1. নিম্নের দ্বিপদ রাশিগুলোকে বিস্তৃত কর ঃ

(a) $(x+3y)^4 = x^4 + 4x^3 .3y + 6x^2 (3y)^2 + 4x(3y)^3 + (3y)^4$

$= x^4 + 12x^3y + 54x^2y^2 + 108xy^3 + 81y^4$

1(b) $(x + x^2 - 2x^3)^4 = x^4(1 + x - 2x^2)^4$

$= x^4 \{1 + (x - 2x^2)\}^4$

$= x^4\{1 + 4(x - 2x^2) + 6(x - 2x^2)^2 + 4(x - 2x^2)^3 + (x - 2x^2)^4\}$

$= x^4 [1 + 4x - 8x^2 + 6x^2(1 - 2x)^2 + 4x^3(1 - 2x)^3 + x^4(1 - 2x)^4]$

$= x^4 [1 + 4x - 8x^2 + 6x^2(1 - 4x + 4x^2) + 4x^3(1 - 6x + 12x^2 - 8x^3) + x^4\{1 - 4.2x + 6.(2x)^2 - 4.(2x)^3 + (2x)^4\}]$

$= x^4[1 + 4x - 8x^2 + 6x^2 - 24x^3 + 24x^4 + 4x^3 - 24x^4 + 48x^5 - 32x^6 + x^4\{1 - 8x + 24x^2 - 32x^3 + 16x^4\}]$

$= x^4[1 + 4x - 2x^2 - 20x^3 + 48x^5 - 32x^6 + x^4 - 8x^5 + 24x^6 - 32x^7 + 16x^8]$

$= x^4 [1 + 4x - 2x^2 - 20x^3 + x^4 + 40x^5 - 8x^6 - 32x^7 + 16x^8]$

2.(a) সমাধান ঃ $(1 - \frac{1}{x})^{10}$ এর বিস্তৃতিতে ৭ম পদ

$= (6+1)$তম পদ $= {}^{10}C_6(-\frac{1}{x})^6 = {}^{10}C_6 \frac{1}{x^6}$

2(b) সমাধান ঃ $(2x^{\frac{1}{2}} - y^{\frac{1}{3}})^{20}$ এর বিস্তৃতিতে ১৯তম পদ $= (18+1)$ তম পদ

$= {}^{20}C_{18} \left(2x^{\frac{1}{2}}\right)^{20-18} \left(-y^{\frac{1}{3}}\right)^{18}$

$= {}^{20}C_{18} \left(2x^{\frac{1}{2}}\right)^{2} \left(y^{\frac{1}{3}}\right)^{18} = {}^{20}C_2.4.x\, y^6$

$= \frac{20.19}{2}.4\, x\, y^6 = 760\, x\, y^6$ (Ans.)

3.(a) ধরি, $(2x - \frac{1}{4x^2})^{12}$ এর বিস্তৃতিতে $(r+1)$ তম পদটি x মুক্ত। [ব.'১২; ঢা.'০৭; সি.'১১; দি.'১২]

$(r+1)$ তম পদ $= {}^{12}C_r (2x)^{12-r} (-\frac{1}{4x^2})^r$

$= {}^{12}C_r\, 2^{12-r} x^{12-r} (-1)^r 2^{-2r}.x^{-2r}$

$= {}^{12}C_r\, 2^{12-r-2r} (-1)^r. x^{12-r-2r}$

$= {}^{12}C_r\, 2^{12-3r} (-1)^r. x^{12-3r}$

যেহেতু $(r+1)$তম পদটি x মুক্ত, অতএব এই পদে x এর ঘাত শূন্য হবে।

$\therefore\ 12 - 3r = 0 \Rightarrow 3r = 12 \Rightarrow r = 4$

$\therefore\ (4+1)$ অর্থাৎ, 5ম পদটি x মুক্ত এবং এর মান $= {}^{12}C_4.2^0.(-1)^4 = {}^{12}C_4 = 495$ (Ans.)

3(b) সমাধান ঃ ধরি, $(2x^3 - \frac{1}{x})^{12}$ এর বিস্তৃতিতে $(r+1)$তম পদটি x মুক্ত। [ঢা.'০২; দি.'১০]

এখানে $(r+1)$তম পদ $= {}^{12}C_r (2x^3)^{12-r} (-\frac{1}{x})^r$

$= {}^{12}C_r\, 2^{12-r} x^{36-3r} (-1)^r.x^{-r}$

$= {}^{12}C_r\, 2^{12-r} (-1)^r.x^{36-3r-r}$

$= {}^{12}C_r\, 2^{12-r} (-1)^r.x^{36-4r}$

যেহেতু $(r+1)$তম পদটি x মুক্ত, অতএব এই পদে x এর ঘাত শূন্য হবে।

$\therefore\ 36 - 4r = 0 \Rightarrow 4r = 36 \Rightarrow r = 9$

$\therefore\ (9+1)$ বা, 10ম পদটি x মুক্ত এবং এর মান

$= {}^{12}C_9.2^{12-9}.(-1)^9 = -{}^{12}C_3.2^3$

$= -220.8 = -1760$ (Ans.)

3(c) সমাধান ঃ ধরি, $\left(\frac{x^4}{y^3} + \frac{y^2}{2x}\right)^{10}$ এর বিস্তৃতিতে $(r+1)$তম পদটি y মুক্ত। [য.'০৩]

এখানে, $(r+1)$তম পদ $= {}^{10}C_r(\frac{x^4}{y^3})^{10-r}(\frac{y^2}{2x})^r$

$= {}^{10}C_r . x^{40-4r} y^{-30+3r} (y)^{2r} . 2^{-r} . x^{-r}$

$= {}^{10}C_r . 2^{-r} . x^{40-4r-r} . y^{-30+3r+2r}$

$= {}^{10}C_r . 2^{-r} . x^{40-5r} . y^{-30+5r}$

যেহেতু $(r+1)$তম পদটি y মুক্ত, অতএব এই পদে y-এর ঘাত শূন্য হবে।

$\therefore -30+5r=0 \Rightarrow 5r=30 \Rightarrow r=6$

$\therefore$ $(6+1)$তম বা, 7ম পদটি y মুক্ত এবং এর মান

$= {}^{10}C_6 . 2^{-6} . (x)^{40-30} = {}^{10}C_4 . 2^{-6} x^{10}$

$= 210 . \frac{1}{64} x^{10} = \frac{105}{32} x^{10}$ (Ans.)

3(d) $(\sqrt{x} - \frac{\sqrt{m}}{x^2})^{10}$ এর বিস্তৃতিতে x বর্জিত পদের মান 405 হলে, m এর মান নির্ণয় কর। [প্র.ভ.প.'০৭]

সমাধান ঃ মনে করি, প্রদত্ত বিস্তৃতিতে $(r+1)$ তম পদটি x মুক্ত।

এখানে, $(r+1)$তম পদ $= {}^{10}C_r (\sqrt{x})^{10-r} (-\frac{\sqrt{m}}{x^2})^r$

$= {}^{10}C_r . x^{\frac{1}{2}(10-r)} (-1)^r m^{\frac{r}{2}} x^{-2r}$

$= {}^{10}C_r . (-1)^r m^{\frac{r}{2}} x^{5-\frac{r}{2}-2r}$

$= {}^{10}C_r . (-1)^r m^{\frac{r}{2}} x^{5-\frac{5r}{2}}$

যেহেতু $(r+1)$তম পদটি x মুক্ত, অতএব এই পদে x এর ঘাত শূন্য হবে।

$\therefore 5 - \frac{5r}{2} = 0 \Rightarrow 5r = 10 \Rightarrow r = 2$

$\therefore$ $(2+1)$তম বা, ৩য় পদটি x মুক্ত এবং এর মান

$= {}^{10}C_2 . (-1)^2 . m^{\frac{2}{2}} = {}^{10}C_2 . m = 45m$

প্রশ্নমতে, $45m = 405 \therefore m = 9$ (Ans.)

