উপবৃত্ত (প্রশ্নমালা VI B)

1. উপবৃত্তের কেন্দ্র (α, β) এবং অক্ষ দুইটি স্থানাঙ্কের অক্ষের সমান্তরাল হলে এর সাধারণ সমীকরণ,
$$\frac{(x-\alpha)^2}{a^2}+\frac{(y-\beta)^2}{b^2}=1$$

2. বৃহৎ অক্ষকে x- অক্ষ এবং উপকেন্দ্রকে মূলবিন্দু ধরে উপবৃত্তের সমীকরণ $\frac{(x \pm ae)^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$.

3. বৃহৎ অক্ষকে x-অক্ষ এবং একটি দিকাক্ষকে y - অক্ষ ধরে উপবৃত্তের সমীকরণ $\frac{(x \pm a/e)^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$

4. উপকেন্দ্র (α, β), দিকাক্ষ $ax+by+c=0$, এবং e উৎকেন্দ্রিকতা বিশিষ্ট উপবৃত্তের সমীকরণ
$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=e^2\,\frac{(ax+by+c)^2}{a^2+b^2}$$

5. $y = mx + c$ রেখাটি $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ উপবৃত্তকে স্পর্শ করবে যদি $c^2=a^2m^2+b^2$ হয়। অতএব,
$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ উপবৃত্তের স্পর্শকের সমীকরণ $y=mx \pm \sqrt{a^2m^2+b^2}$.

6. উপবৃত্তের প্রয়োজনীয় ফলাফল ঃ

উপবৃত্তের আকার	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ যখন $a>b$	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ যখন $a<b$	$\frac{(x-\alpha)^2}{a^2}+\frac{(y-\beta)^2}{b^2}=1$ যখন $a>b$	$\frac{(x-\alpha)^2}{a^2}+\frac{(y-\beta)^2}{b^2}=1$ যখন $a<b$
a. কেন্দ্রের স্থানাঙ্ক	$(0, 0)$	$(0, 0)$	(α, β)	(α, β)
b. উৎকেন্দ্রিকতা	$e=\sqrt{1-\frac{b^2}{a^2}}$	$e=\sqrt{1-\frac{a^2}{b^2}}$	$e=\sqrt{1-\frac{b^2}{a^2}}$	$e=\sqrt{1-\frac{a^2}{b^2}}$
c. বৃহৎ অক্ষের দৈর্ঘ্য	$2a$	$2b$	$2a$	$2b$
d. ক্ষুদ্র অক্ষের দৈর্ঘ্য	$2b$	$2a$	$2b$	$2a$
e. বৃহৎ অক্ষের সমীকরণ	$y=0$	$x=0$	$y-\beta=0$	$x-\alpha=0$
f. ক্ষুদ্র অক্ষের সমীকরণ	$x=0$	$y=0$	$x-\alpha=0$	$y-\beta=0$
g. শীর্ষদ্বয়ের স্থানাঙ্ক	$(\pm a, 0)$	$(0, \pm b)$	$(\pm a+\alpha, \beta)$	$(\alpha, \pm b+\beta)$
h. ফোকাসদ্বয়ের স্থানাঙ্ক	$(\pm ae, 0)$	$(0, \pm be)$	$(\pm ae+\alpha, \beta)$	$(\alpha, \pm be+\beta)$
i. ফোকাসদ্বয়ের দূরত্ব	$2ae$	$2be$	$2ae$	$2be$
j. দিকাক্ষের পাদবিন্দু	$(\pm \frac{a}{e}, 0)$	$(0, \pm \frac{b}{e})$	$(\pm \frac{a}{e}+\alpha, \beta)$	$(\alpha, \pm \frac{b}{e}+\beta)$
k. দিকাক্ষ দুইটির দূরত্ব	$\frac{2a}{e}$	$\frac{2b}{e}$	$\frac{2a}{e}$	$\frac{2b}{e}$
l. দিকাক্ষ দুইটির সমীকরণ	$x=\pm\frac{a}{e}$	$y=\pm\frac{b}{e}$	$x-\alpha=\pm\frac{a}{e}$	$y-\beta=\pm\frac{b}{e}$
m. উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য	$\frac{2b^2}{a}$	$\frac{2a^2}{b}$	$\frac{2b^2}{a}$	$\frac{2a^2}{b}$
n. উপকেন্দ্রিক লম্বের সমীকরণ	$x=\pm ae$	$y=\pm be$	$x-\alpha=\pm ae$	$y-\beta=\pm be$

1. (a) $5x^2 + 4y^2 = 1$ উপবৃত্তের দিকাক্ষের সমীকরণ নির্ণয় কর। [য.,সি.'০২; কু.'১০; বুয়েট'০৪-০৫]

সমাধান ঃ প্রদত্ত সমীকরণ $5x^2 + 4y^2 = 1$ অর্থাৎ

$\frac{x^2}{(1/\sqrt{5})^2} + \frac{y^2}{(1/2)^2} = 1$ কে উপবৃত্তের আদর্শ সমীকরণ

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ এর সঙ্গে তুলনা করে পাই, $a = \frac{1}{\sqrt{5}}$,

$b = \frac{1}{2}$. এখানে, $a < b$.

$$\therefore \text{ উৎকেন্দ্রিকতা }, e = \sqrt{\frac{b^2 - a^2}{b^2}} = \sqrt{\frac{\frac{1}{4} - \frac{1}{5}}{1/4}}$$

$$= \sqrt{\frac{5-4}{20} \times \frac{4}{1}} = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

$\therefore$ দিকাক্ষের সমীকরণ $y = \pm\frac{b}{e} = \pm\frac{1/2}{1/\sqrt{5}}$

$\therefore \ y = \pm\frac{\sqrt{5}}{2}$ (Ans.)

1(b) $9x^2 + 25y^2 = 225$ উপবৃত্তের উৎকেন্দ্রিকতা, উপকেন্দ্র, উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য ও সমীকরণ এবং দিকাক্ষের সমীকরণ নির্ণয় কর। [ব.'০২; সি. '০৭]

সমাধান ঃ প্রদত্ত সমীকরণ $9x^2 + 25y^2 = 225$ অর্থাৎ

$\frac{x^2}{5^2} + \frac{y^2}{3^2} = 1$ কে উপবৃত্তের আদর্শ সমীকরণ

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ এর সঙ্গে তুলনা করে পাই, $a = 5$,

$b = 3$. এখানে, $a > b$.

$$\therefore \text{ উৎকেন্দ্রিকতা } e = \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{a^2}} = \sqrt{\frac{25-9}{25}} = \frac{4}{5}$$

উপকেন্দ্রের স্থানাঙ্ক $= (\pm ae, 0) = (\pm 5.\frac{4}{5}, 0)$

$= (\pm 4 , 0)$

উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য $= \frac{2b^2}{a} = \frac{2.9}{5} = \frac{18}{5}$

উপকেন্দ্রিক লম্বের সমীকরণ $x = \pm ae \Rightarrow x = \pm 4$

দিকাক্ষের সমীকরণ $x = \pm\frac{a}{e} = \pm\frac{5}{4/5}$

$\therefore \ 4x = \pm 25$

1(c) $3x^2 + 4y^2 = 12$ উপবৃত্তের উৎকেন্দ্রিকতা, উপকেন্দ্র, উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য ও সমীকরণ এবং দিকাক্ষের সমীকরণ নির্ণয় কর।

[ব.'০১; কু.'০২, '০৩; ঢা.'০৩]

সমাধান ঃ প্রদত্ত সমীকরণ $3x^2 + 4y^2 = 12$ অর্থাৎ

$\frac{x^2}{2^2} + \frac{y^2}{(\sqrt{3})^2} = 1$ কে উপবৃত্তের আদর্শ সমীকরণ

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ এর সঙ্গে তুলনা করে পাই, $a = 2$,

$b = \sqrt{3}$. এখানে, $a > b$.

$$\therefore \text{ উৎকেন্দ্রিকতা } e = \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{a^2}} = \sqrt{\frac{4-3}{4}} = \frac{1}{2}$$

উপকেন্দ্রের স্থানাঙ্ক $= (\pm ae, 0) = (\pm 2.\frac{1}{2}, 0)$

$= (\pm 1 , 0)$

উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য $= \frac{2b^2}{a} = \frac{2.3}{2} = 3$

উপকেন্দ্রিক লম্বের সমীকরণ $x = \pm ae \Rightarrow x = \pm 1$

দিকাক্ষের সমীকরণ $x = \pm\frac{a}{e} = \pm\frac{2}{1/2} \ \therefore \ x = \pm 4$

1(d) $9x^2 + 16y^2 = 144$ উপবৃত্তের উপকেন্দ্র এবং উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর। [মা.বো.'০৭]

সমাধান ঃ প্রদত্ত সমীকরণ $9x^2 + 16y^2 = 144$ অর্থাৎ

$\frac{x^2}{4^2} + \frac{y^2}{3^2} = 1$ কে উপবৃত্তের আদর্শ সমীকরণ

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ এর সঙ্গে তুলনা করে পাই, $a = 4$, $b = 3$. এখানে, $a > b$.

$\therefore$ উৎকেন্দ্রিকতা $e=\sqrt{\frac{16-9}{16}}=\frac{\sqrt{7}}{4}$

$\therefore$ উপকেন্দ্রের স্থানাঙ্ক $= (\pm ae,0)= (\pm 4.\frac{\sqrt{7}}{4},0)$

$= (\pm\sqrt{7}, 0)$

উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য $=\frac{2b^2}{a}=\frac{2.9}{4}=\frac{9}{2}$

1(e) $16x^2+25y^2=400$ উপবৃত্তের উৎকেন্দ্রিকতা, উপকেন্দ্র, উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য ও সমীকরণ এবং দিকাক্ষের সমীকরণ নির্ণয় কর।

[রা.'০৫; কু.'০৫; প্র.ভ.প.'০৬]

সমাধান ঃ প্রদত্ত সমীকরণ $16x^2+25y^2=400$ অর্থাৎ $\frac{x^2}{5^2}+\frac{y^2}{4^2}=1$ কে উপবৃত্তের আদর্শ সমীকরণ $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ এর সঙ্গে তুলনা করে পাই, $a = 5$, $b = 4$. এখানে, $a > b$.

$\therefore$ উৎকেন্দ্রিকতা $e=\sqrt{\frac{a^2-b^2}{a^2}}=\sqrt{\frac{25-16}{25}}=\frac{3}{5}$

উপকেন্দ্রের স্থানাঙ্ক $= (\pm ae,0)= (\pm 5.\frac{3}{5},0)$

$= (\pm 3, 0)$

উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য $=\frac{2b^2}{a}=\frac{2.16}{5}=\frac{32}{5}$

উপকেন্দ্রিক লম্বের সমীকরণ $x=\pm ae \Rightarrow x=\pm 3$

দিকাক্ষের সমীকরণ $x=\pm\frac{a}{e}=\pm\frac{5}{3/5}$ $\therefore 3x=\pm 25$

1(f) $2x^2+3y^2=1$ উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য, উৎকেন্দ্রিকতা এবং উপকেন্দ্র দুইটির স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর। [ব. '০৩; য. '০৪; ঢা. '০৬; মা.'০৬; সি.'১১]

সমাধান ঃ প্রদত্ত সমীকরণ $2x^2+3y^2=1$ অর্থাৎ $\frac{x^2}{(1/\sqrt{2})^2}+\frac{y^2}{(1/\sqrt{3})^2}=1$ কে উপবৃত্তের আদর্শ সমীকরণ $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ এর সঙ্গে তুলনা করে পাই, $a=\frac{1}{\sqrt{2}}$, $b=\frac{1}{\sqrt{3}}$. এখানে, $a > b$.

$\therefore$ উৎকেন্দ্রিকতা $e=\sqrt{\frac{a^2-b^2}{a^2}}=\sqrt{\frac{\frac{1}{2}-\frac{1}{3}}{1/2}}$

$=\sqrt{\frac{1}{6}\times\frac{2}{1}}=\frac{1}{\sqrt{3}}$

উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য $=\frac{2b^2}{a}=\frac{2.\frac{1}{3}}{1/\sqrt{2}}$

$=\frac{2}{3}\times\frac{\sqrt{2}}{1}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$

উপকেন্দ্রের স্থানাঙ্ক $= (\pm ae, 0)$

$= (\pm\frac{1}{\sqrt{2}}.\frac{1}{\sqrt{3}}, 0) = (\pm\frac{1}{\sqrt{6}}, 0)$

1(g) দেখাও যে, $2x^2+y^2-8x-2y+1=0$ সমীকরণটি একটি উপবৃত্ত প্রকাশ করে; ইহার উপকেন্দ্র নির্ণয় কর। [কু.'১২; সি.'১৩]

প্রমাণ : প্রদত্ত সমীকরণে x^2 ও y^2 সম্বলিত পদ বিদ্যমান। x^2 এর সহগ 2 ও y^2 এর সহগ 1 অসমান ও অভিন্ন চিহ্নযুক্ত। সুতরাং, প্রদত্ত সমীকরণটি একটি উপবৃত্ত প্রকাশ করে।

এখন, $2x^2+y^2-8x-2y+1=0$

$\Rightarrow 2(x^2-4x+4)-8+(y^2-2y+1)-1+1=0$

$\Rightarrow 2(x-2)^2+(y-1)^2=8$

$\Rightarrow \frac{(x-2)^2}{4}+\frac{(y-1)^2}{8}=1$

$\Rightarrow \frac{(x-2)^2}{2^2}+\frac{(y-1)^2}{(2\sqrt{2})^2}=1$. ইহাকে উপবৃত্তের

সাধারণ সমীকরণ $\frac{(x-\alpha)^2}{a^2}+\frac{(y-\beta)^2}{b^2}=1$ এর সঙ্গে তুলনা করে পাই, $a=2$, $b=2\sqrt{2}$, $\alpha=2$, $\beta=1$. এখানে, $b>a$.

