কনিক

প্রশ্নমালা VI

পরাবৃত্ত

এক নজরে প্রয়োজনীয় সূত্রাবলী ঃ

1. পরাবৃত্তের শীর্ষবিন্দু (α, β) এবং অক্ষরেখা x-অক্ষের সমান্তরাল হলে এর সাধারণ সমীকরণ, $(y-\beta)^2 = 4a(x-\alpha)$ এবং অক্ষরেখা x-অক্ষের সমান্তরাল এরূপ পরাবৃত্তের সমীকরণকে লেখা যায়, $x = ay^2 + by + c$.

2. পরাবৃত্তের শীর্ষবিন্দু (α, β) এবং অক্ষরেখা y-অক্ষের সমান্তরাল হলে এর সাধারণ সমীকরণ $(x-\alpha)^2 = 4a(y-\beta)$ এবং অক্ষরেখা y-অক্ষের সমান্তরাল এরূপ পরাবৃত্তের সমীকরণকে লেখা যায়, $y = ax^2 + bx + c$

3. পরাবৃত্তের প্রয়োজনীয় ফলাফল ঃ

পরাবৃত্তের আকার ঃ	$y^2 = 4ax$	$x^2 = 4ay$	$(y-\beta)^2 = 4a(x-\alpha)$	$(x-\alpha)^2 = 4a(y-\beta)$
a. শীর্ষবিন্দুর স্থানাঙ্ক ঃ	$(0, 0)$	$(0, 0)$	(α, β)	(α, β)
b. উপকেন্দ্রের স্থানাঙ্ক ঃ	$(a, 0)$	$(0, a)$	$(a+\alpha, \beta)$	$(\alpha, a+\beta)$
c. দিকাক্ষের পাদবিন্দুর স্থানাঙ্ক ঃ	$(-a, 0)$	$(0, -a)$	$(-a+\alpha, \beta)$	$(\alpha, -a+\beta)$
d. অক্ষরেখার সমীকরণ ঃ	$y = 0$	$x = 0$	$y - \beta = 0$	$x - \alpha = 0$
e. দিকাক্ষের সমীকরণ ঃ	$x + a = 0$	$y + a = 0$	$x - \alpha + a = 0$	$y - \beta + a = 0$
f. উপকেন্দ্রিক লম্বের সমীকরণ ঃ	$x = a$	$y = a$	$x - \alpha = a$	$y - \beta = a$
g. শীর্ষে স্পর্শকের সমীকরণ ঃ	$x = 0$	$y = 0$	$x - \alpha = 0$	$y - \beta = 0$
h. উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য ঃ	$4\|a\|$	$4\|a\|$	$4\|a\|$	$4\|a\|$
i. উপকেন্দ্রিক লম্বের প্রান্ত বিন্দু দুটির স্থানাঙ্ক ঃ	$(a, \pm 2a)$	$(\pm 2a, a)$	$(a+\alpha, \pm 2a+\beta)$	$(\pm 2a+\alpha, a+\beta)$
j. (x, y) বিন্দুর উপকেন্দ্রিক দূরত্ব ঃ	$x + a$	$y + a$	$x - \alpha + a$	$y - \beta + a$

4. অক্ষরেখা x-অক্ষ এবং উপকেন্দ্র মূলবিন্দু হলে পরাবৃত্তের সমীকরণ $y^2 = 4a(x+a)$ এবং অক্ষরেখা y-অক্ষ এবং উপকেন্দ্র মূলবিন্দু হলে পরাবৃত্তের সমীকরণ $x^2 = 4a(y+a)$.

5. অক্ষরেখা x-অক্ষ এবং দিকাক্ষ y-অক্ষ হলে পরাবৃত্তের সমীকরণ $y^2 = 4a(x-a)$ এবং অক্ষরেখাকে y-অক্ষ এবং দিকাক্ষকে x-অক্ষ ধরে পরাবৃত্তের সমীকরণ, $x^2 = 4a(y-a)$.

6. উপকেন্দ্র (α,β) এবং দিকাক্ষ $lx + my + n = 0$ এরূপ পরাবৃত্তের সমীকরণ $(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = \left\{\dfrac{lx+my+n}{\sqrt{l^2+m^2}}\right\}^2$

7. $y = mx + c$ সরলরেখাটি $y^2 = 4ax$ পরাবৃত্তকে স্পর্শ করলে $c = \dfrac{a}{m}$ হবে। অতএব, m এর $(m \neq 0)$ সকল মানের জন্য $y = mx + \dfrac{a}{m}$ সরলরেখাটি $y^2 = 4ax$ পরাবৃত্তের স্পর্শকের সমীকরণ প্রকাশ করে এবং স্পর্শ বিন্দুর $\left(\dfrac{a}{m^2}, \dfrac{2a}{m}\right)$ । $x^2 = 4ay$ পরাবৃত্তের স্পর্শকের সমীকরণ $y = mx - am^2$.

প্রশ্নমালা VI A

1. নিচের প্রতিটি পরাবৃত্তে শীর্ষবিন্দু , উপকেন্দ্র, উপকেন্দ্রিক লম্ব, অক্ষরেখা ও দিকাক্ষের সমীকরণ নির্ণয় কর :

(a) $(y-1)^2 = 4(x-2)$ [ঢা.'০২;মা.'০৭;দি.'১০]

সমাধান : $(y-1)^2 = 4(x-2)$ কে পরাবৃত্তের সাধারণ সমীকরণ $(y-\beta)^2 = 4a(x-\alpha)$ এর সাথে তুলনা করে পাই, $a = 1$, $\alpha = 2$, $\beta = 1$.

$\therefore$ শীর্ষবিন্দুর স্থানাঙ্ক $= (\alpha, \beta) = (2, 1)$

উপকেন্দ্রের স্থানাঙ্ক $= (\alpha + a, \beta) = (2+1, 1)$

$= (3, 1)$

উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য $= |4a|$ একক $= 4$ একক

অক্ষরেখার সমীকরণ $y - \beta = 0 \Rightarrow y - 1 = 0$

এবং দিকাক্ষের সমীকরণ $x - \alpha + a = 0$

$\Rightarrow x - 2 + 1 = 0 \Rightarrow x = 1$

1(b) $3y^2 - 10x - 12y - 18 = 0$ [চ.'০৩,'১৩]

সমাধান : $3y^2 - 10x - 12y - 18 = 0$

$\Rightarrow 3(y^2 - 4y + 4) - 12 - 10x - 18 = 0$

$\Rightarrow 3(y-2)^2 = 10(x+3)$

$\Rightarrow (y-2)^2 = \dfrac{10}{3}(x+3)$

একে পরাবৃত্তের সাধারণ সমীকরণ $(y-\beta)^2 = 4a(x-\alpha)$ এর সাথে তুলনা করে পাই, $4a = \dfrac{10}{3} \Rightarrow a = \dfrac{5}{6}$,

$\alpha = -3$, $\beta = 2$.

$\therefore$ শীর্ষবিন্দুর স্থানাঙ্ক $= (\alpha, \beta) = (-3, 2)$

উপকেন্দ্রের স্থানাঙ্ক $= (\alpha + a, \beta) = (-3 + \dfrac{5}{6}, 2)$

$= (-\dfrac{13}{6}, 2)$

উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য $= |4a|$ একক $= \dfrac{10}{3}$ একক

অক্ষরেখার সমীকরণ $y - \beta = 0 \Rightarrow y - 2 = 0$

এবং দিকাক্ষের সমীকরণ $x - \alpha + a = 0$

$\Rightarrow x + 3 + \dfrac{5}{6} = 0 \Rightarrow 6x + 23 = 0$

1(c) $y^2 = 4y + 4x - 8$ [য.'০৭; রা.'১০; ব.'১১]

সমাধান : $y^2 = 4y + 4x - 8$

$\Rightarrow y^2 - 4y + 4 = 4x - 4$

$\Rightarrow (y-2)^2 = 4(x-1)$

একে পরাবৃত্তের সাধারণ সমীকরণ $(y - \beta)^2 = 4a(x - \alpha)$ এর সাথে তুলনা করে পাই, $a = 1$, $\alpha = 1$, $\beta = 2$.

$\therefore$ শীর্ষবিন্দুর স্থানাঙ্ক $= (\alpha, \beta) = (1, 2)$

উপকেন্দ্রের স্থানাঙ্ক $= (\alpha + a, \beta) = (1+1, 2)$

$= (2, 2)$

উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য $= |4a|$ একক $= 4$ একক

অক্ষরেখার সমীকরণ $y - \beta = 0 \Rightarrow y - 2 = 0$

এবং দিকাক্ষের সমীকরণ $x - \alpha + a = 0$

$\Rightarrow x - 1 + 1 = 0 \Rightarrow x = 0$

1(d) $y^2 + 8x - 2y - 23 = 0$ [কু.'০৬]

সমাধান : $y^2 + 8x - 2y - 23 = 0$

$\Rightarrow y^2 - 2y + 1 = -8x + 24$

$\Rightarrow (y-1)^2 = -8(x-3)$

একে পরাবৃত্তের সাধারণ সমীকরণ $(y - \beta)^2 = 4a(x - \alpha)$ এর সাথে তুলনা করে পাই, $4a = -8 \Rightarrow a = -2$, $\alpha = 3$, $\beta = 1$.

$\therefore$ শীর্ষবিন্দুর স্থানাঙ্ক $= (\alpha, \beta) = (3, 1)$

উপকেন্দ্রের স্থানাঙ্ক $= (\alpha + a, \beta) = (3-2, 1)$

$= (1, 1)$

উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য $= |4a|$

$= |-8| = 8$ একক

অক্ষরেখার সমীকরণ $y - \beta = 0 \Rightarrow y - 1 = 0$

এবং দিকাক্ষের সমীকরণ $x - \alpha + a = 0$

$\Rightarrow x-3-1=0 \Rightarrow x=5$

1(e) $y^2=4y+4x-16$ [য.'০৫]

সমাধান : $y^2=4y+4x-16$

$\Rightarrow y^2-4y+4=4x-12$

$\Rightarrow (y-2)^2=4(x-3)$

একে পরাবৃত্তের সাধারণ সমীকরণ $(y-\beta)^2=4a(x-\alpha)$ এর সাথে তুলনা করে পাই, $a=1$, $\alpha=3$, $\beta=2$.

$\therefore$ শীর্ষবিন্দুর স্থানাঙ্ক $=(\alpha,\beta)=(3,2)$

উপকেন্দ্রের স্থানাঙ্ক $=(\alpha+a,\beta)=(3+1,2)$

$=(4,2)$

উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য $=|4a|$ একক $=4$ একক

অক্ষরেখার সমীকরণ $y-\beta=0 \Rightarrow y-2=0$

এবং দিকাক্ষের সমীকরণ $x-\alpha+a=0$

$\Rightarrow x-3+1=0 \Rightarrow x-2=0$

1(f) $x^2+2y-8x+7=0$

[ব.'০৬; ঢা.'০৩; সি.'০৮,'১৩; মা.বো.'০৩]

সমাধান : $x^2+2y-8x+7=0$

$\Rightarrow (x^2-8x+16)-16+2y+7=0$

$\Rightarrow (x-4)^2=-2y+9=-2\left(y-\frac{9}{2}\right)$

একে পরাবৃত্তের সাধারণ সমীকরণ $(x-\alpha)^2=4a(y-\beta)$ এর সাথে তুলনা করে পাই, $4a=-2$

$\Rightarrow a=-\frac{1}{2}, \alpha=4, \beta=\frac{9}{2}$.

$\therefore$ শীর্ষবিন্দুর স্থানাঙ্ক $=(\alpha,\beta)=\left(4,\frac{9}{2}\right)$

উপকেন্দ্রের স্থানাঙ্ক $=(\alpha,\beta+a)=\left(4,\frac{9}{2}-\frac{1}{2}\right)$

$=(4,4)$

উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য $=|4a|=|-2|=2$ একক

অক্ষরেখার সমীকরণ $x-\alpha=0 \Rightarrow x-4=0$

এবং দিকাক্ষের সমীকরণ $y-\beta+a=0$

$\Rightarrow y-\frac{9}{2}-\frac{1}{2}=0 \Rightarrow y-5=0$

1(g) $(x-4)^2=-4(y-5)$ [রা.'০৭]

সমাধান : $(x-4)^2=-4(y-5)$ কে পরাবৃত্তের সাধারণ সমীকরণ $(x-\alpha)^2=4a(y-\beta)$ এর সাথে তুলনা করে পাই, $4a=-4 \Rightarrow a=-1, \alpha=4$, $\beta=5$.

