - (\alpha - \beta)\}x - \{-(\alpha + \beta)(\alpha - \beta)\} = 0$

$\Rightarrow x^2 - \{(\alpha + \beta) + (\alpha - \beta)\}x + (\alpha + \beta)(\alpha - \beta) = 0$

$\therefore \ x^2 + (a \pm b)x \pm ab = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় $\alpha + \beta$ এবং $\alpha - \beta$ (Proved)

7(e) যদি $\alpha \pm \sqrt{\beta}$ রাশি দুইটি $x^2 + px + q = 0$ সমীকরণের মূল হয়, তবে দেখাও যে, $(p^2 - 4q)(p^2x^2 + 4px) - 16q = 0$ সমীকরণের মূল দুইটি হবে $\frac{1}{\alpha} \pm \frac{1}{\sqrt{\beta}}$. [চুয়েট'০৭-০৮]

প্রমাণ : দেওয়া আছে, $x^2 + px + q = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় $\alpha + \sqrt{\beta}$ ও $\alpha - \sqrt{\beta}$.

$\therefore \ \alpha + \sqrt{\beta} + \alpha - \sqrt{\beta} = -p$

$\Rightarrow 2\alpha = -p \Rightarrow p = 2\alpha$ এবং

$(\alpha + \sqrt{\beta})(\alpha - \sqrt{\beta}) = q \Rightarrow q = \alpha^2 - \beta$

এখন, $(p^2 - 4q)(p^2x^2 + 4px) - 16q = 0$

$\Rightarrow \{(-2\alpha)^2 - 4(\alpha^2 - \beta)\}\{(-2\alpha)^2 x^2 + 4(-2\alpha)x\} - 16(\alpha^2 - \beta) = 0$

$\Rightarrow (4\alpha^2 - 4\alpha^2 + 4\beta)(4\alpha^2x^2 - 8\alpha x) - 16(\alpha^2 - \beta) = 0$

$\Rightarrow 16\beta(\alpha^2x^2 - 2\alpha x) - 16(\alpha^2 - \beta) = 0$

$\Rightarrow \beta\alpha^2x^2 - 2\alpha\beta x - \alpha^2 + \beta = 0$

$$\Rightarrow x = \frac{2\alpha\beta \pm \sqrt{4\alpha^2\beta^2 - 4\alpha^2\beta(\beta - \alpha^2)}}{2\alpha^2\beta}$$

$$= \frac{2\alpha\beta \pm \sqrt{4\alpha^2\beta^2 - 4\alpha^2\beta^2 + 4\alpha^4\beta}}{2\alpha^2\beta}$$

$$= \frac{2\alpha\beta \pm \sqrt{4\alpha^4\beta}}{2\alpha^2\beta} = \frac{2\alpha\beta \pm 2\alpha^2\sqrt{\beta}}{2\alpha^2\beta}$$

$$= \frac{1}{\alpha} \pm \frac{1}{\sqrt{\beta}}$$

$\therefore \ (p^2 - 4q)(p^2x^2 + 4px) - 16q = 0$

সমীকরণের মূল দুইটি হবে $\frac{1}{\alpha} \pm \frac{1}{\sqrt{\beta}}$

8(a) $x^2 + px + q = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় α, β এবং $x^2 + px + q = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় $\alpha + 4, \beta + 4$ হলে p, q এর মান নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ দেওয়া আছে, $x^2 + px + q = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় α, β এবং $2x^2 + 10px + q = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় $\alpha + 4, \beta + 4$

$\therefore \ \alpha + \beta = -p \cdots\cdots(i), \ \alpha\beta = q \cdots\cdots(ii),$

$\alpha + 4 + \beta + 4 = -5p$

$\Rightarrow \alpha + \beta = -5p - 8 \cdots\cdots(iii)$ এবং

$(\alpha + 4)(\beta + 4) = \frac{q}{2}$

$\Rightarrow \alpha\beta + 4(\alpha + \beta) + 16 = \frac{q}{2}$

$\Rightarrow q + 4(-p) + 16 = \frac{q}{2}$ [(i)&(ii) হতে]

$\Rightarrow \frac{q}{2} - 4p + 16 = 0 \Rightarrow q = 2(4p - 16) \cdots (iv)$

(i)& (iii) হতে আমরা পাই , $-p = -5p - 8$

$\Rightarrow 4p = -8 \;\therefore\; p = -2$

(iv) হতে আমরা পাই , $q = 2(-8 - 16) = -48$

$\therefore\; p = -2$ এবং $q = -48$ (Ans.)

8(b) $x^2 - (a+b)x + ab = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় $x^2 + px + q = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয়ের অর্ধেক হলে p ও q এর মান a ও b এর মাধ্যমে প্রকাশ কর।

সমাধান ঃ মনে করি, $x^2 + px + q = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় α এবং β

$\therefore\; \alpha + \beta = -p,\; \alpha\beta = q$

প্রশ্নানুসারে, $x^2 - (a+b)x + ab = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় 2α এবং 2β

$\therefore\; 2(\alpha + \beta) = a + b \Rightarrow 2(-p) = a + b$

$\therefore\; p = -\frac{1}{2}(a + b)$ এবং $2\alpha . 2\beta = ab$

$\Rightarrow 4\alpha\beta = ab \Rightarrow 4q = ab \;\therefore\; q = \frac{1}{4}ab$

8(c) $x^2 - bx + c = 0$ ও $x^2 - cx + b = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয়ের পার্থক্য একটি ধ্রুবরাশি হলে প্রমাণ কর যে, $b + c + 4 = 0$ [চ.'০১; ব.'০৪; য.'০৮,'১৩; সি.'০৯,'১২; কু.'০৯,'১২; ঢা.'১০; টেক্সটাইল ০৩-০৪]

প্রমাণ ঃ মনে করি , $x^2 - bx + c = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় α এবং β

$\therefore\; \alpha + \beta = b,\; \alpha\beta = c$

প্রশ্নানুসারে, $x^2 - cx + b = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় $\alpha + k$ এবং $\beta + k$, যেখানে k ধ্রুবক ।

$\therefore\; \alpha + k + \beta + k = c \Rightarrow \alpha + \beta + 2k = c$

$\Rightarrow b + 2k = c \;[\because \alpha + \beta = b]$

$\Rightarrow k = \frac{1}{2}(c - b) \cdots (i)$ এবং $(\alpha + k)(\beta + k) = b$

$\Rightarrow \alpha\beta + \alpha k + \beta k + k^2 = b$

$\Rightarrow \alpha\beta + k(\alpha + \beta) + k^2 = b \Rightarrow c + kb + k^2 = b$

$\Rightarrow c + \frac{1}{2}(c - b).b + \frac{1}{4}(c - b)^2 = b$ [(i) দ্বারা]

$\Rightarrow 4c + 2bc - 2b^2 + c^2 + b^2 - 2bc - 4b = 0$

$\Rightarrow 4c - b^2 + c^2 - 4b = 0$

$\Rightarrow 4(c - b) + (c - b)(c + b) = 0$

$\Rightarrow (c - b)(b + c + 4) = 0$

$\therefore\; b + c + 4 = 0 \;[\because b \neq c]$ (Proved)

8(d) $a_1x^2 + b_1x + c_1 = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয়ের অনুপাত $a_2x^2 + b_2x + c_2 = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয়ের অনুপাতের সমান হলে দেখাও যে , $\frac{b_1^2}{b_2^2} = \frac{a_1c_1}{a_2c_2}$ [য.'০৩]

প্রমাণ ঃ মনে করি, $a_1x^2 + b_1x + c_1 = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় α, β এবং $a_2x^2 + b_2x + c_2 = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় γ, δ .

প্রশ্নমতে, $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta} \Rightarrow \frac{\alpha + \beta}{\alpha - \beta} = \frac{\gamma + \delta}{\gamma - \delta}$

$$\Rightarrow \frac{(\alpha + \beta)^2}{(\gamma + \delta)^2} = \frac{(\alpha - \beta)^2}{(\gamma - \delta)^2}$$

$$\Rightarrow \frac{(\alpha + \beta)^2}{(\gamma + \delta)^2} = \frac{(\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta}{(\gamma + \delta)^2 - 4\gamma\delta}$$

$$= \frac{(\alpha + \beta)^2 - \{(\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta\}}{(\gamma + \delta)^2 - \{(\gamma + \delta)^2 - 4\gamma\delta\}}$$

$$\Rightarrow \frac{(\alpha + \beta)^2}{(\gamma + \delta)^2} = \frac{4\alpha\beta}{4\gamma\delta} = \frac{\alpha\beta}{\gamma\delta}$$

$$\Rightarrow \frac{(-b_1/a_1)^2}{(-b_2/a_2)^2} = \frac{c_1/a_1}{c_2/a_2}$$

$$\Rightarrow \frac{b_1^2/a_1^2}{b_2^2/a_2^2} = \frac{c_1/a_1}{c_2/a_2} \Rightarrow \frac{b_1^2}{a_1^2} \times \frac{a_2^2}{b_2^2} = \frac{c_1}{a_1} \times \frac{a_2}{c_2}$$

$$\Rightarrow \frac{b_1^2}{b_2^2} = \frac{c_1}{a_1} \times \frac{a_2}{c_2} \times \frac{a_1^2}{a_2^2} \;\therefore\; \frac{b_1^2}{b_2^2} = \frac{a_1c_1}{a_2c_2}$$

9.(a) $ax^2 + bx + b = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয়ের অনুপাত m : n হলে দেখাও যে,

$\sqrt{\frac{m}{n}}+\sqrt{\frac{n}{m}}+\sqrt{\frac{b}{a}} = 0$ [কু.'০৭,'১০; ব.'০৩, '০৯; ঢা. '০৮; চ. '০৯; রা.,সি.,দি.'১২]

প্রমাণ ঃ মনে করি , $ax^2 + bx + b = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় $m\alpha$ এবং $n\alpha$.

$\therefore\ (m+n)\alpha = -\frac{b}{a} \Rightarrow m+n = -\frac{b}{a\alpha}$ এবং

$mn\alpha^2 = \frac{b}{a} \Rightarrow mn = \frac{b}{a\alpha^2}$

এখন , $\sqrt{\frac{m}{n}}+\sqrt{\frac{n}{m}}+\sqrt{\frac{b}{a}} = \frac{\sqrt{m}}{\sqrt{n}}+\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{m}}+\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}}$

$= \frac{m+n}{\sqrt{mn}}+\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}} = -\frac{b}{a\alpha}\times\sqrt{\frac{a\alpha^2}{b}}+\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}}$

$= -\frac{b}{a\alpha}\times\frac{\alpha\sqrt{a}}{\sqrt{b}}+\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}} = -\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}}+\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}} = 0$

$\therefore\ \sqrt{\frac{m}{n}}+\sqrt{\frac{n}{m}}+\sqrt{\frac{b}{a}} = 0$ (Showed)

9(b) $27x^2 + 6x - (p+2) = 0$ সমীকরণের একটি মূল অপরটির বর্গ হলে, p এর মান নির্ণয় কর। [রা.'০৫,'১২ ;ব.'০২, '০৯;ঢা.'০৪; কু.'০৫; চ.'০৭,'১২; য. '০৯,'১৩; সি.'১১; চুয়েট'০৮-০৯]

সমাধান ঃ মনে করি , $27x^2 + 6x - (p+2) = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় α এবং α^2 .

$\therefore\ \alpha + \alpha^2 = -\frac{2}{9}$ ……(i) এবং

$\alpha.\alpha^2 = -\frac{p+2}{27} \Rightarrow \alpha^3 = -\frac{p+2}{27}$ ……(ii)

(i) হতে আমরা পাই, $(\alpha+\alpha^2)^3 = (-\frac{2}{9})^3$

$\Rightarrow \alpha^3 + \alpha^6 + 3\alpha^3(\alpha+\alpha^2) = -\frac{8}{729}$

$\Rightarrow -\frac{p+2}{27} + (-\frac{p+2}{27})^2 + 3(-\frac{p+2}{27})(-\frac{2}{9}) = -\frac{8}{729}$

$\Rightarrow -27(p+2) + p^2 + 4p + 4 + 18(p+2) = -8$

$\Rightarrow p^2 + 4p + 4 - 9(p+2) + 8 = 0$

$\Rightarrow p^2 + 4p + 4 - 9p - 18 + 8 = 0$

$\Rightarrow p^2 - 5p - 6 = 0 \Rightarrow (p-6)(p+1) = 0$

$\therefore\ p = -1, 6$ (Ans.)

9(c) $x^2 + px + q = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয়ের পার্থক্য 1 হলে দেখাও যে, $p^2 + 4q^2 = (1+2q)^2$

[ঢা.'০২,'০৭ ; চ.'০৫; রা.'০৬,'১৩; ব.'০৮]

প্রমাণ ঃ মনে করি, $x^2 + px + q = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় α এবং $\alpha + 1$

$\therefore\ \alpha + \alpha + 1 = -p \Rightarrow 2\alpha = -p - 1$

$\Rightarrow \alpha = \frac{1}{2}(-p-1)$ এবং

$\alpha(\alpha+1) = q \Rightarrow \alpha^2 + \alpha = q$

$\Rightarrow \frac{1}{4}(p+1)^2 - \frac{1}{2}(p+1) = q$

$\Rightarrow p^2 + 2p + 1 - 2p - 2 = 4q \Rightarrow p^2 = 4q + 1$

এখন , L.H.S.= $p^2 + 4q^2 = 4q + 1 + 4q^2$

$= (2q)^2 + 2.2q.1 + 1^2 = (2q+1)^2$ = R.H.S.

