L.H.S. $= C_0 + 4C_1 + 7C_2 + \cdots\cdots + (3n+1)C_n$

$= (C_0 + C_1 + C_2 + \cdots\cdots + C_n) + 3(C_1 + 2C_2 + \cdots\cdots + nC_n)$

$= (1+1)^n + 3.\{n + 2.\frac{n(n-1)}{2} + 3.\frac{n(n-1)(n-2)}{3!} + \cdots + n\}$

$= 2^n + 3.n\{1+(n-1) + \frac{(n-1)(n-2)}{2!} + \cdots + 1\}$

$= 2^n + 3n(1+1)^{n-1}$

$= 2^n + 3n.2^{n-1} =$ R.H.S. (Proved)

অসীম দ্বিপদী ধারা

প্রশ্নমালা - V B

1. চতুর্থ পদ পর্যন্ত বিস্তৃতি নির্ণয় কর ঃ

(a) $(1-2x)^{\frac{3}{5}} = 1 + \frac{3}{5}(-2x) + \frac{\frac{3}{5}(\frac{3}{5}-1)}{2!}(-2x)^2 + \frac{\frac{3}{5}(\frac{3}{5}-1)(\frac{3}{5}-2)}{3!}(-2x)^3 + \cdots\cdots$

$= 1 - \frac{6}{5}x + \frac{\frac{3}{5}.(-\frac{2}{5})}{2}4.x^2 - \frac{\frac{3}{5}.(-\frac{2}{5})(-\frac{7}{5})}{6}8.x^3 + \cdots\cdots$

$= 1 - \frac{6}{5}x - \frac{12}{25}x^2 - \frac{56}{125}x^3 - \cdots\cdots \cdots\cdots$

1(b) $(1-nx)^{-\frac{1}{n}} = 1 + (-\frac{1}{n})(-nx) + \frac{1}{2!}(-\frac{1}{n})(-\frac{1}{n}-1)(-nx)^2 + \frac{1}{3!}(-\frac{1}{n})(-\frac{1}{n}-1)(-\frac{1}{n}-2)(-nx)^3 + \cdots$

$= 1 + x + \frac{1}{2}(-1)(-n-1)x^2 + \frac{1}{6}(-1)(-n-1)(-1-2n)(-x^3) + \ldots$

$= 1 + x + \frac{1}{2}(n+1)x^2 + \frac{1}{6}(n+1)(2n+1)x^3 + \cdots \cdots$ (Ans.)

1(c) $\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}} = \frac{x}{a\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}} = \frac{x}{a}\left\{1-\frac{x^2}{a^2}\right\}^{-\frac{1}{2}}$

$= \frac{x}{a}[1 + (-\frac{1}{2})(-\frac{x^2}{a^2}) + \frac{1}{2!}(-\frac{1}{2})(-\frac{1}{2}-1)(-\frac{x^2}{a^2})^2 + \frac{1}{3!}(-\frac{1}{2})(-\frac{1}{2}-1)(-\frac{1}{2}-2)(-\frac{x^2}{a^2})^3 + \cdots\cdots]$

$= \frac{x}{a}[1 + \frac{1}{2}.\frac{x^2}{a^2} + \frac{1}{2}.\frac{1}{2}.\frac{3}{2}.\frac{x^4}{a^4} + \frac{1}{6}.\frac{1}{2}.\frac{3}{2}.\frac{5}{2}.\frac{x^6}{a^6} + \cdots\cdots]$

$= \frac{x}{a} + \frac{1}{2}.\frac{x^3}{a^3} + \frac{3}{2^3}\frac{x^5}{a^5} + \frac{5}{2^4}.\frac{x^7}{a^7} + \cdots$

2(a) $x < 8$ হলে $(1-\frac{x}{8})^{\frac{1}{2}}$ কে x এর ঊর্ধ্বক্রমিক ধারায় চতুর্থ পদ পর্যন্ত বিস্তৃত কর এবং দেখাও যে,

$1 - \frac{1}{8} - \frac{1}{8}.\frac{1}{16} - \frac{1}{8}.\frac{1}{16}.\frac{3}{24} - \cdots = \frac{\sqrt{3}}{2}$ [কু.০০]

$(1-\frac{x}{8})^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}(-\frac{x}{8}) + \frac{1}{2!}.\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)(-\frac{x}{8})^2 + \frac{1}{3!}\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)(\frac{1}{2}-2)(-\frac{x}{8})^3 + \frac{1}{4!}\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)(\frac{1}{2}-2)(\frac{1}{2}-3)(-\frac{x}{8})^4 + \cdots$

$= 1 - \frac{1}{2}.\frac{x}{8} + \frac{1}{2!}.\frac{1}{2}.(-\frac{1}{2}).\frac{x^2}{8^2} + \frac{1}{3!}.\frac{1}{2}(-\frac{1}{2})$

$$(-\frac{3}{2})(-\frac{x^3}{8^3})+\frac{1}{4!}.\frac{1}{2}(-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2})(-\frac{5}{2})\frac{x^4}{8^4}$$
$+\cdots\cdots$

$$=1-\frac{x}{16}-\frac{1}{2!}.\frac{x^2}{16^2}-\frac{3}{3!}.\frac{x^3}{16^3}-\frac{15}{4!}.\frac{x^4}{16^4}-\cdots \quad ---(i)$$

এখন, (i) এ $x=2$ বসিয়ে আমরা পাই,

$$(1-\frac{2}{8})^{\frac{1}{2}}=1-\frac{2}{16}-\frac{1}{2!}.\frac{2^2}{16^2}-\frac{3}{3!}.\frac{2^3}{16^3}-\frac{15}{4!}.\frac{2^4}{16^4}-\cdots\cdots$$

$$\Rightarrow (\frac{3}{4})^{\frac{1}{2}}=1-\frac{1}{8}-\frac{1}{8}.\frac{1}{16}-\frac{1}{8}.\frac{1}{16}.\frac{3}{24}-\cdots\cdots$$

$$\therefore 1-\frac{1}{8}-\frac{1}{8}.\frac{1}{16}-\frac{1}{8}.\frac{1}{16}.\frac{3}{24}-\cdots\cdots=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

(Showed)

2(b) $(1-x)^{-3}$ এর বিস্তৃতিতে সাধারণ পদটি সরলতম আকারে প্রকাশ কর এবং তা থেকে প্রথম চারটি পদ বের কর।

সমাধান ঃ প্রদত্ত বিস্তৃতিতে সাধারণ পদ

$$=\frac{-3(-3-1)(-3-2)\cdots\cdots(-3-r+1)}{r!}(-x)^r$$

$$=(-1)^r\frac{1}{r!}\{3.4.5.6.7.\cdots\cdots(r+2)\}(-1)^r x^r$$

$$=(-1)^{2r}\frac{1}{r!}\frac{1.2.3.4\cdots\cdots r(r+1)(r+2)}{1.2}x^r$$

$$=\frac{1}{r!}\frac{(1.2.3.4\cdots\cdots r)(r+1)(r+2)}{2}x^r$$

$$=\frac{1}{r!}\frac{r!(r+1)(r+2)}{2}x^r=\frac{(r+1)(r+2)}{2}x^r$$

$r=0, 1, 2, 3$ বসিয়ে প্রথম চারটি পদ পাওয়া যায় $1, 3x, 6x^2, 10x^3$

$$\therefore (1-x)^{-3}=1+3x+6x^2+10x^3+\cdots\cdots$$

2(c) দেওয়া আছে, $x<6\Rightarrow\frac{x}{6}<1\Rightarrow 1-\frac{x}{6}>0.$

$\therefore (1-\frac{x}{6})^{\frac{1}{2}}$ এর বিস্তৃতিকে x এর ঘাতের উর্ধ্বক্রমিক ধারায় বিস্তৃত করা যাবে।