$\therefore$ শীর্ষবিন্দুর স্থানাঙ্ক $=(\alpha,\beta)=(4,5)$

উপকেন্দ্রের স্থানাঙ্ক $=(\alpha,\beta+a)=(4,5-1)$

$=(4,4)$

উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য $=|4a|=|-4|=4$ একক

অক্ষরেখার সমীকরণ $x-\alpha=0 \Rightarrow x-4=0$

এবং দিকাক্ষের সমীকরণ $y-\beta+a=0$

$\Rightarrow y-5-1=0 \Rightarrow y-6=0$

1(h) $5x^2+15x-10y-4=0$ [সি.'০৫,'০৯; কু.'০২,'০৪,'১১; রা.'০৭; ঢা.'০৮; প্র.ভ.প.'০৬]

সমাধান : $5x^2+15x-10y-4=0$

$\Rightarrow 5\left(x^2+3x+\frac{9}{4}\right)=10y+4+\frac{45}{4}$

$\Rightarrow 5\left(x+\frac{3}{2}\right)^2=10y+\frac{61}{4}=10\left(y+\frac{61}{40}\right)$

$\Rightarrow \left(x+\frac{3}{2}\right)^2=2\left(y+\frac{61}{40}\right)$

একে পরাবৃত্তের সাধারণ সমীকরণ $(x-\alpha)^2=4a(y-\beta)$ এর সাথে তুলনা করে পাই, $4a=2$

$\Rightarrow a=\frac{1}{2}, \alpha=-\frac{3}{2}, \beta=-\frac{61}{40}$.

$\therefore$ শীর্ষবিন্দুর স্থানাঙ্ক $=(\alpha,\beta)=\left(-\frac{3}{2},-\frac{61}{40}\right)$

উপকেন্দ্রের স্থানাঙ্ক $=(\alpha,\beta+a)$

$=\left(-\frac{3}{2},-\frac{61}{40}+\frac{1}{2}\right)=\left(-\frac{3}{2},-\frac{41}{40}\right)$

উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য $=|4a|=|2|=2$ একক

অক্ষরেখার সমীকরণ $x - \alpha = 0$

$$\Rightarrow x + \frac{3}{2} = 0 \Rightarrow 2x + 3 = 0$$

এবং দিকাক্ষের সমীকরণ $y - \beta + a = 0$

$$\Rightarrow y + \frac{61}{40} + \frac{1}{2} = 0 \Rightarrow y + \frac{81}{40} = 0$$

2(a) $y^2 = 8x + 5$ পরাবৃত্তের শীর্ষবিন্দু এবং উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর। [কু.'০৪;ঢা.'১৩]

সমাধান : $y^2 = 8x + 5 \Rightarrow y^2 = 8(x + \frac{5}{8})$

একে পরাবৃত্তের সাধারণ সমীকরণ $(y - \beta)^2 = 4a(x - \alpha)$ এর সাথে তুলনা করে পাই, $4a = 8$

$\Rightarrow a = 2$, $\alpha = -\frac{5}{8}$, $\beta = 0$.

$\therefore$ শীর্ষবিন্দুর স্থানাঙ্ক $= (\alpha, \beta) = (-\frac{5}{8}, 0)$ এবং

উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য $= |4a|$ একক

$= |8|$ একক $= 8$ একক ।

2(b) $y^2 = 8y + 5x$ পরাবৃত্তের শীর্ষবিন্দু এবং উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর। [প্র.ভ.প. '৮৬]

সমাধান : $y^2 = 8y + 5x$

$\Rightarrow y^2 - 8y + 16 = 5x + 16$

$\Rightarrow (y - 4)^2 = 5(x + \frac{16}{5})$

একে পরাবৃত্তের সাধারণ সমীকরণ $(y - \beta)^2 = 4a(x - \alpha)$ এর সাথে তুলনা করে পাই, $4a = 5$

$\Rightarrow a = \frac{5}{4}$, $\alpha = -\frac{16}{5}$, $\beta = 4$.

$\therefore$ শীর্ষবিন্দুর স্থানাঙ্ক $= (\alpha, \beta) = (-\frac{16}{5}, 4)$ এবং

উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য $= |4a|$ একক

$= |5|$ একক $= 5$ একক ।

2(c) $y^2 = 2(x + 3)$ পরাবৃত্তের শীর্ষবিন্দু , উপকেন্দ্র এবং দিকাক্ষের সমীকরণ নির্ণয় কর। [ব.'০৩]

সমাধান : $y^2 = 2(x + 3)$ কে পরাবৃত্তের সাধারণ সমীকরণ $(y - \beta)^2 = 4a(x - \alpha)$ এর সাথে তুলনা করে পাই, $4a = 2 \Rightarrow a = \frac{1}{2}$, $\alpha = -3$, $\beta = 0$.

$\therefore$ শীর্ষবিন্দুর স্থানাঙ্ক $= (\alpha, \beta) = (-3, 0)$

উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য $= |4a|$ একক

$= |2|$ একক $= 2$ একক ।

এবং দিকাক্ষের সমীকরণ $x - \alpha + a = 0$

$$\Rightarrow x + 3 + \frac{1}{2} = 0 \Rightarrow 2x + 7 = 0$$

3.(a) $x^2 = 4(1 - y)$ পরাবৃত্তের শীর্ষবিন্দু , উপকেন্দ্র এবং দিকাক্ষের সমীকরণ নির্ণয় কর। [রা.'০৮; ঢা.,চ.'১১]

সমাধান : $x^2 = 4(1 - y) \Rightarrow x^2 = -4(y - 1)$

একে পরাবৃত্তের সাধারণ সমীকরণ $(x - \alpha)^2 = 4a(y - \beta)$ এর সাথে তুলনা করে পাই, $4a = -4 \Rightarrow a = -1$, $\alpha = 0$, $\beta = 1$.

$\therefore$ শীর্ষবিন্দুর স্থানাঙ্ক $= (\alpha, \beta) = (0, 1)$

উপকেন্দ্রের স্থানাঙ্ক $= (\alpha, \beta + a)$

$= (0, 1 - 1) = (0, 0)$

এবং দিকাক্ষের সমীকরণ $y - 1 - 1 = 0$

$\Rightarrow y - 2 = 0$

3(b) $y^2 = 4(x - 2)$ পরাবৃত্তের শীর্ষবিন্দু এবং উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর। [রা.'০২]

সমাধান : $y^2 = 4(x - 2)$ কে পরাবৃত্তের সাধারণ সমীকরণ $(y - \beta)^2 = 4a(x - \alpha)$ এর সাথে তুলনা করে পাই, $a = 1$, $\alpha = 2$, $\beta = 0$.

$\therefore$ শীর্ষবিন্দুর স্থানাঙ্ক $= (\alpha, \beta) = (2, 0)$ এবং

উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য $= |4a|$ একক

$= |4|$ একক $= 4$ একক ।

4(a) $x^2 + 4x + 2y = 0$ পরাবৃত্তের শীর্ষবিন্দু , উপকেন্দ্র , অক্ষরেখা ও দিকাক্ষের সমীকরণ এবং উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর। [ব.'০৪; বুয়েট '০২-০৩ ,০৪-০৫]

সমাধান : $x^2 + 4x + 2y = 0$

$\Rightarrow x^2 + 4x + 4 = -2y + 4$

$\Rightarrow (x+2)^2 = -2(y-2)$

একে পরাবৃত্তের সাধারণ সমীকরণ $(x - \alpha)^2 = 4a(y - \beta)$ এর সাথে তুলনা করে পাই, $4a = -2$

$\Rightarrow a = -\frac{1}{2}, \alpha = -2, \beta = 2.$

$\therefore$ শীর্ষবিন্দুর স্থানাঙ্ক $= (\alpha, \beta) = (-2, 2)$

উপকেন্দ্রের স্থানাঙ্ক $= (\alpha, \beta + a)$

$$= (-2, 2 - \frac{1}{2}) = (-2, \frac{3}{2})$$

অক্ষরেখার সমীকরণ $x - \alpha = 0 \Rightarrow x + 2 = 0$

দিকাক্ষের সমীকরণ $y - 2 - \frac{1}{2} = 0 \Rightarrow 2y - 5 = 0$

উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য $= | 4a |$ একক

$= | -2 |$ একক $= 2$ একক।

4(b) $3x^2 - 4y + 6x - 5 = 0$ পরাবৃত্তের শীর্ষবিন্দু, উপকেন্দ্র, উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য এবং অক্ষরেখা ও দিকাক্ষের সমীকরণ নির্ণয় কর। [য.'০১]

সমাধান : $3x^2 - 4y + 6x - 5 = 0$

$\Rightarrow 3(x^2 + 2x + 1) = 4y + 5 + 3$

$\Rightarrow 3(x+1)^2 = 4y + 8 = 4(y+2)$

$\Rightarrow (x+1)^2 = \frac{4}{3}(y+2)$

একে পরাবৃত্তের সাধারণ সমীকরণ $(x - \alpha)^2 = 4a(y - \beta)$ এর সাথে তুলনা করে পাই, $4a = \frac{4}{3}$

$\Rightarrow a = \frac{1}{3}, \alpha = -1, \beta = -2.$

$\therefore$ শীর্ষবিন্দুর স্থানাঙ্ক $= (\alpha, \beta) = (-1, -2)$

উপকেন্দ্রের স্থানাঙ্ক $= (\alpha, \beta + a)$

$= (-1, -2 + \frac{1}{3}) = (-1, -\frac{5}{3})$

উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য $= | 4a | = | \frac{4}{3} | = \frac{4}{3}$ একক

অক্ষরেখার সমীকরণ $x - \alpha = 0 \Rightarrow x + 1 = 0$

এবং দিকাক্ষের সমীকরণ $y - \beta + a = 0$

$\Rightarrow y + 2 + \frac{1}{3} = 0 \Rightarrow 3y + 7 = 0$

5(a) $y^2 = 12x$ পরাবৃত্তের শীর্ষবিন্দু ও উপকেন্দ্রিক লম্বের ধনাত্মক দিকের প্রান্ত বিন্দুর সংযোগ রেখার সমীকরণ নির্ণয় কর। [ঢা.'০৪]

সমাধান : $y^2 = 12x$ কে পরাবৃত্তের আদর্শ সমীকরণ $y^2 = 4ax$ এর সাথে তুলনা করে পাই,

$4a = 12 \Rightarrow a = 3$

$\therefore$ প্রদত্ত পরাবৃত্তের শীর্ষবিন্দুর $(0,0)$ এবং উপকেন্দ্রিক লম্বের ধনাত্মক দিকের প্রান্ত বিন্দু $(a, 2a)$ অর্থাৎ $(3, 6)$ এর সংযোগ রেখার সমীকরণ,

$y = \frac{6}{3}x \Rightarrow y = 2x$ (Ans.)

5(b) $y^2 = 4px$ পরাবৃত্তটি $(3, -2)$ বিন্দু দিয়ে অতিক্রম করলে এর উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য এবং উপকেন্দ্রের স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর। [রা.'০৬; সি. '০৭; য. '০২; কু. '০৩; ব. '০৫,'১০; মা.বো.'০৬; দি.'০৯]

সমাধান : $y^2 = 4px$ পরাবৃত্তটি $(3, -2)$ বিন্দু দিয়ে অতিক্রম করে।

$\therefore (-2)^2 = 4p.3 \Rightarrow P = \frac{1}{3}.$

$\therefore$ পরাবৃত্তটির সমীকরণ হবে, $y^2 = \frac{4}{3}x.$

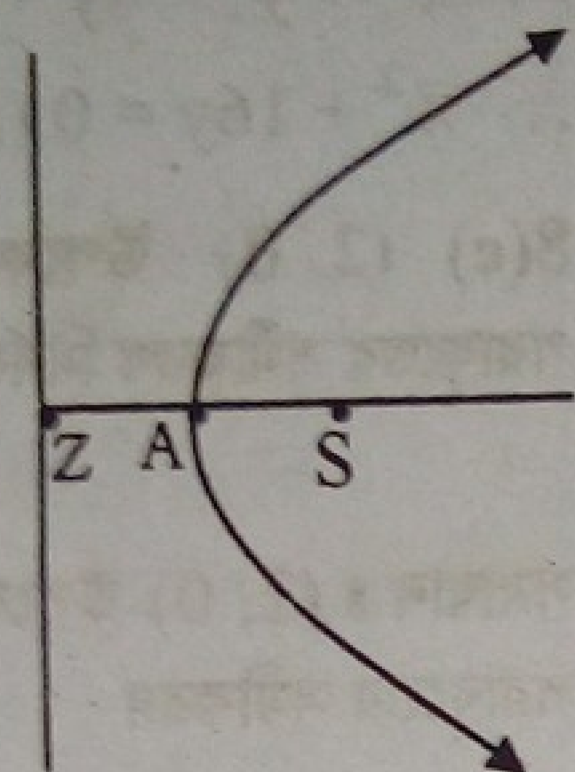
একে পরাবৃত্তের আদর্শ সমীকরণ $y^2 = 4ax$ এর সাথে তুলনা করে পাই, $4a = \frac{4}{3} \Rightarrow a = \frac{1}{3}$

উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য $= | 4a | = | \frac{4}{3} | = \frac{4}{3}$ একক

এবং উপকেন্দ্রের স্থানাঙ্ক $= (a, 0) = (\frac{1}{3}, 0)$

6(a) একটি পরাবৃত্তের উপকেন্দ্র ও শীর্ষবিন্দু যথাক্রমে (0, 0) ও (– 2 , – 1) বিন্দুতে অবস্থিত হলে তার দিকাক্ষের সমীকরণ নির্ণয় কর। [য.'০৮; চ.'১০; সি.'১১]

সমাধান : ধরি, পরাবৃত্তের উপকেন্দ্র S(0 , 0), শীর্ষবিন্দু A(–2,–1) এবং দিকাক্ষের প্রাদবিন্দু Z(α,β).