3(e) প্রমাণ ঃ ধরি, $\left(x^p + \frac{1}{x^p}\right)^{2n}$ এর বিস্তৃতিতে $(r+1)$তম পদটি x মুক্ত। [টেক্সটাইল'০৮-০৯]

$(r+1)$তম পদ $= {}^{2n}C_r (x^p)^{2n-r} (\frac{1}{x^p})^r$

$= {}^{2n}C_r x^{2pn-pr} . x^{-pr}$

$= {}^{2n}C_r x^{2pn-pr-pr}$

$= {}^{2n}C_r x^{2pn-2pr} = {}^{2n}C_r x^{2p(n-r)}$

$n = r$ হলে $(r+1)$ তম পদ $= {}^{2r}C_r x^{2p(r-r)} = {}^{2r}C_r$

$\therefore$ $n = r$ হলে, প্রদত্ত বিস্তৃতিতে সর্বদা একটি x বর্জিত পদ থাকবে।

$n = 5$ হলে x বর্জিত পদের মান $= {}^{10}C_5 = 252$

4. নিম্নের বিস্তৃতিতে ধ্রুব পদটির মান নির্ণয় কর ঃ

(a) $(\frac{1}{x^2} - x)^{18}$ [ঢা.'০৩; রা.'০৫; কু.'০৫]

ধরি, প্রদত্ত বিস্তৃতিতে $(r+1)$তম পদটি ধ্রুব পদ।

$(r+1)$ তম পদ $= {}^{18}C_r (\frac{1}{x^2})^{18-r} (-x)^r$

$= {}^{18}C_r x^{-36+2r} (-1)^r x^r$

$= (-1)^r \, {}^{18}C_r x^{-36+2r+r}$

$= (-1)^r \, {}^{18}C_r x^{-36+3r}$

যেহেতু $(r+1)$তম পদটি ধ্রুব পদ, অতএব এই পদে x-এর ঘাত শূন্য হবে।

$\therefore -36+3r=0 \Rightarrow 3r=36 \Rightarrow r=12$

অতএব, $(12+1)$ বা, 13তম পদটি ধ্রুব পদ এবং এর মান $= (-1)^{12} \, {}^{18}C_{12} = {}^{18}C_6 = 18564$

4(b) $(x - \frac{1}{x})^{2n}$; যেখানে $n \in \mathbb{N}$

ধরি, প্রদত্ত বিস্তৃতিতে $(r+1)$ তম পদটি ধ্রুব পদ।

$(r+1)$ তম পদ $= {}^{2n}C_r (x)^{2n-r} (-\frac{1}{x})^r$

$= {}^{2n}C_r . x^{2n-r} (-1)^r x^{-r} = (-1)^r \, {}^{2n}C_r . x^{2n-r-r}$

$= (-1)^r \, {}^{2n}C_r . x^{2n-2r}$

যেহেতু $(r+1)$তম পদটি ধ্রুব পদ, অতএব এই পদে x-এর ঘাত শূন্য হবে।

$\therefore\ 2n - 2r = 0 \Rightarrow 2r = 2n \Rightarrow r = n$

অতএব, $(n+1)$তম পদটি ধ্রুব পদ এবং এর মান $= (-1)^n\ {}^{2n}C_n$ (Ans.)

4(c) $(x + 2 + \frac{1}{x})^n$; যেখানে $n \in \mathbb{N}$

Sol^n. এখানে $(x + 2 + \frac{1}{x})^n = \frac{1}{x^n}(x^2 + 2x + 1)^n$

$= \frac{1}{x^n}\{(1+x)^2\}^n = \frac{1}{x^n}(1+x)^{2n}$

এখন ধরি, প্রদত্ত বিস্তৃতিতে $(r+1)$তম পদটি ধ্রুব পদ।

$(r+1)$তম পদ $= \frac{1}{x^n}\ {}^{2n}C_r(x)^r = {}^{2n}C_r.\ x^{r-n}$

যেহেতু $(r+1)$তম পদটি ধ্রুব পদ, অতএব এই পদে x-এর ঘাত শূন্য হবে।

$\therefore\ r - n = 0 \Rightarrow r = n$

অতএব, $(n+1)$তম পদটি ধ্রুব পদ এবং এর মান $= {}^{2n}C_n$ (Ans.)

4 (d) $(1+4x)^p(1 + \frac{1}{4x})^q$

$= (1+4x)^p(\frac{1}{4x})^q(1+4x)^q$

$= \frac{1}{4^q}x^{-q}(1+4x)^{p+q}$

ধরি, প্রদত্ত বিস্তৃতিতে $(r+1)$ তম পদটি ধ্রুব পদ।

$(r+1)$ তম পদ $= \frac{1}{4^q}x^{-q}\ {}^{p+q}C_r(4x)^r$

$= {}^{p+q}C_r.\frac{1}{4^q}x^{-q}.4^r.\ x^r$

$= {}^{p+q}C_r.4^{r-q}.x^{r-q}$

যেহেতু $(r+1)$তম পদটি ধ্রুব পদ, অতএব এই পদে x-এর ঘাত শূন্য হবে।

$\therefore\ r - q = 0 \Rightarrow r = q$

অতএব, $(q+1)$ তম পদটি ধ্রুব পদ এবং এর মান $= {}^{p+q}C_q$

4(e) $(x^2 - 2 + \frac{1}{x^2})^6$ [য.'০৭; কু.'১৩]

$(x^2 - 2 + \frac{1}{x^2})^6 = \{(x - \frac{1}{x})^2\}^6 = (x - \frac{1}{x})^{12}$

মনে করি, প্রদত্ত বিস্তৃতিতে $(r+1)$তম পদটি ধ্রুব পদ।

$(r+1)$ তম পদ $= {}^{12}C_r(x)^{12-r}(-\frac{1}{x})^r$

$= {}^{12}C_r(-)^r(x)^{12-2r}$

যেহেতু $(r+1)$তম পদটি ধ্রুব পদ, অতএব এই পদে x-এর ঘাত শূন্য হবে।

$\therefore\ 12 - 2r = 0 \Rightarrow r = 6$

অতএব, $(6+1)$ বা, 7ম পদটি ধ্রুব পদ এবং এর মান $= {}^{12}C_6(-1)^6 = 924$

4(f) $(2x^2 - \frac{1}{2x^3})^{10}$ [ঢা.'০৯ ; চুয়েট'০৮–০৯]

ধরি, প্রদত্ত বিস্তৃতিতে $(r+1)$তম পদটি ধ্রুব পদ।

$(r+1)$ তম পদ $= {}^{10}C_r(2x^2)^{10-r}(-\frac{1}{2x^3})^r$

$= {}^{10}C_r(2)^{10-r}x^{20-2r-3r}(-\frac{1}{2})^r$

যেহেতু $(r+1)$তম পদটি ধ্রুব পদ, অতএব এই পদে x-এর ঘাত শূন্য হবে।

$\therefore\ 12 - 2r - 3r = 0 \Rightarrow r = 4$

অতএব, $(4+1)$ বা, 5ম পদটি ধ্রুব পদ এবং এর মান $= {}^{10}C_4 2^{10-4}(-\frac{1}{2})^4 = 840$

4(g) $(x^3 + \frac{1}{x^6})^{15}$ [টেক্সটাইল'১১-১২]

সমাধান : ধরি, প্রদত্ত বিস্তৃতিতে $(r+1)$তম পদটি ধ্রুব পদ।

$(r+1)$ তম পদ $= {}^{15}C_r(x^3)^{15-r}(\frac{1}{x^6})^r$

$= {}^{15}C_r x^{45-3r}x^{-6r} = {}^{15}C_r x^{45-9r}$

যেহেতু (r + 1)তম পদটি ধ্রুব পদ, সেহেতু এই পদে x-এর ঘাত শূন্য হবে।

$\therefore \; 45 - 9r = 0 \Rightarrow r = 5$

অতএব, (5 + 1) বা, ৬ষ্ঠ পদটি ধ্রুব পদ এবং এর মান $= {}^{15}C_5 = 3003$

5(a) $(x^2 + \frac{2y}{x})^{10}$ এর বিস্তৃতিতে x^8 এর সহগ নির্ণয় কর। [চ.'০১;য.'০২]

সমাধান ঃ এখানে, প্রদত্ত বিস্তৃতিতে (r + 1)তম পদ

$= {}^{10}C_r (x^2)^{10-r} (\frac{2y}{x})^r$

$= {}^{10}C_r \, x^{20-2r} . (2y)^r \, x^{-r}$

$= {}^{10}C_r . (2y)^r . x^{20-3r}$.

যদি এ পদে x^8 থাকে তবে, $20 - 3r = 8$

$\Rightarrow 3r = 20 - 8 = 12 \; \therefore r = 4$

$\therefore$ নির্ণেয় সহগ $= {}^{10}C_4 . (2y)^4 = 210.16 \; y^4$

$= 3360y^4$ (Ans.)

5(b) $(2x^2 - \frac{3}{x})^{11}$ এর বিস্তৃতিতে x^{10} এর সহগ নির্ণয় কর। [কু.'০৮; চ.'০৭; সি.'০৫; রা.'০৬,'১৩; দি.'১১]

সমাধান ঃ এখানে, প্রদত্ত বিস্তৃতিতে (r + 1)তম পদ

$= {}^{11}C_r (2x^2)^{11-r} (-\frac{3}{x})^r$

$= (-1)^r \, {}^{11}C_r . 2^{11-r} x^{22-2r} . 3^r x^{-r}$

$= (-1)^r \, {}^{11}C_r . 2^{11-r} . 3^r . x^{22-3r}$.

যদি এ পদে x^{10} থাকে তবে, $22 - 3r = 10$

$\Rightarrow 3r = 22 - 10 = 12 \; \therefore r = 4$

$\therefore$ নির্ণেয় সহগ $= (-1)^4 . {}^{11}C_4 . 2^{11-4} . 3^4$

$= {}^{11}C_4 . 2^7 . 3^4$ (Ans.)

5(c) $(2x^2 - \frac{3}{x})^{15}$ এর বিস্তৃতিতে x^{18} এর সহগ নির্ণয় কর। [রা.'০১; কু.'১০]

সমাধান ঃ এখানে, প্রদত্ত বিস্তৃতিতে (r + 1)তম পদ

$= {}^{15}C_r (2x^2)^{15-r} (-\frac{3}{x})^r$

$= (-1)^r \, {}^{15}C_r . 2^{15-r} x^{30-2r} . 3^r x^{-r}$

$= (-1)^r \, {}^{15}C_r . 2^{15-r} . 3^r . x^{30-3r}$.