এখন, $(1-\frac{x}{6})^{\frac{1}{2}}=\left\{1+(-\frac{x}{6})\right\}^{\frac{1}{2}}$

$$=1+\frac{1}{2}(-\frac{x}{6})+\frac{1}{2!}\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)(-\frac{x}{6})^2+\frac{1}{3!}\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)(\frac{1}{2}-2)(-\frac{x}{6})^3+\frac{1}{4!}\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)(\frac{1}{2}-2)(\frac{1}{2}-3)(-\frac{x}{6})^4+\cdots$$

$$=1-\frac{x}{12}+\frac{1}{2}(-\frac{1}{2})(\frac{x}{6})^2+\frac{1}{2}(-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2})(-\frac{x}{6})^3+\frac{1}{2}(-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2})(-\frac{5}{2})(\frac{x}{6})^4+\cdots$$

$$=1-\frac{1}{6}.\frac{x}{2}-\frac{1}{6}.\frac{1}{12}.\frac{x^2}{2^2}-\frac{1}{6}.\frac{1}{12}.\frac{3}{18}\frac{x^3}{2^3}-\frac{1}{6}.\frac{1}{12}.\frac{3}{18}\frac{5}{24}.\frac{x^4}{2^4}-\cdots \text{ (Ans.)}$$

এখন, $x=2$ বসিয়ে আমরা পাই,

$$(1-\frac{2}{6})^{\frac{1}{2}}=1-\frac{1}{6}.\frac{2}{2}-\frac{1}{6}.\frac{1}{12}.\frac{2^2}{2^2}-\frac{1}{6}.\frac{1}{12}.\frac{3}{18}\frac{2^3}{2^3}-\frac{1}{6}.\frac{1}{12}.\frac{3}{18}\frac{5}{24}.\frac{2^4}{2^4}-\cdots$$

$$\therefore 1-\frac{1}{6}-\frac{1}{6}.\frac{1}{12}-\frac{1}{6}.\frac{1}{12}.\frac{3}{18}-\cdots\cdots=\sqrt{\frac{2}{3}}$$

2(d) $x>1$ হলে, $\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ এর বিস্তৃতির চতুর্থ পদ পর্যন্ত বের কর।

দেওয়া আছে, $x>1\Rightarrow\frac{1}{x}<1$

এখন, $\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{1}{\sqrt{x^2(1+\frac{1}{x^2})}} = \frac{1}{x}\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^{-\frac{1}{2}}$

$=\frac{1}{x}[1+(-\frac{1}{2})(\frac{1}{x^2})+\frac{1}{2!}(-\frac{1}{2})(-\frac{1}{2}-1)(\frac{1}{x^2})^2$

$+\frac{1}{3!}(-\frac{1}{2})(-\frac{1}{2}-1)(-\frac{1}{2}-2)(\frac{1}{x^2})^3+\cdots\cdots]$

$=\frac{1}{x}[1-\frac{1}{2}.\frac{1}{x^2}+\frac{1}{2}.\frac{1}{2}.\frac{3}{2}\frac{1}{x^4}.-$

$\frac{1}{6}\frac{1}{2}.\frac{3}{2}.\frac{5}{2}\frac{1}{x^6}+\cdots\cdots]$

$=\frac{1}{x}-\frac{1}{2}.\frac{1}{x^3}+\frac{1}{2}.\frac{3}{4}\frac{1}{x^5}.-\frac{1}{2}.\frac{3}{4}.\frac{5}{6}\frac{1}{x^7}+\cdots$

2(e) x এর মান কত হলে, x-এর ঘাতের উর্ধ্বক্রম অনুসারে $\frac{1}{(8-3x)^{1/2}}$ এর বিস্তৃতি বৈধ হবে । ঐ বিস্তৃতিকে চতুর্থঘাত পর্যন্ত বিস্তৃত কর । [প্র.ভ.প. ৮৬]

সমাধান ঃ প্রদত্ত বিস্তৃতিকে x-এর ঘাতের উর্ধ্বক্রম অনুসারে বিস্তৃত করা যাবে যদি,

$|8|>|3x| \Rightarrow |\frac{3x}{8}|<1 \Rightarrow |x|<\frac{8}{3}$ হয় ।

এখন, $\frac{1}{\sqrt{8-3x}} = \frac{1}{\sqrt{8(1-\frac{3x}{8})}}$

$=\frac{1}{2\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{(1-\frac{3x}{8})}} = \frac{1}{2\sqrt{2}}\left(1-\frac{3x}{8}\right)^{-\frac{1}{2}}$

$=\frac{1}{2\sqrt{2}}\{1+(-\frac{1}{2})(-\frac{3}{8}x)+\frac{-\frac{1}{2}(-\frac{1}{2}-1)}{2!}(-\frac{3}{8}x)^2$

$+\frac{-\frac{1}{2}(-\frac{1}{2}-1)(-\frac{1}{2}-2)}{3!}(-\frac{3}{8}x)^3+\cdots\cdots\}$

$=\frac{1}{2\sqrt{2}}\{1+\frac{3}{16}x+\frac{-\frac{1}{2}(-\frac{3}{2})}{2!}\cdot\left(\frac{3}{8}\right)^2x^2\cdot$

$-\frac{-\frac{1}{2}(-\frac{3}{2})(-\frac{5}{2})}{3!}\left(\frac{3}{8}\right)^3x^3+\cdots\cdots\cdots\}$

$=\frac{1}{2\sqrt{2}}\{1+\frac{3}{16}x+\frac{1.3}{2!.2^2}\cdot\left(\frac{3}{8}\right)^2x^2-$

$\frac{1.3.5}{3!.2^3}\left(\frac{3}{8}\right)^3x^3+\cdots\cdots\}$

$=\frac{1}{2\sqrt{2}}+\frac{1}{2\sqrt{2}}\cdot\frac{3}{16}x+\frac{1}{2\sqrt{2}}\cdot\frac{1.3}{2!}\cdot\left(\frac{3}{16}\right)^2x^2-$

$\frac{1}{2\sqrt{2}}\cdot\frac{1.3.5}{3!}\left(\frac{3}{16}\right)^3x^3+\cdots\}$

2(f) $|x|<\frac{8}{3}$ হলে, $\frac{1}{(8-3x)^{1/3}}$ এর বিস্তৃতিতে x^3 এর সহগ নির্ণয় কর । [বুয়েট'০৪-০৫]

$\frac{1}{(8-3x)^{1/3}} = \frac{1}{\{8(1-\frac{3x}{8})\}^{1/3}} = \frac{1}{2}(1-\frac{3x}{8})^{-\frac{1}{3}}$

$\frac{1}{2}(1-\frac{3x}{8})^{-\frac{1}{3}}$ এর বিস্তৃতিতে x^3 এর সহগ

$=\frac{1}{2}\frac{-\frac{1}{3}(-\frac{1}{3}-1)(-\frac{1}{3}-2)}{3!}(-\frac{3}{8})^3$

$=\frac{1}{2}\frac{(-1)(-4)(-7)}{3!\,3^3}(-\frac{3}{8})^3=\frac{4\times 7}{2\times 6\times 8^3}$

$=\frac{7}{1536}$ (Ans.)