সংজ্ঞানুসারে, ZS এর মধ্যবিন্দু A.

$\therefore \frac{\alpha+0}{2} = -2 \Rightarrow \alpha = -4$

এবং $\frac{\beta+0}{2} = -1 \Rightarrow \beta = -2$

$\therefore$ দিকাক্ষের প্রাদবিন্দু Z(–4 , –2).

অক্ষরেখা AS এর সমীকরণ $y = \frac{-1}{-2}x$

$\Rightarrow x - 2y = 0$

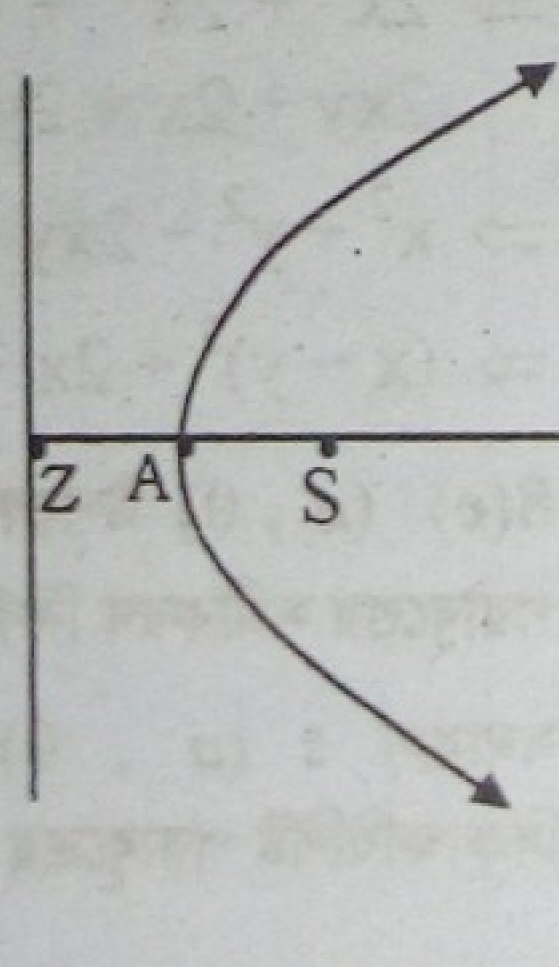
$\therefore$ অক্ষরেখা $x - 2y = 0$ এর উপর লম্ব এবং Z(–4,–2) বিন্দুগামী দিকাক্ষের সমীকরণ,

$2x + y = 2 \times -4 + (-2) = -8 - 2$

$\therefore \quad 2x + y + 10 = 0$ (Ans.)

6(b) একটি পরাবৃত্তের উপকেন্দ্র ও শীর্ষবিন্দু যথাক্রমে (3, 4) ও (0, 0) বিন্দুতে অবস্থিত হলে তার দিকাক্ষের সমীকরণ নির্ণয় কর। [চ.'০২, '০৮; ব. '০৭; য. '০৪,'১৩ ; ঢা. '০৮,'১১; সি. '০৯; দি.'১১;কু.'১৩; বুয়েট '০৬-০৭]

সমাধান ঃ ধরি, পরাবৃত্তের উপকেন্দ্র S(3 , 4), শীর্ষবিন্দু A(0 , 0) এবং দিকাক্ষের প্রাদবিন্দু Z(α,β).



সংজ্ঞানুসারে, ZS এর মধ্যবিন্দু A.

$\therefore \frac{\alpha+3}{2} = 0 \Rightarrow \alpha = -3$

এবং $\frac{\beta+4}{2} = 0 \Rightarrow \beta = -4$

$\therefore$ দিকাক্ষের প্রাদবিন্দু Z(–3 , –4).

অক্ষরেখা AS এর সমীকরণ $y = \frac{4}{3}x$

$\Rightarrow 4x - 3y = 0$

$\therefore$ অক্ষরেখা $4x - 3y = 0$ এর উপর লম্ব এবং Z(–3,–4) বিন্দুগামী দিকাক্ষের সমীকরণ,

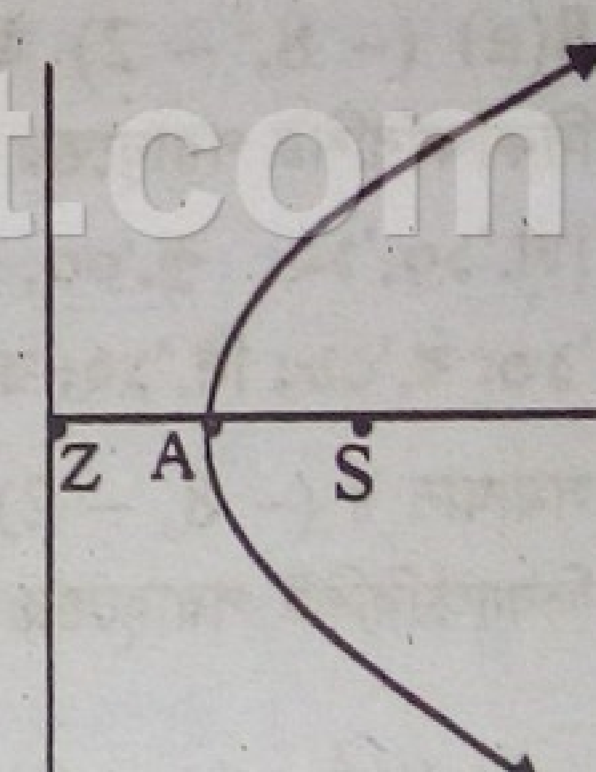
$3x + 4y = 3 \times -3 + 4 \times -4 = -9 - 16$

$\therefore \quad 3x + 4y + 25 = 0$ (Ans.)

6(c) একটি পরাবৃত্তের অক্ষরেখা ও দিকাক্ষের সমীকরণ নির্ণয় কর যার উপকেন্দ্র (– 1, 1) বিন্দুতে এবং শীর্ষ (2, – 3) বিন্দুতে অবস্থিত।

[রা.'০৩,'১৩; চ.'১৩; কুয়েট '০৫-০৬]

সমাধান : ধরি, পরাবৃত্তের উপকেন্দ্র S(–1 , 1), শীর্ষবিন্দু A(2,–3) এবং দিকাক্ষের প্রাদবিন্দু Z(α,β).



সংজ্ঞানুসারে, ZS এর মধ্যবিন্দু A.

$\therefore \frac{\alpha-1}{2} = 2 \Rightarrow \alpha = 5$

এবং $\frac{\beta+1}{2} = -3 \Rightarrow \beta = -7$

$\therefore$ দিকাক্ষের প্রাদবিন্দু Z(5 , –7).

$\therefore$ S(–1 , 1) ও A(2,–3) বিন্দুগামী অক্ষরেখার সমীকরণ $(x + 1)(1 + 3) - (y - 1)(-1 - 2) = 0$

$\Rightarrow 4x + 4 + 3y - 3 = 0$

$\therefore \quad 4x + 3y + 1 = 0$ (Ans.)

অক্ষরেখা $4x + 3y + 1 = 0$ এর উপর লম্ব এবং Z(5, – 7) বিন্দুগামী দিকাক্ষের সমীকরণ,

$3x - 4y = 3 \times 5 - 4 \times -7 = 15 + 28$

$\therefore \quad 3x - 4y - 43 = 0$ (Ans.)

7. $y^2 = 12x$ পরাবৃত্তের উপর P একটি বিন্দু । x-অক্ষ হতে P বিন্দুর দূরত্ব y-অক্ষ হতে তার দূরত্বের দ্বিগুণ হলে P বিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

সমাধান : ধরি, $y^2 = 12x$ পরাবৃত্তের উপর P বিন্দুটির স্থানাঙ্ক (α, β).

$\therefore$ x-অক্ষ হতে $P(\alpha, \beta)$ বিন্দুর দূরত্ব $= |\beta|$ এবং

y-অক্ষ হতে $P(\alpha, \beta)$ বিন্দুর দূরত্ব $= |\alpha|$

প্রশ্নমতে, $|\beta| = 2|\alpha| \Rightarrow \beta = \pm 2\alpha \cdots (1)$

$\therefore$ $(\alpha, \pm 2\alpha)$, $y^2 = 12x$ এর উপর অবস্থিত।

$\therefore$ $(\pm 2\alpha)^2 = 12.\alpha \Rightarrow 4\alpha^2 = 12\alpha$

$\Rightarrow \alpha = 3$ [এখানে $\alpha \neq 0$]

(1) হতে পাই, $\beta = \pm 6$

$\therefore$ বিন্দুটির স্থানাঙ্ক $(3, 6)$ বা, $(3, -6)$.

8(a) $(-8, -2)$ উপকেন্দ্র ও $2x - y - 9 = 0$ দিকাক্ষবিশিষ্ট পরাবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর।

[ঢা.'১০,'১২; কু.'০০, ০৭; সি.'০১,'০৪; রা.'০১,'০৬, '১৩; ব.'০৮; দি.'১২; কুয়েট '০৮-০৯]

সমাধান : $(-8, -2)$ উপকেন্দ্র ও $2x - y - 9 = 0$ দিকাক্ষবিশিষ্ট পরাবৃত্তের সমীকরণ,

$$(x+8)^2 + (y+2)^2 = \left(\frac{2x-y-9}{\sqrt{2^2+1^2}}\right)^2$$

$$\Rightarrow x^2 + 16x + 64 + y^2 + 4y + 4$$

$$= \frac{4x^2 + y^2 + 81 - 4xy - 36x + 18y}{5}$$

$$\Rightarrow 5x^2 + 5y^2 + 80x + 20y + 340$$

$$= 4x^2 + y^2 - 4xy - 36x + 18y + 81$$

$$\therefore x^2 + 4y^2 + 4xy + 116x + 2y + 259 = 0$$

8(b) $(0, -4)$ উপকেন্দ্র ও $y - 4 = 0$ দিকাক্ষবিশিষ্ট পরাবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর। [ব.'০৭]

সমাধান : $(0, -4)$ উপকেন্দ্র ও $y - 4 = 0$ দিকাক্ষবিশিষ্ট পরাবৃত্তের সমীকরণ,

$$(x-0)^2 + (y+4)^2 = \left(\frac{y-4}{\sqrt{1^2}}\right)^2$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 + 8y + 16 = y^2 - 8y + 16$$

$$\therefore x^2 + 16y = 0 \text{ (Ans.)}$$

8(c) $(2, 0)$ উপকেন্দ্র ও $x + 2 = 0$ দিকাক্ষবিশিষ্ট পরাবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর।

[কু.'০৪; মা.'০৫; সি.'১০]

সমাধান : $(2, 0)$ উপকেন্দ্র ও $x + 2 = 0$ দিকাক্ষবিশিষ্ট পরাবৃত্তের সমীকরণ

$$(x-2)^2 + (y-0)^2 = \left(\frac{x+2}{\sqrt{1^2}}\right)^2$$

$$\Rightarrow x^2 - 4x + 4 + y^2 = x^2 + 4x + 4$$

$$\therefore y^2 = 8x \text{ (Ans.)}$$

8(d) $(-1, 1)$ উপকেন্দ্র ও $x + y + 1 = 0$ দিকাক্ষবিশিষ্ট পরাবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর।

[কু.'০৩; ঢা.'০৫; রা.'০৮; দি.'১০]

সমাধান : $(-1, 1)$ উপকেন্দ্র ও $x + y + 1 = 0$ দিকাক্ষবিশিষ্ট পরাবৃত্তের সমীকরণ

$$(x+1)^2 + (y-1)^2 = \left(\frac{x+y+1}{\sqrt{1^2+1^2}}\right)^2$$

$$\Rightarrow x^2 + 2x + 1 + y^2 - 2y + 1$$

$$= \frac{x^2 + y^2 + 1 + 2xy + 2x + 2y}{2}$$

$$\Rightarrow 2x^2 + 2x^2 + 4x - 4y + 4 = x^2 + y^2 + 2xy + 2x + 2y + 1$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 - 2xy + 2x - 6y + 3 = 0$$

$$\Rightarrow (x-y)^2 + 2x - 6y + 3 = 0 \text{ (Ans.)}$$

8(e) $(a, 0)$ উপকেন্দ্র ও $x - c = 0$ দিকাক্ষবিশিষ্ট পরাবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর। [য.'০৬]

সমাধান : $(a, 0)$ উপকেন্দ্র ও $x - c = 0$ দিকাক্ষবিশিষ্ট পরাবৃত্তের সমীকরণ

$$(x-a)^2 + (y-0)^2 = (\frac{x-c}{\sqrt{1^2}})$$

$\Rightarrow x^2 - 2ax + a^2 + y^2 = x^2 - 2cx + c^2$

$\Rightarrow y^2 = 2ax - 2cx + c^2 - a^2$

$\therefore\ y^2 = 2(a-c)x + c^2 - a^2$ (Ans.)