যদি এ পদটিতে x^{18} থাকে তবে, $30 - 3r = 18$

$\Rightarrow 3r = 30 - 18 = 12 \; \therefore r = 4$

$\therefore$ নির্ণেয় সহগ $= (-1)^4 . {}^{15}C_4 . 2^{15-4} . 3^4$

$= {}^{15}C_4 . 2^{11} . 3^4$ (Ans.)

5(d) $(x^3 - \frac{1}{x^4})^{15}$ এর বিস্তৃতিতে x^{-18} এর সহগ নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ এখানে, প্রদত্ত বিস্তৃতিতে (r + 1)তম পদ

$= {}^{15}C_r (x^3)^{15-r} (-\frac{1}{x^4})^r$

$= {}^{15}C_r (-1)^r . x^{45-3r} . x^{-4r}$

$= {}^{15}C_r (-1)^r . x^{45-7r}$.

যদি এ পদটিতে x^{-18} থাকে তবে, $45 - 7r = -18$

$\Rightarrow 7r = 45 + 18 = 63 \; \therefore r = 9$

$\therefore$ নির্ণেয় সহগ $= {}^{15}C_9 (-1)^9 . = -5005$ (Ans.)

6(a) $(a + 2x)^5$ এর বিস্তৃতিতে x^3 এর সহগ 320 হলে, a এর মান নির্ণয় কর। [ঢা.'০৫; চুয়েট'০৯-১০]

সমাধান ঃ এখানে, প্রদত্ত বিস্তৃতিতে (r + 1)তম পদ

$= {}^5C_r . a^{5-r} (2x)^r = {}^5C_r . a^{5-r} . 2^r . x^r$

যদি এ পদটিতে x^3 থাকে তবে, r = 3

$\therefore \; x^3$ এর সহগ $= {}^5C_3 . a^{5-3} \, 2^3$

$= 10.8.a^2 = 80 \, a^2$

প্রশ্নমতে, $80 \, a^2 = 320 \Rightarrow a^2 = \frac{320}{80} = 4$

$\therefore \; a = \pm 2$ (Ans.)

6(b) $(1 - x)^8 (1 + x)^7$ এর বিস্তৃতিতে x^7 এর সহগ নির্ণয় কর। [য.'০৬]

$(1 - x)^8 (1 + x)^7 = (1 - x)(1 - x)^7 (1 + x)^7$

$= (1-x)(1-x^2)^7$

$= (1-x)\{1-{}^7C_1(x^2)+{}^7C_2(x^2)^2-{}^7C_3(x^2)^3 + {}^7C_4(x^2)^4-{}^7C_5(x^2)^5+{}^7C_6(x^2)^6+(x^2)^7\}$

$\therefore x^7$ এর সহগ $=(-1)(-1)\,{}^7C_3 = 35$

6(c) $n \in \mathbb{N}$ এর জন্য, $(1-x^2)^n$ এর বিস্তৃতিতে x^{2r} এর সহগ নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ এখানে, প্রদত্ত বিস্তৃতিতে $(r+1)$তম পদ $={}^nC_r.(-x^2)^r = {}^nC_r.(-1)^r x^{2r}$.

$\therefore x^{2r}$ এর সহগ $= {}^nC_r.(-1)^r = (-1)^r \dfrac{n!}{r!(n-r)!}$

6(d) n এর মান কত হলে, $(1+x)^n$ এর বিস্তৃতিতে x, x^2 এবং x^3 এর সহগগুলো একটি সমান্তর প্রগমন ভুক্ত হবে?

$(1+x)^n = 1+{}^nC_1x+{}^nC_2x^2+{}^nC_3x^3+\cdots+x^n$

$\therefore$ প্রদত্ত বিস্তৃতিতে x, x^2 এবং x^3 এর সহগ যথাক্রমে ${}^nC_1$ $\cdot$ ${}^nC_2$ এবং ${}^nC_3$

প্রশ্নমতে, ${}^nC_1+{}^nC_3 = 2\,{}^nC_2$

$\Rightarrow \dfrac{{}^nC_1}{{}^nC_2}+\dfrac{{}^nC_3}{{}^nC_2} = 2$ [${}^nC_2$ দ্বারা ভাগ করে।]

$\Rightarrow \dfrac{2}{n-2+1}+\dfrac{n-3+1}{3} = 2$

$\left[\because \dfrac{{}^nC_r}{{}^nC_{r-1}} = \dfrac{n-r+1}{r}\right]$

$\Rightarrow \dfrac{2}{n-1}+\dfrac{n-2}{3} = 2 \Rightarrow \dfrac{6+n^2-3n+2}{3(n-1)} = 2$

$\Rightarrow n^2-3n+8 = 6n-6$

$\Rightarrow n^2-9n+14 = 0$

$\Rightarrow n^2-7n-2n+14 = 0$

$\Rightarrow n(n-7)-2(n-7) = 0$

$\Rightarrow (n-2)(n-7) = 0 \quad \therefore n = 2, 7.$

কিন্তু $n \neq 2$, কারণ যদি $n = 2$ হয়, তবে প্রদত্ত বিস্তৃতিতে x^3 সম্বলিত কোন পদ থাকবে না।

$\therefore n = 7$ (Ans.)

6(e) $(x+3)^{15}$ এর বিস্তৃতিতে x^r এবং x^{r+1} এর সহগ দুইটি সমান হলে, r এর মান নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ এখানে, প্রদত্ত বিস্তৃতিতে

$(r+1)$তম পদ $= {}^{15}C_r3^{15-r}.x^r$ এবং

$\{(r+1)+1\}$তম পদ $= {}^{15}C_{r+1}3^{15-(r+1)}.x^{r+1}$

$= {}^{15}C_{r+1}3^{15-r-1}.x^{r+1}.$

$\therefore x^r$ এবং x^{r+1} এর সহগ যথাক্রমে ${}^{15}C_r3^{15-r}$ এবং ${}^{15}C_{r+1}3^{15-r-1}$

প্রশ্নমতে, ${}^{15}C_r3^{15-r} = {}^{15}C_{r+1}3^{14-r}$

$\Rightarrow \dfrac{{}^{15}C_{r+1}}{{}^{15}C_r} = 3^{15-r-14+r}$

$\Rightarrow \dfrac{15-(r+1)+1}{r+1} = 3 \quad \left[\because \dfrac{{}^nC_r}{{}^nC_{r-1}} = \dfrac{n-r+1}{r}\right]$

$\Rightarrow 15-r = 3r+3 \Rightarrow 4r = 12 \quad \therefore r = 3$ (Ans.)

6(f) $(1+x+x^3)^9$ এর বিস্তৃতিতে x^5 এর সহগ নির্ণয় কর।

$(1+x+x^3)^9 = \{(1+x)+x^3\}^9$

$= (1+x)^9+{}^9C_1(1+x)^8.x^3+{}^9C_2(1+x)^7.x^6+\cdots\cdots$

$= (1+{}^9C_1x+\cdots\cdots+{}^9C_5x^5+\cdots\cdots+x^9\}+{}^9C_1\{1+{}^8C_1x+{}^8C_2x^2+\cdots+x^8)x^3+\cdots$

$\therefore x^5$ এর সহগ $= {}^9C_5+{}^9C_1.{}^8C_2 = 126+9.28$

$= 126+252 = 378$ (Ans.)

6(g) যদি $(1+x)(a-bx)^{12}$ এর বিস্তৃতিতে x^8 এর সহগ শূন্য হয়, তবে $\dfrac{a}{b}$ এর অনুপাতের মান নির্ণয় কর।

[বুয়েট'০৫-০৬]

সমাধান : $(1+x)(a-bx)^{12}$

$= (1 + x)(a^{12} + {}^{12}C_1 a^{12-1}.(-bx)^1 + {}^{12}C_2 a^{12-2}.(-bx)^2 + \dots \dots + {}^{12}C_7 a^{12-7}.(-bx)^7 + {}^{12}C_8 a^{12-8}.(-bx)^8 + \dots \dots + (-bx)^{12}$

$\therefore$ x^8 এর সহগ $= {}^{12}C_8 a^4.b^8 - {}^{12}C_7 a^5.b^7 = 0$

$\Rightarrow {}^{12}C_4 b = {}^{12}C_5 a \Rightarrow \frac{12!}{4!\,8!}b = \frac{12!}{5!\,7!}a$

$\therefore \frac{a}{b} = \frac{5}{8}$ (Ans.)