9(d) k এর মান কত হলে, $(k^2-3)x^2 + 3kx + 3k + 1 = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় পরস্পর উল্টো হবে?

[ব.'০১;কু. '১০; বুয়েট'০৪-০৫]

প্রমাণ ঃ ধরি , $(k^2-3)x^2 + 3kx + 3k + 1 = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় α এবং α^{-1}

$\therefore$ মূলদ্বয়ের গুণফল , $\alpha\alpha^{-1} = \frac{3k+1}{k^2-3}$

$\Rightarrow 1 = \frac{3k+1}{k^2-3} \Rightarrow k^2 - 3 = 3k + 1$

$\Rightarrow k^2 - 3k - 4 = 0 \Rightarrow (k-4)(k+1) = 0$

$\therefore\ k = -1, 4$

9(e) $\frac{1}{x}+\frac{1}{p-x}=\frac{1}{q}$ **সমীকরণের মূলদ্বয়ের অন্তর r হলে p কে q ও r এর মাধ্যমে প্রকাশ কর ।**

[য.'০২; রা.'০৪; সি.'০৪,'০৮; ঢা.'০৯; চ.,দি.'১১]

সমাধান ঃ $\frac{1}{x}+\frac{1}{p-x}=\frac{1}{q}$

$\Rightarrow \frac{p-x+x}{x(p-x)}=\frac{1}{q} \Rightarrow pq = px - x^2$

$\Rightarrow x^2 - px + pq = 0$

এখন মনে করি, $x^2 - px + pq = 0$

সমীকরণের মূলদ্বয় α এবং $\alpha + r$.

$\therefore \alpha + \alpha + r = p \Rightarrow 2\alpha = p - r$

$\Rightarrow \alpha = \frac{1}{2}(p-r) \cdots\cdots (i)$ এবং

$\alpha(\alpha + r) = pq \Rightarrow \alpha^2 + r\alpha = pq$

$\Rightarrow \frac{1}{4}(p-r)^2 + \frac{1}{2}r(p-r) - pq = 0$

$\Rightarrow p^2 - 2pr + r^2 + 2pr - 2r^2 - 4pq = 0$

$\Rightarrow p^2 - 4pq - r^2 = 0$

$\therefore p = \frac{4q \pm \sqrt{16q^2 - 4.1.(-r^2)}}{2.1}$

$= \frac{4q \pm 2\sqrt{4q^2 + r^2}}{2} = 2q \pm \sqrt{4q^2 + r^2}$

9(f) $ax^2 + bx + c = 0$ **সমীকরণের একটি মূল অপরটির বর্গ হলে প্রমাণ কর যে,**

(i) $a^2c + ac^2 + b^3 = 3abc$ **[ঢা. '০৯]**

(ii) $c(a-b)^3 = a(c-b)^3$ **[চ.'০২; ব.'০৭]**

প্রমাণ ঃ মনে করি, $x^2 + bx + c = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় α এবং α^2

$\therefore \alpha + \alpha^2 = -\frac{b}{a} \cdots\cdots (i)$ এবং

$\alpha.\alpha^2 = \frac{c}{a} \Rightarrow \alpha^3 = \frac{c}{a} \cdots\cdots (ii)$

(i) হতে পাই, $(\alpha + \alpha^2)^3 = (-\frac{b}{a})^3$

$\Rightarrow \alpha^3 + \alpha^6 + 3\alpha^3(\alpha + \alpha^2) = -\frac{b^3}{a^3}$

$\Rightarrow \frac{c}{a} + (\frac{c}{a})^2 + 3\frac{c}{a}(-\frac{b}{a}) = -\frac{b^3}{a^3}$

$\Rightarrow ca^2 + c^2a - 3abc = -b^3$

$\Rightarrow a^2c + ac^2 + b^3 = 3abc$

(ii) $\frac{(a-b)^3}{(c-b)^3} = \frac{\left\{\frac{a}{a} - \frac{b}{a}\right\}^3}{\left\{\frac{c}{a} - \frac{b}{a}\right\}^3}$

$= \frac{(1+\alpha+\alpha^2)^3}{(\alpha^3+\alpha+\alpha^2)^3} = \frac{(1+\alpha+\alpha^2)^3}{\{\alpha(1+\alpha+\alpha^2)\}^3}$

$= \frac{(1+\alpha+\alpha^2)^3}{\alpha^3(1+\alpha+\alpha^2)^3} = \frac{1}{\alpha^3} = \frac{a}{c}$

$\therefore c(a-b)^3 = a(c-b)^3$

9(g) যদি $x^2 - px + q = 0$ **সমীকরণের মূলদ্বয় ক্রমিক পূর্ণ সংখ্যা হয়, তবে প্রমাণ কর যে,** $p^2 - 4q - 1 = 0$

[ঢা.'০৩,'১৩; দি.'০৯; ব. '১০; য.'১১]

প্রমাণ ঃ মনে করি, $x^2 - px + q = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় α এবং $\alpha + 1$

$\therefore \alpha + \alpha + 1 = p \Rightarrow 2\alpha = p - 1$

$\Rightarrow \alpha = \frac{1}{2}(p-1)$ এবং

$\alpha(\alpha + 1) = q \Rightarrow \alpha^2 + \alpha = q$

$\Rightarrow \frac{1}{4}(p-1)^2 + \frac{1}{2}(p-1) = q$

$\Rightarrow p^2 - 2p + 1 + 2p - 2 - 4q = 0$

$\Rightarrow p^2 - 4q - 1 = 0$

9(h) $2bx^2 + 2(a+b)x + 3a = 2b$ **সমীকরণের একটি মূল অপরটির দ্বিগুণ হলে দেখাও যে,** $a = 2b$ **অথবা,** $4a = 11b$ **.**

[রা.'০৪; চ.'১০]

প্রমাণ ঃ ধরি , $2bx^2 + 2(a + b)x + 3a = 2b$

$\Rightarrow 2bx^2 + 2(a + b)x + 3a - 2b = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় α এবং 2α.

$$\therefore \alpha + 2\alpha = -\frac{2(a+b)}{2b} \Rightarrow 3\alpha = -\frac{(a+b)}{b}$$

$$\Rightarrow \alpha = -\frac{(a+b)}{3b} \text{ এবং}$$

$$\alpha.2\alpha = \frac{3a-2b}{2b} \Rightarrow \alpha^2 = \frac{3a-2b}{4b}$$

$$\Rightarrow \left\{-\frac{a+b}{3b}\right\}^2 = \frac{3a-2b}{4b} \left[\because \alpha = -\frac{(a+b)}{3b}\right]$$

$\Rightarrow 4b(a + b)^2 = 9b^2(3a - 2b)$

$\Rightarrow 4(a^2 + 2ab + b^2) = 9b(3a - 2b)$

$\Rightarrow 4a^2 + 8ab + 4b^2 = 27ab - 18b^2$

$\Rightarrow 4a^2 - 19ab + 22b^2 = 0$

$\Rightarrow 4a^2 - 11ab - 8ab + 22b^2 = 0$

$\Rightarrow a(4a - 11b) - 2b(4a - 11b) = 0$

$\Rightarrow (a - 2b)(4a - 11b) = 0$

$\therefore a = 2b$ অথবা , $4a = 11b$

9(i) $ax^2 + bx + c = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয়ের অনুপাত 3 : 4 হলে, দেখাও যে, $12b^2 = 49ac$

[চ.'১১,'১৩ ; টেক্সটেইল'০৪-০৫]

প্রমাণ ঃ ধরি, প্রদত্ত সমীকরণের মূলদ্বয় 3α ও 4α।

তাহলে, $3\alpha + 4\alpha = -\frac{b}{a} \Rightarrow \alpha = -\frac{b}{7a} \cdots$(i)

এবং $3\alpha \times 4\alpha = \frac{c}{a} \Rightarrow 12\alpha^2 = \frac{c}{a}$

$\Rightarrow 12 \times \left(-\frac{b}{7a}\right)^2 = \frac{c}{a}$, [(i) দ্বারা]

$$\Rightarrow 12 \times \frac{b^2}{49a^2} = \frac{c}{a}$$

$\therefore 12b^2 = 49ac$

10(a) $x^2 - (1 + k^2)x + \frac{1}{2}(1 + k^2 + k^4) = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় α, β হলে দেখাও যে, $\alpha^2 + \beta^2 = k^2$

প্রমাণ ঃ $x^2 - (1 + k^2)x + \frac{1}{2}(1 + k^2 + k^4) = 0$

সমীকরণের মূলদ্বয় α এবং β বলে ,

$\alpha + \beta = 1 + k^2 \cdots\cdots$(i) এবং

$\alpha\beta = \frac{1}{2}(1 + k^2 + k^4) \cdots\cdots\cdots$(ii)

এখন, $\alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta$

$= (1 + k^2)^2 - 2\frac{1}{2}(1 + k^2 + k^4)$

$= 1 + 2k^2 + k^4 - 1 - k^2 - k^4$

$\therefore \alpha^2 + \beta^2 = k^2$ (Showed)

10(b) $\frac{h^2}{a^2} + \frac{k^2}{b^2} = 1$ হলে দেখাও যে, $(h^2 - a^2)x^2 - 2hkx + k^2 - b^2$ রাশিটি পূর্ণ বর্গ হবে। [সি.'০৪,'১০]

প্রমাণ ঃ $(h^2 - a^2)x^2 - 2hkx + k^2 - b^2$ রাশিটি পূর্ণবর্গ হলে, $(h^2 - a^2)x^2 - 2hkx + k^2 - b^2 = 0$ …(i) সমীকরণটির মূলদ্বয় সমান হবে এবং ফলে (i) সমীকরণের নিশ্চায়ক শূন্য হবে ।

$\therefore (-2hk)^2 - 4(k^2 - b^2)(h^2 - a^2) = 0$

$\Rightarrow 4h^2k^2 - 4(h^2k^2 - a^2k^2 - b^2h^2 + a^2b^2) = 0$

$\Rightarrow h^2k^2 - h^2k^2 + a^2k^2 + b^2h^2 - a^2b^2 = 0$

$$\Rightarrow b^2h^2 + a^2k^2 = a^2b^2 \Rightarrow \frac{b^2h^2}{a^2b^2} + \frac{a^2k^2}{a^2b^2} = 1$$

$$\therefore \frac{h^2}{a^2} + \frac{k^2}{b^2} = 1 \quad \text{(Showed)}$$

10(c) $mx^2 + nx + l = 0$ সমীকরণের মূল দুইটির অনুপাত r হলে দেখাও যে, $\frac{(r+1)^2}{r} = \frac{n^2}{ml}$

[ব.'০১; কু.'০৮, রুয়েল'১০-১১]

প্রমাণ ঃ মনে করি , $mx^2 + nx + l = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় α এবং $r\alpha$.

$\therefore\ \alpha + \alpha r = -\dfrac{n}{m} \Rightarrow \alpha = -\dfrac{n}{m(1+r)} \cdots$ (i) ,

$\alpha.\alpha r = \dfrac{l}{m} \Rightarrow \alpha^2 r = \dfrac{l}{m}$

$\Rightarrow r\left\{-\dfrac{n}{m(1+r)}\right\}^2 = \dfrac{l}{m} \Rightarrow r\dfrac{n^2}{m^2(1+r)^2} = \dfrac{l}{m}$

$\therefore\ \dfrac{(1+r)^2}{r} = \dfrac{n^2}{ml}$ (Showed)

10(d) $ax^2 + bx + c = 0$ **সমীকরণের মূলদ্বয়** α , β **এবং** $bx^2 + cx + a = 0$ **সমীকরণের মূলদ্বয়** γ , δ **হলে কি শর্তে** $\dfrac{\alpha}{\beta} = \dfrac{\gamma}{\delta}$ **হবে?** [প্র.ভ.প.৮৬]

সমাধান ঃ দেওয়া আছে , $ax^2 + bx + c = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় α , β এবং $bx^2 + cx + a = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় γ , δ

$\therefore\ \alpha + \beta = -\dfrac{b}{a}, \alpha\beta = \dfrac{c}{a}, \gamma + \delta = -\dfrac{c}{b}$ এবং

$\gamma\delta = \dfrac{a}{b}$

এখন , $\dfrac{\alpha}{\beta} = \dfrac{\gamma}{\delta} \Rightarrow \dfrac{\alpha+\beta}{\alpha-\beta} = \dfrac{\gamma+\delta}{\gamma-\delta}$

$\Rightarrow \dfrac{\alpha+\beta}{\sqrt{(\alpha+\beta)^2 - 4\alpha\beta}} = \dfrac{\gamma+\delta}{\sqrt{(\gamma+\delta)^2 - 4\gamma\delta}}$

$\Rightarrow (\alpha+\beta)\sqrt{(\gamma+\delta)^2 - 4\gamma\delta} = (\gamma+\delta)\sqrt{(\alpha+\beta)^2 - 4\alpha\beta}$

$\Rightarrow -\dfrac{b}{a}\sqrt{\left(-\dfrac{c}{b}\right)^2 - 4\dfrac{a}{b}} = -\dfrac{c}{b}\sqrt{\left(-\dfrac{b}{a}\right)^2 - 4\dfrac{c}{a}}$

$\Rightarrow \dfrac{b^2}{a^2}\left(\dfrac{c^2}{b^2} - 4\dfrac{a}{b}\right) = \dfrac{c^2}{b^2}\left(\dfrac{b^2}{a^2} - 4\dfrac{c}{a}\right)$

$\Rightarrow \dfrac{b^2}{a^2} \times \dfrac{c^2 - 4ab}{b^2} = \dfrac{c^2}{b^2} \times \dfrac{b^2 - 4ca}{a^2}$