9(a) $y^2 = 16x$ পরাবৃত্তের উপরিস্থিত কোন বিন্দুর উপকেন্দ্রিক দূরত্ব 6 ; ঐ বিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

[য.'০৩; ঢা.'০৫,'০৯,'১২; রা.'০৭; সি.'০৭,'১২; দি., কু১০ ; ব.'১৩; প্র.ভ.প.'০৫]

সমাধান ঃ $y^2 = 16x \cdots (1)$ কে পরাবৃত্তের আদর্শ সমীকরণ $y^2 = 4ax$ এর সাথে তুলনা করে পাই,

$4a = 16 \Rightarrow a = 4$

ধরি, প্রদত্ত পরাবৃত্তের উপরিস্থিত (x , y) বিন্দুর উপকেন্দ্রিক দূরত্ব 6.

(1) আমরা জানি, $y^2 = 4ax$ পরাবৃত্তের উপরিস্থিত (x , y) বিন্দুর উপকেন্দ্রিক দূরত্ব $= x + a$.

$\therefore\ x + a = 6 \Rightarrow x + 4 = 6 \Rightarrow x = 2$

(1) এ x এর মান বসিয়ে পাই, $y^2 = 16.2$

$\Rightarrow y = 4\sqrt{2}$ বা, $-4\sqrt{2}$

$\therefore$ নির্ণেয় বিন্দুর স্থানাঙ্ক $(2, 4\sqrt{2})$ বা, $(2, -4\sqrt{2})$

9(b) $y^2 = 8x$ পরাবৃত্তের উপরিস্থিত কোন বিন্দুর উপকেন্দ্রিক দূরত্ব 8; ঐ বিন্দু স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

[চ. '০৭,'১১; কু. '০৬; ঢা. '০৬; ব. '০৮,'১০; সি.'১০; য.'১০; রা.'১১,'১৩; দি.'১৩]

সমাধান ঃ $y^2 = 8x \cdots (1)$ কে পরাবৃত্তের আদর্শ সমীকরণ $y^2 = 4ax$ এর সাথে তুলনা করে পাই,

$4a = 8 \Rightarrow a = 2$

ধরি, প্রদত্ত পরাবৃত্তের উপরিস্থিত (x , y) বিন্দুর উপকেন্দ্রিক দূরত্ব 8.

আমরা জানি, $y^2 = 4ax$ পরাবৃত্তের উপরিস্থিত (x , y) বিন্দুর উপকেন্দ্রিক দূরত্ব $= x + a$.

$\therefore\ x + a = 8 \Rightarrow x + 2 = 8 \Rightarrow x = 6$

(1) এ x এর মান বসিয়ে পাই, $y^2 = 8.6$

$\Rightarrow y = 4\sqrt{3}$ বা, $-4\sqrt{3}$

$\therefore$ নির্ণেয় বিন্দুর স্থানাঙ্ক $(2,\ 4\sqrt{3})$ বা, $(2, -\ 4\sqrt{3})$

9(c) $y^2 = 9x$ পরাবৃত্তের উপরিস্থিত P বিন্দুর কোটি 12 ; P বিন্দুর উপকেন্দ্রিক দূরত্ব নির্ণয় কর।

[ব.'০২; বুয়েট'০৩-০৪]

সমাধান ঃ ধরি, $y^2 = 9x$ পরাবৃত্তের উপরিস্থিত P বিন্দুর স্থানাঙ্ক $(\alpha , 12)$

$\therefore\ 12^2 = 9\alpha \Rightarrow \alpha = \frac{144}{9} = 16$

$y^2 = 8x \cdots (1)$ কে পরাবৃত্তের আদর্শ সমীকরণ $y^2 = 4ax$ এর সাথে তুলনা করে পাই,

$4a = 9 \Rightarrow a = \frac{9}{4}$

$\therefore$ আমরা জানি, $y^2 = 4ax$ পরাবৃত্তের উপরিস্থিত (x , y) বিন্দুর উপকেন্দ্রিক দূরত্ব $= x + a$.

$\therefore\ y^2 = 9x$ পরাবৃত্তের উপরিস্থিত $P(\alpha,12)$ বিন্দুর উপকেন্দ্রিক দূরত্ব $= \alpha + a = 16 + \frac{9}{4} = 18\frac{1}{4}$

10. একটি পরাবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর যার উপকেন্দ্র (– 1 , 3) এবং শীর্ষ (4, 3) বিন্দুতে অবস্থিত ।

[ঢা.'০২; য.'০২; সি.'০৬; কু.'১১; ব.'১৩]

সমাধান ঃ পরাবৃত্তের অক্ষরেখার উপরস্থ উপকেন্দ্র $(-1,3)$ ও শীর্ষ $(4, 3)$ এর কোটি অভিন্ন । অতএব, পরাবৃত্তের অক্ষরেখাটি $x-$ অক্ষের সমান্তরাল।

ধরি, শীর্ষবিন্দু $(4, 3)$ এবং অক্ষরেখা x-অক্ষের সমান্তরাল এরূপ পরাবৃত্তের সমীকরণ, $(y-3)^2 = 4a(x-4) \cdots (1)$

(1) পরাবৃত্তের উপকেন্দ্রের স্থানাঙ্ক $= (4+ a, 3)$

$\therefore$ প্রশ্নমতে, $4 + a = -1 \Rightarrow a = -5.$

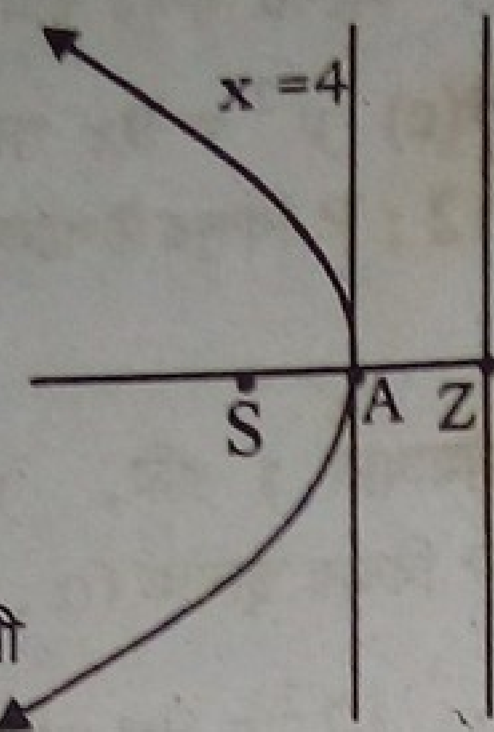
$\therefore$ (1) এ a এর মান বসিয়ে পাই,

$(y-3)^2 = 4.(-5)(x-4)$

$\therefore\ (y-3)^2 = -20\ (x-4)$

11(a) একটি পরাবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর যার উপকেন্দ্র (2 , 5) বিন্দুতে অবস্থিত এবং $x = 4$ রেখাটি এর শীর্ষবিন্দুতে স্পর্শ করে। [য.'০৪; কু.'১২; সি.'১৩]

সমাধান ঃ যেহেতু $x = 4$ রেখাটি পরাবৃত্তের শীর্ষবিন্দুতে স্পর্শ করে, সুতরাং এর অক্ষরেখা x- অক্ষের সমান্তরাল।



$x = 4$ রেখার উপর লম্ব এবং উপকেন্দ্র (2,5) দিয়ে অতিক্রমকারী অক্ষরেখার সমীকরণ $y = 5$.

$x = 4$ ও $y = 5$ রেখার ছেদবিন্দু $A(4, 5)$, যা পরাবৃত্তের শীর্ষবিন্দু।

ধরি, শীর্ষবিন্দু (4, 5) এবং অক্ষরেখা x-অক্ষের সমান্তরাল এরূপ পরাবৃত্তের সমীকরণ, $(y-5)^2 = 4a(x-4) \cdots (1)$

(1) পরাবৃত্তের উপকেন্দ্রের স্থানাঙ্ক $= (4 + a, 5)$

$\therefore$ প্রশ্নমতে, $4 + a = 2 \Rightarrow a = -2$.

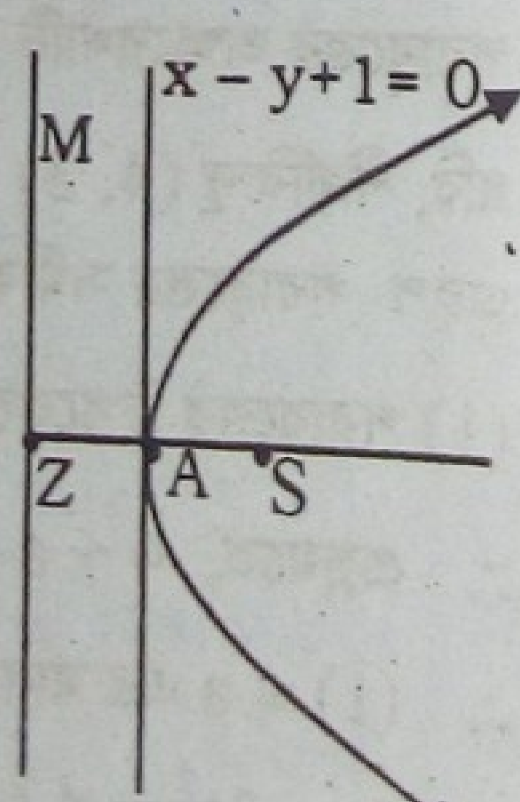
$\therefore$ (1) এ a এর মান বসিয়ে পাই,

$(y-5)^2 = 4.(-2)(x-4)$

$\therefore$ $(y-5)^2 = -8(x-4)$

11(b) একটি পরাবৃত্তের উপকেন্দ্র মূলবিন্দুতে অবস্থিত এবং $x - y + 1 = 0$ রেখাটি শীর্ষবিন্দুতে অক্ষরেখার উপর লম্ব। পরাবৃত্তটির সমীকরণ নির্ণয় কর। [বুয়েট'০৫-০৬]

সমাধান ঃ ধরি, পরাবৃত্তের শীর্ষবিন্দু A, উপকেন্দ্র S(0,0) এবং দিকাক্ষ MZ. $x - y + 1 = 0$ রেখাটি শীর্ষবিন্দু A তে অক্ষরেখার উপর লম্ব।



$\therefore$ S(0,0) দিয়ে অতিক্রমকারী এবং $x - y + 1 = 0$ রেখার উপর লম্ব অক্ষরেখার সমীকরণ $x + y = 0$

এ রেখাদ্বয়ের ছেদবিন্দু $A \equiv (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$

ধরি, দিকাক্ষের প্রাদবিন্দু $Z(\alpha, \beta)$. A, ZS এর মধ্যবিন্দু।

$\therefore \frac{\alpha + 0}{2} = -\frac{1}{2} \Rightarrow \alpha = -1$ এবং $\frac{\beta + 0}{2} = \frac{1}{2} \Rightarrow \beta = 1$

$\therefore$ $x - y + 1 = 0$ রেখার সমান্তরাল এবং $Z(-1, 1)$ দিয়ে অতিক্রমকারী দিকাক্ষ MZ এর সমীকরণ

$x - y = -1 - 1 \Rightarrow x - y + 2 = 0$

$\therefore$ S(0,0) উপকেন্দ্র ও $x - y + 2 = 0$ দিকাক্ষবিশিষ্ট পরাবৃত্তের সমীকরণ উপকেন্দ্র,