7(a) $(2x^2 + \frac{3}{x})^{19}$ এর বিস্তৃতিতে x^{38-3r} এবং x^{35-3r} এর সহগ দুইটি পরস্পর সমান হলে, r এর মান নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ প্রদত্ত বিস্তৃতিতে $(r+1)$তম পদ

$= {}^{19}C_r.(2x^2)^{19-r}.(\frac{3}{x})^r$

$= {}^{19}C_r.2^{19-r}.3^r.x^{38-2r}.x^{-r}$

$= {}^{19}C_r.2^{19-r}.3^r.x^{38-3r}$ এবং

$\{(r+1)+1\}$তম পদ

$= {}^{19}C_{r+1}.(2x^2)^{19-r-1}.(\frac{3}{x})^{r+1}$

$= {}^{19}C_{r+1}.2^{18-r}.3^{r+1}.x^{36-2r}.x^{-r-1}$

$= {}^{19}C_{r+1}.2^{18-r}.3^{r+1}.x^{35-3r}$

$\therefore$ x^{38-3r} এবং x^{35-3r} এর সহগ যথাক্রমে ${}^{19}C_r.2^{19-r}.3^r$ এবং ${}^{19}C_{r+1}.2^{18-r}.3^{r+1}$

প্রশ্নমতে, ${}^{19}C_r.2^{19-r}.3^r = {}^{19}C_{r+1}.2^{18-r}.3^{r+1}$

$$\Rightarrow \frac{{}^{19}C_{r+1}}{{}^{19}C_r} = \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{19-(r+1)+1}{r+1} = \frac{2}{3}$$

$$[\because \frac{{}^nC_r}{{}^nC_{r-1}} = \frac{n-r+1}{r}]$$

$$\Rightarrow \frac{19-r}{r+1} = \frac{2}{3} \Rightarrow 57 - 3r = 2r + 2$$

$\Rightarrow 5r = 55 \therefore r = 11$ (Ans.)

7(b) $(x^2 + \frac{1}{\sqrt{x}})^n$ এর বিস্তৃতিতে x^r এর সহগ নির্ণয় কর এবং যে শর্ত সাপেক্ষে এরূপ একটি পদ থাকে তা নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ এখানে, প্রদত্ত বিস্তৃতিতে $(p+1)$তম পদ

$= {}^nC_p(x^2)^{n-p}(\frac{1}{\sqrt{x}})^p = {}^nC_p.x^{2n-2p}.x^{-\frac{p}{2}}$

$= {}^nC_p.x^{2n-2p-\frac{p}{2}} = {}^nC_p.x^{\frac{4n-5p}{2}}$

যদি এ পদটিতে x^r থাকে তবে,

$r = \frac{4n-5p}{2} \Rightarrow 2r = 4n - 5p$

$\Rightarrow 5p = 2(2n + r) \quad \therefore p = \frac{2(2n-r)}{5}$

যেহেতু $p \in \mathbb{N}$, অতএব এরূপ একটি পদ থাকবে যদি $2(2n-r)$ এর একটি উৎপাদক 5 হয়।

$\therefore$ নির্ণেয় সহগ $= {}^nC_{\frac{2(2n-r)}{5}}$

$$= \frac{n!}{\{\frac{2(2n-r)}{5}\}!\{n - \frac{2(2n-r)}{5}\}!}$$

$$= \frac{n!}{\left(\frac{4n-2r)}{5}\right)!\left(\frac{n+2r}{5}\right)!} \text{ (Ans.)}$$

7(c) যদি $(1+x)^{20}$ এর বিস্তৃতিতে x^r এর সহগ x^{r-1} এর সহগের দ্বিগুণ হয়, তাহলে r এর মান নির্ণয় কর।

প্রদত্ত বিস্তৃতিতে x^r এবং x^{r-1} এর সহগ যথাক্রমে ${}^{20}C_r$ এবং ${}^{20}C_{r-1}$

প্রশ্নমতে, ${}^{20}C_r = 2.{}^{20}C_{r-1}$

$$\Rightarrow \frac{{}^{20}C_r}{{}^{20}C_{r-1}} = 2$$

$\Rightarrow \frac{20-r+1}{r} = 2 \quad [\because \frac{^nC_r}{^nC_{r-1}} = \frac{n-r+1}{r}]$

$\Rightarrow 21 - r = 2r \Rightarrow 3r = 21 \quad \therefore r = 7$ (Ans.)

7(d) যদি $(2x^2 + \frac{k}{x^3})^{10}$ এর বিস্তৃতিতে x^5 এবং x^{15} এর সহগ দুইটি সমান হয়, তাহলে k এর মান নির্ণয় কর।

[বুয়েট'০০-০১; টেক্সটাইল'০১-০২; কুয়েট'১০-১১]

সমাধান ঃ প্রদত্ত বিস্তৃতিতে (r + 1)তম পদ

$= {}^{10}C_r (2x^2)^{10-r} \cdot (\frac{k}{x^3})^r$

$= {}^{10}C_r 2^{10-r} x^{20-2r} k^r x^{-3r}$

$= {}^{10}C_r 2^{10-r} k^r x^{20-5r}$

এই পদে x^5 থাকলে, $20 - 5r = 5 \Rightarrow r = 3$

$\therefore x^5$ এর সহগ $= {}^{10}C_3 2^{10-3} k^3 = 120 \times 2^7 k^3$

আবার, এই পদে x^{15} থাকলে, $20 - 5r = 15 \Rightarrow r = 1$

$\therefore x^{15}$ এর সহগ $= {}^{10}C_1 2^{10-1} k = 10 \times 2^9 k$

প্রশ্নমতে, $120 \times 2^7 k^3 = 10 \times 2^9 k$

$\Rightarrow k^2 = \frac{4}{12} = \frac{1}{3} \quad \therefore k = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$ (Ans.)

8(a) x এর ঘাতের উর্ধ্বক্রম অনুসারে $(1+x^2)(1+x)^n$ এর বিস্তৃতিতে x^3 এর সহগ x এর সহগের ছয়গুণ। $n \in \mathbb{N}$ এর মান নির্ণয় কর এবং এই মানের জন্য x^4 এর মান নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ $(1 + x^2)(1 + x)^n = (1 + x^2)(1 + {}^nC_1 x + {}^nC_2 x^2 + {}^nC_3 x^3 + {}^nC_4 x^4 + \ldots\ldots + x^n)$

$\therefore$ x এর সহগ $= {}^nC_1$ এবং

x^3 এর সহগ $= {}^nC_1 + {}^nC_3$

প্রশ্নমতে, $6\,{}^nC_1 = {}^nC_1 + {}^nC_3$

$\Rightarrow 5\,{}^nC_1 = {}^nC_3$

$\Rightarrow 5n = \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}$

$\Rightarrow 5n = \frac{n(n^2-3n+2)}{6}$

$\Rightarrow 30n = n^3 - 3n^2 + 2n$

$\Rightarrow n^2 - 3n + 2 - 30 = 0$

$\Rightarrow n^2 - 3n - 28 = 0$

$\Rightarrow n^2 - 7n + 4n - 28 = 0$

$\Rightarrow n(n-7) + 4(n-7) = 0$

$\Rightarrow (n-7)(n+4) = 0 \quad \therefore n = 7, -4$

কিন্তু n ঋণাত্মক হতে পারেনা। $\therefore n = 7$

এখন, x^4 এর সহগ $= {}^nC_2 + {}^nC_4 = {}^7C_2 + {}^7C_4$

$= 21 + 35 = 56$

8(b) $n \in \mathbb{N}$ এর জন্য প্রমাণ কর যে, $(x^2 + 2x + 2)^n$ এর বিস্তৃতিতে x^2 এবং x^3 এর সহগ দুইটি যথাক্রমে $2^{n-1} n^2$ এবং $\frac{2^{n-1}}{3} n(n^2 - 1)$

প্রমাণ ঃ $(x^2 + 2x + 2)^n = \{x^2 + 2(1+x)\}^n$

$= \{2(1+x) + x^2\}^n$

$= 2^n(1+x)^n + {}^nC_1 . 2^{n-1} . (1+x)^{n-1} . x^2 + {}^nC_2 . 2^{n-2} . (1+x)^{n-2} . x^4 + \ldots\ldots\ldots$

$= 2^n\{1 + {}^nC_1 x + {}^nC_2 x^2 + {}^nC_3 x^3 + \ldots\ldots\}$
$+ {}^nC_1 . 2^{n-1}\{1 + {}^{n-1}C_1 x + \cdots\}x^2 + \ldots\ldots$

$\therefore x^2$ এর সহগ $= 2^n . {}^nC_2 + {}^nC_1 . 2^{n-1}$

$= 2.2^{n-1}\frac{n(n-1)}{2} + 2^{n-1}n$

$= 2^{n-1}\{n^2 - n + n\}$

$= 2^{n-1} n^2$ (প্রমাণিত)

x^3 এর সহগ $= 2^n . {}^nC_3 + {}^nC_1 . 2^{n-1} . {}^{n-1}C_1$

$= 2^n \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} + 2^{n-1} n.(n-1)$

$= 2^{n-1}\{2 . \frac{n(n^2-3n+2)}{6} + n^2 - n\}$

$= 2^{n-1}\frac{1}{3}\{n^3 - 3n^2 + 2n + 3n^2 - 3n\}$

$= \frac{2^{n-1}}{3}\{n^3 - n\} = \frac{2^{n-1}}{3}n(n^2-1)$..(প্রমাণিত)

8(c) $(1+x)^n$ এর বিস্তৃতিতে x^{r-1}, x^r এবং x^{r+1} এর সহগগুলো যদি সমান্তরাল প্রগমনে থাকে তবে প্রমাণ কর যে, $n^2 - n(4r+1) + 4r^2 - 2 = 0$

প্রদত্ত বিস্তৃতিতে x^{r-1}, x^r এবং x^{r+1} এর সহগ যথাক্রমে $^nC_{r-1}$, ^nC_r এবং $^nC_{r+1}$.