$\therefore b^2(c^2 - 4ab) = c^2(b^2 - 4ca)$, ইহাই নির্ণেয় শর্ত ।

11(a) $x^2 + kx - 6k = 0$ **এবং** $x^2 - 2x - k = 0$ **সমীকরণদ্বয়ের একটি সাধারণ মূল থাকলে k এর মান নির্ণয় কর ।** [ঢা.'০০ ; চ.'০১;রা. '০১,'০৭; ব.'০৭]

সমাধান ঃ মনে করি , প্রদত্ত সমীকরণদ্বয়ের সাধারণ মূলটি α । তাহলে ,

$\alpha^2 + k\alpha - 6k = 0 \cdots\cdots (1)$ এবং

$\alpha^2 - 2\alpha - k = 0 \cdots\cdots (2)$

বজ্রগুণন প্রণালীর সাহায্যে আমরা পাই ,

$\dfrac{\alpha^2}{-k^2 - 12k} = \dfrac{\alpha}{-6k + k} = \dfrac{1}{-2-k}$

$\Rightarrow \dfrac{\alpha^2}{k^2 + 12k} = \dfrac{\alpha}{5k} = \dfrac{1}{k+2}$

$\therefore\ (5k)^2 = k(k+12)(k+2)$

$\Rightarrow k(k^2 + 14k + 24) - 25k^2 = 0$

$\Rightarrow k(k^2 + 14k + 24 - 25k) = 0$

$\Rightarrow k(k^2 - 11k + 24) = 0$

$\Rightarrow k(k-3)(k-8) = 0$

$\therefore\ k = 0 , 3 , 8$

11(b) $px^2 + qx + 1 = 0$ **এবং** $qx^2 + px + 1 = 0$ **সমীকরণদ্বয়ের একটি সাধারণ মূল থাকলে, দেখাও যে,** $p + q + 1 = 0$ [চ.'০৪; ব.'০৬,'১০ ; মা.বো.'০৯; দি.'১০; রা.'১১; সি.'১১; চুয়েট'০৩-০৪; রুয়েট'০৯-১০]

প্রমাণ ঃ ধরি, প্রদত্ত সমীকরণদ্বয়ের সাধারণ মূলটি α । তাহলে, $p\alpha^2 + q\alpha + 1 = 0$ এবং $q\alpha^2 + p\alpha + 1 = 0$

বজ্রগুণন প্রণালীর সাহায্যে আমরা পাই ,

$\dfrac{\alpha^2}{q-p} = \dfrac{\alpha}{q-p} = \dfrac{1}{p^2 - q^2}$

$\therefore\ (q-p)^2 = (q-p)(p^2 - q^2)$

$\Rightarrow (q-p)^2 - (q-p)(p-q)(p+q) = 0$

$\Rightarrow (q-p)^2 + (q-p)(q-p)(p+q) = 0$

$\Rightarrow (q-p)^2(1 + p + q) = 0$

এখানে, $p \neq q$. কারণ, $p = q$ হলে, প্রদত্ত সমীকরণদ্বয়ের উভয় মূলই সাধারণ হবে ।

$\therefore\ p+q+1=0$ (Proved)

11(c) $ax^2+bx+c=0$ ও $cx^2+bx+a=0$ **সমীকরণদ্বয়ের একটি সাধারণ মূল থাকলে দেখাও যে,** $c+a=\pm b$ [য.'০২; মা.বো.'০৯; ব., দি.'১৩]

প্রমাণঃ মনে করি, প্রদত্ত সমীকরণদ্বয়ের সাধারণ মূলটি α।

তাহলে, $a\alpha^2+b\alpha+c=0$ এবং

$$c\alpha^2+b\alpha+a=0$$

বজ্রগুণন প্রণালীর সাহায্যে আমরা পাই ,

$$\frac{\alpha^2}{ab-bc}=\frac{\alpha}{c^2-a^2}=\frac{1}{ab-bc}$$

$\therefore\ (c^2-a^2)^2=(ab-bc)(ab-bc)$

$\Rightarrow b(a-c)b(a-c)-(a-c)^2(a+c)^2=0$

$\Rightarrow (a-c)^2\{b^2-(a+c)^2\}=0$

এখানে, $a\neq c$. কারণ , $a=c$ হলে, প্রদত্ত সমীকরণদ্বয়ের উভয় মূলই সাধারণ হবে ।

$\therefore\ b^2-(a+c)^2=0\Rightarrow(a+c)^2=b^2$

$\therefore\ a+c=\pm b$ (Showed)

11(d) যে শর্তে $a_1x^2+b_1x+c_1=0$ **এবং** $a_2x^2+b_2x+c_2=0$ **সমীকরণদ্বয়ের একটি মূল সাধারণ হতে পারে তা নির্ণয় কর।** [সি.'০৩]

সমাধান ঃ মনে করি , প্রদত্ত সমীকরণদ্বয়ের সাধারণ মূলটি α । তাহলে ,

$a_1\alpha^2+b_1\alpha+c_1=0$ এবং

$a_2\alpha^2+b_2\alpha+c_2=0$

বজ্রগুণন প্রণালীর সাহায্যে আমরা পাই ,

$$\frac{\alpha^2}{b_1c_2-b_2c_1}=\frac{\alpha}{c_1a_2-c_2a_1}=\frac{1}{a_1b_2-a_2b_1}$$

২য় এবং শেষ অনুপাত হতে আমরা পাই,

$$\alpha=\frac{c_1a_2-c_2a_1}{a_1b_2-a_2b_1}.$$

আবার, ১ম ও ২য় অনুপাত হতে আমরা পাই,

$$\frac{\alpha^2}{b_1c_2-b_2c_1}=\frac{\alpha}{c_1a_2-c_2a_1}$$

$$\Rightarrow\frac{\alpha}{b_1c_2-b_2c_1}=\frac{1}{c_1a_2-c_2a_1}\quad[\because \text{এখানে } \alpha\neq0]$$

$$\therefore\ \alpha=\frac{b_1c_2-b_2c_1}{c_1a_2-c_2a_1}$$

$$\therefore\ \frac{c_1a_2-c_2a_1}{a_1b_2-a_2b_1}=\frac{b_1c_2-b_2c_1}{c_1a_2-c_2a_1}$$

$\Rightarrow (c_1a_2-c_2a_1)^2=(b_1c_2-b_2c_1)(a_1b_2-a_2b_1)$

ইহাই নির্ণেয় শর্ত ।

(e) যদি $x^2+bx+c=0$ **ও** $x^2+mx+n=0$ **সমীকরণ দুইটির একটি সাধারণ মূল থাকে , তাহলে দেখাও যে, এ মূলটি** $(bn-cm)/(m-b)$ **এর বর্গমূল হবে।**

প্রমাণ ঃ ধরি , প্রদত্ত সমীকরণদ্বয়ের সাধারণ মূলটি α ।

তাহলে, $\alpha^2+b\alpha+c=0$ ও $\alpha^2+m\alpha+n=0$

বজ্রগুণন প্রণালীর সাহায্যে আমরা পাই ,

$$\frac{\alpha^2}{bn-cm}=\frac{\alpha}{c-n}=\frac{1}{m-b}$$

১ম এবং শেষ অনুপাত হতে আমরা পাই,

$$\frac{\alpha^2}{bn-cm}=\frac{1}{m-b}\Rightarrow\alpha^2=\frac{bn-cm}{m-b}$$

$\therefore$ সাধারণ মূলটি $\dfrac{bn-cm}{m-b}$ এর বর্গমূল । (Showed)

(f) যে শর্ত সাপেক্ষে px^2+qx+1 **এবং** qx^2+px+1 **রাশি দুইটির একটি সাধারণ উৎপাদক হতে পারে তা নির্ণয় কর ।**

সমাধান ঃ px^2+qx+1 এবং qx^2+px+1 রাশি দুইটির একটি সাধারণ উৎপাদক থাকলে, $px^2+qx+1=0$ এবং $qx^2+px+1=0$ সমীকরণ দুইটির একটি সাধারণ মূল থাকবে ।

মনে করি , সাধারণ মূলটি α । তাহলে ,

$\therefore\ p\alpha^2+q\alpha+1=0$ এবং $q\alpha^2+p\alpha+1=0.$

বজ্রগুণন প্রণালীর সাহায্যে আমরা পাই ,

$$\frac{\alpha^2}{q-p}=\frac{\alpha}{q-p}=\frac{1}{p^2-q^2}$$

$\therefore\ (q-p)^2=(q-p)(p^2-q^2)$

$\Rightarrow (q-p)^2 - (q-p)(p-q)(p+q) = 0$

$\Rightarrow (q-p)^2 + (q-p)(q-p)(p+q) = 0$

$\Rightarrow (q-p)^2(1+p+q) = 0$

এখানে, $p \neq q$. কারণ, $p = q$ হলে, প্রদত্ত রাশিদ্বয়ের উভয় উৎপাদকই সাধারণ হবে।

$\therefore\ p+q+1=0$, ইহাই নির্ণেয় শর্ত।

12(a) যদি $x^2 + bx + ac = 0$ এবং $x^2 + cx + ab = 0$ সমীকরণ দুইটির একটি সাধারণ মূল থাকে, তাহলে দেখাও যে, $a + b + c = 0$. আরও দেখাও যে, তাদের অপর দুইটি মূল দ্বারা $x^2 + ax + bc = 0$ সমীকরণটি সিদ্ধ হবে।

প্রমাণ ঃ মনে করি, প্রদত্ত সমীকরণদ্বয়ের সাধারণ মূলটি α।

তাহলে, $\alpha^2 + b\alpha + ac = 0$ ও $\alpha^2 + c\alpha + ab = 0$

বজ্রগুণন প্রণালীর সাহায্যে আমরা পাই,

$$\frac{\alpha^2}{ab^2 - ac^2} = \frac{\alpha}{ac - ab} = \frac{1}{c-b}$$

$\therefore\ (ac-ab)^2 = (ab^2 - ac^2)(c-b)$

$\Rightarrow a^2(c-b)^2 - a(b^2-c^2)(c-b) = 0$

$\Rightarrow a^2(b-c)^2 + a(b-c)^2(b+c) = 0$

$\Rightarrow a(b-c)^2(a+b+c) = 0$

$a = 0$ হলে প্রদত্ত সমীকরণদ্বয়ের কোন সাধারণমূল থাকবে না এবং $b = c$ হলে উভয় মূলই সাধারণ হয়ে যাবে।

$\therefore\ a+b+c = 0.$

২য় এবং শেষ অনুপাত হতে আমরা পাই,

$\alpha = \dfrac{a(c-b)}{c-b} = a$, ইহাই নির্ণেয় শর্ত।

এখন, $x^2 + bx + ac = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয়ের গুণফল ac

$\therefore$ অপর মূলটি c

আবার, $x^2 + cx + ab = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয়ের গুণফল ab

$\therefore$ অপর মূলটি b

$\therefore$ b এবং c মূল দুইটি দ্বারা গঠিত সমীকরণ,

$x^2 - (b+c)x + bc = 0$

$\Rightarrow x^2 - (-a)x + bc = 0\ [\because a+b+c=0]$

$\Rightarrow x^2 + ax + bc = 0$

অতএব, অপর মূল দুইটি দ্বারা $x^2 + ax + bc = 0$ সমীকরণটি সিদ্ধ হবে।

12(b) $x^2 + px + q = 0$ এবং $x^2 + qx + p = 0$ সমীকরণ দুইটির একটি সাধারণ মূল থাকলে দেখাও যে, তাদের অপর মূল দুইটি $x^2 + x + pq = 0$ সমীকরণের মূল হবে।

[ব.'১১; দি.'১২; টেক্সটাইল'০৪-০৫]

প্রমাণ ঃ মনে করি, প্রদত্ত সমীকরণদ্বয়ের সাধারণ মূলটি α।

তাহলে, $\alpha^2 + p\alpha + q = 0 \cdots\cdots (1)$ এবং

$\alpha^2 + q\alpha + p = 0 \cdots\cdots (2)$

$(1) - (2) \Rightarrow (p-q)\alpha + q - p = 0$

$\Rightarrow \alpha = \dfrac{p-q}{p-q} = 1$, ইহাই সাধারণ মূল।

(1) -এ $\alpha = 1$ বসিয়ে আমরা পাই, $1 + p + q = 0$

$\Rightarrow p + q = -1 \cdots\cdots (3)$

এখন, $x^2 + px + q = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয়ের গুণফল

$\therefore$ অপর মূলটি q.

আবার, $x^2 + qx + p = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয়ের গুণফল

$\therefore$ অপর মূলটি p.