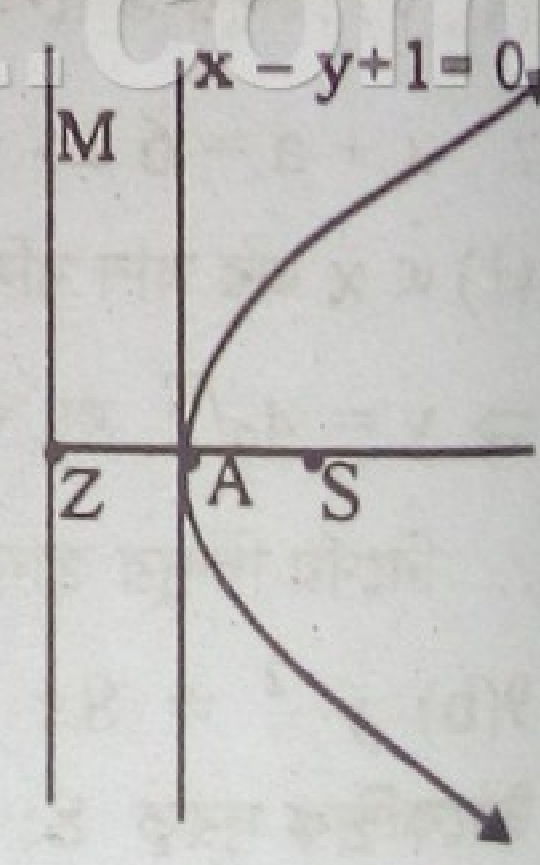
$$(x-0)^2 + (y-0)^2 = (\frac{x - y + 2}{\sqrt{1^2 + 1^2}})^2$$

$$\Rightarrow 2(x^2 + y^2) = x^2 + y^2 + 4 - 2xy + 4x - 4y$$

$$\therefore x^2 + y^2 + 2xy - 4x + 4y - 4 = 0$$

11(c) একটি পরাবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর যার উপকেন্দ্র (1, −1) বিন্দুতে অবস্থিত এবং $x - y + 2 = 0$ রেখাটি শীর্ষবিন্দুতে অক্ষরেখার উপর লম্ব। [বুয়েট'০৮-০৯]

সমাধান ঃ ধরি, পরাবৃত্তের শীর্ষবিন্দু A, উপকেন্দ্র S(1 ,−1) এবং দিকাক্ষ MZ. $x - y + 2 = 0$ রেখাটি শীর্ষবিন্দু A তে অক্ষরেখার উপর লম্ব।



$\therefore$ S(1,−1) দিয়ে অতিক্রমকারী এবং $x - y + 2 = 0$ রেখার উপর লম্ব অক্ষরেখার সমীকরণ

$x + y = 1 - 1 \Rightarrow x + y = 0$

এ রেখাদ্বয়ের ছেদবিন্দু $A \equiv (-1, 1)$

ধরি, দিকাক্ষের প্রাদবিন্দু $Z(\alpha, \beta)$. A, ZS এর মধ্যবিন্দু।

$\therefore \frac{\alpha + 1}{2} = -1 \Rightarrow \alpha = -3$ এবং $\frac{\beta - 1}{2} = 1 \Rightarrow \beta = 3$

$\therefore$ $x - y + 2 = 0$ রেখার সমান্তরাল এবং $Z(-3, 3)$ দিয়ে অতিক্রমকারী দিকাক্ষ MZ এর সমীকরণ

$x - y = -3 - 3 \Rightarrow x - y + 6 = 0$

$\therefore$ S(1, −1) উপকেন্দ্র ও $x - y + 6 = 0$ দিকাক্ষবিশিষ্ট পরাবৃত্তের সমীকরণ উপকেন্দ্র ,

$$(x-1)^2 + (y+1)^2 = \left(\frac{x-y+6}{\sqrt{1^2+1^2}}\right)^2$$

$$\Rightarrow 2(x^2 - 2x + 1 + y^2 + 2y + 1)$$
$$= x^2 + y^2 + 36 - 2xy + 12x - 12y$$
$$\Rightarrow 2x^2 + 2y^2 - 4x + 4y + 4$$
$$= x^2 + y^2 + 36 - 2xy + 12x - 12y$$
$$\therefore x^2 + y^2 + 2xy - 16x + 16y - 32 = 0$$

12(a) (2, 3) শীর্ষ এবং $y = 6$ দিকাক্ষবিশিষ্ট পরাবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর। [ব.'০৩]

সমাধান ঃ পরাবৃত্তের দিকাক্ষের সমীকরণ $y = 6 \cdots(1)$, যা x−অক্ষের সমান্তরাল। অতএব, দিকাক্ষের উপর লম্ব অক্ষরেখা হবে y−অক্ষের সমান্তরাল।

ধরি, শীর্ষ (2 , 3) এবং অক্ষরেখা y-অক্ষের সমান্তরাল এরূপ পরাবৃত্তের সমীকরণ, $(x-2)^2 = 4a(y-3) \cdots (2)$

(2) পরাবৃত্তের দিকাক্ষের সমীকরণ, $y - 3 = -a$

$\therefore\ y = 3 - a \cdots \cdots (3)$

(1) ও (3) হতে পাই, $3 - a = 6 \Rightarrow a = -3$

(2) এ a এর মান বসিয়ে পাই,

$(x-2)^2 = 4.(-3)(y-3)$

$\Rightarrow x^2 - 4x + 4 = -12y + 36$

$\therefore\ x^2 - 4x + 12y - 32 = 0$ (Ans.)

12(b) একটি পরাবৃত্তের দিকাক্ষের সমীকরণ $x - c = 0$ এবং তার শীর্ষ $(c', 0)$ বিন্দুতে অবস্থিত। দেখাও যে পরাবৃত্তের সমীকরণ $y^2 = 4(c' - c)(x - c')$

প্রমাণ ঃ পরাবৃত্তের দিকাক্ষের সমীকরণ $x - c = 0$ অর্থাৎ $x = c \cdots(1)$, যা y−অক্ষের সমান্তরাল।

$\therefore$ দিকাক্ষের উপর লম্ব অক্ষরেখা হবে x-অক্ষের সমান্তরাল।

ধরি, শীর্ষ $(c', 0)$ এবং অক্ষরেখা x-অক্ষের সমান্তরাল এরূপ পরাবৃত্তের সমীকরণ, $(y-0)^2 = 4a(x - c') \cdots (2)$

(2) পরাবৃত্তের দিকাক্ষের সমীকরণ, $x - c' = -a$

$\therefore\ x = c' - a \cdots \cdots (3)$

(1) ও (3) হতে পাই, $c' - a = c \Rightarrow a = c' - c$

(2) এ a এর মান বসিয়ে পাই,

$y^2 = 4(c' - c)(x - c')$

12(c) (4, 3) শীর্ষ এবং $y = 7$ দিকাক্ষবিশিষ্ট পরাবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর। [সি.'০৪; কু.'০৮; বুয়েট ০৫-০৬]

সমাধান ঃ পরাবৃত্তের দিকাক্ষের সমীকরণ $y = 7 \cdots(1)$, যা x−অক্ষের সমান্তরাল। অতএব, দিকাক্ষের উপর লম্ব অক্ষরেখা হবে y−অক্ষের সমান্তরাল।

ধরি, শীর্ষ (4 , 3) এবং অক্ষরেখা y-অক্ষের সমান্তরাল এরূপ পরাবৃত্তের সমীকরণ, $(x-4)^2 = 4a(y-3) \cdots (2)$

(2) পরাবৃত্তের দিকাক্ষের সমীকরণ, $y - 3 = -a$

$\therefore\ y = 3 - a \cdots \cdots (3)$

(1) ও (3) হতে পাই, $3 - a = 7 \Rightarrow a = -4$

(2) এ a এর মান বসিয়ে পাই,

$(x-4)^2 = 4.(-4)(y-3)$

$\therefore\ (x-4)^2 = -16(y-3)$ (Ans.)

13(a) (2, 5) বিন্দুগামী পরাবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর যার শীর্ষ (0, 2) বিন্দুতে অবস্থিত এবং অক্ষরেখা y-অক্ষের সমান্তরাল।

সমাধান ঃ ধরি, শীর্ষ (0 , 2) এবং অক্ষরেখা y-অক্ষের সমান্তরাল এরূপ পরাবৃত্তের সমীকরণ,

$(x-0)^2 = 4a(y-2) \Rightarrow x^2 = 4a(y-2) \cdots \cdots (1)$

(1) পরাবৃত্তটি (2, 5) বিন্দুগামী ।

$\therefore\ 4 = 4a(5-2) \Rightarrow a = \frac{1}{3}$

(1) এ a এর মান বসিয়ে পাই,

$x^2 = 4.\frac{1}{3}(y-3)\quad \therefore 3x^2 = 4(y-2)$

[MCQ এর জন্য , $\frac{(x-0)^2}{y-2} = \frac{2^2}{5-2}$]

13(b) একটি পরাবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর যার শীর্ষ (4, – 3) বিন্দুতে অবস্থিত, দিকাক্ষ x-অক্ষের সমান্তরাল এবং যা (– 4, – 7) বিন্দু দিয়ে অতিক্রম করে। [চ.'০২; সি.'০৫]

সমাধান ঃ যেহেতু পরাবৃত্তের দিকাক্ষ x-অক্ষের সমান্তরাল, সুতরাং দিকাক্ষের উপর লম্ব এর অক্ষরেখা y-অক্ষের সমান্তরাল।

ধরি, শীর্ষ (4, – 3) এবং অক্ষরেখা y-অক্ষের সমান্তরাল এরূপ পরাবৃত্তের সমীকরণ, $(x-4)^2 = 4a(y+3) \cdots (1)$

(1) পরাবৃত্তটি (–4, –7) বিন্দু দিয়ে অতিক্রম করে।

$\therefore (-4-4)^2 = 4a(-7+3)$

$\Rightarrow 64 = -16a \Rightarrow a = -4$

(1) এ a এর মান বসিয়ে পাই, $(x-4)^2 = 4(-4)(y+3)$

$\Rightarrow x^2 - 8x + 16 = -16y - 48$

$\therefore x^2 - 8x + 16y + 64 = 0$

13(c) একটি পরাবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর যার শীর্ষ (4, – 3) বিন্দুতে অবস্থিত, উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য 4 একক এবং অক্ষটি x-অক্ষের সমান্তরাল।

[সি.'০৪; কু.'০৮; প্র.ভ.প.'০৫]

সমাধান ঃ ধরি, শীর্ষ (4, – 3) এবং অক্ষরেখা x-অক্ষের সমান্তরাল এরূপ পরাবৃত্তের সমীকরণ,

$(y+3)^2 = 4a(x-4) \cdots \cdots (1)$

(1) পরাবৃত্তের উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য = $|4a|$

প্রশ্নমতে, $|4a| = 4 \Rightarrow 4a = \pm 4 \Rightarrow a = \pm 1$

(1) এ a এর মান বসিয়ে পাই,

$(y+3)^2 = 4(\pm 1)(x-4)$

$\therefore (y+3)^2 = \pm 4(x-4)$ (Ans.)

14(a) একটি পরাবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর যার অক্ষরেখা x-অক্ষের সমান্তরাল, শীর্ষবিন্দু y-অক্ষের উপর অবস্থিত এবং যা (0, 2) ও (1, 0) বিন্দু দিয়ে অতিক্রম করে। [প্র.ভ.প.'৮৬]

সমাধান ঃ ধরি, y-অক্ষের উপর অবস্থিত শীর্ষবিন্দুর স্থানাঙ্ক $(0, \beta)$.