প্রশ্নমতে, $^nC_{r-1} + {^nC_{r+1}} = 2.{^nC_r}$

$\Rightarrow \frac{^nC_{r-1}}{^nC_r} + \frac{^nC_{r+1}}{^nC_r} = 2$ [^nC_r দ্বারা ভাগ করে।]

$\Rightarrow \frac{r}{n-r+1} + \frac{n-(r+1)+1}{r+1} = 2$

$[\because \frac{^nC_r}{^nC_{r-1}} = \frac{n-r+1}{r}]$

$\Rightarrow \frac{r^2 + r + n^2 - 2nr + r^2 + n - r}{(n-r+1)(r+1)} = 2$

$\Rightarrow 2r^2 + n^2 - 2nr + n = 2(nr + n - r^2 + 1)$

$\Rightarrow 2r^2 + n^2 - 2nr + n - 2nr - 2n + 2r^2 - 2 = 0$

$\Rightarrow n^2 + 4r^2 - 4nr - n - 2 = 0$

$\therefore n^2 - n(4r-1) + 4r^2 - 2 = 0$ (Proved)

8(d) $m, n \in \mathbb{N}$ হলে দেখাও যে, $(1+x)^{m+n}$ এর বিস্তৃতিতে x^m এবং x^n এর সহগ সমান হবে।

প্রমাণ ঃ প্রদত্ত বিস্তৃতিতে x^m এর সহগ $= {^{m+n}C_m}$

$= \frac{(m+n)!}{m!(m+n-m)!} = \frac{(m+n)!}{m!n!}$ এবং

x^n এর সহগ $= {^{m+n}C_n} = \frac{(m+n)!}{n!(m+n-n)!}$

$= \frac{(m+n)!}{n!m!} = \frac{(m+n)!}{m!n!}$

x^m এবং x^n এর সহগ সমান । (Proved)

8(e) $(1+x)^{2n+1}$ এর বিস্তৃতিতে x^r এবং x^{r+1} এর সহগ সমান হলে, r এর মান নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ প্রদত্ত বিস্তৃতিতে x^r এবং x^{r+1} এর সহগ যথাক্রমে $^{2n+1}C_r$ এবং $^{2n+1}C_{r+1}$

প্রশ্নমতে, $^{2n+1}C_r = {^{2n+1}C_{r+1}}$

$\Rightarrow r + r + 1 = 2n + 1 \Rightarrow 2r = 2n \quad \therefore r = n$

8(f) $(1+2x)^{20}$ এর বিস্তৃতিতে x^{r-1} এর সহগ C_r হলে এবং $C_{r+2} = 4C_r$ হলে, r মান নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ প্রদত্ত বিস্তৃতিতে r তম পদ

$= \{(r-1)+1\}$তম পদ $= {^{10}C_{r-1}}.2^{r-1}x^{r-1}$

$\therefore x^{r-1}$ এর সহগ, $C_r = {^{10}C_{r-1}}.2^{r-1}$

$\therefore C_{r+2} = 2^{(r+2)-1}.{^{10}C_{(r+2)-1}}$

$= 2^{r+1}.{^{10}C_{r+1}}$

প্রশ্নমতে, $C_{r+2} = 4C_r$

$\Rightarrow 2^{r+1}.{^{10}C_{r+1}} = 4.2^{r-1}.{^{10}C_{r-1}}$

$\Rightarrow 2^2.2^{r-1}.{^{10}C_{r+1}} = 2^2.2^{r-1}.{^{10}C_{r-1}}$

$\Rightarrow {^{10}C_{r+1}} = {^{10}C_{r-1}}$

$\therefore r + 1 + r - 1 = 10 \Rightarrow 2r = 10$

$\therefore r = 5$ (Ans.)

9. (i) নিম্নের বিস্তৃতিতে মধ্যপদ (মধ্যপদসমূহ) নির্ণয় কর ঃ

(a) $\left(\frac{a}{x} + \frac{x}{a}\right)^{2n+1}$ [চ.'০২; সি.'০৯]

সমাধান ঃ এখানে, (2n + 1) বিজোড় সংখ্যা বলে মধ্যপদ দুইটি এবং $\frac{2n+1+1}{2}$ i.e.,(n + 1)তম ও (n+1 + 1) i.e. (n + 2)তম পদ দুইটি মধ্যপদ।

$\therefore (n+1)$তম পদ $= {^{2n+1}C_n}\left(\frac{a}{x}\right)^{2n+1-n}\left(\frac{x}{a}\right)^n$

$= {^{2n+1}C_n}\left(\frac{a}{x}\right)^{n+1}\left(\frac{x}{a}\right)^n = {^{2n+1}C_n}\frac{a}{x}$

$(n+2)$তম পদ $= {}^{2n+1}C_{n+1}\left(\frac{a}{x}\right)^{2n+1-n-1}\left(\frac{x}{a}\right)^{n+1}$

$= {}^{2n+1}C_{n+1}\left(\frac{a}{x}\right)^{n}\left(\frac{x}{a}\right)^{n+1} = {}^{2n+1}C_{n+1}\frac{x}{a}$

$\therefore$ নির্ণেয় মধ্যপদ ${}^{2n+1}C_n\frac{a}{x}$ এবং ${}^{2n+1}C_{n+1}\frac{x}{a}$

9(i) (b) $\left(3x^2-\frac{1}{2x}\right)^{10}$ **[কু.'০৪]**

সমাধান ঃ 10 জোড় সংখ্যা বলে মধ্যপদ একটি এবং $(\frac{10}{2}+1)$ i.e. 6তম পদটি মধ্যপদ।

$\therefore$ প্রদত্ত বিস্তৃতিতে মধ্যপদ = 6 অর্থাৎ (5 +1) তম পদ $= {}^{10}C_5(3x^2)^{10-5}(-\frac{1}{2x})^5$

$= -{}^{10}C_5 \cdot 3^5 . x^{10} . \frac{1}{2^5x^5} = -{}^{10}C_5\left(\frac{3x}{2}\right)^5$

9(c) $\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)^{21}$ [কুয়েট'০৪-০৫]

21 বিজোড় সংখ্যা বলে মধ্যপদ দুইটি এবং $\frac{21+1}{2}$ i.e.11তম ও (11 + 1) i.e.12তম পদ দুইটি মধ্যপদ।

$\therefore$ 11তম পদ $= {}^{21}C_{10}\left(\frac{x}{y}\right)^{21-10}\left(\frac{y}{x}\right)^{10}$

$= {}^{21}C_{10}\left(\frac{x}{y}\right)^{11}\left(\frac{y}{x}\right)^{10} = {}^{21}C_{10}.\frac{x}{y}$

12তম পদ $= {}^{21}C_{11}\left(\frac{x}{y}\right)^{21-11}\left(\frac{y}{x}\right)^{11}$

$= {}^{21}C_{11}\left(\frac{x}{y}\right)^{10}\left(\frac{y}{x}\right)^{11} = {}^{21}C_{11}\frac{y}{x}$

$\therefore$ প্রদত্ত বিস্তৃতিতে মধ্যপদ ${}^{21}C_{10}.\frac{x}{y}$ এবং ${}^{21}C_{11}\frac{y}{x}$

(d) $(x^2-2+\frac{1}{x^2})^n = \{(x-\frac{1}{x})^2\}^n = (x-\frac{1}{x})^{2n}$

2n জোড় সংখ্যা বলে মধ্যপদ একটি এবং $(\frac{2n}{2}+1)$ i.e.(n + 1)তম পদটি মধ্যপদ।

$\therefore$ প্রদত্ত বিস্তৃতিতে মধ্যপদ $= {}^{2n}C_n(x)^{2n-n}(-\frac{1}{x})^n$

$= (-1)^n . {}^{2n}C_n . x^n . \frac{1}{x^n} = (-1)^n . {}^{2n}C_n$

(ii) যদি $(2x+\frac{1}{6x})^6$ এবং $(x+\frac{1}{3x})^{2n}$ এর বিস্তৃতিতে মধ্যপদদ্বয় সমান হয়, তবে $n \in \mathbb{N}$ এর মান নির্ণয় কর। **[প্র.ভ.প.'৯২]**

সমাধান ঃ 6 ও 2n জোড় সংখ্যা বলে প্রদত্ত বিস্তৃতি দুইটির মধ্যপদ যথাক্রমে $(\frac{6}{2}+1) = 4$র্থ এবং $(\frac{2n}{2}+1) = (n+1)$ তম পদ।

$(2x+\frac{1}{6x})^6$ বিস্তৃতিতে ৪র্থ পদ = (3 + 1) তম পদ

$= {}^6C_3(2x)^{6-3}(\frac{1}{6x})^3 = {}^6C_3 \times 2^3 \times \frac{1}{2^3 3^3}$

$= {}^6C_3 \times \frac{1}{3^3}$

$(x+\frac{1}{3x})^{2n}$ বিস্তৃতিতে (n + 1) তম পদ

$= {}^{2n}C_n x^{2n-n}(\frac{1}{3x})^n = {}^{2n}C_n x^n \frac{1}{3^n x^n}$

$= {}^{2n}C_n \frac{1}{3^n}$

প্রশ্নমতে, ${}^{2n}C_n\frac{1}{3^n} = {}^6C_3 \times \frac{1}{3^3} = {}^{2\times3}C_3 \times \frac{1}{3^3}$

$\therefore n = 3$ (Ans.)