$\therefore$ q এবং p মূল দ্বারা গঠিত সমীকরণ,

$x^2 - (q+p)x + qp = 0$

$\Rightarrow x^2 - (-1) + pq = 0$ [(3) দ্বারা]

$\Rightarrow x^2 + x + pq = 0$

অতএব, অপর মূল দুইটি $x^2 + x + pq = 0$ সমীকরণের মূল হবে।

12(c) যদি $x^2 + px + q = 0$ এবং $x^2 + qx + p = 0$ ($p \neq q$) সমীকরণদ্বয়ের একটি সাধারণ মূল থাকে, তবে $2x^2 + (p+q-2)x = (p+q-2)$ সমীকরণদ্বয়ের মূল নির্ণয় কর। [বুয়েট'০২-০৩]

সমাধান ঃ মনে করি , প্রদত্ত সমীকরণদ্বয়ের সাধারণ মূলটি α । তাহলে ,

$\alpha^2 + p\alpha + q = 0$ ……(1) এবং

$\alpha^2 + q\alpha + p = 0$……(2)

বজ্রগুণন প্রণালীর সাহায্যে আমরা পাই ,

$$\frac{\alpha^2}{p^2 - q^2} = \frac{\alpha}{q-p} = \frac{1}{q-p}$$

$\therefore\ (q-p)^2 = (p^2 - q^2)(q-p)$

$\Rightarrow (q-l)^2 = -(q-p)(q-p)(q+p)$

$\Rightarrow (q-p)^2(q+p+1) = 0$

$\therefore\ p + q + 1 = 0$ [$\because$ p = q হলে উভয় মূল সাধারণ হবে ।]

এখন, $2x^2 + (p+q-2)x = (p+q-2)^2$

$\Rightarrow 2x^2 + (p+q+1-3)x = (p+q+1-3)^2$

$\Rightarrow 2x^2 - 3x - (-3)^2 = 0 \Rightarrow 2x^2 - 3x - 9 = 0$

$\Rightarrow 2x^2 - 6x + 3x - 9 = 0$

$\Rightarrow 2x(x-3) + 3(x-3) = 0$

$\Rightarrow (x-3)(2x+3) = 0$

$\therefore\ x = 3,\ -\frac{3}{2}$ (Ans.)

12(d) যদি $ax^2 + 2cx + b = 0$ এবং $ax^2 + 2bx + c = 0$ ($b \neq c$) সমীকরণ দুইটির একটি সাধারণ মূল থাকে, তবে a + 4b + 4c এর মান নির্ণয় কর।

[বুয়েট'০৯-১০]

সমাধান ঃ মনে করি , প্রদত্ত সমীকরণদ্বয়ের সাধারণ মূলটি α । তাহলে ,

$a\alpha^2 + 2c\alpha + b = 0$ ……(1) এবং

$a\alpha^2 + 2b\alpha + c = 0$……(2)

বিয়োগ করে, $(2c - 2b)\alpha + (b - c) = 0$

$\Rightarrow \alpha = \frac{b-c}{2(b-c)} = \frac{1}{2}$

(1) হতে পাই, $a\frac{1}{4} + 2c \times \frac{1}{2} + b = 0$

$\Rightarrow a + 4b + 4c = 0$ (Ans.)

13(a) দেখাও যে, $x^5 - x^4 + 10x^3 - 9x^2 + 8x + 699$ রাশিটির একটি উৎপাদক $x + 3$.

সমাধান ঃ ধরি ,

$f(x) = x^5 - x^4 + 10x^3 - 9x^2 + 8x + 699$

$\therefore\ f(-3) = (-3)^5 - (-3)^4 + 10(-3)^3 - 9(-3)^2 + 8(-3) + 699$

$= -243 - 81 - 270 - 81 - 24 + 699$

$= -699 + 699 = 0$

$\therefore$ ভাগশেষ উপপাদ্যে সাহায্যে, $x-(-3) = x + 3$ হবে $f(x) = x^5 - x^4 + 10x^3 - 9x^2 + 8x + 699$ বহুপদীর একটি উৎপাদক ।

13(b) দেখাও যে, $2x^3 - 2bx^2 - 2b^2x - 4b^3$ এর একটি উৎপাদক $x - 2b$.

প্রমাণ ঃ ধরি, $f(x) = 2x^3 - 2bx^2 - 2b^2x - 4b^3$

$\therefore\ f(2b) = 2.(2b)^3 - 2b(2b)^2 - 2b^2(2b) - 4b^3$

$= 16b^3 - 8b^3 - 4b^3 - 4b^3$

$= 16b^3 - 16b^3 = 0$

$\therefore$ ভাগশেষ উপপাদ্যে সাহায্যে, $x - (2b) = x - 2b$ হবে $f(x) = 2x^3 - 2bx^2 - 2b^2x - 4b^3$ বহুপদীর একটি উৎপাদক ।

14(a) দুইটি মূলের অনুপাত 3 : 4 হলে, $2x^3 - x^2 - 22x - 24 = 0$ সমীকরণটি সমাধান কর।

[য.'০১; সি.'০৭,'১০; রা.'০৭; দি.'১১]

সমাধানঃ ধরি, প্রদত্ত সমীকরণের মূলগুলো $3\alpha, 4\alpha$ এবং β

$\therefore\ 3\alpha + 4\alpha + \beta = -\left(\frac{-1}{2}\right)$

$\Rightarrow 7\alpha + \beta = \frac{1}{2} \Rightarrow \beta = \frac{1}{2} - 7\alpha$……(i) এবং

$3\alpha.4\alpha + 4\alpha.\beta + \beta.3\alpha = \frac{-22}{2} = -11$

$\Rightarrow 12\alpha^2 + 7\alpha\beta = -11$

$\Rightarrow 12\alpha^2 + 7\alpha(\frac{1}{2} - 7\alpha) = -11$ [(i) নং দ্বারা]

$\Rightarrow 24\alpha^2 + 7\alpha - 98\alpha^2 = -22$

$\Rightarrow -74\alpha^2 + 7\alpha + 22 = 0$

$\Rightarrow 74\alpha^2 - 7\alpha - 22 = 0$

$\Rightarrow 74\alpha^2 - 44\alpha + 37\alpha - 22 = 0$

$\Rightarrow 2\alpha(37\alpha - 22) + 1(37\alpha - 22) = 0$

$\Rightarrow (37\alpha - 22)(2\alpha + 1) = 0$

$\therefore 2\alpha + 1 \Rightarrow \alpha = -\frac{1}{2}$

অথবা, $37\alpha - 22 = 0 \Rightarrow \alpha = \frac{22}{37}$

এখানে, মূল তিনটির গুণফল = 12

$\alpha = -\frac{1}{2}$ হলে, $\beta = \frac{1}{2} - 7(-\frac{1}{2}) = \frac{1}{2} + \frac{7}{2} = 4.$

এক্ষেত্রে প্রদত্ত সমীকরণের মূল তিনটি $-\frac{3}{2}, -2, 4;$

যাদের গুণফল $= (-\frac{3}{2})(-2).4 = 12$

আবার, $\alpha = \frac{22}{37}$ হলে, $\beta = \frac{1}{2} - \frac{154}{37} = \frac{-271}{74}$

এক্ষেত্রে সমীকরণের মূল তিনটি $\frac{66}{37}, \frac{88}{37}, \frac{-271}{74};$

যাদের গুণফল $= \frac{66}{37} \cdot \frac{88}{37} \cdot \frac{-271}{74} \neq 12$

$\therefore$ প্রদত্ত সমীকরণের মূলগুলো $-\frac{3}{2}, -2, 4$

14(b) দুইটি মূলের যোগফল শূন্য হলে, $4x^3 + 16x^2 - 9x - 36 = 0$ সমীকরণটি সমাধান কর। [কু.'০৩]

সমাধানঃ ধরি, প্রদত্ত সমীকরণের মূলগুলো $\alpha, -\alpha$ এবং β

$\therefore \alpha - \alpha + \beta = -\frac{16}{4} \Rightarrow \beta = -4$

$\alpha \times -\alpha \times \beta = -(\frac{-36}{4})$

$\Rightarrow -\alpha^2 = \frac{9}{\beta} = \frac{9}{-4} \quad \therefore \alpha = \pm\frac{3}{2}$

অতএব, প্রদত্ত সমীকরণের মূলগুলো $-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}, -4$

14(c) $3x^3 - 26x^2 + 52x - 24 = 0$ সমীকরণে মূলগুলো গুণোত্তর শ্রেণীভুক্ত হলে, সমীকরণটি সমাধান কর। [কু.'০৪]

সমাধানঃ মনে করি, প্রদত্ত সমীকরণের মূলগুলো $\alpha/\beta, \alpha, \alpha\beta$

$\therefore \frac{\alpha}{\beta}.\alpha.\alpha\beta = -\left(\frac{-24}{3}\right) \Rightarrow \alpha^3 = 8 \;\therefore \alpha = 2$

এবং $\frac{\alpha}{\beta} + \alpha + \alpha\beta = -\left(\frac{-26}{3}\right)$

$\Rightarrow \alpha(\frac{1}{\beta} + 1 + \beta) = \frac{26}{3}$

$\Rightarrow 2(\frac{1+\beta+\beta^2}{\beta}) = \frac{26}{3} \Rightarrow \frac{1+\beta+\beta^2}{\beta} = \frac{13}{3}$

$\Rightarrow 3\beta^2 + 3\beta + 3 = 13\beta \Rightarrow 3\beta^2 - 10\beta + 3 = 0$

$\Rightarrow 3\beta^2 - 9\beta - \beta + 3 = 0$

$\Rightarrow 3\beta(\beta - 3) - 1(\beta - 3) = 0$

$\Rightarrow (\beta - 3)(3\beta - 1) = 0 \Rightarrow \beta = 3, \frac{1}{3}$

$\beta = 3$ হলে, $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{2}{3}$, $\alpha\beta = 2 \times 3 = 6$ এবং

$\beta = \frac{1}{3}$ হলে, $\frac{\alpha}{\beta} = 6$, $\alpha\beta = \frac{2}{3}$

অতএব, প্রদত্ত সমীকরণের মূলগুলো $\frac{2}{3}, 2, 6$

14(d) $x^4 - 5x^3 + 10x^2 - 10x + 4 = 0$ সমীকরণের একটি মূল $1 + i$ হলে, অপর মূলগুলো নির্ণয় কর। [চ.'০৩]

সমাধানঃ প্রদত্ত সমীকরণের একটি মূল $1 + i$, যা জটিল।

$\therefore$ অপর একটি মূল $1 - i$

$\therefore$ এ জটিল মূল দুইটির যোগফল $= 1 + i + 1 - i = 2$

এবং গুণফল $= (1+i)(1-i) = 1 - i^2 = 2$

$\therefore$ $1+i$ এবং $1-i$ মূল দ্বারা গঠিত সমীকরণ,

$x^2 - 2x + 2 = 0$

এখন, $x^4 - 5x^3 + 10x^2 - 10x + 4 = 0$

$$\Rightarrow x^2(x^2 - 2x + 2) - 3x(x^2 - 2x + 2) + 2(x^2 - 2x + 2) = 0$$

$$\Rightarrow (x^2 - 2x + 2)(x^2 - 3x + 2) = 0$$

$$\therefore x^2 - 3x + 2 = 0 \Rightarrow x^2 - 2x - x + 2$$

$$\Rightarrow x(x-2) - 1(x-2) = 0$$

$$\Rightarrow (x-1)(x-2) = 0 \quad \therefore x = 1, 2$$

অতএব, প্রদত্ত সমীকরণের অপর মূলগুলো $1-i, 1, 2$

14(e) $2x^4 - 15x^3 + 35x^2 - 30x + 8 = 0$ সমীকরণের মূলগুলো গুণোত্তর শ্রেণীভুক্ত হলে, সমীকরণটি সমাধান কর।

সমাধান: মনে করি, প্রদত্ত সমীকরণের মূলগুলো,

$$\frac{\alpha}{\beta^3}, \frac{\alpha}{\beta}, \alpha\beta, \alpha\beta^3$$

$$\therefore \frac{\alpha}{\beta^3}.\frac{\alpha}{\beta}.\alpha\beta.\alpha\beta^3 = \frac{8}{2} \Rightarrow \alpha^4 = 4$$

$\therefore$ $\alpha^2 = 2 \Rightarrow \alpha = \sqrt{2}$ এবং

$$\frac{\alpha}{\beta^3}.\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\alpha}{\beta^3}.\alpha\beta + \frac{\alpha}{\beta^3}.\alpha\beta^3 + \frac{\alpha}{\beta}.\alpha\beta + \frac{\alpha}{\beta}.\alpha\beta^3 + \alpha\beta.\alpha\beta^3 = \frac{35}{2}$$

$$\Rightarrow \alpha^2\left(\frac{1}{\beta^4} + \frac{1}{\beta^2} + 1 + 1 + \beta^2 + \beta^4\right) = \frac{35}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\beta^4} + \frac{1}{\beta^2} + 2 + \beta^2 + \beta^4 = \frac{35}{2\alpha^2} = \frac{35}{2.2}$$

$$\Rightarrow \left(\beta^2 + \frac{1}{\beta^2}\right)^2 + \left(\beta^2 + \frac{1}{\beta^2}\right) = \frac{35}{4}$$

এখন মনে করি, $m = \beta^2 + \dfrac{1}{\beta^2}$ ...... (i)

$$\therefore m^2 + m = \frac{35}{4}$$

$$\Rightarrow 4m^2 + 4m - 35 = 0$$

$$\Rightarrow 4m^2 + 14m - 10m - 35 = 0$$

$$\Rightarrow 2m(2m+7) - 5(2m+7) = 0$$

$$\Rightarrow (2m+7)(2m-5) = 0$$

$$\therefore m = \frac{5}{2}, -\frac{7}{2}$$

β^2 এবং $\dfrac{1}{\beta^2}$ ধনাত্মক বলে $m = \dfrac{5}{2}$ হবে।

$\therefore$ (i) নং হতে পাই, $\beta^2 + \dfrac{1}{\beta^2} = \dfrac{5}{2}$

$$\Rightarrow \beta^4 + 1 = \frac{5}{2}\beta^2 \Rightarrow 2\beta^4 - 5\beta^2 + 2 = 0$$

$$\Rightarrow 2\beta^4 - 4\beta^2 - \beta^2 + 2 = 0$$

$$\Rightarrow 2\beta^2(\beta^2 - 2) - 1(\beta^2 - 2) = 0$$

$$\Rightarrow (2\beta^2 - 1)(\beta^2 - 2) = 0$$

$$\therefore \beta = \frac{1}{\sqrt{2}}, \sqrt{2}$$

$\beta = \sqrt{2}$ নিয়ে আমরা পাই,

$$\alpha\beta = \sqrt{2}.\sqrt{2} = 2, \quad \frac{\alpha}{\beta} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 1,$$

$$\alpha\beta^3 = \sqrt{2}.(\sqrt{2})^3 = 4, \frac{\alpha}{\beta^3} = \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{2}$$