ধরি, শীর্ষ $(0, \beta)$ এবং অক্ষরেখা x-অক্ষের সমান্তরাল এরূপ পরাবৃত্তের সমীকরণ,

$(y+\beta)^2 = 4a(x-0)$

$\Rightarrow (y+\beta)^2 = 4ax \cdots (1)$

(1) পরাবৃত্তটি (0, 2) ও (1, 0) বিন্দু দিয়ে অতিক্রম করে।

$\therefore (2+\beta)^2 = 4a.0 \Rightarrow \beta + 2 = 0 \Rightarrow \beta = -2$

এবং $(0-2)^2 = 4a.1 \quad [\because \beta = -2]$

$\Rightarrow 4a = 4 \Rightarrow a = 1$

(1) এ a ও β এর মান বসিয়ে পাই,

$(y-2)^2 = 4.1.x \therefore (y-2)^2 = 4x$

14(b) একটি পরাবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর যার অক্ষরেখা x- অক্ষের উপর অবস্থিত এবং যা (3, 2) ও (– 2, –1) বিন্দু দিয়ে অতিক্রম করে।

সমাধান ঃ যেহেতু পরাবৃত্তের অক্ষরেখা x- অক্ষের উপর অবস্থিত, সুতরাং এর শীর্ষও x-অক্ষের উপর অবস্থিত।

ধরি, শীর্ষবিন্দুর স্থানাঙ্ক $(\alpha, 0)$ এবং শীর্ষ $(\alpha, 0)$ ও অক্ষরেখা x-অক্ষের সমান্তরাল এরূপ পরাবৃত্তের সমীকরণ,

$(y+0)^2 = 4a(x-\alpha)$

$\Rightarrow y^2 = 4a(x-\alpha) \cdots (1)$

(1) পরাবৃত্তটি (3, 2) ও (–2, –1) বিন্দু দিয়ে অতিক্রম করে।

$\therefore 4 = 4a(3-\alpha) \cdots \cdots (2)$ এবং

$1 = 4a(-2-\alpha) \cdots \cdots (3)$

$(2) \div (3) \Rightarrow 4 = \dfrac{3-\alpha}{-2-\alpha}$

$\Rightarrow -8 - 4\alpha = 3 - \alpha \Rightarrow 3\alpha = -11$

$\Rightarrow \alpha = -\dfrac{11}{3}$

(3) এ α এর মান বসিয়ে পাই,

$1 = 4a(-2 + \dfrac{11}{3}) \Rightarrow 3 = 4a(-6+11)$

$\Rightarrow 20a = 3 \Rightarrow a = \dfrac{3}{20}$

(1) এ a ও β এর মান বসিয়ে পাই,

$$y^2 = 4.\frac{3}{20}.(x+\frac{11}{3})$$

$$\Rightarrow y^2 = \frac{3}{5}.\frac{3x+11}{3} \quad \therefore 5y^2 = 3x+11$$

15(a) একটি পরাবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর যার অক্ষরেখা x-অক্ষের সমান্তরাল এবং যা $(-2, 1)$, $(1, 2)$ ও $(-1, 3)$ বিন্দু দিয়ে অতিক্রম করে।

সমাধান ঃ ধরি, অক্ষরেখা x-অক্ষের সমান্তরাল এরূপ পরাবৃত্তের সমীকরণ, $x = ay^2 + by + c \cdots (1)$

(1) পরাবৃত্তটি $(-2, 1)$, $(1, 2)$ ও $(-1, 3)$ বিন্দু দিয়ে অতিক্রম করে।

$\therefore \ -2 = a + b + c \cdots\cdots (2)$,

$1 = 4a + 2b + c \cdots\cdots (3)$,

$-1 = 9a + 3b + c = 0 \cdots (4)$

এখন, $(2)-(3) \Rightarrow -3 = -3a - b$

$\Rightarrow b = 3 - 3a \cdots\cdots (5)$

$(3)-(4) \Rightarrow 2 = -5a - b$

$\Rightarrow 2 = -5a - 3 + 3a \Rightarrow 2a = -5$

$\Rightarrow a = -\frac{5}{2}$

(5) হতে পাই, $b = 3 + 3 \times \frac{5}{2} = \frac{21}{2}$ এবং

(2) হতে পাই, $-2 = -\frac{5}{2} + \frac{21}{2} + c \Rightarrow c = -10$

$\therefore$ নির্ণেয় পরাবৃত্তের সমীকরণ,

$$x = -\frac{5}{2}y^2 + \frac{21}{2}y - 10$$

$$\Rightarrow 5y^2 - 21y + 2x + 20 = 0$$

15(b) এরূপ পরাবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর যার অক্ষরেখা y-অক্ষের সমান্তরাল এবং যা $(4, 5)$, $(-2, 11)$ ও $(-4, 21)$ বিন্দু দিয়ে অতিক্রম করে।

সমাধান ঃ ধরি, অক্ষরেখা y-অক্ষের সমান্তরাল এরূপ পরাবৃত্তের সমীকরণ, $y = ax^2 + bx + c \cdots (1)$

(1) পরাবৃত্তটি $(4, 5)$, $(-2, 11)$ ও $(-4, 21)$ বিন্দু দিয়ে অতিক্রম করে।

$\therefore \ 5 = 16a + 4b + c \cdots\cdots (2)$,

$11 = 4a - 2b + c \cdots\cdots (3)$,

$21 = 16a - 4b + c = 0 \cdots (4)$

এখন, $(4)-(2) \Rightarrow 16 = -8b \Rightarrow b = -2$

$(3)-(2) \Rightarrow 6 = -12a - 6b$

$\Rightarrow 1 = -2a - b \Rightarrow 1 = -2a + 2 \Rightarrow a = \frac{1}{2}$

(2) হতে পাই, $5 = 16 \times \frac{1}{2} + 4 \times -2 + c$

$\Rightarrow 5 = 8 - 8 + c \Rightarrow c = 5$

$\therefore$ নির্ণেয় পরাবৃত্তের সমীকরণ,

$$y = \frac{1}{2}x^2 - 2x + 5 \Rightarrow 2y = x^2 - 4x + 10$$

$\therefore \ x^2 - 4x - 2y + 10 = 0$ (Ans.)

16(a) এরূপ পরাবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর যার উপকেন্দ্রিক লম্বের প্রান্ত বিন্দু দুইটির স্থানাঙ্ক $(3, 5)$ ও $(3, -3)$।

সমাধান ঃ ধরি, পরাবৃত্তের উপকেন্দ্রিক লম্বের প্রান্ত বিন্দু দুইটি $L(3, 5)$ ও $L'(3, -3)$

LL' এর মধ্যবিন্দু অর্থাৎ উপকেন্দ্র S এর স্থানাঙ্ক

$$= (\frac{3+3}{2}, \frac{5-3}{2}) = (3,1)$$

$L(3, 5)$ ও $L'(3, -3)$ এর ভুজ অভিন্ন বলে বিন্দুদ্বয়ের সংযোগ রেখা অর্থাৎ উপকেন্দ্রিক লম্ব y- অক্ষের সমান্তরাল। অতএব, পরাবৃত্তের অক্ষরেখা x - অক্ষের সমান্তরাল।

ধরি, পরাবৃত্তের শীর্ষবিন্দু (α, β) এবং (α, β) শীর্ষবিন্দু ও অক্ষরেখা x-অক্ষের সমান্তরাল এরূপ পরাবৃত্তের সমীকরণ $(y - \beta)^2 = 4a(x - \alpha) \cdots (1)$

(1) পরাবৃত্তের উপকেন্দ্রি লম্বের দৈর্ঘ্য,

$|4a| = LL' = |5 + 3| = 8 \Rightarrow 4a = \pm 8$

$\therefore \ a = 2, -2$

(1) পরাবৃত্তের উপকেন্দ্রের স্থানাঙ্ক $(a + \alpha, \beta)$

$\therefore\ a + \alpha = 3 \Rightarrow \alpha = 3 - a$ এবং $\beta = 1$

$a = 2$ হলে, $\alpha = 3 - 2 = 1$

$a = -2$ হলে, $\alpha = 3 - (-2) = 5$

$\therefore$ নির্ণেয় পরাবৃত্তের সমীকরণ,

$(y-1)^2 = 4.2(x-1)$

$\Rightarrow y^2 - 2y + 1 = 8x - 8$

$\therefore\ y^2 - 2y - 8x + 9 = 0$ এবং

$(y-1)^2 = 4.(-2)(x-5)$

$\Rightarrow y^2 - 2y + 1 = -8x + 40$

$\therefore\ y^2 - 2y + 8x - 39 = 0$

16(b) এরূপ পরাবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর যার উপকেন্দ্রিক লম্বের প্রান্ত বিন্দু দুইটির স্থানাঙ্ক $(-2, 2)$ ও $(-2, -4)$ ।

সমাধান ঃ ধরি, পরাবৃত্তের উপকেন্দ্রিক লম্বের প্রান্ত বিন্দু দুইটি $L(-2, 2)$ ও $L'(-2, -4)$

LL' এর মধ্যবিন্দু অর্থাৎ উপকেন্দ্র S এর স্থানাঙ্ক $= (\frac{-2-2}{2}, \frac{2-4}{2}) = (-2, -1)$

$L(3, 5)$ ও $L'(3, -3)$ এর ভুজ অভিন্ন বলে বিন্দুদ্বয়ের সংযোগ রেখা অর্থাৎ উপকেন্দ্রিক লম্ব y- অক্ষের সমান্তরাল। অতএব, পরাবৃত্তের অক্ষরেখা x - অক্ষের সমান্তরাল।

ধরি, পরাবৃত্তের শীর্ষবিন্দু (α, β) এবং (α, β) শীর্ষবিন্দু ও অক্ষরেখা x-অক্ষের সমান্তরাল এরূপ পরাবৃত্তের সমীকরণ $(y - \beta)^2 = 4a(x - \alpha)\ \cdots(1)$

(1) পরাবৃত্তের উপকেন্দ্রি লম্বের দৈর্ঘ্য,

$|4a| = LL' = |2 + 4| = 6 \Rightarrow 4a = \pm 6$

$\therefore\ a = \frac{3}{2}, -\frac{3}{2}$

1) পরাবৃত্তের উপকেন্দ্রের স্থানাঙ্ক $(a + \alpha, \beta)$

$\therefore\ a + \alpha = -2 \Rightarrow \alpha = -2 - a$ এবং $\beta = -1$

$a = \frac{3}{2}$ হলে, $\alpha = -2 - \frac{3}{2} = -\frac{7}{2}$

$a = -\frac{3}{2}$ হলে, $\alpha = -2 - (-\frac{3}{2}) = -\frac{1}{2}$

$\therefore$ নির্ণেয় পরাবৃত্তের সমীকরণ,

$(y+1)^2 = 4.\frac{3}{2}(x + \frac{7}{2})$

$\Rightarrow y^2 + 2y + 1 = 3(2x + 7)$

$\therefore\ y^2 + 2y - 6x - 20 = 0$ এবং

$(y+1)^2 = 4.(-\frac{3}{2})(x + \frac{1}{2})$

$\Rightarrow y^2 + 2y + 1 = -3(2x + 1)$

$\therefore\ y^2 + 2y + 6x + 4 = 0$

17(a) $y^2 = 4x$ পরাবৃত্তের $(1, 2)$ বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ $y^2 = 4x$ পরাবৃত্তের $(1, 2)$ বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ $y.2 = 2(x + 1)$

$\Rightarrow y = x + 1\ \therefore\ x - y + 1 = 0$

17(b) $x^2 = 8y$ পরাবৃত্তের স্পর্শকের সমীকরণ নির্ণয় কর যা $x + y + 1 = 0$ সরলরেখার উপর লম্ব ।

সমাধান ঃ ধরি, $x + y + 1 = 0$ সরলরেখার উপর লম্ব স্পর্শকের সমীকরণ $x - y + k = 0 \cdots (1)$ অর্থাৎ $y = x + k$.

প্রদত্ত পরাবৃত্ত $x^2 = 8y$ তে $y = x + k$ বসিয়ে পাই

$x^2 = 8(x + k) \Rightarrow x^2 - 8x - 8k = 0 \cdots\cdots (2)$

$x - y + k = 0$ রেখা প্রদত্ত পরাবৃত্তের স্পর্শক । অতএব এ রেখা পরাবৃত্তকে সমপাত বিন্দুতে ছেদ করবে। তাহলে (2) সমীকরণের মূল দুইটি সমান হবে।

$\therefore\ (-8)^2 - 4.1.(-8k) = 0$

$\Rightarrow 32k + 64 = 0 \Rightarrow k = -2$

(1) এ k এর মান বসিয়ে নির্ণেয় স্পর্শকের সমীকরণ

$x - y - 2 = 0$

বিকল্প পদ্ধতি ঃ $x^2 = 8y \Rightarrow x^2 = 4.2.y$ কে $x^2 = 4ay$ সাথে তুলনা করে পাই, $a = 2.$

প্রদত্ত রেখা $x + y + 1 = 0$ এর ঢাল $= -\dfrac{1}{1} = -1$

$\therefore$ প্রদত্ত রেখার উপর লম্ব রেখার ঢাল $m = 1$

$\therefore$ প্রদত্ত পরাবৃত্তে স্পর্শকের সমীকরণ,

$y = mx - am^2$

$\Rightarrow y = 1.x - 2.(1)^2 \therefore x - y - 2 = 0$ (Ans.)

17(c) $y^2 = 12x$ **পরাবৃত্তের (3, 6) বিন্দুতে স্পর্শক ও অভিলম্বের সমীকরণ নির্ণয় কর।**

সমাধান ঃ $y^2 = 12x$ পরাবৃত্তের (1, 2) বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ $y.6 = 6(x + 3)$

$\Rightarrow y = x + 3 \quad \therefore x - y + 3 = 0$ (Ans.)