$\therefore$ উৎকেন্দ্রিকতা, $e=\sqrt{\frac{b^2-a^2}{b^2}}=\sqrt{\frac{8-4}{8}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$

উপকেন্দ্রের স্থানাঙ্ক $=(\alpha, \pm be+\beta)$

$$=(2, \pm 2\sqrt{2}\times\frac{1}{\sqrt{2}}+1)$$

$$=(2, 1\pm 2)=(2,-1),(2,3)$$

$\therefore$ উপকেন্দ্রের স্থানাঙ্ক $(2,3)$ ও $(2,-1)$

2.(a) $5x^2+9y^2-20x=25$ উপবৃত্তের কেন্দ্র, উপকেন্দ্র নির্ণয় কর। [বুয়েট'০২-০৩]

সমাধান ঃ $5x^2+9y^2-20x=25$

$\Rightarrow 5(x^2-4x+4)+9y^2=25+20$

$\Rightarrow 5(x-2)^2+9y^2=45$

$\Rightarrow \frac{(x-2)^2}{3^2}+\frac{(y-0)^2}{(\sqrt{5})^2}=1$. ইহাকে উপবৃত্তের সাধারণ সমীকরণ $\frac{(x-\alpha)^2}{a^2}+\frac{(y-\beta)^2}{b^2}=1$ এর সঙ্গে তুলনা করে পাই, $a=3$, $b=\sqrt{5}$, $\alpha=2$, $\beta=0$. এখানে, $a>b$.

$\therefore$ উৎকেন্দ্রিকতা, $e=\sqrt{\frac{a^2-b^2}{a^2}}=\sqrt{\frac{9-5}{9}}=\frac{2}{3}$

$\therefore$ উপবৃত্তের কেন্দ্রের স্থানাঙ্ক $=(\alpha,\beta)=(2,0)$

এবং উপকেন্দ্রের স্থানাঙ্ক $=(\pm ae+\alpha, \beta)$

$$=(\pm 3.\frac{2}{3}+2, 0)$$

উপকেন্দ্র দুইটির স্থানাঙ্ক $(0,0)$ ও $(4,0)$

2(b) $4x^2+5y^2-16x+10y+1=0$ উপবৃত্তের উপকেন্দ্র, উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য, উৎকেন্দ্রিকতা এবং দিকাক্ষের সমীকরণ নির্ণয় কর।

[সি.'০৩; রা.'০৭; চ.'১১; ব.'১৩]

সমাধান ঃ $4x^2+5y^2-16x+10y+1=0 \Rightarrow 4(x^2-4x+4)+5(y^2+2y+1)$
$$=16+5-1$$

$\Rightarrow 4(x-2)^2+5(y+1)^2=20$

$\Rightarrow \frac{(x-2)^2}{(\sqrt{5})^2}+\frac{(y+1)^2}{2^2}=1$. ইহাকে উপবৃত্তের সাধারণ সমীকরণ $\frac{(x-\alpha)^2}{a^2}+\frac{(y-\beta)^2}{b^2}=1$ এর সঙ্গে তুলনা করে পাই, $a=\sqrt{5}$, $b=2$, $\alpha=2$, $\beta=-1$

এখানে, $a>b$.

$\therefore$ উৎকেন্দ্রিকতা, $e=\sqrt{\frac{a^2-b^2}{a^2}}=\sqrt{\frac{5-4}{5}}=\frac{1}{\sqrt{5}}$

উপকেন্দ্রের স্থানাঙ্ক $=(\pm ae+\alpha, \beta)$

$=(\pm\sqrt{5}.\frac{1}{\sqrt{5}}+2, -1)=(\pm 1+2, -1)$

$\therefore$ উপকেন্দ্র দুইটির স্থানাঙ্ক $(-1,-1)$ ও $(3,-1)$

উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য $=\frac{2b^2}{a}=\frac{8}{\sqrt{5}}$

এবং দিকাক্ষের সমীকরণ $x-\alpha=\pm\frac{a}{e}$

$\Rightarrow x-2=\pm\frac{\sqrt{5}}{1/\sqrt{5}} \Rightarrow x=2\pm 5$

$\therefore$ দিকাক্ষ দুইটির সমীকরণ $x=7$ এবং $x=-3$

3. (a) p এর মান কত হলে $px^2+4y^2=1$ উপবৃত্তটি $(\pm 1, 0)$ বিন্দু দিয়ে অতিক্রম করবে? উপবৃত্তের অক্ষ দুইটির দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

[য.'০৩; রা.'০৪,'০৮; চ.'০৫; ব.'০৫]

সমাধান ঃ $px^2 + 4y^2 = 1 \cdots(1)$ উপবৃত্তটি $(\pm 1, 0)$ বিন্দু দিয়ে অতিক্রম করলে,

$p.(\pm 1)^2 + 4.0^2 = 1 \therefore p = 1$

$\therefore$ (1) হতে পাই, $1.x^2 + 4y^2 = 1$

$\Rightarrow \dfrac{x^2}{1^2} + \dfrac{y^2}{(1/2)^2} = 1$. একে উপবৃত্তের আদর্শ সমীকরণ $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ এর সঙ্গে তুলনা করে পাই,

$a = 1, b = \dfrac{1}{2}$

$\therefore$ বৃহৎ অক্ষের দৈর্ঘ্য $= 2a = 2.1 = 2$ এবং

ক্ষুদ্র অক্ষের দৈর্ঘ্য $= 2b = 2.\dfrac{1}{2} = 1$

3(b) p এর মান কত হলে $\dfrac{x^2}{p} + \dfrac{y^2}{5^2} = 1$ উপবৃত্তটি (6, 4) বিন্দু দিয়ে অতিক্রম করবে ? উপবৃত্তটির উৎকেন্দ্রিকতা এবং উপকেন্দ্রের অবস্থান নির্ণয় কর।

[রা.'০১,'১২; ঢা.'০৪,'০৯,'১২; ব.'০২; চ.'০৩; কু.'০৬; সি.'০৮,'১২; দি.'০৯,'১১;য.'১৩ বুয়েট'০৪-০৫,০৮-০৯]

সমাধান ঃ $\dfrac{x^2}{p} + \dfrac{y^2}{5^2} = 1 \cdots(1)$ উপবৃত্তটি (6, 4) বিন্দু দিয়ে অতিক্রম করলে, $\dfrac{36}{p} + \dfrac{16}{25} = 1$

$\Rightarrow \dfrac{36}{p} = 1 - \dfrac{16}{25} = \dfrac{25-16}{25} = \dfrac{9}{25}$

$\Rightarrow p = \dfrac{36.25}{9} = 100$

$\therefore$ (1) হতে পাই, $\dfrac{x^2}{100} + \dfrac{y^2}{5^2} = 1$

$\Rightarrow \dfrac{x^2}{10^2} + \dfrac{y^2}{5^2} = 1$

একে উপবৃত্তের আদর্শ সমীকরণ $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ এর সঙ্গে

এখানে, $a > b$.

$\therefore$ উৎকেন্দ্রিকতা, $e = \sqrt{\dfrac{a^2-b^2}{a^2}} = \sqrt{\dfrac{100-25}{10}}$

$= \sqrt{\dfrac{75}{100}} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

উপকেন্দ্রের স্থানাঙ্ক $= (\pm ae\ , 0)$

$= (\pm 10.\dfrac{\sqrt{3}}{2}\ , 0) = (\pm 5\sqrt{3}, 0)$

(c) p এর মান কত হলে $4x^2 + py^2 = 80$ উপবৃত্তটি $(0, \pm 4)$ বিন্দু দিয়ে অতিক্রম করবে? উপবৃত্তটির অক্ষ দুইটির দৈর্ঘ্য ও উৎকেন্দ্রিকতা নির্ণয় কর।[য.'০৮; রা.'১১]

সমাধান ঃ $4x^2 + py^2 = 80 \cdots(1)$ উপবৃত্তটি $(0, \pm 4)$ বিন্দু দিয়ে অতিক্রম করলে,

$4.0 + p(\pm 4)^2 = 80 \Rightarrow 16p^2 = 80 \therefore p = 5$

$\therefore$ (1) হতে পাই, $4x^2 + 5y^2 = 80$

$\Rightarrow \dfrac{x^2}{(2\sqrt{5})^2} + \dfrac{y^2}{4^2} = 1$. একে উপবৃত্তের আদর্শ সমীকরণ $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ এর সঙ্গে তুলনা করে পাই,

$a = 2\sqrt{5}, b = 4.$

$\therefore$ বৃহৎ অক্ষের দৈর্ঘ্য $= 2a = 2.2\sqrt{5} = 4\sqrt{5}$ এবং

ক্ষুদ্র অক্ষের দৈর্ঘ্য $= 2.4 = 8$

এখানে, $a > b$

$\therefore$ উৎকেন্দ্রিকতা $e = \sqrt{\dfrac{a^2-b^2}{a^2}} = \sqrt{\dfrac{20-16}{20}}$

$= \sqrt{\dfrac{4}{20}} = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$

3(d) উপবৃত্তের অক্ষ দুইটিকে x ও y-অক্ষ ধরে (2,2) ও (3 , 1) বিন্দুগামী উপবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর। এর উৎকেন্দ্রিকতাও নির্ণয় কর।

[ঢা'০২; য. '০৬; ব. '০৬; চ. '০৬,'০৮]

সমাধান ঃ মনে করি, উপবৃত্তটির সমীকরণ,

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ …… (i)

(i) উপবৃত্তটি (2, 2) ও (3 , 1) বিন্দু দিয়ে অতিক্রম করলে, $\frac{4}{a^2}+\frac{4}{b^2}=1 \cdots$(ii) এবং $\frac{9}{a^2}+\frac{1}{b^2}=1 \cdots$ … (iii)

$4\times(\text{iii})-(\text{ii}) \Rightarrow \frac{36}{a^2}-\frac{4}{a^2}=4-1$

$\Rightarrow \frac{32}{a^2}=3 \quad \therefore a^2=\frac{32}{3}$

(iii) হতে আমরা পাই, $\frac{27}{32}+\frac{1}{b^2}=1$

$\Rightarrow \frac{1}{b^2}=1-\frac{27}{32}=\frac{5}{32} \quad \therefore b^2=\frac{32}{5}$

$\therefore$ নির্ণেয় উপবৃত্তের সমীকরণ, $\frac{3x^2}{32}+\frac{5y^2}{32}=1$

$\Rightarrow 3x^2+5y^2=32$

$a^2>b^2$ বলে,

উৎকেন্দ্রিকতা, $e=\sqrt{1-\frac{b^2}{a^2}}=\sqrt{1-\frac{32}{5}\times\frac{3}{32}}$

$=\sqrt{1-\frac{3}{5}}=\sqrt{\frac{2}{5}}$ (Ans)

3(e) $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{p}=1$ **উপবৃত্তটি (4 , 6) বিন্দু দিয়ে অতিক্রম করলে p এর মান নির্ণয় কর। ইহার উৎকেন্দ্রিকতা ও উপকেন্দ্র নির্ণয় কর।** [চ.'০৭]

সমাধান ঃ $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{p}=1 \cdots(1)$ উপবৃত্তটি (4 , 6) বিন্দু দিয়ে অতিক্রম করে। $\therefore \frac{16}{25}+\frac{36}{p}=1$

$\Rightarrow \frac{36}{p}=1-\frac{16}{25}=\frac{9}{25} \Rightarrow p=\frac{36.25}{9}=100$

(1) এ p এর মান বসিয়ে পাই, $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{100}=1$

একে উপবৃত্তের আদর্শ সমীকরণ $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ এর সঙ্গে তুলনা করে পাই, $a=5, b=10$.

এখানে, $a<b$.

$\therefore$ উৎকেন্দ্রিকতা, $e=\sqrt{\frac{b^2-a^2}{b^2}}=\sqrt{\frac{100-25}{100}}$

$=\sqrt{\frac{75}{100}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$ এবং

উপকেন্দ্রের স্থানাঙ্ক $=(0,\pm be)$

$=(0,\pm 10.\frac{\sqrt{3}}{2})=(0,\pm 5\sqrt{3})$

4.(a) উপবৃত্তের অক্ষ দুইটিকে x ও y-অক্ষ ধরে $(1,\sqrt{6})$ ও (3, 0) বিন্দুগামী উপবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর। [চ.'০২; সি.'০৯]

সমাধান ঃ ধরি, উপবৃত্তটির সমীকরণ $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$

এ উপবৃত্তটি $(1,\sqrt{6})$ ও (3, 0) বিন্দু দিয়ে অতিক্রম করলে, $\frac{1}{a^2}+\frac{6}{b^2}=1\cdots$(i) এবং $\frac{9}{a^2}+\frac{0}{b^2}=1$

$\Rightarrow a^2=9$

(i) এ a^2 এর মান বসিয়ে পাই, $\frac{1}{9}+\frac{6}{b^2}=1$

$\Rightarrow \frac{6}{b^2}=1-\frac{1}{9}=\frac{8}{9} \Rightarrow b^2=\frac{6\times9}{8}=\frac{27}{4}$

$\therefore$ নির্ণেয় উপবৃত্তের সমীকরণ, $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{27/4}=1$

$\Rightarrow 3x^2+4y^2=27$ (Ans.)

4(b) উপবৃত্তের অক্ষ দুইটিকে x ও y-অক্ষ ধরে (2, 4) ও $(5, \sqrt{2})$ বিন্দুগামী উপবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর। [বা.'০৩]

সমাধান ঃ ধরি, উপবৃত্তটির সমীকরণ $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$

এ উপবৃত্তটি $(2, 4)$ ও $(5, \sqrt{2})$ বিন্দু দিয়ে অতিক্রম করলে, $\frac{4}{a^2}+\frac{16}{b^2}=1\cdots$(i)এবং $\frac{25}{a^2}+\frac{2}{b^2}=1\cdots$(ii)

$$\text{(ii)} - 8\times\text{(i)} \Rightarrow \frac{4}{a^2}-\frac{200}{a^2}=1-8$$

$$\Rightarrow \frac{4-200}{a^2}=-7 \Rightarrow a^2=\frac{196}{7}=28$$

(ii) হতে আমরা পাই, $\frac{25}{28}+\frac{2}{b^2}=1$

$$\Rightarrow \frac{2}{b^2}=1-\frac{25}{28}=\frac{3}{28} \therefore\ b^2=\frac{56}{3}$$

$\therefore$ নির্ণেয় উপবৃত্তের সমীকরণ, $\frac{x^2}{28}+\frac{y^2}{56/3}=1$

$\Rightarrow 2x^2+3y^2=56$ (Ans.)