$\beta = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ নিয়েও প্রদত্ত সমীকরণের একই মূল পাওয়া যায়।

অতএব, প্রদত্ত সমীকরণের মূলগুলো $\dfrac{1}{2}, 1, 2, 4$

14(f) $4x^3 - 24x^2 + 23x + 18 = 0$ সমীকরণের মূলগুলো সমান্তর শ্রেণীভুক্ত হলে, সমীকরণটি সমাধান কর।

সমাধানঃ ধরি, প্রদত্ত সমীকরণের মূলগুলি $a-d, a, a+d$

∴ মূলগুলোর যোগফল,

$a-d+a+a+d=-\dfrac{-24}{4}=6$

$\Rightarrow 3a=6 \Rightarrow a=2$

মূলগুলির গুণফল , $(a-d)\,a\,(a+d)=-\dfrac{18}{4}$

$\Rightarrow a(a^2-d^2)=-\dfrac{9}{2} \Rightarrow 2(4-d^2)=-\dfrac{9}{2}$

$\Rightarrow 4-d^2=-\dfrac{9}{4} \Rightarrow d^2=4+\dfrac{9}{4}=\dfrac{25}{4}$

$\therefore\ d=\pm\dfrac{5}{2}$

$d=\dfrac{5}{2}$ নিয়ে আমরা পাই , $a-d=2-\dfrac{5}{2}=-\dfrac{1}{2}$

$a+d=2+\dfrac{5}{2}=\dfrac{9}{2}$

$d=-\dfrac{5}{2}$ নিয়েও প্রদত্ত সমীকরণের একই মূল পাওয়া যায়।

অতএব, প্রদত্ত সমীকরণের মূলগুলো $-\dfrac{1}{2}$, 2 , $\dfrac{9}{2}$

14(g) $x^3-px^2+qx-r=0$ সমীকরণের মূলগুলো সমান্তর শ্রেণীভুক্ত হবার শর্ত নির্ণয় কর ।

সমাধান ঃ মনে করি, প্রদত্ত সমীকরণের মূলগুলো $a-d,\, a,\, a+d.$

$\therefore\ a-d+a+a+d=-\dfrac{-p}{1}=p$

$\Rightarrow 3a=p \Rightarrow a=\dfrac{p}{3}$ .... (1)

$(a-d)a+a(a+d)+(a+d)(a-d)=q$

$\Rightarrow a^2-ad+a^2+ad+a^2-d^2=q$

$\Rightarrow 3a^2-d^2=q$ .... (2) এবং

$(a-d)a(a+d)=r$

$\Rightarrow a(a^2-d^2)=r$ .... (3)

(3) নং সমীকরণে $a=\dfrac{p}{3}$ বসিয়ে পাই ,

$\dfrac{p}{3}\left(\dfrac{p^2}{9}-d^2\right)=r \Rightarrow \dfrac{p^2}{9}-d^2=\dfrac{3r}{p}$

$\Rightarrow d^2=\dfrac{p^2}{9}-\dfrac{3r}{p}$

আবার, (2) নং সমীকরণে d^2 এবং a^2 এর মান বসিয়ে

পাই , $3.\dfrac{p^2}{9}-\dfrac{p^2}{9}+\dfrac{3r}{p}=q \Rightarrow 2\dfrac{p^2}{9}+\dfrac{3r}{p}=q$

$\Rightarrow 2p^3+27r=9pq$

$\therefore\ 2p^3+27r-9pq=0$, ইহাই নির্ণেয় শর্ত।

14(h) $32x^3-48x^2+22x-3=0$ সমীকরণের মূলগুলো সমান্তর শ্রেণীভুক্ত হলে, সমীকরণটি সমাধান কর। [কু.'১২]

সমাধানঃ ধরি, প্রদত্ত সমীকরণের মূলগুলি $a-d,\, a,\, a+d$

∴ মূলগুলির যোগফল,

$a-d+a+a+d=-\dfrac{-48}{32}=\dfrac{3}{2}$

$\Rightarrow 3a=\dfrac{3}{2} \Rightarrow a=\dfrac{1}{2}$

মূলগুলির গুণফল , $(a-d)\,a\,(a+d)=\dfrac{-3}{32}$

$\Rightarrow a(a^2-d^2)=\dfrac{-3}{32} \Rightarrow \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{4}-d^2\right)=\dfrac{-3}{32}$

$\Rightarrow \dfrac{1}{4}-d^2=\dfrac{-3}{16} \Rightarrow d^2=\dfrac{1}{4}+\dfrac{3}{16}=\dfrac{7}{16}$

$\therefore\ d=\pm\dfrac{\sqrt{7}}{4}$

$d=\dfrac{\sqrt{7}}{4}$ নিয়ে আমরা পাই ,

$a-d=\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{7}}{4}=\dfrac{2-\sqrt{7}}{4}$

$a+d=\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{7}}{4}=\dfrac{2+\sqrt{7}}{4}$

$d=-\dfrac{\sqrt{7}}{4}$ নিয়েও প্রদত্ত সমীকরণের একই মূল পাওয়া

অতএব, প্রদত্ত সমীকরণের মূলগুলি $\frac{2-\sqrt{7}}{4}, \frac{1}{2}, \frac{2+\sqrt{7}}{4}$.

14(i) $8x^4-2x^3-27x^2+6x+9=0$ সমীকরণের যেকোনো দুইটি মূলের যোগফল শূন্য হলে সমীকরণটির অপর দুইটি মূলের মান নির্ণয় কর। [চুয়েট' ০৯-১০]

সমাধানঃ ধরি, প্রদত্ত সমীকরণের মূলগুলি $\alpha, -\alpha, \beta$ ও γ. তাহলে,

$$\alpha-\alpha+\beta+\gamma=-\frac{-2}{8}=\frac{1}{4}\Rightarrow\beta+\gamma=\frac{1}{4}$$

আবার, $\alpha(-\alpha)\beta+\alpha(-\alpha)\gamma+\alpha\beta\gamma+(-\alpha)\beta\gamma=-\frac{6}{8}$

$$\Rightarrow -\alpha^2\beta-\alpha^2\gamma+\alpha\beta\gamma-\alpha\beta\gamma=-\frac{3}{4}$$

$$\Rightarrow -\alpha^2(\beta+\gamma)=-\frac{3}{4}\Rightarrow\alpha^2\times\frac{1}{4}=\frac{3}{4}\Rightarrow\alpha^2=3$$

এবং $-\alpha^2\beta\gamma=\frac{9}{8}\Rightarrow -3\beta\gamma=\frac{9}{8}\Rightarrow\beta\gamma=-\frac{3}{8}$

এখন, β, γ দ্বারা গঠিত সমীকরণ,

$$x^2-(\beta+\gamma)x+\beta\gamma=0$$

$$\Rightarrow x^2-\frac{1}{4}x-\frac{3}{8}=0\Rightarrow 8x^2-2x-3=0$$

$$\Rightarrow 8x^2-6x+4x-3=0$$

$$\Rightarrow 2x(4x-3)+1(4x-3)=0$$

$$\Rightarrow (4x-3)(2x+1)=0$$

$$\Rightarrow x=\frac{3}{4},-\frac{1}{2}$$

$\therefore$ নির্ণেয় মূলদ্বয়, $\frac{3}{4}$ ও $-\frac{1}{2}$.

15(a) k এর মান কত হলে $(k+1)x^2+2(k+3)x+2k+3$ রাশিটি একটি পূর্ণ বর্গ হবে?

[BUET 08-09, KUET09-10; KU 08-09]

(A) 3 , 2 (B) 3 , −2 (C) −3, 2 (D) −3, −2

Soln : প্রদত্ত রাশিটি দ্বারা গঠিত সমীকরণের পৃথায়ক,

$$D=4(k^2+6k+9)-4(k+1)(2k+3)=0$$

$$\Rightarrow -(k^2-k-6)=0\Rightarrow k=3,-2$$

(b) $a\in\mathbb{R}$ হলে, সমীকরণ $x^4+a^2x^2+a^4=0$ এর মূলগুলি- [KUET 09-10]

(A) বাস্তব (B) জটিল

(C) কাল্পনিক (D) জটিল ও কাল্পনিক

Soln : $x^4+a^2x^2+a^4=0$

$$\Rightarrow (x^2)^2+2a^2x^2+(a^2)^2-a^2x^2=0$$

$$\Rightarrow (x^2+a^2)^2=a^2x^2\Rightarrow x^2+a^2=\pm ax$$

$$\Rightarrow x^2\pm ax+a^2=0$$

$\therefore$ প্রদত্ত সমীকরণের পৃথায়ক,

$$D=(\pm a)^2-4a^2=a^2-4a^2=-3a^2<0$$

$\therefore$ মূলগুলি জটিল।

(c) যদি $\alpha+\beta=3$ ও $\alpha^3+\beta^3=7$ হয়, তবে α ও β যে সমীকরণের মূল তা হলো- [KUET 11-12]

(A) $x^2-3x+7=0$ (B) $x^2-3x-7=0$

(C) $9x^2-27x+20=0$

(D) $9x^2-27x-20=0$

Soln : $\alpha^3+\beta^3=7$

$$\Rightarrow (\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)=7$$

$$\Rightarrow 3^3-3\alpha\beta\times 3=7\Rightarrow 9\alpha\beta=20\Rightarrow\alpha\beta=\frac{20}{9}$$

$\therefore$ নির্ণেয় সমীকরণ, $x^2-3x+\frac{20}{9}=0$

$$\Rightarrow 9x^2-27x+20=0$$

16. $2x^3-9x^2+9x+2\equiv(x-2)(ax^2+bx+c)$, যেখানে a, b এবং c ধ্রুবক।

(a) a, b, c এর মান নির্ণয় কর।

(b) $2x^3-9x^2+9x+2=0$ সমীকরণের মূলত্রয় 2, α ও β হলে, একটি দ্বিঘাত সমীকরণ নির্ণয় কর যার মূলদ্বয় $(\alpha+\frac{k}{\beta})$ এবং $(\beta+\frac{k}{\alpha})$, যেখানে k ধ্রুবক।

(c) (b)-এ প্রাপ্ত সমীকরণের মূলদ্বয়ের গুণফল -8 হলে k এর সম্ভাব্য দুইটি মান নির্ণয় কর।

সমাধানঃ (a)

$2x^3-9x^2+9x+2\equiv(x-2)(ax^2+bx+c)$

$\Rightarrow 2x^3-9x^2+9x+2\equiv ax^3+(-2a+b)x^2+(-2b+c)x-2c$

উভয় পক্ষ থেকে x^3, x^2 এর সহগ এবং ধ্রুবপদ সমীকৃত কওে পাই, $a=2$,

$-2a+b=-9\Rightarrow -2\times2+b=-9\Rightarrow b=-5$

এবং $-2c=2\Rightarrow c=-1$.

$\therefore$ $a=2, b=-5$ এবং $c=-1$ (Ans.)

(b) দেওয়া আছে, $2x^3-9x^2+9x+2=0$ সমীকরণের মূলত্রয় 2, α ও β.

$\therefore\ 2+\alpha+\beta=\frac{9}{2}\Rightarrow\alpha+\beta=\frac{9}{2}-2=\frac{5}{2}$

আবার, $2\alpha\beta=-\frac{2}{2}=-1\Rightarrow\alpha\beta=-\frac{1}{2}$

এখন, $(\alpha+\frac{k}{\beta})$ ও $(\beta+\frac{k}{\alpha})$ মূলদ্বয়ের সমষ্টি

$=\alpha+\frac{k}{\beta}+\beta+\frac{k}{\alpha}=\alpha+\beta+k(\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\alpha})$

$=\alpha+\beta+k\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}=\frac{5}{2}+k\frac{5/2}{-1/2}=\frac{5}{2}-5k$

এবং মূলদ্বয়ের গুণফল $=(\alpha+\frac{k}{\beta})(\beta+\frac{k}{\alpha})$

$=\alpha\beta+\frac{k^2}{\alpha\beta}+2k=-\frac{1}{2}-2k^2+2k$

$\therefore$ নির্ণেয় সমীকরণ,

$x^2-(\frac{5}{2}-5k)x-\frac{1}{2}-2k^2+2k=0$

$\Rightarrow 2x^2-(5-10k)x-1-4k^2+4k=0$

(c) প্রশ্নমতে, $-\frac{1}{2}-2k^2+2k=-8$

$\Rightarrow -1-4k^2+4k=-16$

$\Rightarrow 4k^2-4k-15=0$

$\Rightarrow 4k^2-10k+6k-15=0$

$\Rightarrow 2k(2k-5)+3(2k-5)=0$

$\Rightarrow (2k-5)(2k+3)=0$

$\therefore\ k=\frac{5}{2},-\frac{3}{2}$

ব্যবহারিক প্রশ্নমালা

1. তিন দশমিক স্থান পর্যন্ত লেখচিত্রের সাহায্যে সমাধান নির্ণয় করঃ

(a) $2x^2-7x+2=0$

পরীক্ষণ নং	তারিখ ঃ

পরীক্ষণের নাম ঃ লেখের সাহায্যে $f(x)=2x^2-7x+2=0$ সমীকরণের বাস্তব মূলের আসন্ন মান তিন দশমিক স্থান পর্যন্ত নির্ণয়।