আবার, $x - y + 3 = 0$ স্পর্শকের উপর লম্ব এবং (3, 6) বিন্দুগামী নির্ণেয় অভিলম্বের সমীকরণ,

$x + y = 3 + 6 \therefore x + y - 9 = 0$

18(a) $y = 3x + 1$ **রেখাটি** $y^2 = 4ax$ **পরাবৃত্তকে স্পর্শ করে। পরাবৃত্তটির উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।** [প্র.ভ.প.'৯১]

সমাধান ঃ প্রদত্ত রেখা $y = 3x + 1 \cdots (1)$

$y^2 = 4ax \cdots (2)$ পরাবৃত্তের সাধারণ স্পর্শকের সমীকরণ, $y = mx + \dfrac{a}{m} \cdots \cdots (3)$

(1) ও (3) রেখা অভিন্ন হলে, $m = 3$ এবং

$\dfrac{a}{m} = 1 \Rightarrow a = m = 3.$

$\therefore$ (2) পরাবৃত্তের উপকেন্দ্রিক লম্ব $= 4|\,a\,|$

$= 4|\,3\,| = 12$ একক

18(b) $y = 2x + 1$ **রেখাটি** $y^2 = 4ax$ **পরাবৃত্তকে স্পর্শ করে। 'a' এর মান, স্পর্শবিন্দু, উপকেন্দ্রের স্থানাঙ্ক, উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য এবং দিকাক্ষের সমীকরণ নির্ণয় কর।** [প্র.ভ.প.'০৪]

সমাধান ঃ প্রদত্ত রেখা $y = 2x + 1 \cdots (1)$

$y^2 = 4ax \cdots (2)$ পরাবৃত্তের সাধারণ স্পর্শকের সমীকরণ, $y = mx + \dfrac{a}{m} \cdots \cdots (3)$

(1) ও (3) রেখা অভিন্ন হলে, $m = 2$ এবং

$\dfrac{a}{m} = 1 \Rightarrow a = m = 2.$

$\therefore$ স্পর্শ বিন্দুর স্থানাঙ্ক $= (\dfrac{a}{m^2}, \dfrac{2a}{m}) = (\dfrac{2}{4}, \dfrac{4}{2})$

$= (\dfrac{1}{2}, 2)$

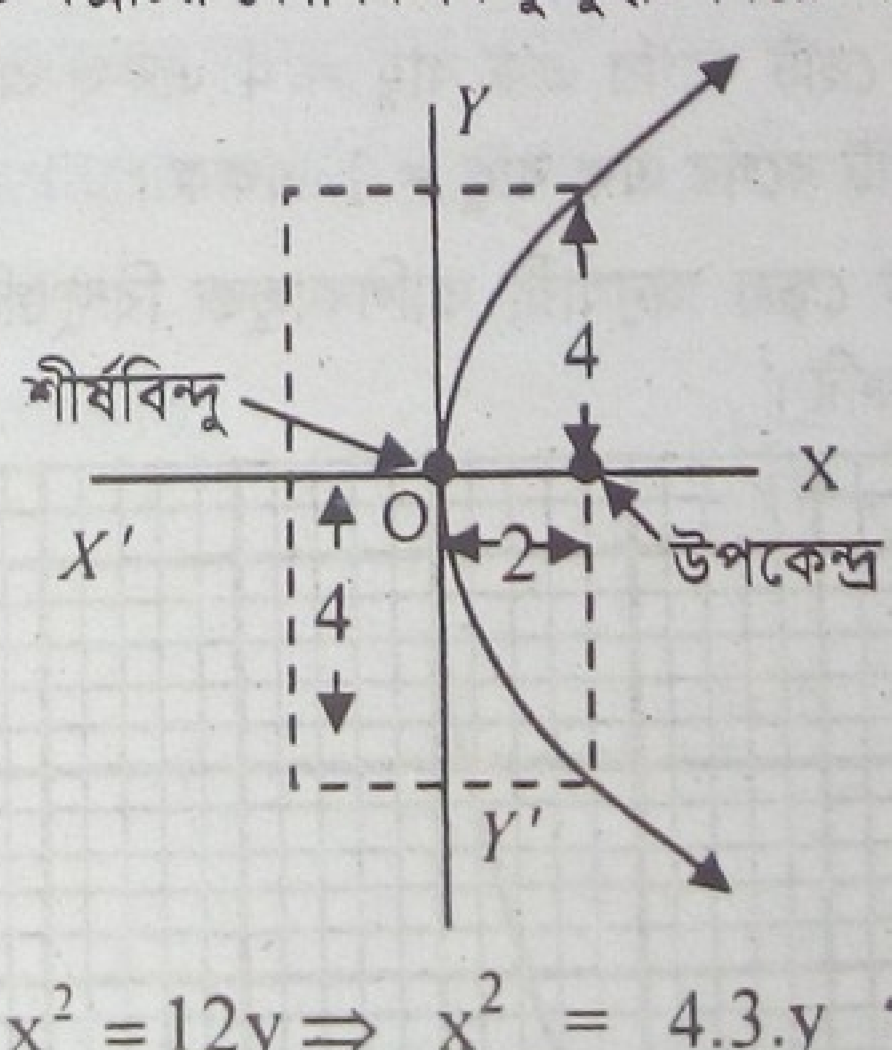
উপকেন্দ্রের স্থানাঙ্ক $= (a\,,\,0) = (2\,,0)$

উপকেন্দ্রিক লম্ব $= 4|\,a\,| = 4|\,2\,| = 8$ একক

দিকাক্ষের সমীকরণ $x = -a \Rightarrow x + 2 = 0$

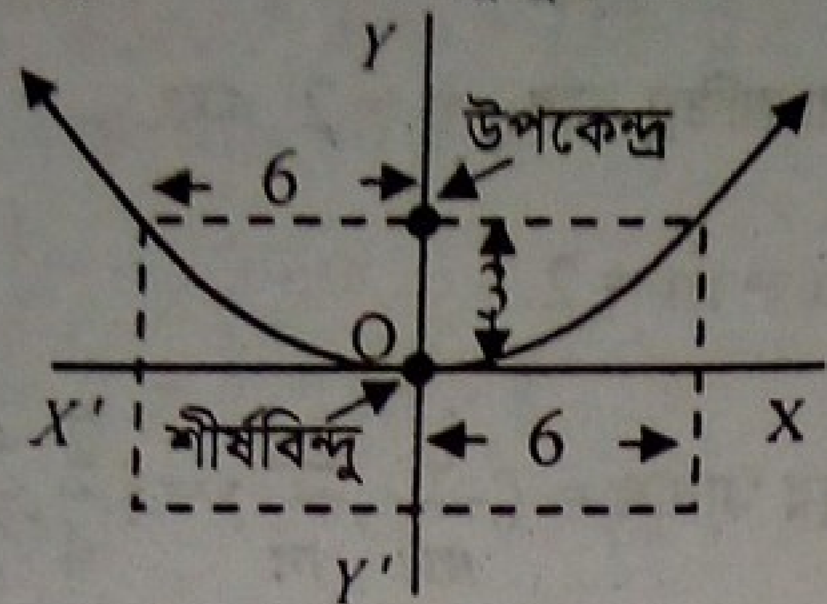
19 পরাবৃত্তের লেখচিত্র স্কেচ করঃ

(a) $y^2 = 8x \Rightarrow y^2 = 4.2.x$ পরাবৃত্তের শীর্ষ মূলবিন্দু। উপকেন্দ্র মূলবিন্দু হতে 2 একক ডানে ($\because a = 2 > 0$) x অক্ষের উপর অবস্থিত । একটি বক্স তৈরি করি যেন শীর্ষ থেকে উভয় দিকে x অক্ষ বরাবর 2 একক এবং শীর্ষ থেকে উভয় দিকে y অক্ষ বরাবর 4 একক হয়। এ বক্সের সাহায্যে পরাবৃত্তটির লেখচিত্র স্কেচ করি যেন এর শীর্ষ মূলবিন্দু হয় এবং ইহা y অক্ষের ডান দিকে অবস্থিত বক্সটির কৌণিক বিন্দু দুইটি দিয়ে অতিক্রম করে।



(b) $x^2 = 12y \Rightarrow x^2 = 4.3.y$ পরাবৃত্তের শীর্ষ মূলবিন্দু। উপকেন্দ্র মূলবিন্দু হতে 3 একক উপরে ($\because a = 3 > 0$) y অক্ষের উপর অবস্থিত । একটি বক্স তৈরি করি যেন শীর্ষ থেকে উভয় দিকে y অক্ষ বরাবর 3 একক এবং শীর্ষ থেকে উভয় দিকে x অক্ষ বরাবর 6 একক

হয়। এ বক্সের সাহায্যে পরাবৃত্তটির লেখচিত্র স্কেচ করি যেন এর শীর্ষ মূলবিন্দু হয় এবং ইহা x অক্ষের উপর দিকে অবস্থিত বক্সটির কৌণিক বিন্দু দুইটি দিয়ে অতিক্রম করে।



20(a) $y = x^2 - x$ পরাবৃত্তের লেখচিত্র অঙ্কন কর।

সমাধান : $y = x^2 - x \Rightarrow y + \frac{1}{4} = (x - \frac{1}{2})^2$

$\Rightarrow (x - \frac{1}{2})^2 = 4.\frac{1}{4}(y + \frac{1}{4})$

$\therefore$ প্রদত্ত সমীকরণটি একটি পরাবৃত্ত যার শীর্ষ $(\frac{1}{2}, -\frac{1}{4})$ বিন্দুতে অবস্থিত। নিচের তালিকায় x-এর ভিন্ন ভিন্ন মানের জন্য $y = x^2 - x$ এর প্রতিরূপী মান নির্ণয় করি :

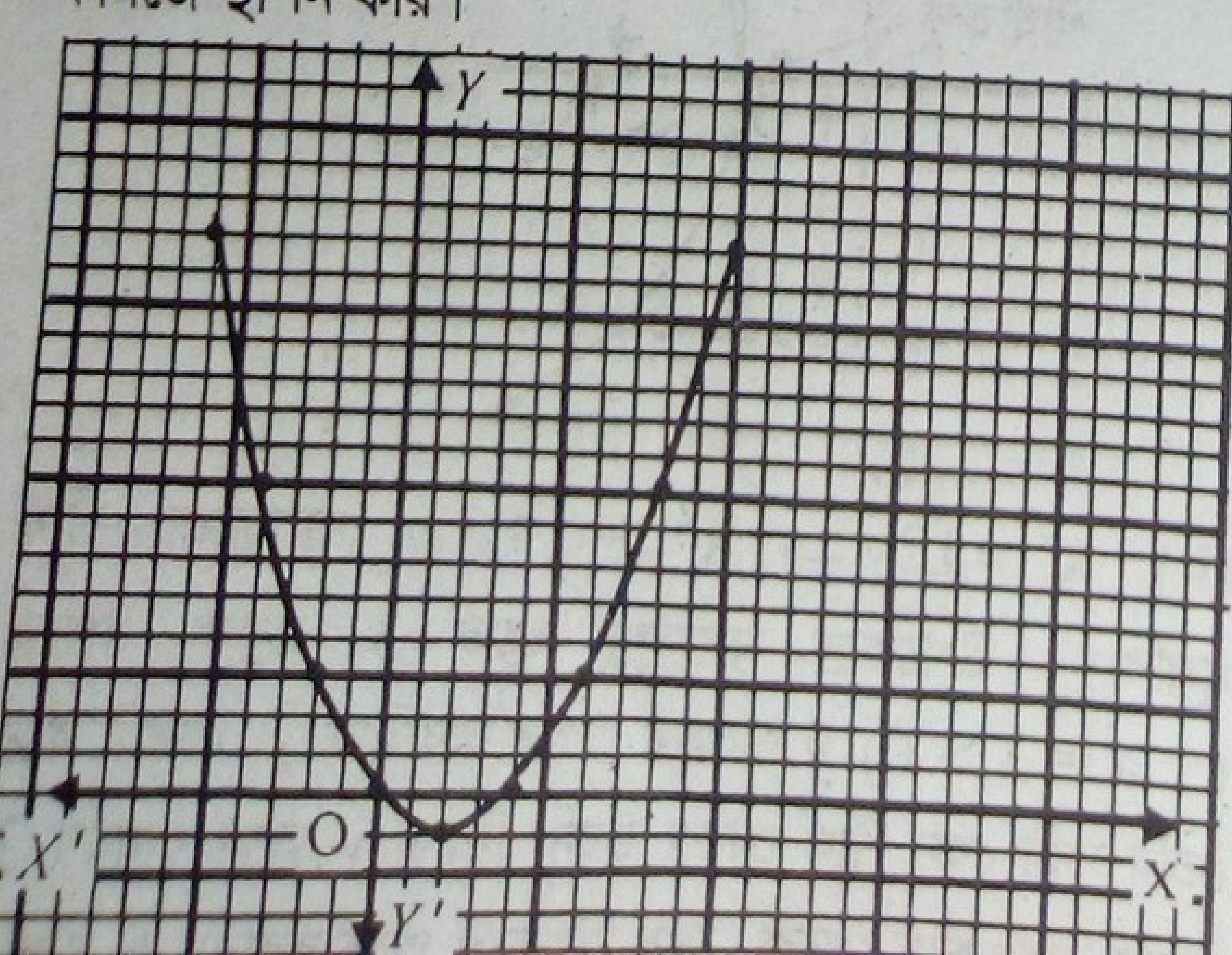
x	-1.5	-1	-.5	0	0.5	1	1.5	2	2.5
y	3.75	2	.75	0	-.25	0	.75	2	3.75