(g) $|x|>1$ হলে $(1-x)^{-1}$ বিস্তৃত কর ।[প্র.ভ.প.'৯৮]

সমাধান : $|x|>1 \Rightarrow |\frac{1}{x}|<1$

এখন, $(1-x)^{-1} = \frac{1}{1-x} = \frac{1}{-x(1-1/x)}$

$=-\frac{1}{x}(1-\frac{1}{x})^{-1} = -\frac{1}{x}(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}+\cdots)$

$$= -\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^3}-\cdots\cdots \text{ (Ans.)}$$

3(a) দেখাও যে, $(1-4x)^{-\frac{1}{2}}$ এর বিস্তৃতিতে x^r এর সহগ $\frac{(2r)!}{(r!)^2}$ [ঢা.'১০; য. '০৮,'১১; সি.'০৬,'১২ ; রা.'০৮,'১১; দি.'১৩]

প্রমাণ ঃ প্রদত্ত বিস্তৃতিতে (r + 1)তম পদেও সহগ

$$= \frac{-\frac{1}{2}(-\frac{1}{2}-1)(-\frac{1}{2}-2)\ldots\ldots(-\frac{1}{2}-r+1)}{r!}(-4)^r$$

$$= \frac{-\frac{1}{2}(-\frac{3}{2})(-\frac{5}{2})\ldots\ldots(-\frac{2r-1}{2})}{r!}(-1)^r 2^{2r}$$

$$= \frac{(-1)^r 1.3.5\ldots\ldots(2r-1)}{2^r r!}(-1)^r 2^{2r}$$

$$= (-1)^{2r}.2^r \frac{1.2.3.4.5.6\ldots\ldots(2r-1).2r}{(2.4.6.8\ldots..2r)r!}$$

$$= 2^r \frac{(2r)!}{2^r(1.2.3.4\ldots..r).r!} = \frac{(2r)!}{r!.r!.} = \frac{(2r)!}{(r!)^2}$$

(Showed)

3(b) $(2x+1)/(1+x^2)$ এর বিস্তৃতিতে x^r এর সহগ নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ

$$(2x+1)/(1+x^2) = (2x+1)(1+x^2)^{-1}$$

$$= (2x+1)\{1-x^2+(x^2)^2-(x^2)^3+\cdots+(-1)^{n-1}(x^2)^{n-1}+(-1)^n(x^2)^n+\cdots\},$$ যেখানে $n\in\mathbb{N}$

$$= (2x+1)\{1-x^2+x^4-x^6+\cdots+(-1)^{n-1}x^{2n-2}+(-1)^n x^{2n}+\cdots\cdots\}$$

মনে করি, r একটি জোড় সংখ্যা এবং $r=2n \therefore n=\frac{r}{2}$

$\therefore$ x^r এর সহগ $= x^{2n}$ এর সহগ $= (-1)^n = (-1)^{\frac{r}{2}}$

আবার মনে করি, r একটি বিজোড় সংখ্যা এবং $r=2n-1 \therefore n=\frac{r+1}{2}$

$\therefore$ x^r এর সহগ $= x^{2n-1}$ এর সহগ $= 2(-1)^{n-1}$

$$= 2(-1)^{\frac{r+1}{2}-1} = 2(-1)^{\frac{r-1}{2}}$$

3(c) দেখাও যে, $(1+x)^n/(1-x)$ এর বিস্তৃতিতে x^n এর সহগ 2^n $(n\in\mathbb{N})$ [কু.'১২]

প্রমাণ ঃ

$$(1+x)^n/(1-x) = (1+x)^n(1-x)^{-1}$$

$$= \{1+{}^nC_1x+{}^nC_2x^2+\cdots+{}^nC_{n-1}x^{n-1}+x^n\}\{1+x+x^2+x^3+\cdots\cdots+x^{n-1}+x^n+\cdots\}$$

$\therefore$ x^n এর সহগ

$$= 1+{}^nC_1+{}^nC_2+{}^nC_3+\cdots+{}^nC_{n-1}+{}^nC_n$$

$$= 1+{}^nC_1.1+{}^nC_2.1^2+{}^nC_3.1^3+\cdots\cdots+{}^nC_{n-1}.1^{n-1}+1^n$$

$$= (1+1)^n = 2^n \text{ (Showed)}$$

3(d) $\frac{(1+x)^2}{(1-x)^3}$ এর বিস্তৃতিতে x^r এর সহগ নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ $\frac{(1+x)^2}{(1-x)^3} = (1+x^2)(1-x)^{-3}$

$$= (1+2x+x^2)\{1+3x+6x^2+10x^3+\cdots+\frac{1}{2}(r-1)r\,x^{r-2}+\frac{1}{2}r(r+1)\,x^{r-1}+\frac{1}{2}(r+1)(r+2)x^r+\cdots\ \cdots\ \cdots\}$$

$\therefore x^r$ এর সহগ

$$= \frac{1}{2}(r+1)(r+2)+2.\frac{1}{2}r(r+1)+\frac{1}{2}(r-1)r$$

$$= \frac{1}{2}\{r^2+3r+2+2r^2+2r+r^2-r\}$$

$$= \frac{1}{2}(4r^2+4r+2) = 2r^2+2r+1 \text{ (Ans.)}$$

3(e) দেখাও যে, $\dfrac{1+x}{(1-x)^2}$ এর বিস্তৃতিতে x^r এর সহগ $2r+1$.

প্রমাণ : $\dfrac{1+x}{(1-x)^2} = (1+x)(1-x)^{-2}$

$= (1+x)\{1+2x+3x^2+\ldots\ldots+rx^{r-1}$
$+(r+1)x^r+\ldots\ldots\}$

$\therefore$ x^r এর সহগ $= r+1+r$

$= 2r+1$ (Showed)

3(f) দেখাও যে, $\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)^2$ এর বিস্তৃতিতে x^n এর সহগ $4n$ [রুয়েট'১১-১২]

প্রমাণ : $\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)^2 = (1+x)^2(1-x)^{-2}$

$= (1+2x+x^2)\{1+2x+3x^2+\ldots\ldots+$
$(n-1)x^{n-2}+nx^{n-1}+(n+1)x^n+\ldots\}$

$\therefore$ x^n এর সহগ $= n+1+2n+n-1$

$= 4n$ (Showed)

4(a) $\dfrac{1}{(1-x)(1-2x)}$ এর বিস্তৃতিতে x^r এর সহগ নির্ণয় কর।

[ব.'০৩,'০৭; সি.'০৮; চ.'কু.,দি.'১০; চ.'১৩]

সমাধান : $\dfrac{1}{(1-x)(1-2x)}$

$= \dfrac{1}{(1-x)(1-2.1)} + \dfrac{1}{(1-\frac{1}{2})(1-2x)}$

$= -\dfrac{1}{(1-x)} + 2\dfrac{1}{(1-2x)}$

$= 2(1-2x)^{-1} - (1-x)^{-1}$

$= 2\{1+2x+(2x)^2+\cdots+(2x)^r+\ldots\} -$
$\{1+x+x^2+\ldots\ldots+x^r+\ldots\ldots\}$

$\therefore$ x^r এর সহগ $= 2.2^r - 1 = 2^{r+1} - 1$ (Ans.)

4(b) সমাধান : $\dfrac{x}{(1-4x)(1-5x)}$ [ব.'১৩]

$= \dfrac{\frac{1}{4}}{(1-4x)(1-5.\frac{1}{4})} + \dfrac{\frac{1}{5}}{(1-4.\frac{1}{5})(1-5x)}$

$= -\dfrac{1}{(1-4x)} + \dfrac{1}{(1-5x)}$

$= (1-5x)^{-1} - (1-4x)^{-1}$

$= \{1+5x+(5x)^2+\cdots\cdots+(5x)^n+\ldots\}$
$\{1+4x+(4x)^2+\cdots\cdots+(4x)^n+\ldots\}$

$\therefore$ x^n এর সহগ $= 5^n - 4^n$ (Ans.)

4(c) প্রমাণ : $\dfrac{1}{(1-x)(3-x)}$

$= \dfrac{1}{(1-x)(3-1)} + \dfrac{1}{(1-3)(3-x)}$

$= \dfrac{1}{2}(1-x)^{-1} - \dfrac{1}{2}\dfrac{1}{3(1-\frac{x}{3})}$

$= \dfrac{1}{2}(1-x)^{-1} - \dfrac{1}{6}(1-\dfrac{x}{3})^{-1}$

$= \dfrac{1}{2}\{1+x+x^2+\ldots+x^n+\ldots\ldots\}$

$-\dfrac{1}{6}\{1+\dfrac{x}{3}+(\dfrac{x}{3})^2+\ldots\ldots+(\dfrac{x}{3})^n+\cdots\}$

$\therefore$ x^n এর সহগ $= \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{6}.(\dfrac{1}{3})^n$

$= \dfrac{1}{2}(1-\dfrac{1}{3^{n+1}})$ (Showed)

4(d) সমাধান : $\dfrac{x}{(1-ax)(1-bx)}$ [রা.'০২]

$= \dfrac{1/a}{(1-ax)(1-b\frac{1}{\ldots}} + \dfrac{1/b}{\ldots}$

$= \frac{1}{a-b}[\frac{1}{(1-ax)} - \frac{1}{(1-bx)}]$

$= \frac{1}{a-b}[(1-ax)^{-1} - (1-bx)^{-1}]$

$= \frac{1}{a-b}[\{1+ax+(ax)^2+\cdots+(ax)^n+\cdots\}-$

$\{1+bx+(bx)^2+\cdots\cdots+(bx)^n+\cdots\cdots\}]$

$\therefore$ x^n এর সহগ $= \frac{1}{a-b}(a^n - b^n)$ (Ans.)