মূলতত্ত্ব ঃ লেখের উপর $x=a$ এবং $x=b$ এর জন্য,

(i) যদি $f(a)$ এবং $f(b)$ বিপরীত চিহ্নযুক্ত হয় তবে $]a, b[$ ব্যবধির মধ্যে $f(x)=0$ এর কমপক্ষে একটি অথবা বিজোড় সংখ্যক মূল থাকবে।

(ii) যদি $f(a)$ এবং $f(b)$ একই চিহ্নযুক্ত হয় তবে $]a, b[$ ব্যবধির মধ্যে $f(x)=0$ এর জোড় সংখ্যক মূল থাকবে অথবা কোন মূল থাকবেনা।

(iii) $y=f(x)$ সমীকরণের লেখচিত্র x-অক্ষকে যে বিন্দুতে ছেদ বা স্পর্শ করে তার ভূজ $f(x)=0$ সমীকরণের বাস্তব মূল হবে। যদি ভূজ ভগ্নাংশ হয় তবে সেই ভূজের আসন্ন মান $f(x)=0$ সমীকরণের মূলের আসন্ন মান হবে।

(iv) যদি $y=f(x)$ সমীকরণের লেখচিত্রটি x-অক্ষকে ছেদ বা স্পর্শ না

মূল থাকবে না।

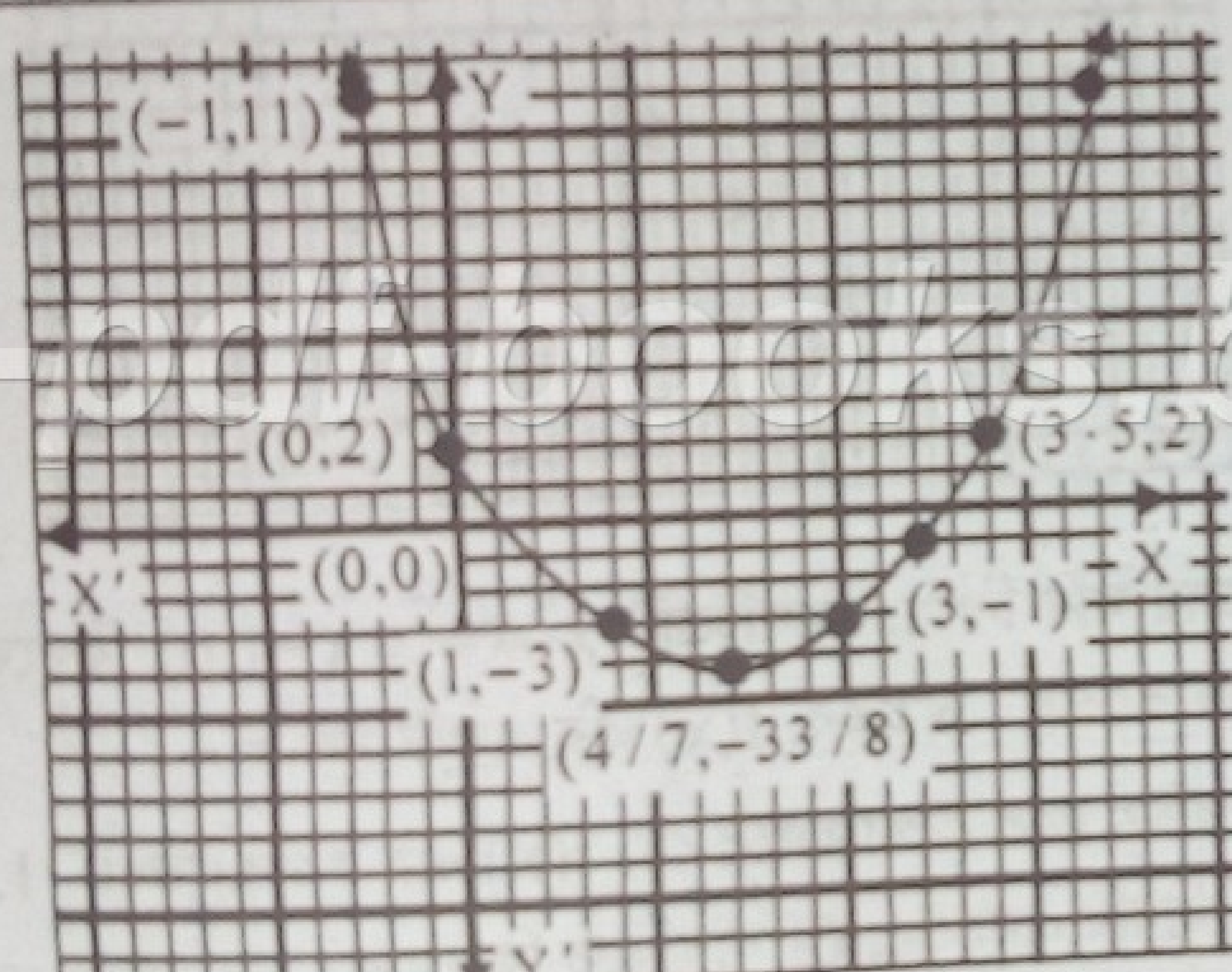
প্রয়োজনীয় উপকরণ ঃ (i) পেন্সিল (ii) স্কেল (iii) গ্রাফ পেপার (iv) ইরেজার (v) শার্পনার (vi) ক্যালকুলেটর ইত্যাদি।

কার্যপদ্ধতি ঃ

1. একটি ছক কাগজে স্থানাঙ্কের অক্ষ রেখা X'OX ও YOY' আঁকি।

2. $y = f(x) = 2x^2 - 7x + 2 = 0$ সমীকরণে x-এর কয়েকটি মান নিয়ে y-এর অনুরূপ মান বের করি ও নিচের ছকটি তৈরি করি।

x	−1	0	1	7/4	3	3.5
y	11	2	−3	−33/8	−1	2



3. x-অক্ষ বরাবর ছোট বর্গের এক বাহু = 4 একক এবং y- অক্ষ বরাবর ছোট বর্গের 1 বাহু = 1 একক ধরে তালিকাভুক্ত বিন্দুগুলি ছক কাগজে স্থাপন করি এবং স্থাপিত বিন্দুগুলি মুক্ত হস্তে বক্রাকারে যোগ করে $y = f(x)$ এর লেখচিত্র অঙ্কন করি।

4. লেখচিত্রটি যে সকল বিন্দুতে x-অক্ষকে ছেদ করে সে সকল বিন্দুর ভূজ নির্ণয় করে প্রদত্ত সমীকরণের বাস্তব মূল নির্ণয় করি।

মূলের মান নির্ণয়ঃ লেখচিত্রটি x-অক্ষকে (−1,0) বিন্দুতে ছেদ করেছে। অতএব, f(x) এর একটি মূল = −1

লেখচিত্র হতে দেখা যাচ্ছে যে, f(x) এর অপর মূলদ্বয়]0, 1[ব্যবধি এবং]3, 3·5[ব্যবধিতে বিদ্যমান।

]0, 1[ব্যবধিতে বিদ্যমান প্রথম মূলের আসন্ন মান নির্ণয়ঃ

$f(0{\cdot}3) = 2(0{\cdot}3)^2 - 7(0{\cdot}3) + 2 = 0{\cdot}08 > 0$

$f(0{\cdot}32) = 2(0{\cdot}32)^2 - 7(0{\cdot}32) + 2$
$= -0{\cdot}0352 < 0$

[$\because 0{\cdot}0352 < 0{\cdot}08$, প্রথম মূলটি $0{\cdot}32$ এর নিকটবর্তী]

$f(0{\cdot}31) = 2(0{\cdot}325)^2 - 7(0{\cdot}325) + 2$
$= 0.0222 > 0$

[$\because 0.0222 < 0{\cdot}0352$, প্রথম মূলটি $0{\cdot}31$ এর নিকটবর্তী]

$f(0{\cdot}314) = 2(0{\cdot}314)^2 - 7(0{\cdot}314) + 2$
$= -0.000808 < 0$

$f(0{\cdot}313) = 2(0{\cdot}313)^2 - 7(0{\cdot}313) + 2$
$= 0.0034938 > 0$

$\therefore$ প্রথম মূলের আসন্ন মান = $0{\cdot}314$

]3,3·5[ব্যবধিতে বিদ্যমান দ্বিতীয় মূলের আসন্ন মান নির্ণয়ঃ

$f(3{\cdot}1) = 2(3{\cdot}1)^2 - 7(3{\cdot}1) + 2 = -0{\cdot}48 < 0$

$f(3{\cdot}2) = 2(3{\cdot}2)^2 - 7(3{\cdot}2) + 2 = 0{\cdot}08 > 0$

$f(3{\cdot}17) = 2(3{\cdot}17)^2 - 7(3{\cdot}17) + 2$
$= -0{\cdot}0922 < 0$

$f(3{\cdot}19) = 2(3{\cdot}19)^2 - 7(3{\cdot}19) + 2$
$= 0{\cdot}0222 > 0$

$f(3{\cdot}18) = 2(3{\cdot}18)^2 - 7(3{\cdot}18) + 2$
$= -0{\cdot}0352 < 0$

$f(3{\cdot}185) = 2(3{\cdot}185)^2 - 7(3{\cdot}185) + 2$
$= -0{\cdot}00655 < 0$

$f(3{\cdot}186) = 2(3{\cdot}186)^2 - 7(3{\cdot}186) + 2$
$= -0{\cdot}000808 < 0$

$\therefore$ দ্বিতীয় মূলের আসন্ন মান = $3{\cdot}186$

ফলাফল : নির্ণেয় মূল দুইটি $0{\cdot}314$ (প্রায়) এবং $3{\cdot}186$ (প্রায়)

মন্তব্য : বিপরীত চিহ্নযুক্ত f(a) ও f(b) মানদ্বয়ের মধ্যে যদি f(b) শূন্যের অধিকতর নিকটবর্তী হয় তবে মূলের আসন্ন মান হবে x = b.

(b) $x^2 + 8x + 16 = 0$

পরীক্ষণ নং :	তারিখ :

পরীক্ষণের নাম ঃ লেখের সাহায্যে $f(x) = x^2 + 8x + 16 = 0$ সমীকরণের বাস্তব মূলের আসন্ন মান তিন দশমিক স্থান পর্যন্ত নির্ণয়।

মূলতত্ত্ব : লেখের উপর x = a এবং x = b এর জন্য,

(i) যদি f(a) এবং f(b) বিপরীত চিহ্নযুক্ত হয় তবে]a , b[ব্যবধির মধ্যে f(x) = 0 এর কমপক্ষে একটি অথবা বিজোড় সংখ্যক মূল থাকবে।

(ii) যদি f(a) এবং f(b) একই চিহ্নযুক্ত হয় তবে]a , b[ব্যবধির মধ্যে f(x) = 0 এর জোড় সংখ্যক মূল থাকবে অথবা কোন মূল থাকবেনা।

(iii) y = f(x) সমীকরণের লেখচিত্র x-অক্ষকে যে বিন্দুতে ছেদ বা স্পর্শ করে তার ভূজ f(x) = 0 সমীকরণের বাস্তব মূল হবে। যদি ভূজ ভগ্নাংশ হয় তবে সেই ভূজের আসন্ন মান f(x) = 0 সমীকরণের মূলের আসন্ন মান হবে।

(iv) যদি y = f(x) সমীকরণের লেখচিত্রটি x- অক্ষকে ছেদ বা স্পর্শ না করে তবে f(x) = 0 এর কোন বাস্তব মূল থাকবে না।

প্রয়োজনীয় উপকরণ ঃ (i) পেন্সিল (ii) স্কেল (iii) গ্রাফ পেপার (iv) ইরেজার (v) শার্পনার (vi) ক্যালকুলেটর ইত্যাদি।