10(a) $(1+x)^{20}$ এর বিস্তৃতিতে (2r +1) তম এবং (r + 3) তম পদের সহগ সমান হলে, r এর মান নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ প্রদত্ত বিস্তৃতিতে (2r + 1)তম এবং (r + 3) i.e. {(r + 2) + 1}তম পদের সহগ যথাক্রমে $^{20}C_{2r}$ এবং $^{20}C_{r+2}$

প্রশ্নমতে , $^{20}C_{2r} = {}^{20}C_{r+2}$

$\Rightarrow 2r + r + 2 = 20 \Rightarrow 3r = 18 \;\therefore r = 6$

10(b) $(a+3x)^n$ এর বিস্তৃতিতে প্রথম তিনটি পদ যথাক্রমে $b, \frac{21}{2}bx$ এবং $\frac{189}{4}bx^2$ হলে, a ,b এবং n এর মান নির্ণয় কর। [ঢা '০২, '০৬; রা.'০৪,'১২; ব.'০৫; চ.'০৬; সি.'০৮,'১৩; য.'১১; কু.'১২]

সমাধান ঃ $(a+3x)^n = a^n + n\,a^{n-1}.3x + \frac{n(n-1)}{2!}a^{n-2}.3^2.x^2 + \ldots\ldots$

প্রশ্নমতে , $b = a^n \cdots\cdots (1)$,

$\frac{21}{2}bx = n\,a^{n-1}.3x \Rightarrow 7b = 2na^{n-1} \cdots (2)$

এবং $\frac{189}{4}bx^2 = \frac{n(n-1)}{2!}a^{n-2}.3^2.x^2$

$\Rightarrow 21b = 2(n^2 - n)\,a^{n-2} \cdots\cdots\cdots (3)$

$(2) \div (1) \Rightarrow 7 = \frac{2na^{n-1}}{a^n} = \frac{2n}{a}$

$\Rightarrow 7a = 2n \cdots\cdots (4)$

$(3) \div (2) \Rightarrow 3 = \frac{2n(n-1)a^{n-2}}{2na^{n-1}}$

$\Rightarrow 3 = \frac{n-1}{a} \Rightarrow 3a = n - 1$

$\Rightarrow n = 3a + 1 \cdots\cdots (5)$

(4) ও (5) হতে আমরা পাই , $7a = 2(3a+1)$

$\Rightarrow 7a - 6a = 2 \Rightarrow a = 2$

$\therefore n = 3 \times 2 + 1 = 7$

(1) নং হতে আমরা পাই, $b = 2^7 = 128$

অতএব, $a = 2$, $b = 128$, $n = 7$

10(c) $(1+x)^{24}$ এর বিস্তৃতিতে দুইটি ক্রমিক পদ নির্ণয় কর যাদের সহগের অনুপাত 4 : 1 হবে।

সমাধান ঃ ধরি, (r + 1)তম এবং (r + 2)তম পদ দুইটি নির্ণেয় পর্যায়ক্রমিক পদ ।

প্রদত্ত বিস্তৃতিতে (r + 1)তম এবং (r + 2)তম পদ দুইটি যথাক্রমে $^{24}C_r x^r$ এবং $^{24}C_{r+1} x^{r+1}$.

প্রশ্নমতে, $^{24}C_r : {}^{24}C_{r+1} = 4 : 1$

$\Rightarrow {}^{24}C_r = 4.\,{}^{24}C_{r+1} \Rightarrow \frac{^{24}C_{r+1}}{^{24}C_r} = \frac{1}{4}$

$\Rightarrow \frac{24-(r+1)+1}{r+1} = \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{24-r}{r+1} = \frac{1}{4}$

$\Rightarrow r + 1 = 96 - 4r$

$\Rightarrow 5r = 95 \Rightarrow r = 19$

$\therefore$ নির্ণেয় পদ দুইটি (19 +1) i.e. 20তম এবং (19 + 2) i.e. 21তম পদ ।

আবার , $^{24}C_{r+1} : {}^{24}C_r = 4 : 1$ হলে ,

$\frac{4}{24-r} = \frac{1}{r+1} \Rightarrow 4r + 4 = 24 - r$

$\Rightarrow 5r = 20 \Rightarrow r = 4$

$\therefore$ নির্ণেয় পদ দুইটি (4 + 1) i.e. 5ম এবং (4 + 2) i.e. 6ষ্ঠ পদ ।

অতএব , নির্ণেয় পদ দুইটি 5ম ও 6ষ্ঠ পদ অথবা 20তম ও 21তম পদ ।

10(d) $(1+x)^{10}$ এর বিস্তৃতিতে (4r + 5) তম পদের সহগ (2r + 1) তম পদের সহগের সমান হলে, r এর মান নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ প্রদত্ত বিস্তৃতিতে (4r + 5) তম এবং (2r + 1) তম পদের সহগ যথাক্রমে $^{10}C_{4r+4}$ এবং $^{10}C_{2r}$

প্রশ্নমতে , $^{10}C_{4r+4} = {}^{10}C_{2r} \Rightarrow 4r + 4 + 2r = 10 \Rightarrow 6r = 6 \quad \therefore r = 1$

10(e) $(1+x)^n$ এর বিস্তৃতিতে $(r+1)$ তম পদের সহগ $(r+3)$ তম পদের সহগের সমান হলে দেখাও যে, $2r = n-2$ $(n \in \mathbb{N})$ [কু.'০৬]

প্রমাণ ঃ প্রদত্ত বিস্তৃতিতে,

$(r+1)$তম পদের সহগ $= {}^nC_r$ এবং

$(r+3)$তম পদের সহগ $= {}^nC_{r+2}$

প্রশ্নমতে, ${}^nC_r = {}^nC_{r+2}$

$\Rightarrow r + r + 2 = n \quad \therefore 2r = n-2$ (Showed)

10(f) $(x+a)^n$ এর বিস্তৃতিতে প্রথম তিনটি পদ যথাক্রমে 729, 7290 এবং 30375 হলে a এর মান নির্ণয় কর। [বুয়েট'১২-১৩]

সমাধানঃ $(x+a)^n = x^n + nax^{n-1} + \dfrac{n(n-1)}{2!}x^{n-2}a^2 + \cdots + a^n$

প্রশ্নমতে, $x^n = 729 \cdots$(i), $nax^{n-1} = 7290 \cdots$(ii)

$\dfrac{n(n-1)}{2!}x^{n-2}a^2 = 30375 \cdots \cdots$ (iii)

(i) $\div$ (ii) $\Rightarrow \dfrac{x}{na} = \dfrac{1}{10} \cdots\cdots$(iv)

(ii) $\div$ (iii) $\Rightarrow \dfrac{2x}{a(n-1)} = \dfrac{7290}{30375} = \dfrac{6}{25} \cdots$(v)

(iv) $\div$ (v) $\Rightarrow \dfrac{x}{na} \times \dfrac{a(n-1)}{2x} = \dfrac{1}{10} \times \dfrac{25}{6}$

$\dfrac{n-1}{2n} = \dfrac{5}{12} \Rightarrow 6n - 6 = 5n \Rightarrow n = 6$

(i) হতে, $x^6 = 729 = 3^6 \Rightarrow x = 3$

(iv) হতে, $\dfrac{3}{6a} = \dfrac{1}{10} \quad \therefore a = \dfrac{30}{6} = 5$ (Ans.)

10(g) r এর কোন মানের জন্য $(2x^2 + \frac{3}{x})^{19}$ এর বিস্তৃতিতে $(r+1)$ তম এবং $(r+2)$ তম পদের সহগ পরস্পর সমান হবে? [বুয়েট'০৮-০৯]

সমাধানঃ প্রদত্ত বিস্তৃতিতে $(r+1)$ তম পদের সহগ $= {}^{19}C_r.2^{19-r}.3^r$ এবং $(r+2)$ অর্থাৎ $\{(r+1)+1\}$ তম পদের সহগ $= {}^{19}C_{r+1}.2^{19-r-1}.3^{r+1}$

প্রশ্নমতে, ${}^{19}C_r.2^{19-r}.3^r = {}^{19}C_{r+1}.2^{19-r-1}.3^{r+1}$

$\Rightarrow \dfrac{19!}{(19-r)!\,r!}.2 = \dfrac{19!}{(19-r-1)!\,(r+1)!}.3$

$\Rightarrow \dfrac{2}{19-r} = \dfrac{3}{r+1} \Rightarrow 2r + 2 = 57 - 3r$

$\Rightarrow 5r = 55 \quad \therefore r = 11$ (Ans.)