5(a) একটি উপবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর যার উপকেন্দ্র **(– 2 , 3)**, দিকাক্ষ $x-y+7=0$ এবং উৎকেন্দ্রিকতা **$1/\sqrt{3}$.** [রা.'০২; ঢা.'০৩; চ.'০৮; য.'১৩]

সমাধান ঃ $(-2 , 3)$ উপকেন্দ্র, $x-y+7=0$ দিকাক্ষ এবং $\frac{1}{\sqrt{3}}$ উৎকেন্দ্রিকতা বিশিষ্ট উপবৃত্তের সমীকরণ,

$$(x+2)^2+(y-3)^2=(\frac{1}{\sqrt{3}})^2\frac{(x-y+7)^2}{1^2+1^2}$$

$[(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=e^2\frac{(ax+by+c)^2}{a^2+b^2}$ সূত্রের সাহায্যে]

$$\Rightarrow x^2+4x+4+y^2-6y+9$$
$$=\frac{x^2+y^2+49-2xy+14x-14y}{6}$$

$\Rightarrow 6(x^2+y^2+4x-6y+13)=x^2+y^2-$
$2xy+14x-14y+49$

$\Rightarrow 6x^2+6y^2+24x-36y+78$
$=x^2+y^2-2xy+14x-14y+49$

$\therefore\ 5x^2+5y^2+2xy+10x-22y+29=0$

5(b) একটি উপবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর যার উপকেন্দ্র **(– 1 , 1)**, দিকাক্ষ $x-y+3=0$ এবং উৎকেন্দ্রিকতা **1/2 .** [রা. '০২; ঢা. '০৩; চ. '০৮]

সমাধান ঃ $(-1 , 1)$ উপকেন্দ্র, $x-y+3=0$ দিকাক্ষ এবং $\frac{1}{2}$ উৎকেন্দ্রিকতা বিশিষ্ট উপবৃত্তের সমীকরণ,

$$(x+1)^2+(y-1)^2=(\frac{1}{2})^2\frac{(x-y+3)^2}{1^2+1^2}$$

$[(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=e^2\frac{(ax+by+c)^2}{a^2+b^2}$ সূত্রের সাহায্যে]

$$\Rightarrow x^2+2x+1+y^2-2y+1$$
$$=\frac{x^2+y^2+9-2xy+6x-6y}{8}$$

$\Rightarrow 8(x^2+y^2+2x-2y+2)=x^2+y^2$
$-2xy+6x-6y+9$

$\Rightarrow 8x^2+8y^2+16x-16y+16$
$=x^2+y^2-2xy+6x-6y+9$

$\therefore\ 7x^2+7y^2+2xy+10x-10y+7=0$

5(c) একটি উপবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর যার উপকেন্দ্র **(0,2)**, দিকাক্ষ $y+4=0$ এবং উৎকেন্দ্রিকতা **1/2 .** [সি.'০৩; কু.'০৮]

সমাধান ঃ $(0 , 2)$ উপকেন্দ্র, $y+4=0$ দিকাক্ষ এবং $\frac{1}{2}$ উৎকেন্দ্রিকতা বিশিষ্ট উপবৃত্তের সমীকরণ,

$$(x-0)^2+(y-2)^2=(\frac{1}{2})^2\frac{(y+4)^2}{1^2}$$

$[(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=e^2\frac{(ax+by+c)^2}{a^2+b^2}$ সূত্রের সাহায্যে]

$\Rightarrow x^2+y^2-4y+4 = \frac{y^2+8y+16}{4}$

$\Rightarrow 4x^2+4y^2-16y+16 = y^2+8y+16$

$\therefore$ $4x^2+3y^2-24y = 0$ (Ans.)

5(d) একটি উপবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর যার উপকেন্দ্র (1 , – 1), দিকাক্ষ $x-y+2=0$ এবং উৎকেন্দ্রিকতা $1/\sqrt{2}$ । ইহার উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর। [চ.'০৬]

সমাধান : (1 , –1) উপকেন্দ্র, $x-y+2=0$ দিকাক্ষ এবং $\frac{1}{\sqrt{2}}$ উৎকেন্দ্রিকতা বিশিষ্ট উপবৃত্তের সমীকরণ,

$$(x-1)^2+(y+1)^2 = (\frac{1}{\sqrt{2}})^2 \frac{(x-y+2)^2}{1^2+1^2}$$

$[(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2 = e^2 \frac{(ax+by+c)^2}{a^2+b^2}$ সূত্রের সাহায্যে]

$\Rightarrow x^2-2x+1+y^2+2y+1$

$= \frac{x^2+y^2+4-2xy+4x-4y}{4}$

$\Rightarrow 4(x^2+y^2-2x+2y+2) = x^2+y^2-2xy+4x-4y+4$

$\Rightarrow 4x^2+4y^2-8x+8y+8 = x^2+y^2-2xy+4x-4y+4$

$\therefore$ $3x^2+3y^2+2xy+12x+12y+4=0$

দ্বিতীয় অংশ : উৎকেন্দ্রিকতা, $e = 1/\sqrt{2}$

উপকেন্দ্র (1 , –1) হতে দিকাক্ষ $x-y+2=0$ এর লম্ব দূরত্ব $= \frac{|1+1+2|}{\sqrt{1^2+1^2}} = \frac{4}{\sqrt{2}}$

$\therefore$ উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য = 2e× উপকেন্দ্র হতে দিকাক্ষের লম্ব দূরত্ব $= 2\times\frac{1}{\sqrt{2}}\times\frac{4}{\sqrt{2}} = 4$ একক।

5(e) একটি উপবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর যার উপকেন্দ্র (– 2 , 3), দিকাক্ষ $2x+y-3=0$ এবং উৎকেন্দ্রিকতা $1/\sqrt{3}$. [সি.'০৫]

সমাধান : (–2, 3) উপকেন্দ্র, $2x+y-3=0$ দিকাক্ষ এবং $\frac{1}{\sqrt{3}}$ উৎকেন্দ্রিকতা বিশিষ্ট উপবৃত্তের সমীকরণ,

$$(x+2)^2+(y-3)^2 = (\frac{1}{\sqrt{3}})^2 \frac{(2x+y-3)^2}{2^2+1^2}$$

$[(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2 = e^2 \frac{(ax+by+c)^2}{a^2+b^2}$ সূত্রের সাহায্যে]

$\Rightarrow x^2+4x+4+y^2-6y+9$

$= \frac{4x^2+y^2+9+4xy-12x-6y}{15}$

$\Rightarrow 15(x^2+y^2+4x-6y+13) = 4x^2+y^2+4xy-12x-6y+9$

$\Rightarrow 15x^2+15y^2+60x-90y+195$

$= 4x^2+y^2+4xy-12x-6y+9$

$\therefore 11x^2+14y^2-4xy+72x-84y+186=0$

5(f) একটি উপবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর যার উপকেন্দ্র (2 , 1), দিকাক্ষ $2x+y-3=0$ এবং উৎকেন্দ্রিকতা $1/\sqrt{3}$. [চ.'০১; ঢা.'০১]

সমাধান : (2 , 1) উপকেন্দ্র, $2x+y-3=0$ দিকাক্ষ এবং $\frac{1}{\sqrt{3}}$ উৎকেন্দ্রিকতা বিশিষ্ট উপবৃত্তের সমীকরণ,

$$(x-2)^2+(y-1)^2 = (\frac{1}{\sqrt{3}})^2 \frac{(2x+y-3)^2}{2^2+1^2}$$

$[(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2 = e^2 \frac{(ax+by+c)^2}{a^2+b^2}$ সূত্রের সাহায্যে]

$\Rightarrow x^2-4x+4+y^2-2y+1$

$$= \frac{4x^2 + y^2 + 9 + 4xy - 12x - 6y}{15}$$

$\Rightarrow 15(x^2 + y^2 - 4x - 2y + 5) = 4x^2 + y^2 + 4xy - 12x - 6y + 9$

$\Rightarrow 15x^2 + 15y^2 - 60x - 30y + 75$
$= 4x^2 + y^2 + 4xy - 12x - 6y + 9$

$\therefore 11x^2 + 14y^2 - 4xy + 48x - 24y + 66 = 0$

5(g) একটি উপবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর যার উপকেন্দ্র মূলবিন্দু , দিকাক্ষ $x = 2$ এবং উৎকেন্দ্রিকতা 4/5 ।

[কু.'০৪; মা.বো.'০৫]

সমাধান ঃ উপকেন্দ্র মূলবিন্দু (0 , 0), দিকাক্ষ $x = 2$ অর্থাৎ $x - 2 = 0$ এবং উৎকেন্দ্রিকতা $\frac{4}{5}$ বিশিষ্ট উপবৃত্তের সমীকরণ,

$$(x-0)^2 + (y-0)^2 = (\frac{4}{5})^2 \frac{(x-2)^2}{1^2}$$

$$[(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = e^2 \frac{(ax+by+c)^2}{a^2+b^2}$$ সূত্রের সাহায্যে]

$\Rightarrow x^2 + y^2 = \frac{16}{25}(x^2 - 4x + 4)$

$\Rightarrow 25x^2 + 25y^2 = 16x^2 - 64x + 64$

$\therefore 9x^2 + 25y^2 + 64x - 64 = 0$

6(a) একটি উপবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর যার উপকেন্দ্র দুইটির স্থানাঙ্ক (0, 1) , (0, – 1) এবং ক্ষুদ্র অক্ষের দৈর্ঘ্য এককের সমান।

সমাধান ঃ উপবৃত্তের উপকেন্দ্র দুইটি (0, 1) ও (0, – 1) এর মধ্যবিন্দুর স্থানাঙ্ক = $(\frac{0+0}{2}, \frac{1-1}{2}) = (0, 0)$ এবং উপকেন্দ্র দুইটির ভুজ = 0.

$\therefore$ উপবৃত্তের বৃহৎ অক্ষ y- অক্ষ এবং ক্ষুদ্র অক্ষ x-অক্ষ।

ধরি, উপবৃত্তের সমীকরণ $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, b>a

প্রশ্নমতে, ক্ষুদ্র অক্ষের দৈর্ঘ্য $2a = 1 \Rightarrow a = \frac{1}{2}$

এবং উপকেন্দ্র দুইটির দূরত্ব , $2be = |1 + 1| = 2$

$\Rightarrow be = 1 \Rightarrow b^2e^2 = 1$

এখন b>a এর জন্য , $a^2 = b^2(1 - e^2)$

$\Rightarrow a^2 = b^2 - b^2e^2 \Rightarrow \frac{1}{4} = b^2 - 1$

$\Rightarrow b^2 = 1 + \frac{1}{4} = \frac{5}{4}$

$\therefore$ নির্ণেয় উপবৃত্তের সমীকরণ, $\frac{x^2}{1/4} + \frac{y^2}{5/4} = 1$

$\Rightarrow 4x^2 + \frac{4y^2}{5} = 1$ (Ans.)

6(b) একটি উপবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর যার উপকেন্দ্র দুইটির স্থানাঙ্ক (1, 0) ও (– 1, 0) এবং উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য 3 একক । **[কু.'১১]**

সমাধান ঃ উপবৃত্তের উপকেন্দ্র দুইটি (1, 0) ও (–1, 0) এর মধ্যবিন্দুর স্থানাঙ্ক = $(\frac{1-1}{2}, \frac{0+0}{2}) = (0, 0)$ এবং উপকেন্দ্র দুইটির কোটি = 0.

$\therefore$ উপবৃত্তের বৃহৎ অক্ষ x-অক্ষ এবং ক্ষুদ্র অক্ষ y-অক্ষ ।

ধরি, উপবৃত্তের সমীকরণ $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, a>b

প্রশ্নমতে, উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য, $\frac{2b^2}{a} = 3$

$\Rightarrow b^2 = \frac{3}{2}a \cdots\cdots(1)$ এবং

উপকেন্দ্র দুইটির দূরত্ব , $2ae = |1 + 1| = 2$

$\Rightarrow a = \frac{1}{e} \cdots\cdots(2)$

এখন a >b এর জন্য, $b^2 = a^2(1 - e^2)$

$\Rightarrow \frac{3}{2}a = a^2(1 - e^2)$ $[\because b^2 = \frac{3a}{2}]$

$\Rightarrow 3 = 2a(1 - e^2)$

$\Rightarrow 3 = 2\,\frac{1}{e}(1-e^2)\quad [\because a = \frac{1}{e}]$

$\Rightarrow 3e = 2 - 2e^2 \Rightarrow 2e^2 + 3e - 2 = 0$

$\Rightarrow 2e^2 + 4e - e - 2 = 0$

$\Rightarrow 2e(e+2) - 1(e+2) = 0$

$\Rightarrow (e+2)(2e-1) = 0$

$\therefore\ e = \frac{1}{2}$ এবং অন্য মান $e = -2$ গ্রহণযোগ্য নয়।

$\therefore\ a = \frac{1}{e} = 2$ এবং $b^2 = \frac{3}{2}a = \frac{3}{2}.2 = 3$

$\therefore$ নির্ণেয় উপবৃত্তের সমীকরণ, $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$

6(c) একটি উপবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর যার উপকেন্দ্র দুইটি $S'(2,0)$ ও $S(-2, 0)$ এবং যা $P(\frac{3}{2}, \frac{\sqrt{15}}{2})$ বিন্দু দিয়ে অতিক্রম করে। [রুয়েট' ০৫-০৬]

সমাধান : উপবৃত্তের উপকেন্দ্র দুইটি $(2, 0)$ ও $(-2, 0)$ এর মধ্যবিন্দুর স্থানাঙ্ক $= (\frac{2-2}{2}, \frac{0+0}{2}) = (0,0)$ এবং উপকেন্দ্র দুইটির কোটি $= 0$.

$\therefore$ উপবৃত্তের বৃহৎ অক্ষ x-অক্ষ এবং ক্ষুদ্র অক্ষ y-অক্ষ।

ধরি, উপবৃত্তের সমীকরণ $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \cdots\ \cdots$ (1), যেখানে $a > b$.