কার্যপদ্ধতি ঃ

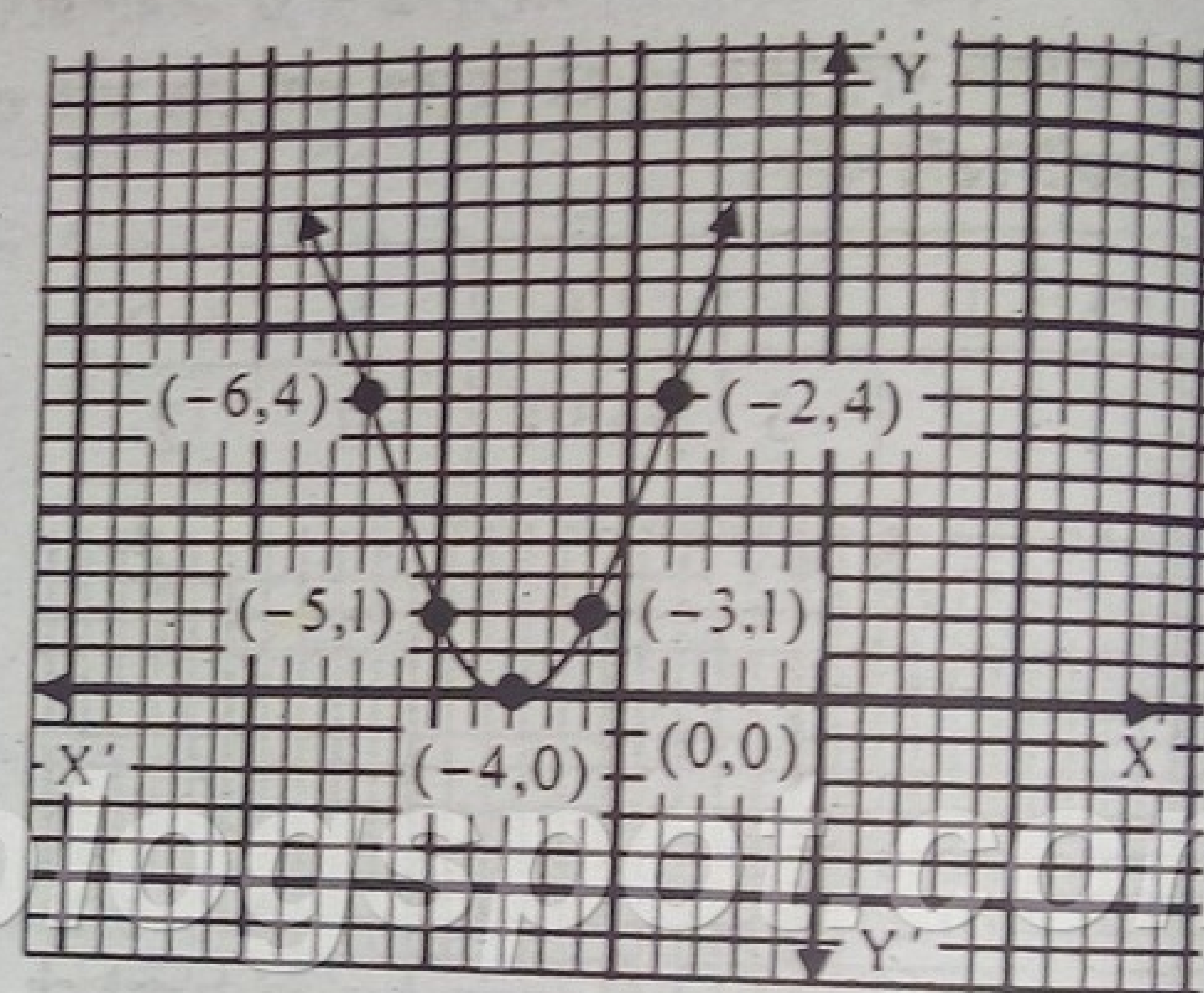
1. একটি ছক কাগজে স্থানাঙ্কের অক্ষ রেখা X'OX ও YOY' আঁকি।

2. $y = f(x) = x^2 + 8x + 16 = 0$ সমীকরণে x-এর কয়েকটি মান নিয়ে y-এর অনুরূপ মান বের করি ও নিচের ছকটি তৈরি করি।

x	−6	−5	−4	−3	−2
y	4	1	0	1	4

3. x-অক্ষ বরাবর ছোট বর্গের এক বাহু = 2 একক এবং y- অক্ষ বরাবর ছোট বর্গের 1 বাহু = 2 একক ধরে তালিকাভুক্ত বিন্দুগুলি ছক কাগজে স্থাপন করি এবং স্থাপিত বিন্দুগুলি মুক্ত হস্তে বক্রাকারে যোগ করে y = f(x) এর লেখচিত্র অঙ্কন করি।

4. লেখচিত্রটি যে সকল বিন্দুতে x-অক্ষকে ছেদ করে সে সকল বিন্দুর ভূজ নির্ণয় করে প্রদত্ত সমীকরণের বাস্তব মূল নির্ণয় করি।



মূলের মান নির্ণয়: লেখচিত্রটি x-অক্ষকে (−1,0) বিন্দুতে ছেদ করেছে। অতএব, f(x) এর একটি মূল = −1

লেখচিত্র হতে দেখা যাচ্ছে যে, f(x) এর অপর মূলদ্বয়]1, 2[ব্যবধি এবং]4, 6[ব্যবধিতে বিদ্যমান।

লেখচিত্রে দেখা যায় যে ইহা x-অক্ষকে (−4, 0) বিন্দুতে স্পর্শ করে। যেহেতু দ্বিঘাত সমীকরণের দুইটি মূল থাকে, সেহেতু সমীকরণটির সমাধান হবে x = −4, x = −4.

ফলাফল : নির্ণেয় মূল দুইটি −4, −4

(c) $-x^2 + 5x - 3 = 0$

পরীক্ষণ নং ৪	তারিখ ঃ

পরীক্ষণের নাম ঃ লেখের সাহায্যে $f(x) = -x^2 + 5x - 3$ সমীকরণের বাস্তব মূলের আসন্ন মান তিন দশমিক স্থান পর্যন্ত নির্ণয়।

মূলতত্ত্ব : লেখের উপর x = a এবং x = b এর জন্য,

(i) যদি f(a) এবং f(b) বিপরীত চিহ্নযুক্ত হয় তবে]a , b[ব্যবধির মধ্যে f(x) = 0 এর কমপক্ষে একটি অথবা বিজোড় সংখ্যক মূল থাকবে।

(ii) যদি f(a) এবং f(b) একই চিহ্নযুক্ত হয় তবে]a , b[ব্যবধির মধ্যে $f(x) = 0$ এর জোড় সংখ্যক মূল থাকবে অথবা কোন মূল থাকবেনা।

(iii) $y = f(x)$ সমীকরণের লেখচিত্র x-অক্ষকে যে বিন্দুতে ছেদ বা স্পর্শ করে তার ভূজ $f(x) = 0$ সমীকরণের বাস্তব মূল হবে। যদি ভূজ ভগ্নাংশ হয় তবে সেই ভূজের আসন্ন মান $f(x) = 0$ সমীকরণের মূলের আসন্ন মান হবে।

(iv) যদি $y = f(x)$ সমীকরণের লেখচিত্রটি x- অক্ষকে ছেদ বা স্পর্শ না করে তবে $f(x) = 0$ এর কোন বাস্তব মূল থাকবে না।

প্রয়োজনীয় উপকরণ ঃ (i) পেন্সিল (ii) স্কেল (iii) গ্রাফ পেপার (iv) ইরেজার (v) শার্পনার (vi) ক্যালকুলেটর ইত্যাদি।

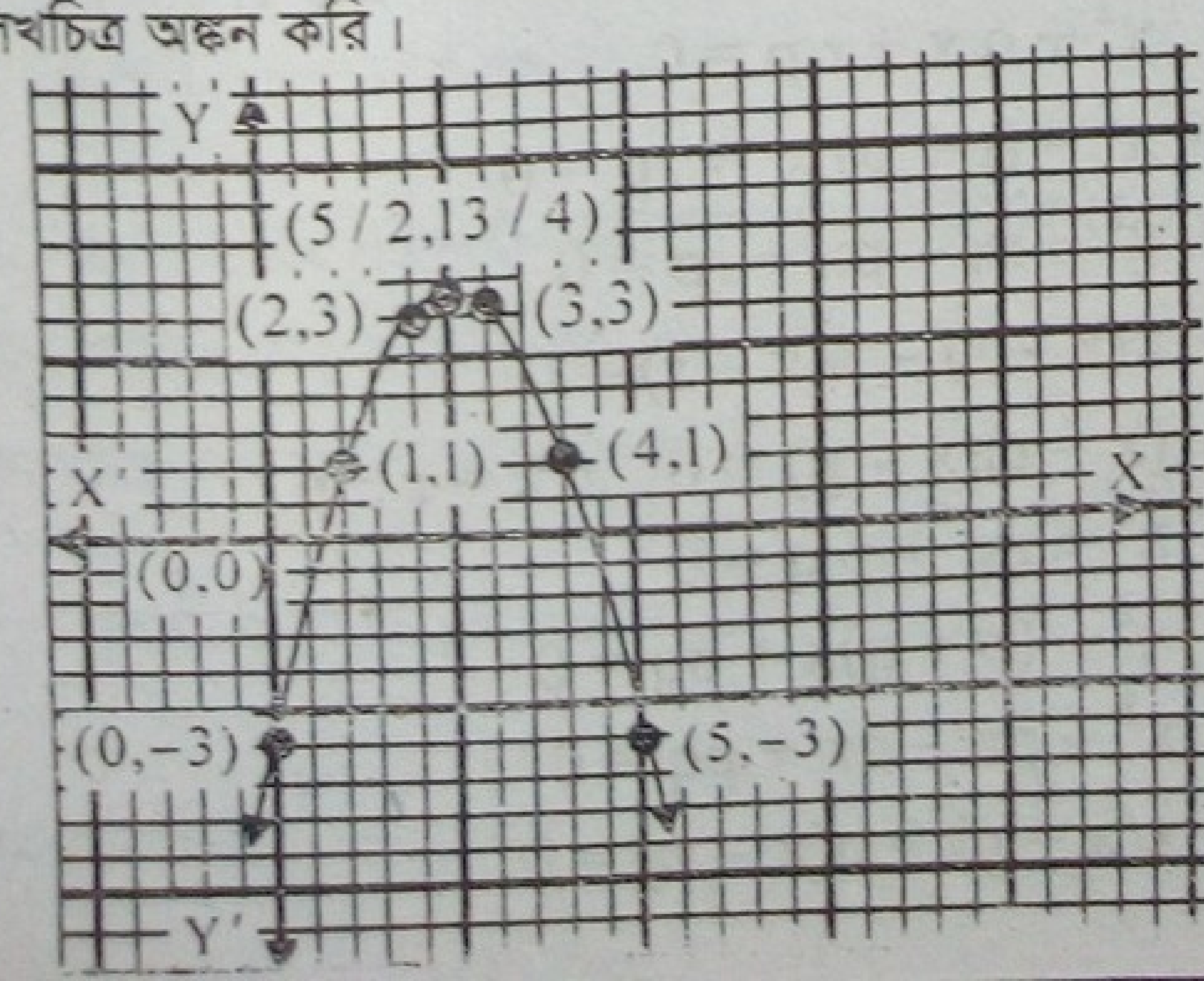
কার্যপদ্ধতি ঃ

1. একটি ছক কাগজে স্থানাঙ্কের অক্ষ রেখা X'OX ও YOY' আঁকি।

2. $y = f(x) = -x^2 + 5x - 3 = 0$ সমীকরণে x-এর কয়েকটি মান নিয়ে y-এর অনুরূপ মান বের করি ও নিচের ছকটি তৈরি করি।

x	0	1	2	5/2	3	4	5
y	−3	1	3	13/4	3	1	−3

3. x-অক্ষ বরাবর ছোট বর্গের এক বাহু = 2 একক এবং y- অক্ষ বরাবর ছোট বর্গের 4 বাহু = 1 একক ধরে তালিকাভুক্ত বিন্দুগুলি ছক কাগজে স্থাপন করি এবং স্থাপিত বিন্দুগুলি মুক্ত হস্তে বক্রাকারে যোগ করে $y = f(x)$ এর লেখচিত্র অঙ্কন করি।



4. লেখচিত্রটি যে সকল বিন্দুতে x-অক্ষকে ছেদ করে সে সকল বিন্দুর ভূজ নির্ণয় করে প্রদত্ত সমীকরণের বাস্তব মূল নির্ণয় করি।

মূলের মান নির্ণয়ঃ লেখচিত্র হতে দেখা যাচ্ছে যে, f(x) এর মূলদ্বয়]0, 1[ব্যবধি এবং]4, 5[ব্যবধিতে বিদ্যমান।

]0, 1[ব্যবধিতে বিদ্যমান প্রথম মূলের আসন্ন মান নির্ণয়ঃ

$f(0\cdot5) = -(0\cdot5)^2 + 5(0\cdot5) - 3 = -0\cdot75<0$

$f(0\cdot7) = -(0\cdot7)^2 + 5(0\cdot7) - 3 = 0\cdot01>0$

$f(0\cdot69) = -(0\cdot69)^2 + 5(0\cdot69) - 3$
$= -0\cdot0261<0$

$f(0\cdot697) = -(0\cdot697)^2 + 5(0\cdot697) - 3$
$= -0\cdot000809<0$

$f(0\cdot698) = -(0\cdot698)^2 + 5(0\cdot698) - 3$
$= 0\cdot002796<0$

∴ প্রথম মূলের আসন্ন মান = 0·697

]4, 5[ব্যবধিতে বিদ্যমান দ্বিতীয় মূলের আসন্ন মান নির্ণয়ঃ

$f(4\cdot3) = -(4\cdot3)^2 + 5(4\cdot3) - 3 = 0\cdot01<0$

$f(4\cdot4) = -(4\cdot4)^2 + 5(4\cdot4) - 3 = -0\cdot36<0$

$f(4\cdot31) = -(4\cdot31)^2 + 5(4\cdot31) - 3$
$= -0\cdot0261<0$

$f(4\cdot302) = -(4\cdot315)^2 + 5(4\cdot315) - 3$
$= 0\cdot002796>0$

$f(4\cdot303) = -(4\cdot315)^2 + 5(4\cdot315) - 3$
$= -0\cdot000809<0$

∴ দ্বিতীয় মূলের আসন্ন মান = 4·303

ফলাফল : নির্ণেয় মূল দুইটি 0·697 (প্রায়) এবং 4·303 (প্রায়)

মন্তব্য : বিপরীত চিহ্নযুক্ত f(a) ও f(b) মানদ্বয়ের মধ্যে যদি f(b) শূন্যের অধিকতর নিকটবর্তী হয় তবে মূলের আসন্ন মান হবে x = b.