একটি ছক কাগজে স্থানাঙ্কের অক্ষরেখা X'OX ও YOY' টানি।

স্কেল নির্ধারণ :

x-অক্ষ বরাবর ছোট বর্গের এক বাহু = 4 একক এবং y-অক্ষ বরাবর ছোট বর্গের এক বাহু = 1 একক।

এখন, নির্ধারিত স্কেল অনুযায়ী তালিকাভুক্ত বিন্দুগুলি ছক কাগজে স্থাপন করি।



স্থাপিত বিন্দুগুলো মুক্ত হস্তে বক্রাকারে যোগ করে $y = x^2 - x$ এর লেখচিত্র অঙ্কন করি।

$y < -\frac{1}{4}$ হলে, x এর মান অবাস্তব হয়। সুতরাং, y এর মান $-\frac{1}{4}$ এর কম হতে পারেনা

অতিরিক্ত প্রশ্ন (সমাধানসহ)

1. $y^2 = 24x$ **পরাবৃত্তের একটি জ্যা এর সমীকরণ নির্ণয় কর যার মধ্যবিন্দুর স্থানাঙ্ক (2 , 3)।**

সমাধান : $y^2 = 24x$ অর্থাৎ $y^2 - 24x = 0$ পরাবৃত্তের যে জ্যা এর মধ্যবিন্দুর স্থানাঙ্ক (2 , 3) তার সমীকরণ,

$y.3 - 12(x + 2) = 3^2 - 24.2$

$\Rightarrow 3y - 12x - 24 = 9 - 48$

$\Rightarrow 3y - 12x + 15 = 0$

$\therefore 4x - y - 5 = 0$ (Ans.)

2. একটি সরলরেখা $x^2 + y^2 = 2a^2$ **বৃত্ত ও** $y^2 = 8ax$ **পরাবৃত্ত উভয়কে স্পর্শ করে। দেখাও যে, রেখাটির সমীকরণ** $y = \pm(x + 2a)$

প্রমাণ : মনে করি, $y^2 = 8ax \Rightarrow y^2 = 4.2ax$ পরাবৃত্তের স্পর্শকের সমীকরণ,

$y = mx + \frac{2a}{m} \cdots(1)$ বা, $m^2x - my + 2a = 0$

প্রদত্ত বৃত্তের কেন্দ্র (0, 0) এবং ব্যাসার্ধ = $\sqrt{2}a$

(1) রেখাটি প্রদত্ত বৃত্তকে স্পর্শ করলে,

$\left|\frac{m^2.0 - m.0 + 2a}{\sqrt{m^4 + m^2}}\right| = \sqrt{2}a$

$\Rightarrow 4a^2 = 2a^2(m^4 + m^2)$ [বর্গ করে।]

$\Rightarrow m^4 + m^2 - 2 = 0$

$\Rightarrow (m^2 - 1)(m^2 + 2) = 0$

$\therefore m^2 = 1 \Rightarrow m = \pm 1$ [$\because m^2 + 2 \neq 0$]

m এর মান (1) এ বসিয়ে পাই,

$y = (\pm 1)x + \frac{2a}{\ldots}$

$\therefore \ y = \pm(x + 2a)$ (Showed)

3. একটি সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর যা $y^2 = 4x$ পরাবৃত্ত এবং $(x+1)^2 + y^2 = 1$ বৃত্ত উভয়কে স্পর্শ করে।

সমাধান ঃ মনে করি, $y^2 = 4x \Rightarrow y^2 = 4.1.x$ পরাবৃত্তের স্পর্শকের সমীকরণ,

$$y = mx + \frac{1}{m} \Rightarrow mx - y + \frac{1}{m} = 0 \ \cdots\cdots(1)$$

প্রদত্ত বৃত্তের কেন্দ্র $(-1, 0)$ এবং ব্যাসার্ধ $= 1$

(1) রেখাটি প্রদত্ত বৃত্তকে স্পর্শ করলে,

$$\frac{|m.(-1) - 0 + 1/m|}{\sqrt{m^2+1}} = 1$$

$$\Rightarrow \left(\frac{-m^2+1}{m}\right)^2 = m^2 + 1$$

$$\Rightarrow m^4 - 2m^2 + 1 = m^4 + m^2$$

$$\Rightarrow 3m^2 = 1 \Rightarrow m = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$$

m এর মান (1) এ বসিয়ে পাই,

$$y = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}x \pm \sqrt{3} \Rightarrow \sqrt{3}\,y = \pm(x+3)$$

$\therefore$ নির্ণেয় স্পর্শকের সমীকরণ $\sqrt{3}\,y = \pm(x+3)$

4. $y^2 = 4x$ ও $x^2 = 4y$ পরাবৃত্তদ্বয়ের সাধারণ স্পর্শকের সমীকরণ নির্ণয় কর।

সমাধান : মনে করি, সাধারণ স্পর্শকের ঢাল m. তাহলে, $y^2 = 4x \Rightarrow y^2 = 4.1.x$ পরাবৃত্তের স্পর্শকের সমীকরণ, $y = mx + \frac{1}{m} \Rightarrow mx - y + \frac{1}{m} = 0 \cdots$(i)

এবং $x^2 = 4y \Rightarrow x^2 = 4.1.y$ পরাবৃত্তের স্পর্শকের সমীকরণ, $x = my + \frac{1}{m} \Rightarrow -x + my + \frac{1}{m} = 0 \cdots$(ii)

(i) ও (ii) রেখা অভিন্ন হলে, $m = -1$

(i) হতে পাই, $y = -x - 1$

$\therefore \ x + y + 1 = 0$ (Ans.)

5. (8, 2) বিন্দু হতে $x^2 = 4y$ পরাবৃত্তে অবস্থিত নিকটতম বিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

সমাধানঃ মনে করি, (8, 2) বিন্দু হতে $x^2 = 4y$ পরাবৃত্তে অবস্থিত নিকটতম বিন্দুর স্থানাঙ্ক (a, b) . তাহলে,

$a^2 = 4b \Rightarrow b = \frac{a^2}{4} \ \cdots\cdots$ (i) , এবং (a, b) বিন্দুতে অঙ্কিত প্রদত্ত পরাবৃত্তের অভিলম্ব এবং (8, 2) ও (a, b) বিন্দুগামী রেখা অভিন্ন হবে।

(a, b) বিন্দুতে অঙ্কিত প্রদত্ত পরাবৃত্তের স্পর্শকের সমীকরণ

$$ax = 2(y+b) \Rightarrow y + b = \frac{a}{2}x \ \cdots\cdots \text{(ii)}$$

$\therefore$ (ii) এর উপর লম্ব অভিলম্বের ঢাল $= -\frac{2}{a}$ এবং

(a, b) ও (8, 2) বিন্দুগামী রেখার ঢাল $= \frac{b-2}{a-8}$ সমান।

$$\therefore \ \frac{b-2}{a-8} = -\frac{2}{a} \Rightarrow ab - 2a = -2a + 16$$

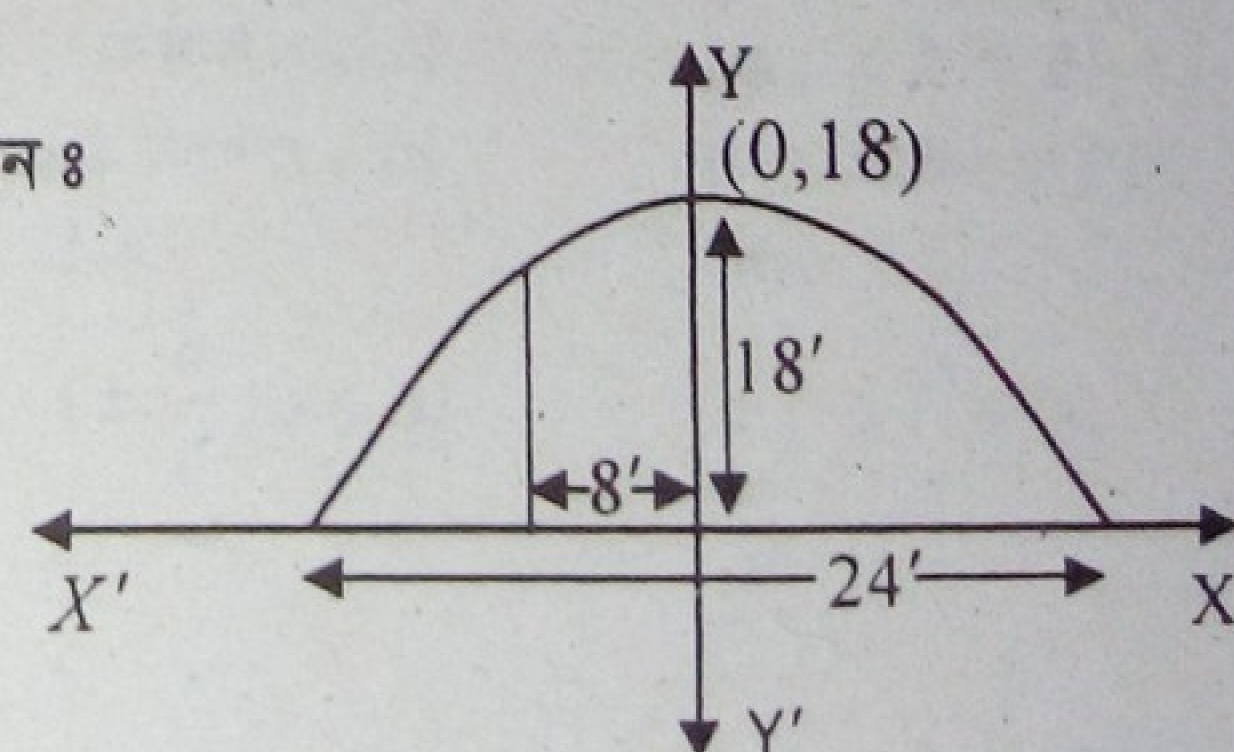
$$\Rightarrow ab = 16 \Rightarrow a\frac{a^2}{4} = 16 \Rightarrow a^3 = 64 \Rightarrow a = 4$$

$\therefore$ (i) হতে পাই, $b = \frac{16}{4} = 4.$

$\therefore$ নির্ণেয় বিন্দুর স্থানাঙ্ক (4, 4)

6. একটি পরাবৃত্তাকার খিলানের উচ্চতা 18 ফুট ও তার প্রান্তদ্বয়ের আনুভূমিক দূরত্ব 24 ফুট । প্রান্তদ্বয়ের সংযোগ রেখাংশের মধ্যবিন্দু হতে 8 ফুট দূরে খিলানের উচ্চতা কত?

সমাধান ঃ



ধরি, পরাবৃত্তাকার খিলানের প্রান্তদ্বয়ের সংযোগ রেখা x-অক্ষ এবং এর উচ্চতা y- অক্ষ। তাহলে, প্রান্তদ্বয়ের সংযোগ রেখাংশের মধ্যবিন্দু মূলবিন্দু (0, 0).

$\therefore$ পরাবৃত্তের শীর্ষ $(0,18)$ এবং এর অক্ষরেখা y- অক্ষ।

$\therefore$ পরাবৃত্তের সমীকরণ $(x-0)^2 = 4a(y-18)$

$\Rightarrow x^2 = 4a(y-18)$, যা $(\pm\frac{24}{2}, 0)$ অর্থাৎ $(\pm 12, 0)$ বিন্দুগামী।

$\therefore (\pm 12)^2 = 4a(0-18) \Rightarrow a = -\frac{144}{72} = -2$

$\therefore$ পরাবৃত্তের সমীকরণ $x^2 = -8(y-18)$

পরাবৃত্তস্থ কোন বিন্দুর ভূজ 8 বা −8 হলে,

$8^2 = -8(y-18) \Rightarrow 8 = -y + 18$

$\Rightarrow y = 18 - 8 = 10$

$\therefore$ প্রান্তদ্বয়ের সংযোগ রেখাংশের মধ্যবিন্দু হতে 8 ফুট দূরে খিলানের উচ্চতা 10 ফুট ।