11(a) দেখাও যে, $(1+x)^{n+1}$ এর বিস্তৃতিতে $(r+1)$ তম পদের সহগ $(1+x)^n$ এর বিস্তৃতিতে r তম এবং $(r+1)$ তম পদের সহগ দুইটির যোগফলের সমান।

প্রমাণ : $(1+x)^{n+1}$ এর বিস্তৃতিতে $(r+1)$তম পদের সহগ $= {}^{n+1}C_r$

$(1+x)^n$ এর বিস্তৃতিতে rতম ও $(r+1)$তম পদের সহগ যথাক্রমে ${}^nC_{r-1}$ এবং ${}^nC_r$.

এখন, ${}^nC_{r-1} + {}^nC_r = {}^nC_r\left(\dfrac{{}^nC_{r-1}}{{}^nC_r} + 1\right)$

$= {}^nC_r\left(\dfrac{r}{n-r+1} + 1\right) \quad [\because \dfrac{{}^nC_r}{{}^nC_{r-1}} = \dfrac{n-r+1}{r}]$

$= \dfrac{n!}{r!(n-r)!}\left(\dfrac{r+n-r+1}{n-r+1}\right)$

$= \dfrac{n!(n+1)}{r!(n-r)!(n-r+1)} = \dfrac{(n+1)!}{r!(n-r+1)!} = {}^{n+1}C_r$

$\therefore {}^{n+1}C_r = {}^nC_{r-1} + {}^nC_r$ (Showed)

11(b) যদি $(1+x)^{20}$ এর বিস্তৃতিতে r তম পদের সহগ $(r+4)$ তম পদের সহগের সমান হয়, তাহলে r এর মান নির্ণয় কর। [প্র.ভ.প.'৮৫]

সমাধান ঃ প্রদত্ত বিস্তৃতিতে rতম পদরে সহগ $= {}^{20}C_{r-1}$

এবং $(r+4)$তম পদের সহগ $= {}^{20}C_{r+3}$

প্রশ্নমতে, ${}^{20}C_{r-1} = {}^{20}C_{r+3} \Rightarrow r - 1 + r + 3 = 20$

$\Rightarrow 2r = 18 \quad \therefore r = 9$

11(c) $(1+x)^n$ বিস্তৃতিতে তিনটি ক্রমিক পদের সহগের অনুপাত 1:7:42 হলে, n এর মান নির্ণয় কর; যেখানে $n \in \mathbb{N}$.

সমাধান ঃ মনে করি, প্রদত্ত বিস্তৃতিতে r তম, (r +1) তম এবং (r + 2)তম ক্রমিক পদ তিনটির সহগের অনুপাত 1 : 7 : 42

$\therefore$ T_r এর সহগ : T_{r+1} এর সহগ = 1 : 7

$\Rightarrow \frac{T_{r+1} \text{ এর সহগ}}{T_r \text{ এর সহগ}} = 7 \Rightarrow \frac{n-r+1}{r} = 7$

$\Rightarrow 7r = n - r + 1 \Rightarrow 8r = n + 1 \Rightarrow r = \frac{n+1}{8}$

আবার, T_{r+1} এর সহগ : T_{r+2} এর সহগ = 7 : 42

$\Rightarrow \frac{T_{r+2} \text{ এর সহগ}}{T_{r+1} \text{ এর সহগ}} = \frac{42}{7} \Rightarrow \frac{n-r}{r+1} = 6$

$\Rightarrow 6r + 6 = n - r \Rightarrow 7r = n - 6 \Rightarrow r = \frac{n-6}{7}$

$\therefore \frac{n+1}{8} = \frac{n-6}{7} \Rightarrow 8n - 48 = 7n + 7$

$\therefore n = 55$ (Ans.)

(d) $(4x+3)^{34}$ এর বিস্তৃতিতে দুইটি ক্রমিক পদের সহগ সমান হলে,এপদ দুইটির x এর ঘাত নির্ণয় কর। [য. ০৫]

সমাধানঃ ধরি, প্রদত্ত বিস্তৃতিতে (r + 1)তম এবং {(r + 1) + 1} তম পদ দুইটির সহগ সমান।

প্রদত্ত বিস্তৃতিতে (r +1)তম এবং {(r +1) + 1} তম পদের সজগ যথাক্রমে $^{34}C_r \cdot 3^{34-r} \cdot 4^r$ এবং $^{34}C_{r+1} \cdot 3^{34-r-1} \cdot 4^{r+1}$

$\therefore$ $^{34}C_r \cdot 3^{34-r} \cdot 4^r = {^{34}C_{r+1}} \cdot 3^{34-r-1} \cdot 4^{r+1}$

$\Rightarrow \frac{^{34}C_{r+1}}{^{34}C_r} = \frac{3}{4}$

$\Rightarrow \frac{34-(r+1)+1}{r+1} = \frac{3}{4}$ $[\because \frac{^nC_r}{^nC_{r-1}} = \frac{n-r+1}{r}]$

$\Rightarrow 136 - 4r = 3r + 3$

$\Rightarrow 7r = 133 \Rightarrow r = 19$

$\therefore$ এ পদ দুইটির x এর ঘাত 19 এবং 20 (Ans.)

12. $n \in \mathbb{N}$ হলে, $(x^p - \frac{1}{x^p})^{2n}$ বিস্তৃতির শেষ প্রান্ত হতে (n + 1) তম পদ নির্ণয় কর।

সমাধানঃ $(x^p - \frac{1}{x^p})^{2n}$ এর বিস্তৃতিতে শেষ প্রান্ত হতে (n + 1)তম পদ এবং $(-1)^{2n}(\frac{1}{x^p} - x^p)^{2n}$ i.e $(\frac{1}{x^p} - x^p)^{2n}$ এর বিস্তৃতিতে শুরু থেকে (n + 1)তম পদ একই ।

$\therefore$ নির্ণেয় পদ $= {^{2n}C_n} (\frac{1}{x^p})^{2n-n} (-x^p)^n$

$= {^{2n}C_n} (\frac{1}{x^p})^n (-1)^n \cdot (x^p)^n = (-1)^n \, {^{2n}C_n}$

$= (-1)^n \frac{(2n)!}{n!(2n-n)!} = (-1)^n \frac{(2n)!}{n!n!}$

$= (-1)^n \frac{(2n)!}{(n!)^2}$

13(a) যদি $(1+x)^n$ বিস্তৃতিতে S_1 এবং S_2 যথাক্রমে বিজোড় ও জোড় স্থানের পদগুলোর সমষ্টি হয়, তবে দেখাও যে, $(1-x^2)^n = S_1^2 - S_2^2$; যেখানে $n \in \mathbb{N}$

প্রমাণ ঃ $(1+x)^n = {^nC_0} + {^nC_1}x + {^nC_2}x^2 + {^nC_3}x^3 + \ldots\ldots + {^nC_n}x^n$ এবং

$(1-x)^n = {^nC_0} - {^nC_1}x + {^nC_2}x^2 - {^nC_3}x^3 + \ldots\ldots + (-1)^n \, {^nC_n}x^n$

প্রশ্নমতে, ${^nC_0} + {^nC_2}x^2 + {^nC_4}x^4 + \ldots\ldots = S_1$

এবং ${^nC_1}x + {^nC_3}x^3 + {^nC_5}x^5 + \ldots\ldots = S_2$.

$\therefore (1+x)^n = S_1 + S_2 \ldots\ldots(1)$ এবং

$(1-x)^n = S_1 - S_2 \ldots\ldots\ldots(2)$

(1) এবং (2) গুণ করে আমরা পাই ,

$(1+x)^n(1-x)^n = (S_1 + S_2)(S_1 - S_2)$

$\therefore (1-x^2)^n = S_1^2 - S_2^2$ (Showed)

13(b) প্রমাণ : L.H. S. = [প্র.ভ.প. '৮৮]

$$\{1+n+\frac{n(n-1)}{2!}+\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}+\cdots\}$$

$$\{1+2n+\frac{2n(2n-1)}{2!}+\frac{2n(2n-1)(2n-2)}{3!}+\cdots\}$$

$= (1+1)^n (1+1)^{2n} = (1+1)^{n+2n}$

$= (1+1)^{3n}$

$$= \{1+3n+\frac{3n(3n-1)}{2!}+\frac{3n(3n-1)(3n-2)}{3!}+\cdots\}$$

= R.H.S. (Proved)

14. $n \in \mathbb{N}$ **এবং** $(1+x)^n = C_0 + C_1x + C_2x^2 + C_3x^3 + \cdots\cdots + C_nx^n$ **হলে, প্রমাণ কর যে,**

(a) $C_0^2 + C_1^2 + C_2^2 + C_3^2 + \cdots\cdots + C_n^2 = \dfrac{(2n)!}{(n!)^2}$

দেওয়া আছে,

$(1+x)^n = C_0 + C_1x + C_2x^2 + C_3x^3 + \cdots + C_nx^n$

$(x+1)^n = C_0x^n + C_1x^{n-1} + C_2x^{n-2} + \cdots + C_n$

$\therefore (1+x)^n (x+1)^n = (C_0 + C_1x + C_2x^2 + C_3x^3 + \cdots\cdots + C_nx^n)(C_0x^n + C_1x^{n-1} + C_2x^{n-2} + \cdots\cdots + C_n)$