অতিরিক্ত প্রশ্ন (সমাধানসহ)

1. $px^2 + 8(q-p)x + 4(4p - 8q + r) = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় $4 - 2\alpha$, $4 - 2\beta$ হলে α এবং β মূল বিশিষ্ট সমীকরণ নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ দেওয়া আছে, $4 - 2\alpha$ এবং $4 - 2\alpha$ $px^2 + 8(q-p)x + 4(4p - 8q + r) = 0$ সমীকরণের মূল।

$\therefore \ 4 - 2\alpha + 4 - 2\beta = -\dfrac{8(q-p)}{p}$

$\Rightarrow 8 - 2(\alpha + \beta) = -8.\dfrac{q}{p} + 8$

$\therefore \ \alpha + \beta = 4.\dfrac{q}{p}$ এবং

$(4 - 2\alpha)(4 - 2\beta) = \dfrac{1}{p}4(4p - 8q + r)$

$\Rightarrow 4(2 - \alpha)(2 - \beta) = \dfrac{1}{p}4(4p - 8q + r)$

$\Rightarrow 4 - 2(\alpha + \beta) + \alpha\beta = \dfrac{1}{p}(4p - 8q + r)$

$\Rightarrow 4 - 2.4.\dfrac{q}{p} + \alpha\beta = 4 - 8\dfrac{q}{p} + \dfrac{r}{p}$

$\Rightarrow \alpha\beta = \dfrac{r}{p}$

$\therefore$ নির্ণেয় সমীকরণ, $x^2 - (\alpha + \beta)x + \alpha\beta = 0$

$$\Rightarrow x^2 - 4\frac{q}{p}x + \frac{r}{p} = 0$$

$$\therefore \ px^2 - 4qx + r = 0 \ \text{(Ans.)}$$

2. α, β মূল বিশিষ্ট সমীকরণ নির্ণয় কর, যেখানে $\alpha + \beta = 2$ এবং $\alpha^2 + \beta^2 = 27$ হয়। [প্র.ভ.প.'৯২]

সমাধান ঃ দেওয়া আছে, $\alpha + \beta = 2$ এবং $\alpha^2 + \beta^2 = 27$

$\Rightarrow (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta = 27 \Rightarrow 4 - 2\alpha\beta = 27$

$\Rightarrow 2\alpha\beta = 4 - 27 \ \therefore \ \alpha\beta = -\dfrac{23}{2}$

$\therefore$ নির্ণেয় সমীকরণ, $x^2 - (\alpha + \beta)x + \alpha\beta = 0$

$$\Rightarrow x^2 - 2x + \left(-\frac{23}{2}\right) = 0$$

$$\therefore \ 2x^2 - 4x - 23 = 0 \ \text{(Ans.)}$$

3. α, β মূল বিশিষ্ট সমীকরণ নির্ণয় কর, যেখানে $\alpha + \beta = 7$ এবং $\dfrac{\beta}{\alpha} + \dfrac{\alpha}{\beta} + \dfrac{5}{2} = 0$ হয়। [প্র.ভ.প.'৯

সমাধান ঃ দেওয়া আছে, $\alpha + \beta = 7$ এবং

$\dfrac{\beta}{\alpha} + \dfrac{\alpha}{\beta} + \dfrac{5}{2} = 0$

$\Rightarrow \dfrac{\alpha^2 + \beta^2}{\alpha\beta} = -\dfrac{5}{2} \Rightarrow \dfrac{(\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta}{\alpha\beta} = -\dfrac{5}{2}$

$\Rightarrow \dfrac{49 - 2\alpha\beta}{\alpha\beta} = -\dfrac{5}{2} \Rightarrow 5\alpha\beta = -98 + 4\alpha\beta$

$\therefore \ \alpha\beta = -98$

$\therefore$ নির্ণেয় সমীকরণ, $x^2 - (\alpha + \beta)x + \alpha\beta = 0$

$\Rightarrow x^2 - 7x - 98 = 0$

4. $p + q + r = 0$ হলে প্রমাণ কর যে, $x^2 + px + qr = 0$, $x^2 + qx + rp = 0$ এবং $x^2 + rx + pq = 0$ সমীকরণত্রয়ের প্রতি জোড়ার একটি করে সাধারণ মূল আছে।

প্রমাণ ঃ দেওয়া আছে, $p + q + r = 0$

$\therefore \ p = -(q + r)$, $q = -(r + p)$, $r = -(p + q)$

এখন, $x^2 + px + qr = 0$

$\Rightarrow x^2 - (q + r)x + qr = 0$

$\Rightarrow x^2 - qx - rx + qr = 0$

$\Rightarrow x(x - q) - r(x - q) = 0$

$\Rightarrow (x - q)(x - r) = 0 \quad \therefore x = q, r.$

$x^2 + qx + rp = 0$

$\Rightarrow x^2 - (r + p)x + rp = 0$

$\Rightarrow x^2 - rx - px + rp = 0$

$\Rightarrow x(x - r) - p(x - r) = 0$

$\Rightarrow (x - r)(x - p) = 0 \quad \therefore x = r, p.$

$x^2 + rx + pq = 0$

$\Rightarrow x^2 - (p + q)x + pq = 0$

$\Rightarrow x^2 - px - qx + pq = 0$

$\Rightarrow x(x - p) - q(x - p) = 0$

$\Rightarrow (x-p)(x-q)=0$

$\therefore\ x = p, q.$

অতএব, প্রদত্ত সমীকরণত্রয়ের প্রতি জোড়ার একটি করে সাধারণ মূল আছে ।

2(b) যদি $x^2 + lx + m = 0$ ও $x^2 + mx + l = 0$ $(m \neq l)$ সমীকরণ দুইটির একটি সাধারণ বীজ থাকে, তাহলে $2x^2 + (l+m)x = (l+m)^2$ সমীকরণের বীজদ্বয় নির্ণয় কর। **[প্র.ভ.প.'৮৯]**

সমাধান ঃ মনে করি , প্রদত্ত সমীকরণদ্বয়ের সাধারণ মূলটি α । তাহলে ,

$\alpha^2 + l\alpha + m = 0 \cdots\cdots(1)$ এবং

$\alpha^2 + m\alpha + l = 0 \cdots\cdots(2)$

বজ্রগুণন প্রণালীর সাহায্যে আমরা পাই ,

$$\frac{\alpha^2}{l^2-m^2} = \frac{\alpha}{m-l} = \frac{1}{m-l}$$

$\therefore (m-l)^2 = (l^2-m^2)(m-l)$

$\Rightarrow (m-l)^2 = -(m-l)(m-l)(m+l)$

$\Rightarrow (m-l)^2(m+l+1) = 0$

$\therefore\ l + m + 1 = 0\quad [\because m \neq l]$

এখন, $2x^2 + (l+m)x = (l+m)^2$

$\Rightarrow 2x^2 - x - (-1)^2 = 0 \Rightarrow 2x^2 - x - 1 = 0$

$\Rightarrow 2x^2 - 2x + x - 1 = 0$

$\Rightarrow 2x(x-1) + 1(x-1) = 0$

$\Rightarrow (x-1)(2x+1) = 0$

$\therefore\ x = 1, -\dfrac{1}{2}$ (Ans.)

3. $4x^2 + 2x - 1 = 0$ সমীকরণের একটি মূল $\cos\alpha$ হলে দেখাও যে , অপর মূলটি $\cos 3\alpha$.

সমাধানঃ মনে করি , অপর মূলটি β .

$\therefore$ মূলদ্বয়ের সমষ্টি , $\cos\alpha + \beta = -\dfrac{1}{2}$

$\Rightarrow \beta = -\dfrac{1}{2} - \cos\alpha$

$4x^2 + 2x - 1 = 0$ সমীকরণের একটি মূল $\cos\alpha$ বলে

$4\cos^2\alpha + 2\cos\alpha - 1 = 0$

$\Rightarrow 4\cos^3\alpha + 2\cos^2\alpha - \cos\alpha = 0$

$\Rightarrow \cos3\alpha + 3\cos\alpha + \dfrac{1}{2}.4\cos^2\alpha - \cos\alpha = 0$

$[\because \cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha]$

$\Rightarrow \cos3\alpha + 2\cos\alpha + \dfrac{1}{2}.(1 - 2\cos\alpha) = 0$

$[\because 4\cos^2\alpha + 2\cos\alpha - 1 = 0\,]$

$\Rightarrow \cos3\alpha + 2\cos\alpha + \dfrac{1}{2} - \cos\alpha = 0$

$\Rightarrow \cos3\alpha = -\dfrac{1}{2} - \cos\alpha = \beta \quad \therefore \beta = \cos3\alpha$

অতএব , প্রদত্ত সমীকরণের অপর মূলটি $\cos3\alpha$.

ভর্তি পরীক্ষার MCQ ঃ

1. $x^2 - 5x + c = 0$ সমীকরণের একটি মূল 4 হলে অপর মূলটি– **[DU 08-09; JU 09-10]**

Sol^n : অপর মূলটি $= -\dfrac{-5}{1} - 4 = 5 - 4 = 1$

2. $2x^3 + px^2 + qx - 3 = 0$ সমীকরণের দুইটি মূল -3 এবং -1 হলে p এবং q এর মান–**[SUST 07-08]**

Sol^n : উভয় মূল দ্বারা সমীকরণ সিদ্ধ হবে।

$\therefore\ -54 + 9p - 3q - 3 = 0 \Rightarrow 3p - q = 19$

$-2 + p - q - 3 = 0 \Rightarrow p - q = 5$

$\therefore\ p = 7, q = 2$ (ক্যালকুলেটরের সাহায্যে)

3. $x^3 + 7x^2 - 10x - 16 = 0$ এর একটি মূল– **[SUST 07-08]**

Sol^n : ক্যালকুলেটরের সাহায্যে মূলগুলো 2, − 8, −1.

MODE 3 times 1 (EQN) 3 (Degree 3) 1 + 7 − 10 − 6 = $x_1 = 2$ = $x_2 = -8$

কৌশল ঃ $f(x)=0$ সমীকরণের মূলগুলো α,β,γ ⋯ হলে,

(a) $-\alpha,-\beta,-\gamma$ ⋯মূল বিশিষ্ট সমী. $f(-x)=0$

(b) $\frac{1}{\alpha},\frac{1}{\beta},\frac{1}{\gamma}$ ⋯মূল বিশিষ্ট সমী. $f(\frac{1}{x})=0$

(c) $\alpha+h,\beta+h,\gamma+h$ ⋯মূল বিশিষ্ট সমীকরণ $f(x-h)=0$.

(d) $\alpha-h,\beta-h,\gamma-h$ ⋯মূল বিশিষ্ট সমীকরণ $f(x+h)=0$.

4. $6x^2-5x+1=0$ সমীকরণের মূলদ্বয় α, β হলে $\frac{1}{\alpha},\frac{1}{\beta}$ মূল বিশিষ্ট সমীকরণটি হবে– [Jt.U 05-06; SUST 09-10]

Sol^n: $6(\frac{1}{x})^2-5(\frac{1}{x})+1=0$

$\Rightarrow x^2-5x+6=0$

5. $x^2-5x-1=0$ সমীকরণের মূলদ্বয় হতে 2 কম মূল বিশিষ্ট সমীকরণটি হল– [DU 07-08]

Sol^n: $(x+2)^2-5(x+2)-1=0$

$\Rightarrow x^2-x+7=0$

6. $x^2-2x+3=0$ সমীকরণের মূলদ্বয় α,β হলে $-\alpha,-\beta$ মূল বিশিষ্ট সমীকরণটি হবে– [DU 98-99, Jt.U 08-09]

Sol^n: $(-x)^2-2(-x)+3=0$

$\Rightarrow x^2+2x+3=0$

7. $3x^2-2x+1=0$ সমীকরণের মূলদ্বয়ের বর্গের সমষ্টি কত? [CU 06-007;IU 04-05; RU 08-09]

l^n: $\alpha+\beta=2/3$, $\alpha\beta=1/3$

$\therefore \alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)-4\alpha\beta=4/9-4/3$

$=-2/9$

কৌশল : ax^2+bx+c রাশির সর্বোচ্চ বা সর্বনিম্ন $c-\frac{b^2}{4a}$ হবে $x=-\frac{b}{2a}$ এর জন্য। $a>0, a<$ হলে প্রদত্ত রাশির যথাক্রমে সর্বনিম্ন ও সর্বোচ্চ মান হবে।

8. $5+3x-x^2$ এর সর্বোচ্চ মান–[DU,CU'08-09]

Sol^n: সর্বোচ্চ মান $=5-\frac{3^2}{4.(-1)}=5+\frac{9}{4}=\frac{29}{4}$

9. $3x-x^2-5$ এর গরিষ্ঠ মান – [Jt.U 08-09]

Sol^n: গরিষ্ঠ মান $=-5-\frac{9}{4(-1)}=-\frac{11}{4}$

10 $5-3x-x^2$ এর সর্বোচ্চ মান– [DU 10-11]

Sol^n: সর্বোচ্চ মান $=5-\frac{(-3)^2}{4.(-1)}=5+\frac{9}{4}=\frac{29}{4}$

11. x^2-3x+5 এর ন্যূনতম মান– [DU 03-04, 06-07; Jt.U 07-08; JU 09-10; RU 08-09]

Sol^n: ন্যূনতম মান $=5-\frac{9}{4.1}=\frac{11}{4}$

12. x^2-2x+5 এর ন্যূনতম মান– [BUET 09-10]

Sol^n: ন্যূনতম মান $=5-\frac{4}{4.1}=4$

13. $27x^4-195x^3+494x^2-520x+192=0$ সমীকরণের মূলগুলো গুণোত্তর প্রগমনন শ্রেণীভুক্ত হলে সমীকরণটি সমাধান কর।

A. 8/9, 2/3, 2, 3 (B) 8/9, 4/3, 2,3
(C) 8/9, 4/3, 3,4 (D) 8/9, 2/3, 8, 9