$P(\frac{3}{2}, \frac{\sqrt{15}}{2})$ বিন্দুটি উপবৃত্তের উপর অবস্থিত।

$\therefore\ S'P + SP =$ বৃহৎ অক্ষের দৈর্ঘ্য $= 2a$

$$\Rightarrow \sqrt{(2-\frac{3}{2})^2 + (0-\frac{\sqrt{15}}{2})^2} + \sqrt{(-2-\frac{3}{2})^2 + (0-\frac{\sqrt{15}}{2})^2} = 2a$$

$$\Rightarrow \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{15}{4}} + \sqrt{\frac{49}{4} + \frac{15}{4}} = 2a$$

$$\Rightarrow 2a = \sqrt{\frac{16}{4}} + \sqrt{\frac{64}{4}} = 2 + 4 \Rightarrow a = 3$$

উপকেন্দ্র দুইটির দূরত্ব, $2ae = |2+2|$

$\Rightarrow 2.3.e = 4 \Rightarrow e = \frac{2}{3}$

আবার, $a > b$ এর জন্য, $b^2 = a^2(1-e^2)$

$\Rightarrow b^2 = 9(1 - \frac{4}{9}) = 5$

$\therefore$ নির্ণেয় উপবৃত্তের সমীকরণ, $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{5} = 1$

6(d) উপবৃত্তের বৃহৎ অক্ষ ও ক্ষুদ্র অক্ষকে যথাক্রমে x-অক্ষ ও y-অক্ষ ধরে একটি উপবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর যার উপকেন্দ্র দুইটির স্থানাঙ্ক $(\pm 2, 0)$ এবং যার বৃহৎ অক্ষের দৈর্ঘ্য 8 একক। [চ.'০৩; দি.'১১]

সমাধান : ধরি, বৃহৎ অক্ষ ও ক্ষুদ্র অক্ষকে যথাক্রমে x-অক্ষ ও y-অক্ষ ধরে উপবৃত্তের সমীকরণ, $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \cdots$ $\cdots$ (1), যেখানে $a > b$

(1) উপবৃত্তের বৃহৎ অক্ষের দৈর্ঘ্য $= 2a$ এবং উপকেন্দ্রের স্থানাঙ্ক $(\pm ae, 0)$

$\therefore$ প্রশ্নমতে, $2a = 8\ \therefore a = 4$ এবং $\pm ae = \pm 2$

$\Rightarrow ae = 2 \Rightarrow 4e = 2\ \therefore e = \frac{1}{2}$

আবার, $a>b$ এর জন্য, $b^2 = a^2(1-e^2) = 16(1-\frac{1}{4}) = 12$

$\therefore$ নির্ণেয় উপবৃত্তের সমীকরণ, $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{12} = 0$

(e) উপবৃত্তের প্রধান অক্ষ দুইটিকে x ও y-অক্ষ বিবেচনা করে একটি উপবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর যার উপকেন্দ্রের স্থানাঙ্ক $(0, \pm 4)$ এর উৎকেন্দ্রিকতা $= 4/5$. [চ.'১০]

সমাধান ঃ উপবৃত্তের উপকেন্দ্র দুইটি (0, 4) ও (0, − 4) এর মধ্যবিন্দুর স্থানাঙ্ক = $(\frac{0+0}{2}, \frac{4-4}{2}) = (0, 0)$ এবং উপকেন্দ্র দুইটির ভুজ = 0.

∴ উপবৃত্তের বৃহৎ অক্ষ y- অক্ষ এবং ক্ষুদ্র অক্ষ x-অক্ষ।

ধরি, উপবৃত্তের সমীকরণ $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, b>a

প্রশ্নমতে, উৎকেন্দ্রিকতা e = 4/5

উপকেন্দ্র দুইটির দূরত্ব , $2be = |4 + 4| = 8$

$\Rightarrow b \times \frac{4}{5} = 4 \Rightarrow b = 5$

এখন b > a এর জন্য, $a^2 = b^2(1 - e^2)$

$\Rightarrow a^2 = 25(1 - \frac{16}{25}) = 9$

∴ নির্ণেয় উপবৃত্তের সমীকরণ, $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{25} = 1$

7. (a) একটি উপবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর যার উপকেন্দ্র দুইটির স্থানাঙ্ক (−1, −1) ও (1, 1) এবং বৃহৎ অক্ষের দৈর্ঘ্য $2\sqrt{3}$ একক। [বুয়েট'০০-০১]

সমাধান ঃ ধরি, উপবৃত্তের ফোকাস দুইটি S(−1, − 1) ও S′(1, 1) এবং উপবৃত্তটির উপর P(x , y) যেকোনো একটি বিন্দু ।

উপবৃত্তের সংজ্ঞানুসারে, SP + S′P = বৃহৎ অক্ষ

$$\Rightarrow \sqrt{(x+1)^2 + (y+1)^2} + \sqrt{(x-1)^2 + (y-1)^2} = 2\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow \sqrt{x^2 + 2x + 1 + y^2 + 2y + 1} = 2\sqrt{3} - \sqrt{x^2 - 2x + 1 + y^2 - 2y + 1}$$

উভয় পক্ষকে বর্গ করে পাই,

$$x^2 + 2x + y^2 + 2y + 2 = 12 + x^2 - 2x + y^2 - 2y + 2 - 4\sqrt{3}\sqrt{x^2 - 2x + y^2 - 2y + 2}$$

$$\Rightarrow 4x + 4y - 12 = -4\sqrt{3}\sqrt{x^2 - 2x + y^2 - 2y + 2}$$

$$\Rightarrow x + y - 3 = -\sqrt{3}\sqrt{x^2 - 2x + y^2 - 2y + 2}$$

আবার, উভয় পক্ষকে বর্গ করে পাই,

$$x^2 + y^2 + 9 - 2xy - 6x - 6y = 3(x^2 - 2x + y^2 - 2y + 2)$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 + 9 - 2xy - 5x - 6y = 3x^2 - 6x + 3y^2 - 6y + 6$$

∴ $2x^2 + 2y^2 - 2xy - 3 = 0$; এটিই নির্ণেয় উপবৃত্তের সমীকরণ।

7(b) একটি উপবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর যার একটি উপকেন্দ্রের স্থানাঙ্ক (1,− 1) , অনুরূপ দিকাক্ষ x − y − 4 = 0 এবং যা (1 , 1) বিন্দু দিয়ে অতিক্রম করে । [বুয়েট'০৩-০৪]

সমাধান ঃ ধরি, উপবৃত্তের উৎকেন্দ্রিকতা e.

(1 , − 1) উপকেন্দ্র, x − y − 4 = 0 দিকাক্ষ এবং e উৎকেন্দ্রিকতা বিশিষ্ট উপবৃত্তের সমীকরণ,

$$(x-1)^2 + (y+1)^2 = e^2 \frac{(x-y-4)^2}{1^2 + 1^2} \cdots (1)$$

(1) উপবৃত্তটি (1 , 1) বিন্দু দিয়ে অতিক্রম করে ।

$$\therefore (1-1)^2 + (1+1)^2 = e^2 \frac{(1-1-4)^2}{2}$$

$$\Rightarrow 4.2 = e^2.16 \Rightarrow e^2 = \frac{1}{2}$$

∴ (1) এ এর মান বসিয়ে পাই,

$$x^2 - 2x + 1 + y^2 + 2y + 1 = \frac{1}{4}(x^2 + y^2 + 16 - 2xy - 8x + 8y)$$

$$\Rightarrow 4x^2 - 8x + 4y^2 + 8y + 8 = x^2 + y^2 + 16 - 2xy - 8x + 8y$$

∴ $3x^2 + 3y^2 + 2xy - 8 = 0$

8.(a) বৃহৎ অক্ষ ও ক্ষুদ্র অক্ষকে যথাক্রমে x-অক্ষ ও y-অক্ষ ধরে একটি উপবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর যার

উৎকেন্দ্রিকতা $\frac{4}{5}$ এবং যা $(\frac{10}{3}, \sqrt{5})$ বিন্দু দিয়ে অতিক্রম করে। [সি.'০১; চ.'০৭; ঢা.'০৮,'১৩; য.'০৮,'১০]

সমাধান ঃ ধরি, বৃহৎ অক্ষ ও ক্ষুদ্র অক্ষকে যথাক্রমে x-অক্ষ ও y-অক্ষ ধরে উপবৃত্তের সমীকরণ,

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \cdots \cdots (1)$, যেখানে $a > b$

(1) উপবৃত্তের উৎকেন্দ্রিকতা $e = \frac{4}{5}$

$a > b$ এর জন্য, $b^2 = a^2(1 - e^2)$

$\Rightarrow b^2 = a^2(1 - \frac{16}{25}) = \frac{9}{25}a^2 \cdots (2)$

আবার (1) উপবৃত্তটি $(\frac{10}{3}, \sqrt{5})$ বিন্দুগামী।

$\therefore \frac{100}{9a^2} + \frac{5}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{100}{9a^2} + \frac{5}{\frac{9a^2}{25}} = 1$

$\Rightarrow \frac{100+125}{9a^2} = 1 \Rightarrow a^2 = \frac{225}{9} = 25$

$\therefore$ (2) হতে পাই, $b^2 = \frac{9}{25}a^2 = \frac{9}{25}.25 = 9$

$\therefore$ নির্ণেয় উপবৃত্তের সমীকরণ, $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$

8(b) অক্ষ দুইটিকে x ও y-অক্ষ ধরে একটি উপবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর যার উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য ক্ষুদ্র অক্ষের অর্ধেক এবং যা (0 , 1) বিন্দু দিয়ে অতিক্রম করে।

সমাধান ঃ ধরি, বৃহৎ অক্ষ ও ক্ষুদ্র অক্ষকে যথাক্রমে x-অক্ষ ও y-অক্ষ ধরে উপবৃত্তের সমীকরণ,

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \cdots \cdots (1)$, যেখানে $a > b$

(1) উপবৃত্তের ক্ষুদ্র অক্ষের দৈর্ঘ্য $= 2b$ এবং

উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য $= \frac{2b^2}{a}$

প্রশ্নমতে, $\frac{2b^2}{a} = \frac{1}{2}(2b) \Rightarrow 2b = a \cdots (2)$

আবার (1) উপবৃত্তটি (0 , 1) বিন্দুগামী।

$\therefore \frac{0}{a^2} + \frac{1}{b^2} = 1 \Rightarrow b^2 = 1$

$\therefore a^2 = 4b^2 = 4.1 = 4$

$\therefore$ নির্ণেয় উপবৃত্তের সমীকরণ, $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{1} = 1$

$\Rightarrow x^2 + 4y^2 = 4$

8(c) অক্ষ দুইটিকে x ও y-অক্ষ ধরে একটি উপবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর যার উৎকেন্দ্রিকতা 1/3 এবং উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য 8 একক। [ঢা. '০৫,'১১; চ. '০৫,'১৩; রা. '০৬,'১১; মা.বো.'০৩; দি.'১০,'১৩; য.'১১]

সমাধান ঃ ধরি, বৃহৎ অক্ষ ও ক্ষুদ্র অক্ষকে যথাক্রমে x-অক্ষ ও y-অক্ষ ধরে উপবৃত্তের সমীকরণ,

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \cdots \cdots (1)$, যেখানে $a > b$

(1) উপবৃত্তের উৎকেন্দ্রিকতা $e = \frac{1}{3}$ এবং

উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য, $\frac{2b^2}{a} = 8$

$\Rightarrow b^2 = 4a \cdots \cdots (2)$

$a > b$ এর জন্য, $b^2 = a^2(1 - e^2)$

$\Rightarrow 4a = a^2(1 - \frac{1}{9}) \Rightarrow 4 = a . \frac{8}{9} \therefore a = \frac{9}{2}$

(2) থেকে পাই, $b^2 = 4a = 4. \frac{9}{2} = 18$

$\therefore$ নির্ণেয় উপবৃত্তের সমীকরণ $\frac{x^2}{81/4} + \frac{y^2}{18} = 1$

$\therefore \frac{4x^2}{81} + \frac{y^2}{18} = 1$

8(d) অক্ষ দুইটিকে x ও y-অক্ষ ধরে একটি উপবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর যার উৎকেন্দ্রিকতা 2/3 এবং উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য 5 একক।

[চ.'০২; বুয়েট'০৫-'০৬]

সমাধান ঃ ধরি, বৃহৎ অক্ষ ও ক্ষুদ্র অক্ষকে যথাক্রমে

x-অক্ষ ও y-অক্ষ ধরে উপবৃত্তের সমীকরণ, $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \cdots \cdots (1)$, যেখানে $a > b$

(1) উপবৃত্তের উৎকেন্দ্রিকতা $e=\frac{2}{3}$ এবং

উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য, $\frac{2b^2}{a}=5$

$\Rightarrow b^2=\frac{5}{2}a \cdots \cdots (2)$

$a > b$ এর জন্য, $b^2=a^2(1-e^2)$

$\Rightarrow \frac{5}{2}a=a^2(1-\frac{4}{9}) \Rightarrow \frac{5}{2}=a.\frac{5}{9} \quad \therefore a=\frac{9}{2}$

(2) থেকে পাই, $b^2=\frac{5}{2}a=\frac{5}{2}.\frac{9}{2}=\frac{45}{4}$

$\therefore$ নির্ণেয় উপবৃত্তের সমীকরণ $\frac{x^2}{81/4}+\frac{y^2}{45/4}=1$

$\Rightarrow \frac{4x^2}{81}+\frac{4y^2}{45}=1 \quad \therefore 20x^2+36y^2=405$

8(e) অক্ষ দুইটিকে x ও y-অক্ষ ধরে একটি উপবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর যার উৎকেন্দ্রিকতা $1/3$ এবং বৃহৎ অক্ষের দৈর্ঘ্য 12 একক। [কু.'০১,'১৩; য.'০৭]

সমাধান ঃ ধরি, বৃহৎ অক্ষ ও ক্ষুদ্র অক্ষকে যথাক্রমে x-অক্ষ ও y-অক্ষ ধরে উপবৃত্তের সমীকরণ,

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \cdots \cdots (1)$, যেখানে $a > b$

(1) উপবৃত্তের উৎকেন্দ্রিকতা $e=\frac{1}{3}$ এবং

বৃহৎ অক্ষের দৈর্ঘ্য, $2a=12 \quad \therefore a=6$

$a > b$ এর জন্য, $b^2=a^2(1-e^2)$

$\Rightarrow b^2=36(1-\frac{1}{9})=36.\frac{8}{9}=32$

$\therefore$ নির্ণেয় উপবৃত্তের সমীকরণ $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{32}=1$

(f) অক্ষ দুইটিকে x ও y-অক্ষ ধরে একটি উপবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর যার উৎকেন্দ্রিকতা $1/\sqrt{2}$ এবং ক্ষুদ্র অক্ষের দৈর্ঘ্য 4 একক। [মা.বো. '০৪,'০৬]

সমাধান ঃ ধরি, বৃহৎ অক্ষ ও ক্ষুদ্র অক্ষকে যথাক্রমে x-অক্ষ ও y-অক্ষ ধরে উপবৃত্তের সমীকরণ,

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \cdots \cdots (1)$, যেখানে $a > b$

(1) উপবৃত্তের উৎকেন্দ্রিকতা $e=\frac{1}{\sqrt{2}}$ এবং

ক্ষুদ্র অক্ষের দৈর্ঘ্য, $2b=4 \quad \therefore b=2$

$a > b$ এর জন্য, $b^2=a^2(1-e^2)$

$\Rightarrow 4=a^2(1-\frac{1}{2}) \Rightarrow a^2=8$

$\therefore$ নির্ণেয় উপবৃত্তের সমীকরণ $\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{4}=1$