5(a) $(1+x^2)^{-3}$ এর বিস্তৃতিতে x^{4r} এর সহগ নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ প্রদত্ত বিস্তৃতিতে $(n+1)$তম পদ

$= \frac{-3(-3-1)(-3-2)\ldots.(-3-n+1)}{n!}(x^2)^n$

$= (-1)^n \frac{3.4.5\ldots..(n+2)}{n!} x^{2n}$

$= (-1)^n \frac{1.2.3.4.5\ldots..n(n+1)(n+2)}{1.2.n!} x^{2n}$

$= (-1)^n \frac{n!(n+1)(n+2)}{2.n!} x^{2n}$

$= \frac{1}{2}(-1)^n (n+1)(n+2)\, x^{2n}$

যদি এই পদে x^{4r} থাকে, তবে $2n = 4r \Rightarrow n = 2r$

$\therefore$ x^{4r} এর সহগ $= \frac{1}{2}(-1)^{2r}(2r+1)(2r+2)$

$= (r+1)(2r+1)$ (Ans.)

5(b) $(1-x)^{-1} - 2(1-2x)^{-2}$ এর বিস্তৃতিতে সাধারণ পদটি নির্ণয় কর। [রা.'১৩]

সমাধান ঃ প্রদত্ত বিস্তৃতিতে সাধারণ পদ

$= x^r - 2(r+1)(2x)^r$

$= x^r - 2^{r+1}(r+1)x^r$

$= \{1-2^{r+1}(r+1)\}x^r$ (Ans.)

6(a) $y = x - x^2 + x^3 - x^4 + \cdots\infty$ হলে দেখাও যে, $x = y + y^2 + y^3 + y^4 + \cdots\infty$

[ঢা.,ব.'০৮;দি.'০৯; রা.'১০; য.'১২]

প্রমাণ ঃ দেওয়া আছে,

$y = x - x^2 + x^3 - x^4 + \cdots\cdots\infty$

$\Rightarrow -y = -x + x^2 - x^3 + x^4 - \cdots\cdots\cdots\infty$

$1 - y = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - \cdots\cdots\cdots\infty$

$\Rightarrow 1 - y = (1+x)^{-1} \Rightarrow 1 - y = \frac{1}{1+x}$

$\Rightarrow 1 + x = \frac{1}{1-y} \Rightarrow 1 + x = (1-y)^{-1}$

$\Rightarrow 1 + x = 1 + y + y^2 + y^3 + \cdots\cdots\infty$

$\therefore$ $x = y + y^2 + y^3 + \cdots\cdots\cdots\infty$ (Showed)

6(b) $y = 2x + 3x^2 + 4x^3 + \cdots\infty$ হলে দেখাও যে, $x = \frac{1}{2}y - \frac{3}{8}y^2 + \frac{5}{16}y^3 - \cdots\infty$

[ব.'০২,'১০; কু.'০৭; রা.'০৭; সি.'০৯,'১৩; দি.'১১; বুয়েট'০১-০২; চুয়েট'০১-০২]

প্রমাণ ঃ দেওয়া আছে,

$y = 2x + 3x^2 + 4x^3 + \cdots\cdots\infty$

$\Rightarrow 1 + y = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \cdots\cdots\cdots\infty$

$\Rightarrow 1 + y = (1-x)^{-2} = \frac{1}{(1-x)^2}$

$\Rightarrow (1-x)^2 = \frac{1}{1+y} \Rightarrow 1 - x = (1+y)^{-\frac{1}{2}}$

$\Rightarrow 1 - x = 1 - \frac{1}{2}y + \frac{1}{2!}(-\frac{1}{2})(-\frac{1}{2}-1)y^2 +$

$\frac{1}{3!}(-\frac{1}{2})(-\frac{1}{2}-1)(-\frac{1}{2}-2)y^3 + \cdots\cdots\cdots\infty$

$\Rightarrow -x = -\frac{1}{2}y + \frac{1}{2}.\frac{1}{2}.\frac{3}{2}y^2 -$

$\frac{1}{6}.\frac{1}{2}.\frac{3}{2}\frac{5}{2}y^3 + \cdots\cdots\infty$

$\therefore$ $x = \frac{1}{2}y - \frac{3}{8}y^2 + \frac{5}{16}y^3 - \cdots\cdots\cdots\infty$

(Showed)

6(c) $y = 3x + 6x^2 + 10x^3 + \cdots\infty$ হলে দেখাও যে, $x = \frac{1}{3}y - \frac{1.4}{3^2.2!}y^2 + \frac{1.4.7}{3^3.3!}y^3 - \cdots\infty$

প্রমাণ ঃ দেওয়া আছে,

$y = 3x + 6x^2 + 10x^3 + \cdots\cdots\infty$

$\Rightarrow 1 + y = 1 + 3x + 6x^2 + 10x^3 + \cdots\cdots\infty$

$\Rightarrow 1 + y = (1-x)^{-3} = \frac{1}{(1-x)^3}$

$\Rightarrow (1-x)^3 = \frac{1}{1+y} \Rightarrow (1-x)^3 = (1+y)^{-1}$

$\Rightarrow 1 - x = (1+y)^{-\frac{1}{3}}$

$\Rightarrow 1 - x = 1 - \frac{1}{3}y + \frac{1}{2!}(-\frac{1}{3})(-\frac{1}{3}-1)y^2$

$-\frac{1}{3!}(-\frac{1}{3})(-\frac{1}{3}-1)(-\frac{1}{3}-2)y^3 + \cdots\cdots\infty$

$\Rightarrow -x = -\frac{1}{3}y + \frac{1}{2!}.\frac{1}{3}\frac{4}{3}y^2 -$

$\frac{1}{3!}\frac{1}{3}\frac{4}{3}.\frac{7}{3}y^3 + \cdots\cdots\infty$

$\therefore \; x = \frac{1}{3}y - \frac{1.4}{3^2.2!}y^2 + \frac{1.4.7}{3^3.3!}y^3 - \cdots\cdots\cdots\infty$

7(a) $(1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \cdots\cdots\infty)^{\frac{1}{2}}$ এর বিস্তৃতিতে x^r এর সহগ নির্ণয় কর। [সি.'০১]

সমাধান ঃ $(1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \cdots\infty)^{\frac{1}{2}}$

$= \{(1-x)^{-2}\}^{\frac{1}{2}} = (1-x)^{-1}$

$= 1 + x + x^2 + \cdots\cdots + x^r + \cdots\cdots\infty$

$\therefore$ প্রদত্ত বিস্তৃতিতে x^r এর সহগ $= 1$ (Ans.)