$(1+x)^{2n} = (C_0 + C_1x + C_2x^2 + C_3x^3 + \cdots + C_nx^n)(C_0x^n + C_1x^{n-1} + C_2x^{n-2} + \cdots + C_n)$

উভয় পক্ষ হতে x^n এর সহগ সমীকৃত করে পাই,

${}^{2n}C_n = C_0^2 + C_1^2 + C_2^2 + C_3^2 + \cdots\cdots + C_n^2$

$\therefore C_0^2 + C_1^2 + C_2^2 + C_3^2 + \cdots\cdots + C_n^2 = \dfrac{(2n)!}{(n!)^2}$

(b) $C_0C_n + C_1C_{n-1} + \cdots\cdots + C_0C_n = \dfrac{(2n)!}{(n!)^2}$

দেওয়া আছে,

$(1+x)^n = C_0 + C_1x + C_2x^2 + C_3x^3 + \cdots + C_nx^n$

$(1+x)^n = C_nx^n + C_{n-1}x^{n-1} + \cdots + C_1x + C_0$

$\therefore (1+x)^n(1+x)^n = (C_0 + C_1x + C_2x^2 + C_3x^3 + \cdots + C_nx^n)(C_nx^n + C_{n-1}x^{n-1} + \cdots + C_1x + C_0)$

$(1+x)^{2n} = (C_0 + C_1x + C_2x^2 + C_3x^3 + \cdots + C_nx^n)$ $(C_nx^n + C_{n-1}x^{n-1} + \cdots + C_1x + C_0)$

উভয় পক্ষ হতে x^n এর সহগ সমীকৃত করে পাই,

${}^{2n}C_n = C_0C_n + C_1C_{n-1} + \cdots\cdots + C_0C_n$

$\therefore C_0C_n + C_1C_{n-1} + \cdots\cdots + C_0C_n = \dfrac{(2n)!}{(n!)^2}$

14(c) $C_1 + 2C_2 + 3C_3 + \cdots + nC_n = n.2^{n-1}$

L.H.S. $= C_1 + 2C_2 + 3C_3 + \cdots + nC_n$

$$= n + 2.\frac{n(n-1)}{2} + 3.\frac{n(n-1)(n-2)}{3!} + \cdots + n$$

$$= n\{1 + (n-1) + \frac{(n-1)(n-2)}{2!} + \cdots + 1\}$$

$= n(1+1)^{n-1} = n.2^{n-1} =$ R.H.S. (Proved)

বিকল্প পদ্ধতি ঃ দেওয়া আছে,

$(1+x)^n = C_0 + C_1x + C_2x^2 + C_3x^3 + \cdots + C_nx^n$

ইহাকে x এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই,

$n(1+x)^n(1+x)^{n-1} = C_1 + C_2(2x) + C_3(3x^2) + \cdots + C_n n x^{n-1}$

এখন, উভয় পক্ষে $x = 1$ বসিয়ে পাই,

$n(1+1)^{n-1} = C_1 + C_2(2.1) + C_3(3.1^2) + \cdots\cdots + C_n n.1^{n-1}$

$\Rightarrow n.2^{n-1} = C_1 + 2C_2 + 3C_3 + \cdots + nC_n$

$\therefore C_1 + 2C_2 + 3C_3 + \cdots + nC_n = n.2^{n-1}$

14(d) $C_0 + 2C_1 + 3C_2 + \cdots\cdots + (n+1)C_n = 2^n + n.2^{n-1}$

L.H.S. $= C_0 + 2C_1 + 3C_2 + \cdots\cdots + (n+1)C_n$

$= (C_0 + C_1 + C_2 + \cdots\cdots + C_n) + (C_1 + 2C_2 + 3C_3 + \cdots\cdots + nC_n)$

$$= (1+1)^n + n + 2.\frac{n(n-1)}{2} + 3.\frac{n(n-1)(n-2)}{3!} + \cdots + n$$

$$= 2^n + n\{1 + (n-1) + \frac{(n-1)(n-2)}{2!} + \cdots + 1\}$$

$= 2^n + n(1+1)^{n-1} = 2^n + n.2^{n-1} =$ R.H.S.

14(e) $C_0 + 4C_1 + 7C_2 + \cdots\cdots + (3n+1)C_n$

$$\text{L.H.S.} = C_0 + 4C_1 + 7C_2 + \cdots\cdots + (3n+1)C_n$$

$$= (C_0 + C_1 + C_2 + \cdots\cdots + C_n) + 3(C_1 + 2C_2 + \cdots\cdots + nC_n)$$

$$= (1+1)^n + 3.\{n + 2.\frac{n(n-1)}{2} + 3.\frac{n(n-1)(n-2)}{3!} + \cdots + n\}$$

$$= 2^n + 3.n\{1 + (n-1) + \frac{(n-1)(n-2)}{2!} + \cdots + 1\}$$

$$= 2^n + 3n(1+1)^{n-1}$$

$$= 2^n + 3n.2^{n-1} = \text{R.H.S. (Proved)}$$

অসীম দ্বিপদী ধারা

প্রশ্নমালা - V B

1. চতুর্থ পদ পর্যন্ত বিস্তৃতি নির্ণয় কর ঃ

(a) $$(1-2x)^{\frac{3}{5}} = 1 + \frac{3}{5}(-2x) + \frac{\frac{3}{5}(\frac{3}{5}-1)}{2!}(-2x)^2 + \frac{\frac{3}{5}(\frac{3}{5}-1)(\frac{3}{5}-2)}{3!}(-2x)^3 + \cdots\cdots$$

$$= 1 - \frac{6}{5}x + \frac{\frac{3}{5}.(-\frac{2}{5})}{2}4.x^2 - \frac{\frac{3}{5}.(-\frac{2}{5})(-\frac{7}{5})}{6}8.x^3 + \cdots\cdots$$

$$= 1 - \frac{6}{5}x - \frac{12}{25}x^2 - \frac{56}{125}x^3 - \cdots\cdots \ \cdots\cdots$$

1(b) $$(1-nx)^{-\frac{1}{n}} = 1 + (-\frac{1}{n})(-nx) + \frac{1}{2!}(-\frac{1}{n})(-\frac{1}{n}-1)(-nx)^2 + \frac{1}{3!}(-\frac{1}{n})(-\frac{1}{n}-1)(-\frac{1}{n}-2)(-nx)^3 + \cdots$$

$$= 1 + x + \frac{1}{2}(-1)(-n-1)x^2 + \frac{1}{6}(-1)(-n-1)(-1-2n)(-x^3) + \cdots$$

$$= 1 + x + \frac{1}{2}(n+1)x^2 + \frac{1}{6}(n+1)(2n+1)x^3 + \cdots \ \cdots \text{(Ans.)}$$

1(c) $$\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}} = \frac{x}{a\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}} = \frac{x}{a}\left\{1-\frac{x^2}{a^2}\right\}^{-\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{x}{a}[1 + (-\frac{1}{2})(-\frac{x^2}{a^2}) + \frac{1}{2!}(-\frac{1}{2})(-\frac{1}{2}-1)(-\frac{x^2}{a^2})^2 + \frac{1}{3!}(-\frac{1}{2})(-\frac{1}{2}-1)(-\frac{1}{2}-2)(-\frac{x^2}{a^2})^3 + \cdots\cdots]$$

$$= \frac{x}{a}[1 + \frac{1}{2}.\frac{x^2}{a^2} + \frac{1}{2}.\frac{1}{2}.\frac{3}{2}.\frac{x^4}{a^4} + \frac{1}{6}.\frac{1}{2}.\frac{3}{2}.\frac{5}{2}.\frac{x^6}{a^6} + \cdots\cdots\cdots]$$

$$= \frac{x}{a} + \frac{1}{2}.\frac{x^3}{a^3} + \frac{3}{2^3}\frac{x^5}{a^5} + \frac{5}{2^4}.\frac{x^7}{a^7} + \cdots$$

2(a) $x < 8$ হলে $(1-\frac{x}{8})^{\frac{1}{2}}$ কে x এর ঊর্ধ্বক্রমিক ধারায় চতুর্থ পদ পর্যন্ত বিস্তৃত কর এবং দেখাও যে,

$$1 - \frac{1}{8} - \frac{1}{8}.\frac{1}{16} - \frac{1}{8}.\frac{1}{16}.\frac{3}{24} - \cdots = \frac{\sqrt{3}}{2}$$ [কু.০০]

$$(1-\frac{x}{8})^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}(-\frac{x}{8}) + \frac{1}{2!}.\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)(-\frac{x}{8})^2 + \frac{1}{3!}\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)(\frac{1}{2}-2)(-\frac{x}{8})^3 + \frac{1}{4!}\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)(\frac{1}{2}-2)(\frac{1}{2}-3)(-\frac{x}{8})^4 + \cdots$$

$$= 1 - \frac{1}{2}.\frac{x}{8} + \frac{1}{2!}.\frac{1}{2}.(-\frac{1}{2}).\frac{x^2}{8^2} + \frac{1}{3!}.\frac{1}{2}(-\frac{1}{2})$$