8(g) বৃহৎ অক্ষ ও ক্ষুদ্র অক্ষকে যথাক্রমে x-অক্ষ ও y-অক্ষ ধরে একটি উপবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর যার উপকেন্দ্র দুইটির মধ্যবর্তী দূরত্ব 8 এবং দিকাক্ষ দুইটির মধ্যবর্তী দূরত্ব 18 । [রা. '০২,'০৩; প্র.ভ.প. '৯৭]

সমাধান ঃ ধরি, বৃহৎ অক্ষ ও ক্ষুদ্র অক্ষকে যথাক্রমে x-অক্ষ ও y-অক্ষ ধরে উপবৃত্তের সমীকরণ,

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \cdots \cdots (1)$, যেখানে $a > b$

(1) উপবৃত্তের উপকেন্দ্র দুইটির মধ্যবর্তী দূরত্ব $=2ae$

এবং দিকাক্ষ দুইটির মধ্যবর্তী দূরত্ব $=\frac{2a}{e}$

প্রশ্নমতে, $2ae=8 \Rightarrow ae=4 \cdots \cdots (2)$ এবং

$\frac{2a}{e}=18 \Rightarrow \frac{a}{e}=9 \cdots (3)$

(2) কে (3) দ্বারা গুণ করে পাই, $a^2=36$

$a > b$ এর জন্য, $b^2=a^2(1-e^2)$

$\Rightarrow b^2=a^2-a^2e^2=36-16=20$

$\therefore$ নির্ণেয় উপবৃত্তের সমীকরণ $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{20}=1$

$\therefore \ 5x^2+9y^2=180$

9(a) একটি উপবৃত্তের উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য তার ক্ষুদ্র অক্ষের অর্ধেক। তার উৎকেন্দ্রিকতা নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ ধরি, a , b এবং e যথাক্রমে উপবৃত্তের অর্ধ-বৃহৎ অক্ষ, অর্ধ-ক্ষুদ্র অক্ষ এবং উৎকেন্দ্রিকতা ।

$\therefore$ উপবৃত্তের উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য $=\frac{2b^2}{a}$ একক

এবং ক্ষুদ্র অক্ষের দৈর্ঘ্য = 2b একক।

প্রশ্নমতে, $\frac{2b^2}{a}=\frac{1}{2}(2b) \Rightarrow 2b^2=ab$

$\therefore \ a=2b$

$\therefore$ উৎকেন্দ্রিকতা $e=\sqrt{1-\frac{b^2}{a^2}}=\sqrt{1-\frac{b^2}{(2b)^2}}$

$=\sqrt{1-\frac{b^2}{4b^2}}=\sqrt{1-\frac{1}{4}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$ (Ans.)

9(b) একটি উপবৃত্তের ক্ষুদ্র অক্ষের দৈর্ঘ্য তার উপকেন্দ্র দুইটির মধ্যবর্তী দূরত্বের সমান এবং তার উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য 10 একক। উপবৃত্তটির উৎকেন্দ্রিকতা ও সমীকরণ নির্ণয় কর। [চ.'১০;বুয়েট'০৯-১০]

সমাধান ঃ ধরি, a , b এবং e যথাক্রমে উপবৃত্তের অর্ধ-বৃহৎ অক্ষ, অর্ধ-ক্ষুদ্র অক্ষ এবং উৎকেন্দ্রিকতা ।

$\therefore$ উপবৃত্তের উপকেন্দ্র দুইটির মধ্যবর্তী দূরত্বের = 2ae একক, উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য $=\frac{2b^2}{a}$ একক এবং ক্ষুদ্র অক্ষের দৈর্ঘ্য = 2b একক ।

প্রশ্নমতে, $2b=2ae \Rightarrow b=ae \cdots (1)$ এবং

$\frac{2b^2}{a}=10 \Rightarrow b^2=5a \cdots (2)$

(2) কে (1) দ্বারা ভাগ করে পাই, $b=\frac{5}{e}\cdots(3)$

$a>b$ এর জন্য, $b^2=a^2(1-e^2)$

$\Rightarrow a^2e^2=a^2(1-e^2)$ $[\because b=ae]$

$\Rightarrow e^2=1-e^2 \Rightarrow 2e^2=1 \therefore e=\frac{1}{\sqrt{2}}$

(3) হতে পাই, $b=\frac{5}{e}=5\sqrt{2}$ এবং

(2) হতে পাই, $(5\sqrt{2})^2=5a \Rightarrow a=10$

$\therefore$ নির্ণেয় উপবৃত্তের সমীকরণ $\frac{x^2}{(10)^2}+\frac{y^2}{(5\sqrt{2})^2}=1$

$\Rightarrow \frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{50}=1 \quad \therefore x^2+2y^2=100$

9(c) কোনো উপবৃত্তের একটি উপকেন্দ্র ও অনুরূপ দিকাক্ষের মধ্যকার দূরত্ব 16 ইঞ্চি এবং তার উৎকেন্দ্রিকতা 3/5; অক্ষ দুইটির দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর। [ব.'১১]

সমাধান ঃ ধরি, উপবৃত্তের অর্ধ-বৃহৎ অক্ষ, অর্ধ-ক্ষুদ্র অক্ষ এবং উৎকেন্দ্রিকতা যথাক্রমে a ইঞ্চি , b ইঞ্চি এবং e ।

$\therefore$ উপবৃত্তের একটি উপকেন্দ্র ও অনুরূপ দিকাক্ষের মধ্যকার দূরত্ব $=(\frac{a}{e}-ae)$ ইঞ্চি .

প্রশ্নমতে, উৎকেন্দ্রিকতা $e=\frac{3}{5}$ এবং

$\frac{a}{e}-ae=16 \Rightarrow a(\frac{5}{3}-\frac{3}{5})=16$

$\Rightarrow a\frac{25-9}{15}=16 \therefore a=15$

এখন $a>b$ এর জন্য, $b^2=a^2(1-e^2)$

$\Rightarrow b^2=225(1-\frac{9}{25})=9\times16 \therefore b=12$

$\therefore$ বৃহৎ অক্ষের দৈর্ঘ্য = 2a ইঞ্চি = 30 ইঞ্চি এবং ক্ষুদ্র অক্ষের দৈর্ঘ্য = 2 b ইঞ্চি = 24 ইঞ্চি

9(d) কোনো উপবৃত্তের উৎকেন্দ্রিকতা শূন্য হলে দেখাও যে, উপবৃত্তটি বৃত্তে পর্যবসিত হবে।

সমাধান : ধরি, বৃহৎ অক্ষ ও ক্ষুদ্র অক্ষকে যথাক্রমে x-অক্ষ ও y-অক্ষ ধরে উপবৃত্তের সমীকরণ, $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \cdots \cdots (1)$, যেখানে $a > b$.

$a > b$ এর জন্য, (1) উপবৃত্তের উৎকেন্দ্রিকতা $e=\sqrt{1-\frac{b^2}{a^2}}$

এখন , (1) উপবৃত্তের উৎকেন্দ্রিকতা $e = 0$ হলে,

$$\sqrt{1-\frac{b^2}{a^2}}=0 \Rightarrow 1-\frac{b^2}{a^2}=0 \quad \therefore b^2=a^2$$

$\therefore$ (1) হতে পাই, $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}=1 \quad \therefore x^2+y^2=a^2$

ইহা একটি বৃত্তের সমীকরণ। অতএব , কোন উপবৃত্তের উৎকেন্দ্রিকতা শূন্য হলে, উপবৃত্তটি বৃত্তে পর্যবসিত হয়।

10(a) একটি উপবৃত্তের অক্ষ দুইটি স্থানাঙ্কের অক্ষ দুইটির উপর অবস্থিত। উপবৃত্তটি $\frac{x}{9}+\frac{y}{4}=1$ রেখাকে x-অক্ষের উপর এবং $\frac{x}{2}+\frac{y}{3}=1$ রেখাকে y-অক্ষের উপর ছেদ করে । তার সমীকরণ, উৎকেন্দ্রিকতা এবং উপকেন্দ্র দুইটির স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর। [বুয়েট'১১-১২]

সমাধান: $\frac{x}{9}+\frac{y}{4}=1$ রেখাটি x-অক্ষকে $(9,0)$ বিন্দুতে এবং $\frac{x}{2}+\frac{y}{3}=1$ রেখাটি y-অক্ষকে $(0, 3)$ বিন্দুতে ছেদ করে।

ধরি, উপবৃত্তের সমীকরণ $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, যা $(9, 0)$ ও $(0 , 3)$ বিন্দু দিয়ে অতিক্রম করে।

$$\therefore \frac{9^2}{a^2}+0=1 \Rightarrow a^2=81 \text{ এবং}$$

$$0+\frac{3^2}{b^2}=1 \Rightarrow b^2=9.$$

$\therefore$ নির্ণেয় উপবৃত্তের সমীকরণ $\frac{x^2}{81}+\frac{y^2}{9}=1$

এখানে, $a > b$

$$\therefore \text{উৎকেন্দ্রিকতা } e=\sqrt{\frac{a^2-b^2}{a^2}}=\sqrt{\frac{81-9}{81}}$$

$$=\frac{\sqrt{72}}{9}=\frac{6\sqrt{2}}{9}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$$

এবং উপকেন্দ্র দুইটির স্থানাঙ্ক = $(\pm ae, 0)$

$$=(\pm 9\times\frac{2\sqrt{2}}{3}, 0)=(\pm 6\sqrt{2}, 0)$$

10(b) একটি উপবৃত্তের অক্ষ দুইটি স্থানাঙ্কের অক্ষ দুইটির উপর অবস্থিত। উপবৃত্তটি $5x+9y=45$ রেখাকে x-অক্ষের উপর এবং $7x+5y=36$ রেখাকে y-অক্ষের উপর ছেদ করে । তার উৎকেন্দ্রিকতা এবং উপকেন্দ্র দুইটির স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর। [বুয়েট'০৭-০৮]

সমাধান: $5x+9y=45$ রেখাটি x-অক্ষকে $(9, 0)$ বিন্দুতে এবং $7x+5y=36$ রেখাটি y-অক্ষকে $(0, 36/5)$ বিন্দুতে ছেদ করে।

ধরি, উপবৃত্তের সমীকরণ $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, যা $(9, 0)$ ও $(0 , 36/5)$ বিন্দু দিয়ে অতিক্রম করে।

$$\therefore \frac{9^2}{a^2}+0=1 \Rightarrow a^2=81 \text{ এবং}$$

$$0+\frac{36^2/5^2}{b^2}=1 \Rightarrow b^2=\frac{1296}{25}$$

$\therefore$ নির্ণেয় উপবৃত্তের সমীকরণ $\frac{x^2}{81}+\frac{y^2}{1296/25}=1$

এখানে, $a > b$

$$\therefore \text{উৎকেন্দ্রিকতা } e=\sqrt{\frac{81-1295/25}{81}}$$

$$=\sqrt{1-\frac{16}{25}}=\frac{3}{5}$$

এবং উপকেন্দ্র দুইটির স্থানাঙ্ক $= (\pm 9 \times \frac{3}{5}, 0)$

$$= (\pm \frac{27}{5}, 0)$$

(c) একটি উপবৃত্তের অক্ষ দুইটি স্থানাঙ্কের অক্ষ দুইটির উপর অবস্থিত। $3x + 2y - 9 = 0$ সরলরেখাটি উপবৃত্তটিকে অক্ষদ্বয়ের উপর ছেদ করে। উপবৃত্তটির সমীকরণ এবং উপকেন্দ্র দুইটির স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

[টেক্সটাইল'০৪-০৫]

সমাধানঃ $3x + 2y - 9 = 0$ রেখাটি x-অক্ষকে $(3, 0)$ বিন্দুতে এবং y-অক্ষকে $(0, 9/2)$ বিন্দুতে ছেদ করে।

ধরি, উপবৃত্তের সমীকরণ $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, যা $(3, 0)$ ও $(0, 9/2)$ বিন্দু দিয়ে অতিক্রম করে।

$\therefore \frac{3^2}{a^2} + 0 = 1 \Rightarrow a^2 = 9$ এবং

$0 + \frac{9^2/2^2}{b^2} = 1 \Rightarrow b^2 = \frac{81}{4}$.

$\therefore$ নির্ণেয় উপবৃত্তের সমীকরণ $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{81/4} = 1$

$\Rightarrow 9x^2 + 4y^2 = 81$

এখানে, $b > a$

$\therefore$ উৎকেন্দ্রিকতা $e = \sqrt{\frac{b^2 - a^2}{b^2}} = \sqrt{\frac{\frac{81}{4} - 9}{81/4}}$

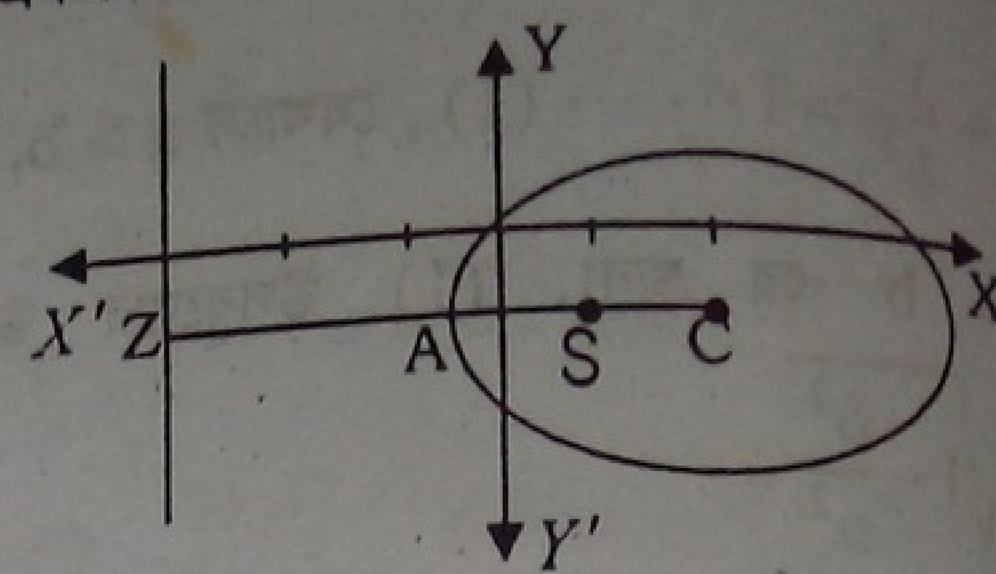
$$= \sqrt{\frac{45}{81}} = \sqrt{\frac{5}{9}} = \frac{\sqrt{5}}{3}$$

এবং উপকেন্দ্র দুইটির স্থানাঙ্ক $= (0, \pm be)$

$$= (\pm \frac{9}{2} \times \frac{\sqrt{5}}{3}, 0) = (\pm \frac{3\sqrt{5}}{2}, 0)$$

12.(a) একটি উপবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর যার বৃহৎ অক্ষ x-অক্ষের সমান্তরাল, একটি উপকেন্দ্র $(1, -1)$ এবং কেন্দ্র $(2, -1)$ হতে উপকেন্দ্রটির অনুরূপ দিকাক্ষের দূরত্ব 5 একক।

সমাধান ঃ



ধরি, উপবৃত্তটির কেন্দ্র $C(2, -1)$, উপকেন্দ্র $S(1, -1)$, শীর্ষ A এবং কেন্দ্র C হতে অনুরূপ দিকাক্ষের দূরত্ব $CZ = 5$.