7(b) প্রমাণ ঃ দেওয়া আছে, [য.'০৭]

$(1 + x + x^2 + x^3 + \cdots\infty)(1 + 2x + 3x^2 + \cdots\infty)$

$= (1-x)^{-1}(1-x)^{-2}$

$= (1-x)^{-3}$

$= 1 + 3x + 6x^2 + 10x^3 + \cdots\cdots\cdots\infty$

$= \frac{1}{2}(1.2 + 2.3x + 2.6x^2 + 2.10x^3 + \cdots\infty)$

$= \frac{1}{2}(1.2 + 2.3x + 3.4x^2 + 4.5x^3 + \cdots\cdots\infty)$

(Showed)

(c) দেখাও যে, $(1 + x + x^2 + x^3 + \cdots\cdots\infty)^2 = 1 + 2x + 3x^2 + \cdots\cdots + nx^{n-1} + \cdots\infty$

প্রমাণ ঃ $(1 + x + x^2 + x^3 + \cdots\cdots\cdots\infty)^2$

$= \{(1-x)^{-1}\}^2 = (1-x)^{-2}$

$= 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \cdots\cdots + nx^{n-1} + \cdots\infty$

7(d) $(1 + x + x^2 + x^3 + \cdots\infty)^{-15}$ এর বিস্তৃতিতে x^{15} এবং x^{16} এর সহগ নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ $(1 + x + x^2 + x^3 + \cdots\cdots\infty)^{-15}$

$= \{(1-x)^{-1}\}^{-15} = (1-x)^{15}$

প্রদত্ত বিস্তৃতিতে $(r+1)$তম পদ $= {}^{15}C_r(-x)^r$

$= (-1)^r.{}^{15}C_r x^r$

যদি এই পদে x^{15} থাকে, তবে $r = 15$

$\therefore$ x^{15} এর সহগ $= (-1)^{15}.{}^{15}C_{15} = -1$

$(1-x)^{15}$ এর বিস্তৃতিতে শেষ পদে x^{15} বিদ্যমান

$\therefore$ x^{16} সম্বলিত পদের সহগ শূন্য হবে।

অতএব, x^{16} এর সহগ $= 0$

7(e) সমাধান ঃ $(1 - x + x^2 - x^3 + \cdots\cdots\infty)^3$

$= \{(1+x)^{-1}\}^3 = (1+x)^{-3}$

প্রদত্ত বিস্তৃতি $(1+x)^{-3}$ এর $(r+1)$তম পদ

$= \frac{-3(-3-1)(-3-2)\ldots\ldots(-3-r+1)}{r!}x^r$

$= (-1)^r\frac{3.4.5.6\ldots\ldots(r+2)}{r!}x^r$

$= (-1)^r\frac{1.2.3.4.5.6\ldots\ldots r.(r+1)(r+2)}{1.2.r!}x^r$

$= (-1)^r\frac{r!.(r+1)(r+2)}{2.r!}x^r$

$$= (-1)^r \frac{(r+1)(r+2)}{2} x^r$$

$\therefore$ x^r এর সহগ $= (-1)^r \dfrac{(r+1)(r+2)}{2}$ (Ans.)

8(a) সমাধান ঃ $(1-x+x^2)^{\frac{1}{2}}$

$$= \left\{\frac{(1+x)(1-x+x^2)}{1+x}\right\}^{\frac{1}{2}}$$

$$= \left\{\frac{1+x^3}{1+x}\right\}^{\frac{1}{2}} = (1+x^3)^{\frac{1}{2}}\ (1+x)^{-\frac{1}{2}}$$

$$= \{1+\frac{1}{2}x^3+\cdots\cdots\}\{1-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2!}(-\frac{1}{2})(-\frac{1}{2}-1)x^2+\frac{1}{3!}(-\frac{1}{2})(-\frac{1}{2}-1)(-\frac{1}{2}-2)x^3+\cdots\}$$

$$= \{1+\frac{1}{2}x^3+\cdots\cdots\}\{1-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}.\frac{1}{2}.\frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{6}\frac{1}{2}\frac{3}{2}\frac{5}{2}x^5+\cdots\cdots\}$$

$$= \{1+\frac{1}{2}x^3+\cdots\}\{1-\frac{1}{2}x+\frac{3}{8}x^2-\frac{5}{16}x^3+\cdots\}$$

$$= 1-\frac{1}{2}x+\frac{3}{8}x^2+(\frac{1}{2}-\frac{5}{16})x^3+\cdots\cdots\cdots$$

$$= 1-\frac{1}{2}x+\frac{3}{8}x^2+\frac{3}{16}x^3+\cdots\cdots\cdots \text{ (Ans.)}$$

8(b) সমাধান ঃ $(1-x+x^2)^{-1} = \dfrac{1}{1-x+x^2}$

$$= \frac{1+x}{(1+x)(1-x+x^2)} = \frac{1+x}{1+x^3}$$

$$= (1+x)(1+x^3)^{-1}$$

$$= (1+x)\{1-x^3+(x^3)^2-(x^3)^3+(x^3)^4-(x^3)^5+\cdots\}$$

$$= (1+x)\{1-x^3+x^6-x^9+x^{12}-x^{15}+\cdots\}$$

$\therefore$ x^{15} এর সহগ $= 1$

8(c) $(1-x+x^2-x^3)^{-1}$ এর বিস্তৃতিতে x^4 এর সহগ নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ $(1-x+x^2-x^3)^{-1} = \dfrac{1}{1-x+x^2-x^3}$

$$= \frac{1+x}{(1+x)(1-x+x^2-x^3)} = \frac{1+x}{1-x^4}$$

$$= (1+x)(1-x^4)^{-1} = (1+x)[1+x^4+(x^4)^2+(x^4)^3+\cdots\cdots\cdots\infty]$$

$$= [1+x^4+(x^4)^2+(x^4)^3+\cdots\cdots\cdots]+[x+x(x^4)+x(x^4)^2+\cdots\cdots\cdots]$$

$\therefore$ x^4 এর সহগ $= 1$

9(a) সমাধান ঃ $\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}} = \dfrac{\sqrt{1+x}}{\sqrt{1-x}}$

$$= \frac{\sqrt{1+x}}{\sqrt{1-x}} \times \frac{\sqrt{1+x}}{\sqrt{1+x}} = \frac{1+x}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$= (1+x)(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$$

$$= (1+x)\ \{1+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2!}.\frac{1}{2}.\frac{3}{2}(x^2)^2+\frac{1}{3!}.\frac{1}{2}.\frac{3}{2}.\frac{5}{2}(x^2)^3+\cdots\cdots\}$$

$$= (1+x)\{1+\frac{1}{2}x^2+\frac{3}{8}x^4+\frac{5}{16}x^6+\cdots\cdots\}$$

$$= 1+x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}x^3+\frac{3}{8}x^4+\cdots\cdots\cdots$$

9(b) x এর শক্তির উর্ধ্বক্রম অনুসারে $(1+3x)^{\frac{1}{2}}(1-2x)^{-\frac{1}{3}}$ এর বিস্তৃতিতে প্রথম তিনটি পদ নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ $(1+3x)^{\frac{1}{2}}(1-2x)^{-\frac{1}{3}}$

$$= \{1+\frac{1}{2}(3x)+\frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)}{2!}(3x)^2+\cdots\cdots\}$$

$$\{1+(-\frac{1}{3})(-2x)+\frac{-\frac{1}{3}(-\frac{1}{3}-1)}{2!}(-2x)^2+\cdots\}$$

$$=\{1+\frac{3}{2}x+\frac{\frac{1}{2}(-\frac{1}{2})}{2}9x^2+\cdots\cdots\}$$

$$\{1+\frac{2}{3}x+\frac{-\frac{1}{3}(-\frac{4}{3})}{2}4x^2+\cdots\cdots\}$$

$$=\{1+\frac{3}{2}x-\frac{9}{8}x^2+\cdots\cdots\}$$

$$\{1+\frac{2}{3}x+\frac{8}{9}x^2+\cdots\cdots\}$$

$$=1+(\frac{2}{3}+\frac{3}{2})x+(\frac{8}{9}-\frac{9}{8}+\frac{3}{2}\times\frac{2}{3})x^2+\cdots$$

$$=1+\frac{13}{6}x+\frac{64-81+72}{72}x^2+\cdots\cdots$$

$$=1+\frac{13}{6}x+\frac{55}{72}x^2+\cdots\cdots$$

9(c) x এর শক্তির ঊর্ধ্বক্রম অনুসারে $(1+3x)/(1+2x)^{\frac{1}{2}}$ এর বিস্তৃতিতে x^7 এর সহগ নির্ণয় কর।