$\therefore CS = |1 - 2| = 1$

বৃহৎ অক্ষ x-অক্ষের সমান্তরাল বলে,

$CA = a, CS = ae, CZ = \frac{a}{e}$

$\therefore CS \cdot CZ = ae. \frac{a}{e}$

$\Rightarrow 1.5 = a^2 \quad \therefore a^2 = 5$

আবার, $b^2 = a^2 - a^2e^2 = a^2 - CS^2$

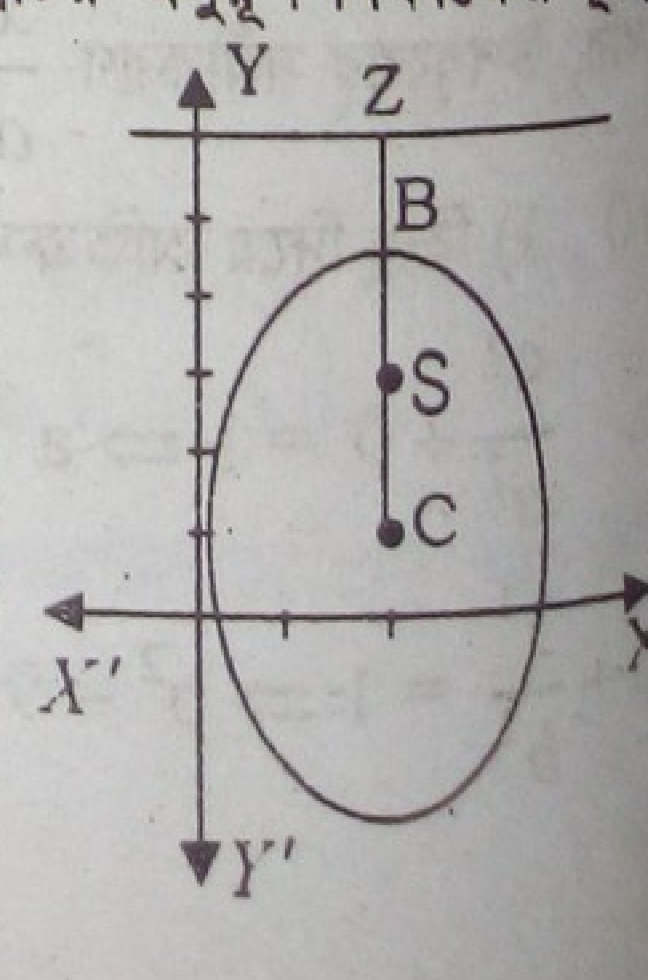
$$= 5 - 1^2 = 4$$

$\therefore (2, -1)$ কেন্দ্র বিশিষ্ট উপবৃত্তের সমীকরণ,

$$\frac{(x-2)^2}{a^2} + \frac{(y+1)^2}{b^2} = 1$$

$\therefore \frac{(x-2)^2}{5} + \frac{(y+1)^2}{4} = 1$ (Ans.)

12. (b) একটি উপবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর যার বৃহৎ অক্ষ y-অক্ষের সমান্তরাল, একটি উপকেন্দ্র $(2, 3)$ এবং কেন্দ্র $(2, 1)$ হতে উপকেন্দ্রটির অনুরূপ দিকাক্ষের দূরত্ব 4 একক।



সমাধান ঃ ধরি, উপবৃত্তটির কেন্দ্র $C(2,1)$, উপকেন্দ্র $S(2, 3)$, শীর্ষ B এবং কেন্দ্র C হতে অনুরূপ দিকাক্ষের দূরত্ব $CZ = 4$.

$\therefore CS = |1 - 3| = 2$

বৃহৎ অক্ষ y-অক্ষের সমান্তরাল বলে, $CB = b$, $CS = be$, $CZ = \frac{b}{e}$

$\therefore CS\,.\,CZ = be.\ \frac{b}{e}$

$\Rightarrow 2.\,4 = b^2 \quad \therefore b^2 = 8$

আবার, $a^2 = b^2 - b^2e^2 = b^2 - CS^2$

$= 8 - 2^2 = 4$

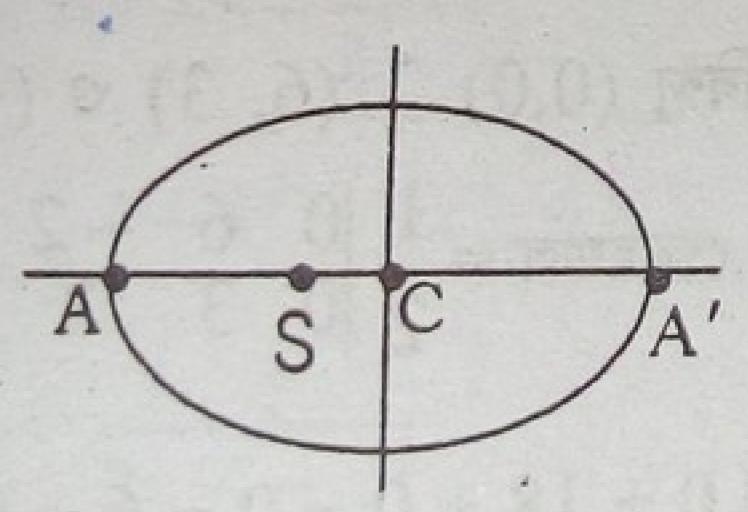
$\therefore$ (2 , 1) কেন্দ্র বিশিষ্ট উপবৃত্তের সমীকরণ,

$$\frac{(x-2)^2}{a^2} + \frac{(y-1)^2}{b^2} = 1$$

$$\therefore \frac{(x-2)^2}{4} + \frac{(y-1)^2}{8} = 1 \text{ (Ans.)}$$

12(c) একটি উপবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর যার উপকেন্দ্র দুইটির স্থানাঙ্ক (3, – 1) ও (1, – 1) এবং যেকোনো উপকেন্দ্র হতে শীর্ষদ্বয়ের দূরত্বের গুণফল 4 একক।

সমাধান ঃ ধরি, উপবৃত্তের উপকেন্দ্র $S(3, -1)$ ও $S'(1, -1)$ এর মধ্যবিন্দু $C = (\frac{3+1}{2}, \frac{-1-1}{2})$ $= (2, -1)$ এবং শীর্ষদ্বয় A ও A'.



যেহেতু উপকেন্দ্রদ্বয়ের কোটি অভিন্ন ; সূতরাং উপবৃত্তের বৃহৎ অক্ষ x-অক্ষের সমান্তরাল। a , b এবং e যথাক্রমে উপবৃত্তের অর্ধ-বৃহৎ অক্ষ, অর্ধ-ক্ষুদ্র অক্ষ এবং উৎকেন্দ্রিকতা হলে,

$CA = CA' = a$, $CS = ae$

$\therefore SA = CA - CS = a - ae$ এবং

$SA' = CA' + CS = a + ae$

প্রশ্নমতে, $SA.SA' = 4$

এখন, $b^2 = a^2 - a^2e^2 = (a - ae)(a + ae)$

$= SA.SA' = 4 \quad \therefore b^2 = 4$

$\therefore$ আবার, $b^2 = a^2 - a^2e^2 = a^2 - CS^2$

$\Rightarrow 4 = a^2 - \sqrt{(2-3)^2 + (-1+1)^2}$

$\Rightarrow 4 = a^2 - 1 \quad \therefore a^2 = 5$

$\therefore$ (2 , – 1) কেন্দ্র বিশিষ্ট উপবৃত্তের সমীকরণ,

$$\frac{(x-2)^2}{a^2} + \frac{(y+1)^2}{b^2} = 1$$

$$\therefore \frac{(x-2)^2}{5} + \frac{(y+1)^2}{4} = 1 \text{ (Ans.)}$$

12(d) দুইটি উপবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর যাদের বৃহৎ অক্ষ x-অক্ষের সমান্তরাল, ক্ষুদ্র অক্ষের দৈর্ঘ্য 6 একক এবং উপকেন্দ্র (– 2, 3) ও এর অনুবূপ শীর্ষের মধ্যকার দূরত্ব 1 একক।

সমাধান ঃ ধরি, বৃহৎ অক্ষ x-অক্ষের সমান্তরাল এরূপ উপবৃত্তের সমীকরণ $\frac{(x-\alpha)^2}{a^2} + \frac{(y-\beta)^2}{b^2} = 1 \cdots (1)$

প্রশ্নমতে, ক্ষুদ্র অক্ষের দৈর্ঘ্য $2b = 6 \therefore b = 3$

উপকেন্দ্র ও অনুবূপ শীর্ষের মধ্যকার দূরত্ব $a - ae = 1$

$\Rightarrow a = \frac{1}{1-e} \cdots \cdots (2)$

এখন, $b^2 = a^2(1 - e^2)$

$\Rightarrow 9 = \frac{(1-e)(1+e)}{(1-e)^2} = \frac{1+e}{1-e}$

$\Rightarrow 9 - 9e = 1 + e \Rightarrow 10e = 8 \therefore e = \frac{4}{5}$

$\therefore (2) \Rightarrow a = \frac{1}{1-4/5} = 5$

আবার, (1) উপবৃত্তের উপকেন্দ্র $(\pm ae + \alpha, \beta)$

$\therefore \pm ae + \alpha = -2 \Rightarrow \alpha = -2 \pm ae$

$\Rightarrow \alpha = -2 \pm 5.\frac{4}{5} = -2 \pm 4$

$\therefore \alpha = 2, -6$ এবং $\beta = 3$

∴ নির্ণেয় উপবৃত্তের সমীকরণ,

$$\frac{(x-2)^2}{25}+\frac{(y-3)^3}{9}=1$$ এবং

$$\frac{(x+6)^2}{25}+\frac{(y-3)^3}{9}=1$$

13. (a) দেখাও যে, $x - y = 5$ সরলরেখা $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$ উপবৃত্তকে স্পর্শ করে।

[ঢা.'০৩,'০৪; চ.'০৪]

প্রমাণ ঃ প্রদত্ত রেখাটি $y = x - 5 \cdots (1)$ এবং উপবৃত্তটি

$9x^2+16y^2=144 \cdots (2)$

(2) এ $y = x - 5$ বসিয়ে পাই,

$9x^2+16(x-5)^2=144$

$\Rightarrow 9x^2+16(x^2-10x+25)=144$

$\Rightarrow 25x^2-160x+400-144=0$

$\Rightarrow 25x^2-160x+256=0$

$\Rightarrow (5x)^2-2.\ 5x\ .\ 16+16^2=0$

$\Rightarrow (5x-16)^2=0 \ \therefore\ x=\frac{16}{5},\frac{16}{5}$

যেহেতু x এর মান দুইটি সমান, সুতরাং প্রদত্ত রেখাটি উপবৃত্তকে স্পর্শ করবে।

(1) এ $x=\frac{16}{5}$ বসিয়ে পাই, $y=\frac{16}{5}-5=-\frac{9}{5}$

∴ স্পর্শবিন্দুর স্থানাঙ্ক $\left(\frac{16}{5},-\frac{9}{5}\right)$

13(b) $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$ উপবৃত্তের একটি জ্যা (1, − 2) বিন্দুতে সমদ্বিখণ্ডিত হয় ; জ্যাটির সমীকরণ নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$ অর্থাৎ $9x^2+16y^2=144$

উপবৃত্তের যে জ্যা (1, −2) বিন্দুতে সমদ্বিখণ্ডিত হয় তার সমীকরণ,

$9.x.1+16.y.(-2)=9.1^2+16.(-2)^2$

$\Rightarrow 9x-32y=9+64$

$\therefore 9x-32y=73$ (Ans.)

13(c) একটি ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর যার শীর্ষবিন্দুগুলি মূলবিন্দু এবং $9(x-2)^2+25(y-3)^2=225$ উপবৃত্তের উপকেন্দ্রদ্বয়। [প্র.ভ.প.'৯৬]

প্রদত্ত উপবৃত্ত $9(x-2)^2+25(y-3)^2=225$

অর্থাৎ $\frac{(x-2)^2}{5^2}+\frac{(y-3)^2}{3^2}=1 \cdots\cdots\cdots (1)$ কে

$\frac{(x-\alpha)^2}{a^2}+\frac{(y-\beta)^2}{b^2}=1$ এর সাথে তুলনা করে পাই,

$\alpha=2, \beta=3, a=5, b=3.$

$a>b$ এর জন্য, উৎকেন্দ্রিকতা $e=\sqrt{\frac{a^2-b^2}{a^2}}$

$=\sqrt{\frac{25-9}{25}}=\frac{4}{5}$

∴ উপকেন্দ্রদ্বয়ের স্থানাঙ্ক $=(ae+\alpha,\beta)$

$=(\pm 5.\frac{4}{5}+2, 3)=(\pm 4+2, 3)$

∴ উপকেন্দ্রদ্বয় (6 , 3) এবং (−2, 3)

∴ মূলবিন্দু (0,0) , (6, 3) ও (−2, 3) দ্বারা গঠিত

ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল $=\frac{1}{2}\begin{vmatrix}0 & 6 & -2 & 0\\ 0 & 3 & 3 & 0\end{vmatrix}$ বর্গ একক।

$=\frac{1}{2}|0+18+0-0+6-0|$ বর্গ একক।

$=12$ বর্গ একক।

(d) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ উপবৃত্তে $y=mx+c$ রেখাটি স্পর্শক হলে, প্রমাণ কর যে, $c^2=a^2m^2+b^2$.