সমাধান : $\frac{1+3x}{(1+2x)^{1/2}}=(1+3x)(1+2x)^{-1/2}$

$$=(1+3x)\{1+(-\frac{1}{2})(2x)+\frac{-\frac{1}{2}(-\frac{1}{2}-1)}{2!}(2x)^2+\frac{-\frac{1}{2}(-\frac{1}{2}-1)(-\frac{1}{2}-2)}{3!}(2x)^3+\cdots\cdots\}$$

$$=(1+3x)\{1-\frac{1}{2}(2x)+\frac{(-1)(-3)}{2^2 2!}(2x)^2+\frac{(-1)(-3)(-5)}{2^3 3!}(2x)^3+\cdots\cdots\}$$

$$=(1+3x)\{1+\frac{(-1)^1.1}{1!}x^2+\frac{(-1)^2.1.3}{2!}x^2+\frac{(-1)^3.1.3.5}{3!}x^3+\cdots+(-1)^6\frac{1.3.5.7.9.11}{6!}x^6$$

$$+(-1)^7\frac{1.3.5.7.9.11.13}{7!}x^7+\cdots\cdots\}$$

$\therefore$ x^7 এর সহগ $=(-1)^7\frac{1.3.5.7.9.11.13}{7!}+3(-1)^6\frac{1.3.5.7.9.11}{6!}$

$$=-\frac{429}{16}+\frac{693}{16}=\frac{-429+693}{16}=\frac{264}{16}=16\frac{1}{2}$$

10(a) $x=\frac{1}{3}$ হলে $(2+5x)^{10}$ এর বিস্তৃতিতে সাংখ্যমান বৃহত্তম পদটি নির্ণয় কর।

প্রদত্ত বিস্তৃতিতে,

$$\frac{T_{r+1}}{T_r}=\frac{10-r+1}{r}\times\frac{5x}{2}=1\quad[\because 10>0]$$

$$\Rightarrow \frac{11-r}{r}\times\frac{5}{2}\times\frac{1}{3}=1\quad[\because x=\frac{1}{3}]$$

$$\Rightarrow 55-5r=6r\Rightarrow 11r=55\Rightarrow r=5$$

$\therefore$ T_5 ও T_{5+1} অর্থাৎ 5ম এবং 6ষ্ঠ পদ দুইটি সাংখ্যমান বৃহত্তম পদ।

10(b) $x=\frac{3}{4}$ হলে $(1-x)^{-3}$ এর বিস্তৃতিতে সাংখ্যমান বৃহত্তম পদটি নির্ণয় কর।

প্রদত্ত বিস্তৃতিতে,

$$\frac{T_{r+1}}{T_r}=\frac{-3-r+1}{r}\times x=-1\quad[\because -3<0]$$

$$\Rightarrow \frac{-2-r}{r}\times\frac{3}{4}=-1\quad[\because x=\frac{3}{4}]$$

$$\Rightarrow -6-3r=-4r\Rightarrow r=6$$

$\therefore$ T_6 ও T_{6+1} অর্থাৎ 6ষ্ঠ এবং 7ম পদ দুইটি সাংখ্যমান বৃহত্তম পদ।

10(c) $x=\frac{4}{15}$ হলে $(1+x)^{-7}$ এর বিস্তৃতিতে সাংখ্যমান বৃহত্তম পদটি নির্ণয় কর।

প্রদত্ত বিস্তৃতিতে,

$$\frac{T_{r+1}}{T_r}=\frac{-7-r+1}{r}\times x=-1 \quad [\because -7<0]$$

$$\Rightarrow \frac{-6-r}{r}\times\frac{4}{15}=-1 \quad [\because x=\frac{4}{15}]$$

$$\Rightarrow -24-4r=-15r \Rightarrow 11r=24$$

$$\Rightarrow r=2\frac{2}{11}$$

r ধনাত্মক পূর্ণ সংখ্যা বলে, (2 + 1) তম অর্থাৎ 3য় পদটিই বৃহত্তম।

11. ধারার যোগফল নির্ণয় কর ঃ

(a) $1+\frac{1}{3}+\frac{1.3}{3.6}+\frac{1.3.5}{3.6.9}+\frac{1.3.5.7}{3.6.9.12}+\cdots\cdots\infty$

সমাধান ঃ মনে করি,

$$(1+x)^n=1+\frac{1}{3}+\frac{1.3}{3.6}+\frac{1.3.5}{3.6.9}+\frac{1.3.5.7}{3.6.9.12}+\cdots\infty$$

$$\Rightarrow 1+nx+\frac{n(n-1)}{2!}x^2+\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}x^3+\cdots\cdots\infty=1+\frac{1}{3}+\frac{1.3}{3.6}+\frac{1.3.5}{3.6.9}+\cdots\cdots\infty$$

$$\therefore\ nx=\frac{1}{3}\Rightarrow n^2x^2=\frac{1}{9}\ \cdots\cdots(i),$$

$$\frac{n(n-1)}{2!}x^2=\frac{1.3}{3.6}\Rightarrow\frac{n^2-n}{2}x^2=\frac{1}{6}\cdots(ii)$$

$$(ii)\div(i)\Rightarrow\frac{n^2-n}{2n^2}=\frac{1}{6}\times\frac{9}{1}\Rightarrow\frac{n^2-n}{2n^2}=\frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow 6n^2=2n^2-2n\Rightarrow 4n=-2$$

[$\because$ এখানে $n\neq 0$]

$$\therefore\ n=-\frac{1}{2} \text{ এবং } x.(-\frac{1}{2})=\frac{1}{3}\Rightarrow x=-\frac{2}{3}$$

$$\therefore \text{ প্রদত্ত ধারার নির্ণেয় সমষ্টি }=\left(1-\frac{2}{3}\right)^{-\frac{1}{2}}$$

$$=\left(\frac{1}{3}\right)^{-\frac{1}{2}}=3^{1/2}=\sqrt{3}\ \text{(Ans.)}$$

11(b) $1+\frac{1}{4}+\frac{1.3}{4.8}+\frac{1.3.5}{4.8.12}+\cdots\infty$

[টেক্সটাইল'১১-১২]

সমাধান ঃ মনে করি,

$$(1+x)^n=1+\frac{1}{4}+\frac{1.3}{4.8}+\frac{1.3.5}{4.8.12}+\cdots\cdots\infty$$

$$\Rightarrow 1+nx+\frac{n(n-1)}{2!}x^2+\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}x^3+\cdots\cdots\infty=1+\frac{1}{4}+\frac{1.3}{4.8}+\frac{1.3.5}{4.8.12}+\cdots\cdots\infty$$

$$\therefore\ nx=\frac{1}{4}\Rightarrow n^2x^2=\frac{1}{16}\ \cdots\cdots(i),$$

$$\frac{n(n-1)}{2!}x^2=\frac{1.3}{4.8}\Rightarrow\frac{n^2-n}{2}x^2=\frac{3}{32}\cdots(ii)$$

$$(ii)\div(i)\Rightarrow\frac{n^2-n}{2n^2}=\frac{3}{32}\times\frac{16}{1}=\frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow 6n^2=2n^2-2n\Rightarrow 4n=-2$$

[$\because$ এখানে $n\neq 0$]

$$\therefore\ n=-\frac{1}{2} \text{ এবং } x.(-\frac{1}{2})=\frac{1}{4}\Rightarrow x=-\frac{1}{2}$$

$$\therefore \text{ প্রদত্ত ধারার নির্ণেয় সমষ্টি }=\left(1-\frac{1}{2}\right)^{-\frac{1}{2}}$$

$$=\left(\frac{1}{2}\right)^{-\frac{1}{2}}=2^{1/2}=\sqrt{2}\ \text{(Ans.)}$$

11(c) $1+2.\frac{1}{3^2}+\frac{2}{1}.\frac{5}{2}.\frac{1}{3^4}+\frac{2}{1}.\frac{5}{2}.\frac{8}{3}.\frac{1}{3^6}+\cdots\cdots$

[টেক্সটাইল'১১-১২]