প্রমাণ ঃ $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ অর্থাৎ $b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$

উপবৃত্তের সমীকরণে $y=mx+c$ বসিয়ে পাই,

$b^2x^2+a^2(mx+c)^2=a^2b^2$

$\Rightarrow b^2x^2+a^2(m^2x^2+2mxc+c^2)=a^2b^2$

$\Rightarrow (b^2 + a^2 m^2) x^2 + 2a^2 mcx + a^2c^2 - a^2 b^2 = 0 \cdots\cdots (1)$, যা x-এর একটি দ্বিঘাত সমীকরণ। অতএব, এ সমীকরণ থেকে x-এর দুইটি মান পাওয়া যাবে।

প্রদত্ত রেখাটি পরাবৃত্তকে স্পর্শ করবে যদি x-এর মান দুইটি সমান হয়, অর্থাৎ (1) সমীকরণের নিশ্চায়ক শূন্য হয়।

$\therefore (2a^2 mc)^2 - 4.(b^2 + a^2 m^2)(a^2c^2 - a^2b^2) = 0$

$\Rightarrow 4a^4 m^2 c^2 - 4a^2 b^2 c^2 + 4a^2 b^4 - 4a^4 m^2 c^2 + 4a^4 m^2 b^2 = 0$

$\Rightarrow -4a^2 b^2 c^2 + 4a^2 b^4 + 4a^4 m^2 b^2 = 0$

$\Rightarrow -c^2 + b^2 + a^2 m^2 = 0$

$\therefore c^2 = a^2 m^2 + b^2$ (Showed)

15. লেখচিত্র অঙ্কন কর ঃ $\dfrac{(x-2)^2}{4} + \dfrac{(y-1)^2}{8} = 1$

সমাধান ঃ প্রদত্ত সমীকরণ $\dfrac{(x-2)^2}{4} + \dfrac{(y-1)^2}{8} = 1$ একটি উপবৃত্ত যার কেন্দ্রের স্থানাঙ্ক (2 , 1).

এখন, $\dfrac{(y-1)^2}{8} = 1 - \dfrac{(x-2)^2}{4}$

$\Rightarrow (y-1)^2 = 8\dfrac{4 - x^2 + 4x - 4}{4} = 2x(4-x)$

$\Rightarrow y - 1 = \pm\sqrt{2x(4-x)}$

$\Rightarrow y = 1 \pm \sqrt{2x(4-x)}$; যেখানে , $x(4-x) \geq 0$

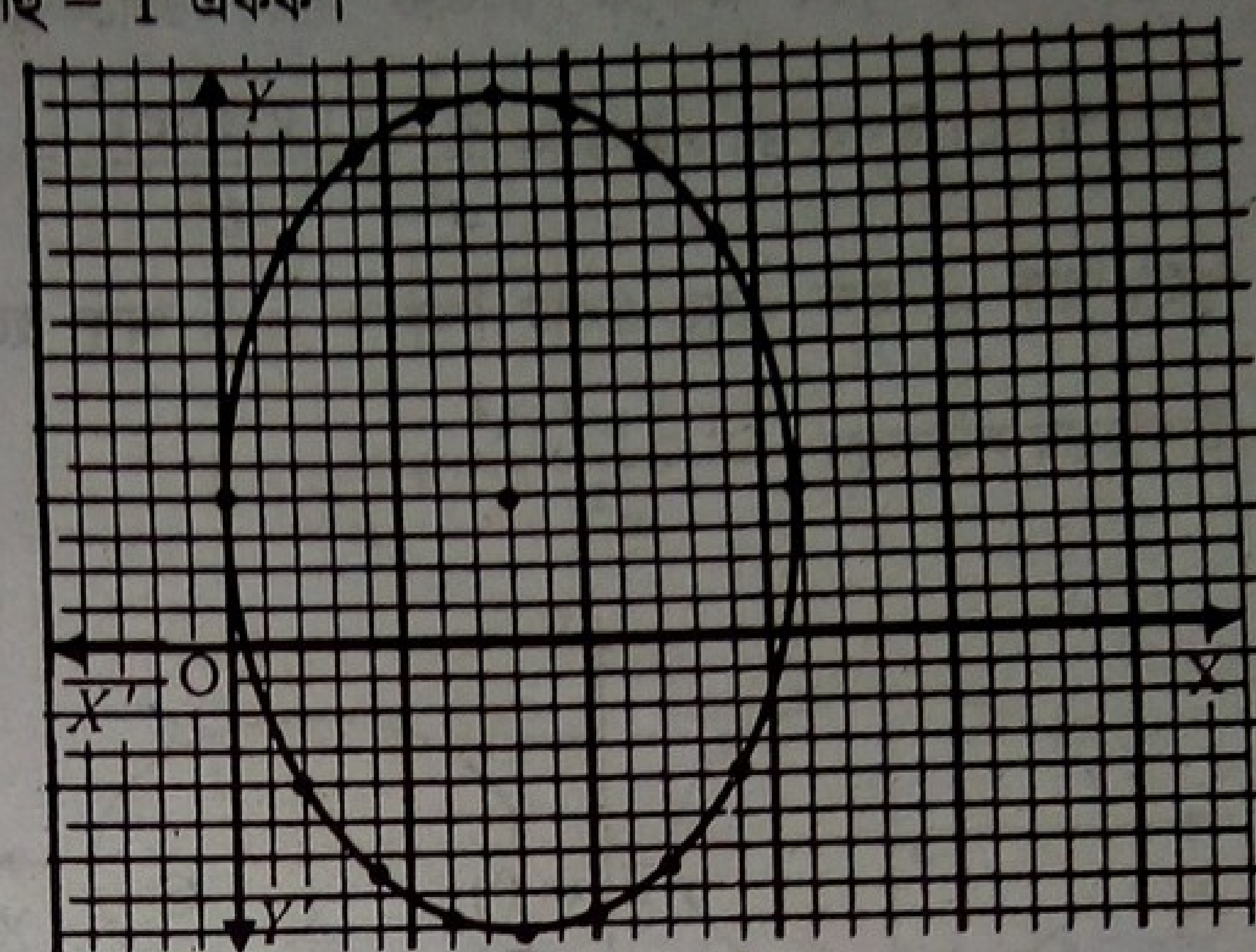
$\Rightarrow x(x-4) \leq 0 \Rightarrow 0 \leq x \leq 4$

নিচের তালিকায় x $(0 \leq x \leq 4)$ এর ভিন্ন ভিন্ন মানের জন্য $y = 1 \pm \sqrt{2x(x-4)}$ এর প্রতিবূপী মান নির্ণয় করি ঃ

x	0	0.5	0.5	1	1	1.5
y	1	2.87	-0.87	3.45	-1.45	3.74
x	1.5	2	2	3	3	4
y	-1.74	3.83	-1.83	3.45	-1.45	0

একটি ছক কাগজে স্থানাংকের অক্ষরেখা $X'OX$ ও YOY' অঙ্কন করি।

স্কেল নির্ধারণ ঃ x-অক্ষ ও y-অক্ষ বরাবর ছোট বর্গের 4 বাহু = 1 একক।



এখন নির্ধারিত স্কেল অনুযায়ী তালিকাভুক্ত বিন্দুগুলি ছক কাগজে স্থাপন করি।

স্থাপিত বিন্দুগুলো মুক্ত হস্তে বক্রাকারে যোগ করে $\dfrac{(x-2)^2}{4} + \dfrac{(y-1)^2}{8} = 1$ এর লেখচিত্র অঙ্কন করি।

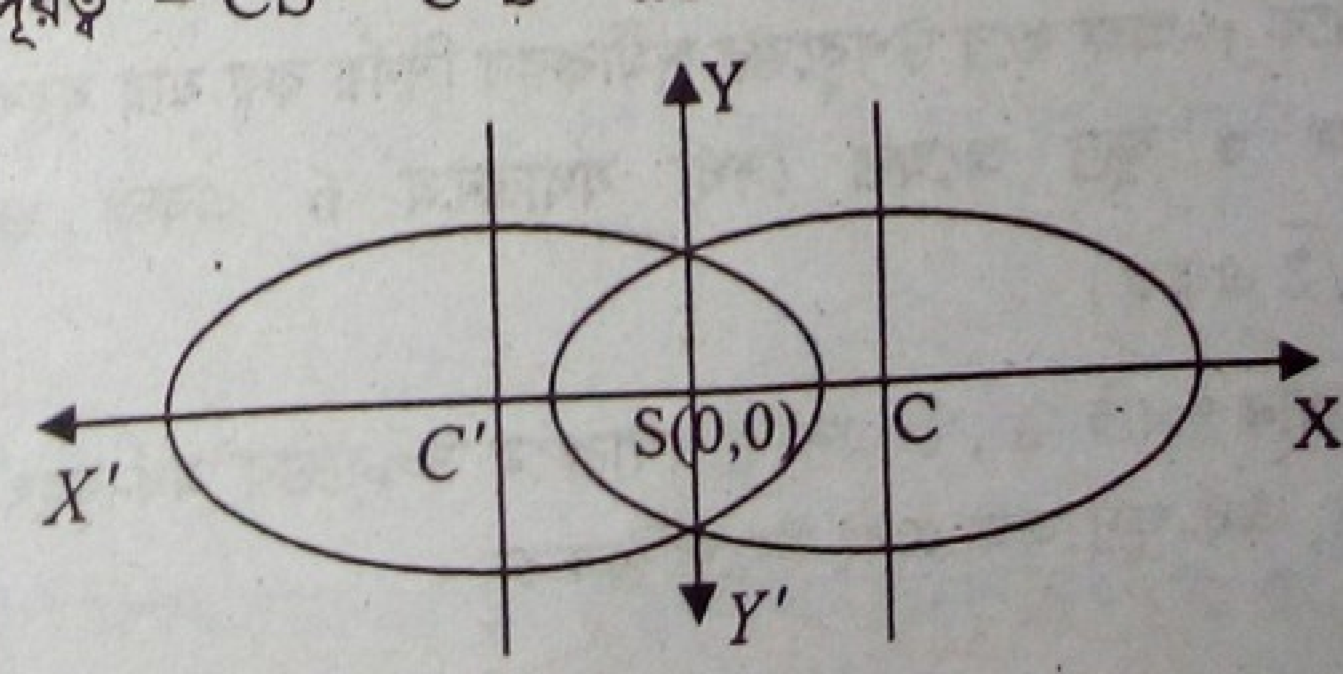
অতিরিক্ত প্রশ্ন (সমাধানসহ)

দুইটি বিশেষ অবস্থায় উপবৃত্তের সমীকরণ

বৃহৎ অক্ষকে x- অক্ষ এবং উপকেন্দ্রকে মূলবিন্দু ধরে উপবৃত্তের সমীকরণ $\dfrac{(x \pm ae)^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$.

ধরি, উপবৃত্তটির উৎকেন্দ্রিকতা e, বৃহৎ অক্ষ ও ক্ষুদ্র অক্ষের দৈর্ঘ্য যথাক্রমে $2a$ ও $2b$ এবং উপকেন্দ্র S(0, 0)।

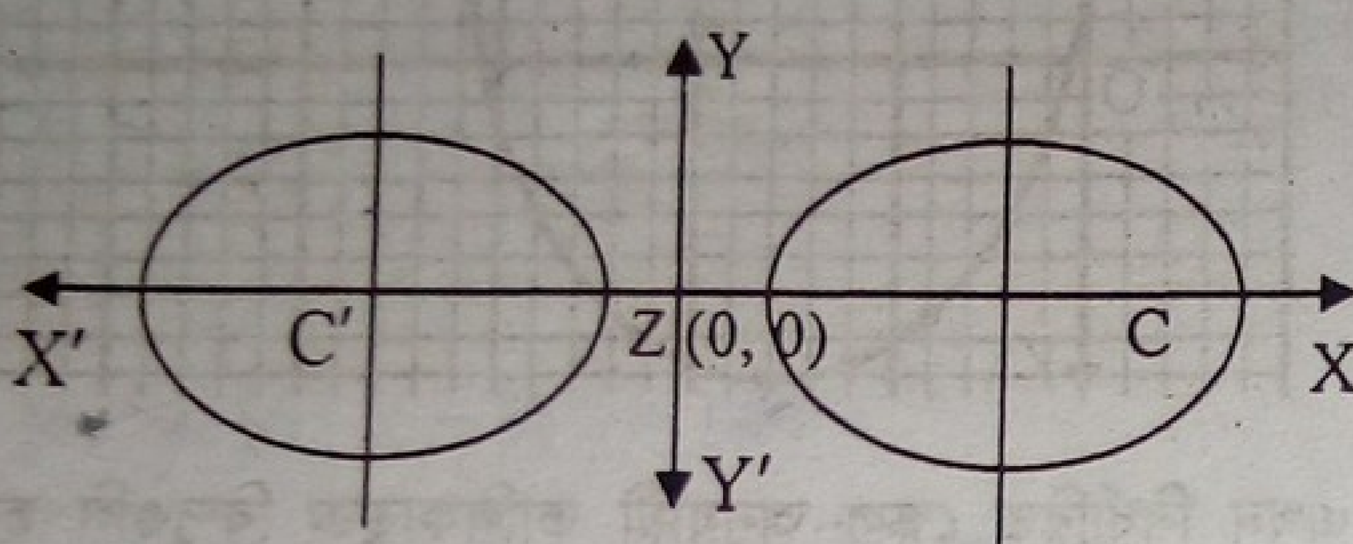
উপবৃত্তটির বৃহৎ অক্ষ x- অক্ষ বলে, কেন্দ্র ও উপকেন্দ্রের দূরত্ব $= CS = C'S = ae$



উপবৃত্তটির কেন্দ্রের স্থানাঙ্ক $(\pm ae, 0)$ এবং এর সমীকরণ, $\frac{(x \pm ae)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$

অনুরূপভাবে, বৃহৎ অক্ষকে y-অক্ষ এবং উপকেন্দ্রকে মূলবিন্দু ধরে উপবৃত্তের সমীকরণ $\frac{x^2}{a^2} + \frac{(y \pm be)^2}{b^2} = 1$

বৃহৎ অক্ষ x-অক্ষ এবং একটি দিকাক্ষ y – অক্ষ হলে উপবৃত্তের সমীকরণ $\frac{(x \pm a/e)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$



মনে করি, উপবৃত্তটির উৎকেন্দ্রিকতা e, বৃহৎ অক্ষ ও ক্ষুদ্র অক্ষের দৈর্ঘ্য যথাক্রমে $2a$ ও $2b$ এবং অক্ষ ও একটি দিকাক্ষের ছেদবিন্দু $Z(0, 0)$ ।