সমাধান ঃ মনে করি, $(1+x)^n=1+$

$$1+2.\frac{1}{3^2}+\frac{2}{1}.\frac{5}{2}.\frac{1}{3^4}+\frac{2}{1}.\frac{5}{2}.\frac{8}{3}.\frac{1}{3^6}+\cdots\infty$$

$$\Rightarrow 1+nx+\frac{n(n-1)}{2!}x^2+\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}x^3+\cdots\infty$$

$$= 1 + 2.\frac{1}{3^2} + \frac{2}{1}.\frac{5}{2}.\frac{1}{3^4} + \frac{2}{1}.\frac{5}{2}.\frac{8}{3}.\frac{1}{3^6} + \cdots\infty$$

$\therefore\ nx = \frac{2}{9} \Rightarrow n^2x^2 = \frac{4}{81} \cdots\cdots$ (i),

$\frac{n(n-1)}{2}x^2 = \frac{5}{81} \cdots\cdots$ (ii)

$$(ii) \div (i) \Rightarrow \frac{n-1}{2n} = \frac{5}{4} \Rightarrow \frac{n-1}{n} = \frac{5}{2}$$

$$\Rightarrow 5n = 2n - 2 \Rightarrow 3n = -2 \Rightarrow n = -\frac{2}{3}$$

$$\therefore\ -\frac{2}{3}x = \frac{2}{9} \Rightarrow x = -\frac{1}{3}$$

$\therefore$ প্রদত্ত ধারার নির্ণেয় সমষ্টি $= (1-\frac{1}{3})^{-2/3}$

$$= \left(\frac{2}{3}\right)^{-2/3}$$

12(a) $\left(2x + \frac{1}{6x}\right)^{10}$ এর সম্প্রসারণে x বর্জিত পদের মান – **[DU 07-08]**

A. $\frac{28}{27}$ B. $\frac{27}{28}$ C. 1 D. 3

সমাধান : x বর্জিত পদের জন্য, $r = \frac{1\times10-0}{1-(-1)} = 5$

$\therefore$ x বর্জিত পদের মান $= {}^{10}C_5\ 2^{10-5}(\frac{1}{6})^5 = \frac{28}{27}$

(b) a এর কোন মানের জন্য $(1 + ax)^8$ এর বিস্তৃতিতে x^3 x^4 এর সহগ পরস্পর সমান হবে?

B. $\frac{4}{5}$ C. $\frac{16}{5}$ D. $\frac{5}{16}$

$ax)^8 = 1 + {}^8C_1(ax) + {}^8C_2(ax)^2$

$+ {}^8C_4(ax)^4 + \cdots + (ax)^8$

$C_3a^3 = {}^8C_4a^4 \Rightarrow 56 = 70a \Rightarrow a = \frac{4}{5}$

(c) $\frac{(1+x)^2}{(1-x)^2}$, $|x|<1$ বিস্তৃতিতে x^n এর স হলো –

A. 2n B. 3n C. 4n D. 5n

সমাধান : $\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^2 = (1+x)^2(1-x)^{-2}$

$= (1+2x+x^2)\{1 + 2x + 3x^2 + \cdots\cdots +$

$(n-1)x^{n-2} + nx^{n-1} + (n+1)x^n + \cdots\}$

$\therefore$ x^n এর সহগ $= n + 1 + 2n + n - 1$

$= 4n$

13(a) x এর শক্তির ঊর্ধ্বক্রম অনুসারে $\left(1+\frac{x}{4}\right)^{\frac{1}{3}}$ এর বিস্তৃতিতে x^2 সম্বলিত পদ পর্যন্ত বিস্তৃত কর।

সমাধান :

$$\left(1+\frac{x}{4}\right)^{\frac{1}{3}} = 1 + \frac{1}{3}\left(\frac{x}{4}\right) + \frac{\frac{1}{3}(\frac{1}{3}-1)}{2!}\left(\frac{x}{4}\right)^2 + \cdots$$

$$= 1 + \frac{x}{12} + \frac{\frac{1}{3}.(-\frac{2}{3})}{2}\frac{x^2}{16} + \cdots\cdots$$

$$= 1 + \frac{x}{12} - \frac{1}{144}x^2 + \cdots\cdots$$

$\therefore$ নির্ণেয় উত্তর : $1 + \frac{x}{12} - \frac{1}{144}x^2$

13(b) বিস্তৃতিতে x = 0·5 প্রতিস্থাপন করে দুই দশমিক স্থান পর্যন্ত $\sqrt[3]{9}$ এর মান নির্ণয় কর।

$$\left(1+\frac{x}{4}\right)^{\frac{1}{3}} = 1 + \frac{x}{12} - \frac{1}{144}x^2 + \cdots\cdots$$

$$\Rightarrow \left(1+\frac{0\cdot5}{4}\right)^{\frac{1}{3}} = 1 + \frac{0\cdot5}{12} - \frac{1}{144}(0\cdot5)^2 + \cdots$$

$$\Rightarrow \left(1+\frac{1}{8}\right)^{\frac{1}{3}} = 1 + 0\cdot04167 - 0\cdot00173 + \cdots$$

$\Rightarrow \left(\frac{9}{8}\right)^{\frac{1}{3}} = 1{\cdot}03994 + \dots\dots$

$\Rightarrow \frac{\sqrt[3]{9}}{2} = 1{\cdot}03994 + \dots\dots$

$\Rightarrow \sqrt[3]{9} = 2{\cdot}07988 + \dots\dots$

$\therefore$ দুই দশমিক স্থান পর্যন্ত $\sqrt[3]{9}$ এর মান $= 2{\cdot}08$

13(c) x এর শক্তির উর্ধ্বক্রম অনুসারে $\left(1-\frac{x}{4}\right)^{-\frac{1}{3}}$ এবং $\left(\frac{4+x}{4-x}\right)^{\frac{1}{3}}$ এর বিস্তৃতিতে x^2 সম্বলিত পদ পর্যন্ত বিস্তৃত কর।

$$\left(1-\frac{x}{4}\right)^{-\frac{1}{3}} = 1 - \frac{1}{3}\left(-\frac{x}{4}\right) + \frac{-\frac{1}{3}(-\frac{1}{3}-1)}{2!}\left(-\frac{x}{4}\right)^2 + \dots\dots$$

$$= 1 + \frac{x}{12} + \frac{-\frac{1}{3}.(-\frac{4}{3})}{2}\frac{x^2}{16} + \dots\dots$$

$$= 1 + \frac{x}{12} + \frac{1}{72}x^2 + \dots\dots$$

$\therefore$ নির্ণেয় উত্তর : $1 + \frac{x}{12} + \frac{1}{72}x^2$

দ্বিতীয় অংশ : $\left(\frac{4+x}{4-x}\right)^{\frac{1}{3}} = \left(\frac{1+x/4}{1-x/4}\right)^{\frac{1}{3}}$

$$= \left(1+\frac{x}{4}\right)^{\frac{1}{3}}\left(1-\frac{x}{4}\right)^{-\frac{1}{3}}$$

$$= \left(1+\frac{x}{12} - \frac{1}{144}x^2 + \dots\dots\right)\left(1+\frac{x}{12}+\frac{1}{72}x^2 + \dots\dots\right)$$

$$= 1 + 2\times\frac{x}{12} + \left(\frac{1}{72} - \frac{1}{144} + \frac{1}{144}\right)x^2 + \dots$$

$$= 1 + \frac{1}{6}x - \frac{1}{72}x^2 + \dots\dots$$

অতিরিক্ত প্রশ্ন (সমাধানসহ)

1. $m, n \in \mathbb{N}$ হলে, $(1+4x)^m\left(1+\frac{1}{4x}\right)^n$ বিস্তৃতির কমপক্ষে একটি পদ কতভাবে বাছাই করা যায়?