উপবৃত্তটির বৃহৎ অক্ষ x- অক্ষ বলে, Z হতে উপবৃত্তের কেন্দ্রের দূরত্ব $= CZ = C'Z = \frac{a}{e}$

উপবৃত্তটির কেন্দ্রের স্থানাঙ্ক $(\pm \frac{a}{e}, 0)$ এবং এর সমীকরণ, $\frac{(x \pm a/e)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$

তদ্রূপ, বৃহৎ অক্ষকে y –অক্ষ এবং একটি দিকাক্ষকে x – অক্ষ ধরে উপবৃত্তের সমীকরণ, $\frac{x^2}{a^2} + \frac{(y \pm b/e)^2}{b^2} = 1$

1 (a) উপবৃত্তের বৃহৎ অক্ষকে x-অক্ষ এবং উপকেন্দ্রিক লম্বকে y-অক্ষ ধরে উপবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর যার বৃহৎ অক্ষ ও ক্ষুদ্র অক্ষের দৈর্ঘ্য যথাক্রমে 6 একক ও $\sqrt{2}$ একক।

সমাধান ঃ ধরি, a , b এবং e যথাক্রমে উপবৃত্তের অর্ধ-বৃহৎ অক্ষ, অর্ধ-ক্ষুদ্র অক্ষ এবং উৎকেন্দ্রিকতা ।

প্রশ্নমতে, বৃহৎ অক্ষের দৈর্ঘ্য $2a = 6 \Rightarrow a = 3$ এবং ক্ষুদ্র অক্ষের দৈর্ঘ্য $2b = 4\sqrt{2} \Rightarrow b = 2\sqrt{2}$

$a > b$ এর জন্য, উৎকেন্দ্রিকতা $e = \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{a^2}}$

$$= \sqrt{\frac{9-8}{9}} = \frac{1}{3}$$

$\therefore$ বৃহৎ অক্ষকে x- অক্ষ এবং উপকেন্দ্রিক লম্বকে y-অক্ষ ধরে উপবৃত্তের সমীকরণ $\frac{(x \pm ae)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

$$\Rightarrow \frac{(x \pm 3.\frac{1}{3})^2}{9} + \frac{y^2}{8} = 1 \quad \therefore \frac{(x \pm 1)^2}{9} + \frac{y^2}{8} = 1$$

1(b) উপবৃত্তের বৃহৎ অক্ষকে x-অক্ষ এবং উপকেন্দ্রিক লম্বকে y-অক্ষ ধরে উপবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর যার উৎকেন্দ্রিকতা 4/5 এবং উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য 18/5 একক।

সমাধান ঃ ধরি, a ; b এবং e যথাক্রমে উপবৃত্তের অর্ধ-বৃহৎ অক্ষ, অর্ধ-ক্ষুদ্র অক্ষ এবং উৎকেন্দ্রিকতা ।

প্রশ্নমতে, উপবৃত্তের উৎকেন্দ্রিকতা $e = \frac{4}{5}$ এবং

উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য $\frac{2b^2}{a} = \frac{18}{5}$

$$\Rightarrow \frac{2a^2(1-e^2)}{a} = \frac{18}{5} \quad [\because b^2 = a^2(1-e^2)]$$

$$\Rightarrow 2a(1 - \frac{16}{25}) = \frac{18}{5} \quad [\because e = \frac{4}{5}]$$

$$\Rightarrow 2a.\frac{9}{25} = \frac{18}{5} \Rightarrow a = 5$$

$$\therefore b^2 = a^2(1 - e^2) = 25(1 - \frac{16}{25}) = 9$$

$\therefore$ বৃহৎ অক্ষকে x- অক্ষ এবং উপকেন্দ্রিক লম্বকে y-অক্ষ ধরে উপবৃত্তের সমীকরণ $\frac{(x \pm ae)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

$$\Rightarrow \frac{(x \pm 5.\frac{4}{5})^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1 \quad \therefore \frac{(x \pm 4)^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$$

1(c) উপকেন্দ্রিক লম্বকে x-অক্ষ এবং বৃহৎ অক্ষকে y-অক্ষ ধরে উপবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর যার উৎকেন্দ্রিকতা $1/3$ এবং উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য 16 একক।

সমাধান ঃ মনে করি, উপকেন্দ্রিক লম্বকে x-অক্ষ এবং বৃহৎ অক্ষকে y-অক্ষ ধরে উপবৃত্তের সমীকরণ,

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{(y \pm be)^2}{b^2} = 1 \cdots \cdots (1)$, যেখানে $b > a$.

প্রশ্নমতে, (1) উপবৃত্তের উৎকেন্দ্রিকতা $e = \frac{1}{3}$ এবং

উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য $\frac{2a^2}{b} = \frac{18}{5}$

$$\Rightarrow \frac{2b^2(1-e^2)}{b} = 16$$

$[\because b > a$ এর জন্য, $a^2 = b^2(1-e^2)]$

$\Rightarrow 2b(1 - \frac{1}{9}) = 16 \quad [\because e = \frac{1}{3}]$

$\Rightarrow 2b.\frac{8}{9} = \frac{18}{5} \Rightarrow b = 9$

$\therefore a^2 = b^2(1-e^2) = 81(1 - \frac{1}{9}) = 72$

$\therefore$ নির্ণেয় উপবৃত্তের সমীকরণ $\frac{x^2}{72} + \frac{(y \pm 9.\frac{1}{3})^2}{81} = 1$

$\therefore \frac{x^2}{72} + \frac{(y \pm 3)^2}{81} = 1$ (Ans.)

1(d) উপবৃত্তের একটি দিকাক্ষকে x-অক্ষ এবং বৃহৎ অক্ষকে y-অক্ষ ধরে উপবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর যার উপকেন্দ্র দুইটির মধ্যবর্তী দূরত্ব 8 এবং উৎকেন্দ্রিকতা **1/2.**

সমাধান ঃ মনে করি, একটি দিকাক্ষকে x-অক্ষ এবং বৃহৎ অক্ষকে y-অক্ষ ধরে উপবৃত্তটির সমীকরণ,

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{(y \pm \frac{b}{e})^2}{b^2} = 1$$

প্রশ্নমতে, $e = \frac{1}{2}$ এবং $2be = 8$

$\Rightarrow 2 \times b \times \frac{1}{2} = 8 \Rightarrow b = 8$

$\therefore a^2 = b^2(1-e^2) = 64(1 - \frac{1}{4}) = 48$ এবং

$\frac{b}{e} = \frac{8}{1/2} = 16$

$\therefore$ নির্ণেয় উপবৃত্তের সমীকরণ $\frac{x^2}{48} + \frac{(y \pm 16)^2}{64} = 1$

2 (a) যেসব বিন্দু থেকে $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ উপবৃত্তে অঙ্কিত স্পর্শক দুইটি পরস্পর লম্ব হয় তাদের সঞ্চারপথের সমীকরণ নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ স্পর্শকের ঢাল m হলে, $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ উপবৃত্তে স্পর্শকের সমীকরণ $y = mx \pm \sqrt{a^2m^2 + b^2}$

$\Rightarrow y - mx = \pm\sqrt{a^2m^2 + b^2}$

$\Rightarrow y^2 - 2mxy + m^2x^2 = a^2m^2 + b^2$

$\Rightarrow (x^2 - a^2)m^2 - 2mxy + y^2 - b^2 = 0$

যা m-এর একটি দ্বিঘাত সমীকরণ। অতএব, এ সমীকরণ থেকে m-এর দুইটি মান পাওয়া যাবে। m-এর দুইটি মান m_1 ও m_2 এর জন্য, প্রাপ্ত স্পর্শকদ্বয় পরস্পর লম্ব হলে $m_1 m_2 = -1$

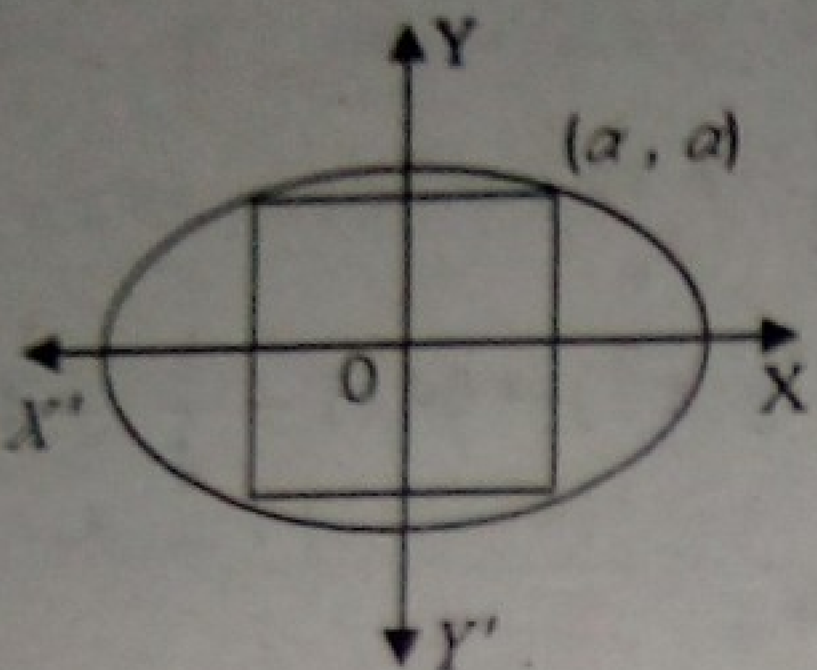
$\therefore \frac{y^2 - b^2}{x^2 - a^2} = -1 \Rightarrow y^2 - b^2 = -x^2 + a^2$

$\therefore x^2 + y^2 = a^2 + b^2$, যা নির্ণেয় সঞ্চারপথের সমীকরণ।

2(b) যদি $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ উপবৃত্তের অন্তর্লিখিত বর্গের বাহুগুলি অক্ষদ্বয়ের সমান্তরাল হয়, তবে প্রমাণ কর যে, ঐ

বর্গের ক্ষেত্রফল হবে $\dfrac{4ab^2}{\sqrt{a^2e^4+4b^2}}$, যেখানে e উপবৃত্তের উৎকেন্দ্রতা। [প্র.ভ.প.'৯৫]

প্রমাণ ঃ



$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \Rightarrow b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2 \cdots (1)$$

উপবৃত্তের অন্তর্লিখিত বর্গের বাহুগুলি অক্ষদ্বয়ের সমান্তরাল বলে, অক্ষদ্বয় হতে বর্গের শীর্ষ চারটি সমদূরবর্তী হবে। অতএব, ধরি (α , α) বর্গের একটি শীর্ষ যা (1) উপবৃত্তের উপর অবস্থিত হবে।

$\therefore \ b^2\alpha^2+a^2\alpha^2=a^2b^2$

$$\Rightarrow \alpha^2=\frac{a^2b^2}{a^2+b^2}$$

এখন, বর্গের বাহুর দৈর্ঘ্য $= 2\alpha$

$\therefore$ অন্তর্লিখিত বর্গের ক্ষেত্রফল $= (2\alpha)^2$

$$= 4\alpha^2=\frac{4a^2b^2}{a^2+b^2}=\frac{4a^2b^2}{\sqrt{(a^2+b^2)^2}}$$

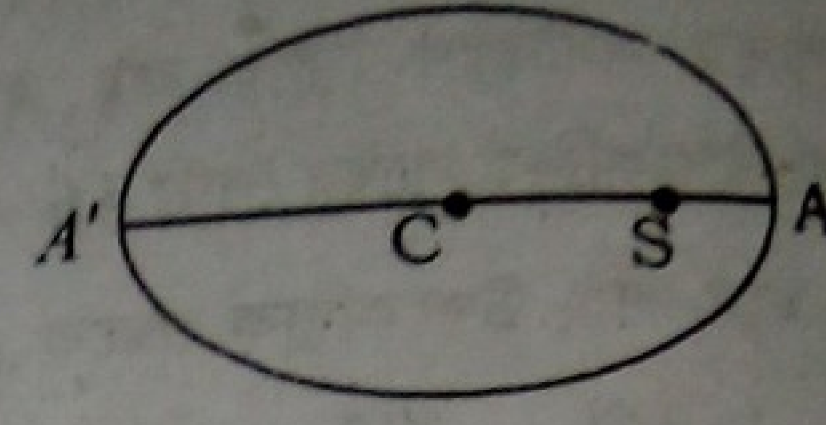
$$=\frac{4a^2b^2}{\sqrt{(a^2-b^2)^2-4a^2b^2}}$$

$$=\frac{4a^2b^2}{\sqrt{(a^2e^2)^2-4a^2b^2}} \quad [\because b^2=a^2-a^2e^2]$$

$$=\frac{4a^2b^2}{a\sqrt{a^2e^2-4b^2}}=\frac{4ab^2}{\sqrt{a^2e^4+4b^2}} \text{ (Proved)}$$

3. পৃথিবীর কক্ষপথ উপবৃত্তাকার। এর একটি উপকেন্দ্রে সূর্য অবস্থিত। উপবৃত্তের অর্ধ-বৃহদাক্ষ 9.3×10^7 মাইল এবং উৎকেন্দ্রিকতা $\dfrac{1}{62}$ (প্রায়) হলে সূর্য ও পৃথিবীর বৃহত্তম ও ক্ষুদ্রতম দূরত্ব নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ



ধরি, a , b এবং e যথাক্রমে উপবৃত্তাকার পৃথিবীর কক্ষপথের অর্ধ-বৃহাক্ষ, অর্ধ-ক্ষুদ্রাক্ষ এবং উৎকেন্দ্রিকতা। উপবৃত্তাকার পৃথিবীর কক্ষপথের কেন্দ্র C , শীর্ষ দুইটি A, A′ এবং S উপকেন্দ্রে সূর্য অবস্থিত।

$\therefore \ CA = CA' = a, \ CS = ae$

প্রশ্নমতে, $a = 9.3\times 10^7$ মাইল এবং $e=\dfrac{1}{62}$

$\therefore$ সূর্য ও পৃথিবীর ক্ষুদ্রতম দূরত্ব $= SA = CA - CS$

$= a - ae = 9.3\times 10^7\left(1-\dfrac{1}{62}\right)$ মাইল

$= 9.15\times 10^7$ মাইল এবং

বৃহত্তম দূরত্ব $= SA' = CA' + CS = a + ae$

$= 9.3\times 10^7\left(1+\dfrac{1}{62}\right)$ মাইল

$= 9.45\times 10^7$ মাইল।