সমাধান ঃ $(1+4x)^m\left(1+\frac{1}{4x}\right)^n = \frac{(1+4x)^{m+n}}{(4x)^n}$

বিস্তৃতির পদসংখ্যা $= m + n + 1$

$\therefore$ পদত্ত বিস্তৃতির কমপক্ষে একটি পদ বাছাই করার উপায় সংখ্যা $= 2^{m+n+1} - 1$

2(a) $1 - \frac{1}{5} + \frac{1.4}{5.10} - \frac{1.4.7}{5.10.15} + \dots\dots\infty$

সমাধান ঃ মনে করি,

$$(1+x)^n = 1 - \frac{1}{5} + \frac{1.4}{5.10} - \frac{1.4.7}{5.10.15} + \dots\dots\infty$$

$$\Rightarrow 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2!}x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}x^3 + \dots\dots\infty = 1 - \frac{1}{5} + \frac{1.4}{5.10} - \frac{1.4.7}{5.10.15} + \dots\dots\infty$$

$\therefore\ nx = -\frac{1}{5} \Rightarrow n^2x^2 = \frac{1}{25}$ ...... (i),

$\frac{n(n-1)}{2!}x^2 = \frac{1.4}{5.10} \Rightarrow \frac{n^2-n}{2}x^2 = \frac{2}{25}$ ...(ii)

(ii) $\div$ (i) $\Rightarrow \frac{n^2-n}{2n^2} = \frac{2}{25}\times\frac{25}{1} = 2$

$\Rightarrow 4n^2 = n^2 - n \Rightarrow 3n = -1$ [$\because$ এখানে $n \neq 0$]

$\therefore\ n = -\frac{1}{3}$ এবং $x.(-\frac{1}{3}) = -\frac{1}{5} \Rightarrow x = \frac{3}{5}$

$\therefore$ প্রদত্ত ধারার নির্ণেয় সমষ্টি $= \left(1+\frac{3}{5}\right)^{-\frac{1}{3}}$

$$= \left(\frac{8}{5}\right)^{-\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{\frac{5}{8}} = \frac{1}{2}\sqrt[3]{5} \text{ (Ans.)}$$

2(b) $1 - \frac{1}{4} + \frac{1.3}{4.8} - \frac{1.3.5}{4.8.12} + \cdots\cdots\infty$

সমাধান : মনে করি,

$$(1+x)^n = 1 - \frac{1}{4} + \frac{1.3}{4.8} - \frac{1.3.5}{4.8.12} + \cdots\cdots\infty$$

$$\Rightarrow 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2!}x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}x^3$$

$$+ \cdots\cdots\infty = 1 - \frac{1}{4} + \frac{1.3}{4.8} - \frac{1.3.5}{4.8.12} + \cdots\cdots\infty$$

$$\therefore\ nx = -\frac{1}{4} \Rightarrow n^2x^2 = \frac{1}{16} \cdots\cdots \text{(i)},$$

$$\frac{n(n-1)}{2!}x^2 = \frac{1.3}{4.8} \Rightarrow \frac{n^2-n}{2}x^2 = \frac{3}{32} \cdots\text{(ii)}$$

$$\text{(ii)} \div \text{(i)} \Rightarrow \frac{n^2-n}{2n^2} = \frac{3}{32} \times \frac{16}{1} = \frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow 6n^2 = 2n^2 - 2n \Rightarrow 4n = -2$$

[$\because$ এখানে $n \neq 0$]

$$\therefore\ n = -\frac{1}{2} \text{ এবং } x.\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{4} \Rightarrow x = \frac{1}{2}$$

$$\therefore \text{ প্রদত্ত ধারার নির্ণেয় সমষ্টি } = \left(1 + \frac{1}{2}\right)^{-\frac{1}{2}}$$

$$= \left(\frac{3}{2}\right)^{-\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{2}{3}} \text{ (Ans.)}$$

2(c) $\frac{n}{1!}\cdot\frac{1}{5} + \frac{n(n-1)}{2!}\cdot\frac{1}{5^2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\cdot\frac{1}{5^3} + \cdots + \frac{1}{5^n}$ [প্র.ভ.প. ৮৩]

$$= \left(1 + {}^nC_1 \cdot \frac{1}{5} + {}^nC_2 \cdot \frac{1}{5^2} + \cdots + \frac{1}{5^n}\right) - 1$$

$$= \left(1 + \frac{1}{5}\right)^n - 1 = \left(\frac{6}{5}\right)^n - 1$$

ভর্তি পরীক্ষায় MCQ :

কৌশল -1. $(1+x)^n$ বিস্তৃতিতে p তম ও q তম পদদ্বয়ের সহগ সমান হলে, $p + q = n + 2$

$(1+x)^{20}$ এর বিস্তৃতিতে $(2r+1)$ তম এবং $(r+3)$ তম পদের সহগ সমান হলে, r এর মান নির্ণয় কর।

সমাধান : $2r + 1 + r + 3 = 20 + 2 \Rightarrow r = 6$

কৌশল-2. $(ax^m + bx^p)^n$ এর বিস্তৃতিতে $(r+1)$ তম পদে x^k বিদ্যমান থাকলে, $r = \frac{m \times n - k}{m - p}$, এবং x^k সম্বলিত পদ $= {}^nC_r a^{n-r} b^r x^k$

(a) $(3x^2 - \frac{1}{2x})^9$ এর বিস্তৃতিতে কততম পদ x বর্জিত? [DU 99-00]

সমাধান : x বর্জিত পদের জন্য, $r = \frac{2\times 9 - 0}{2-(-1)} = 6$

$\therefore (6+1)$ বা 7ম পদ x বর্জিত।

(b) $(x^4 - \frac{1}{x^3})^8$ এর বিস্তৃতিতে x^{11} এর সহগ কত? [DU 95-96, 98-99; RU 06-07]

সমাধান : x^{11} এর ক্ষেত্রে, $r = \frac{4\times 8 - 11}{4-(-3)} = 3$

$\therefore\ x^{11}$ এর সহগ $= {}^8C_3(-1)^3 = -56$

(c) $(2x^2 - \frac{1}{4x})^{11}$ এর বিস্তৃতিতে x^7 এর সহগ- [Jt.U 07-08; NU 06-07; RU 05-06; DU 13-14]

সমাধান : x^7 এর ক্ষেত্রে, $r = \frac{2\times 11 - 7}{2-(-1)} = 5$

$\therefore\ x^7$ এর সহগ $= {}^{11}C_5 2^{11-5}(-\frac{1}{4})^5 = -\frac{230}{8}$

(d) $(1+x)^{20}$ এর বিস্তৃতিতে x^r এর সহগ ও x^{r-1} এর সহগের দ্বিগুণ হলে r এর মান - [JU 05-06]

প্রশ্নমালা V (A + B)

এখানে, $^{20}C_r = 2 \times {}^{20}C_{r-1} \Rightarrow \frac{20-r+1}{r} = 2$

$\Rightarrow r = 7$

(e) k-এর কোন মানের জন্য $(\sqrt{x} - \frac{k}{x^2})^{10}$ এর বিস্তৃতিতে x বর্জিত পদ 405? [BUET 07-08]

সমাধান ঃ x বর্জিত পদের জন্য, $r = \frac{\frac{1}{2} \times 10 - 0}{\frac{1}{2} - (-2)} = 2$

$\therefore$ x বর্জিত পদের মান $= {}^{10}C_2\ k^2 = 405$

$\Rightarrow k = \pm 3$

3 $(x + x^{-1})^{10}$ বিস্তৃতিতে ৬ষ্ঠ পদ- [Textile 13-14]

A. 521 B. 522 C. 252 D. –252

সমাধান ঃ ৬ষ্ঠ পদ $= {}^{10}C_5\ x^5 \times \left(\frac{1}{x}\right)^{10-5} = 252$

4. $^nC_2 = {}^nC_6$ হলে $^nC_5 = ?$ [Textile 13-14]

A. 64 B. 56 C. 48 D. 98

সমাধান ঃ $^nC_2 = {}^nC_6 \Rightarrow n = 2 + 6 = 8$

$\therefore$ $^nC_5 = {}^8C_5 = {}^8C_3 = 56$