অধিবৃত্ত (প্রশ্নমালা VI C)

এক নজরে প্রয়োজনীয় সূত্রাবলী ঃ

1. অধিবৃত্তের আদর্শ সমীকরণ $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$

2. আড় অক্ষকে x-অক্ষ ধরে এবং (α , β) কেন্দ্রবিশিষ্ট অধিবৃত্তের সমীকরণ $\dfrac{(x-\alpha)^2}{a^2}-\dfrac{(y-\beta)^2}{b^2}=1$.

3. আড় অক্ষকে x-অক্ষ এবং একটি উপকেন্দ্রকে মূলবিন্দু ধরে অধিবৃত্তের সমীকরণ $\dfrac{(x\pm ae)^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$.

4. আড় অক্ষকে x-অক্ষ এবং একটি দিকাক্ষকে y-অক্ষ ধরে অধিবৃত্তের সমীকরণ $\dfrac{(x\pm \frac{a}{e})^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$.

5. (α , β) উপকেন্দ্র , e উৎকেন্দ্রিকতা এবং $lx + my + n = 0$ দিকাক্ষ বিশিষ্ট অধিবৃত্তের সাধারণ সমীকরণ ,

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=e^2\,\frac{(lx+my+n)^2}{l^2+m^2}$$

6. $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ অধিবৃত্তের অনুবন্ধী অধিবৃত্তের সমীকরণ $\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{x^2}{a^2}=1$.

7. $y = mx + c$ রেখাটি $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ অধিবৃত্তকে স্পর্শ করবে যদি $c^2 = a^2m^2 - b^2$ হয়। অতএব, $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ অধিবৃত্তে স্পর্শকের সমীকরণ $y = mx \pm \sqrt{a^2m^2-b^2}$

8. অধিবৃত্তের প্রয়োজনীয় ফলাফল ঃ

অধিবৃত্তের আকার ঃ	$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$	$\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{x^2}{a^2}=1$	$\dfrac{(x-\alpha)^2}{a^2}-\dfrac{(y-\beta)^2}{b^2}=1$	$\dfrac{(y-\beta)^2}{b^2}-\dfrac{(x-\alpha)^2}{a^2}=1$
a. কেন্দ্রের স্থানাঙ্ক ঃ	$(0 , 0)$	$(0 , 0)$	(α , β)	(α , β)
b. উৎকেন্দ্রিকতা ঃ	$e=\sqrt{1+\dfrac{b^2}{a^2}}$	$e=\sqrt{1+\dfrac{a^2}{b^2}}$	$e=\sqrt{1+\dfrac{b^2}{a^2}}$	$e=\sqrt{1+\dfrac{a^2}{b^2}}$
c. আড় অক্ষের দৈর্ঘ্য ঃ	$2a$	$2b$	$2a$	$2b$
d. অনুবন্ধী অক্ষের দৈর্ঘ্য ঃ	$2b$	$2a$	$2b$	$2a$
e. আড় অক্ষের সমীকরণ ঃ	$y = 0$	$x = 0$	$y - \beta = 0$	$x - \alpha = 0$
f. অনুবন্ধী অক্ষের সমীকরণ ঃ	$x = 0$	$y = 0$	$x - \alpha = 0$	$y - \beta = 0$
g. শীর্ষদ্বয়ের স্থানাঙ্ক ঃ	$(\pm a , 0)$	$(0, \pm b)$	$(\pm a +\alpha , \beta)$	$(\alpha , \pm b + \beta)$
h. ফোকাসদ্বয়ের স্থানাঙ্ক ঃ	$(\pm ae , 0)$	$(0 , \pm be)$	$(\pm ae+\alpha , \beta)$	$(\alpha , \pm b + \beta)$
i. ফোকাসদ্বয়ের দূরত্ব ঃ	$2ae$	$2be$	$2ae$	$2be$
j. দিকাক্ষের পাদবিন্দুর ঃ	$(\pm \dfrac{a}{e}, 0)$	$(0 , \pm \dfrac{b}{e})$	$(\pm \dfrac{a}{e} +\alpha , \beta)$	$(\alpha , \pm \dfrac{b}{e} + \beta)$
k. দিকাক্ষ দুইটির দূরত্ব ঃ	$\dfrac{2a}{e}$	$\dfrac{2b}{e}$	$\dfrac{2a}{e}$	$\dfrac{2b}{e}$
l. দিকাক্ষ দুইটির সমীকরণ ঃ	$x = \pm \dfrac{a}{}$	$y = \pm \dfrac{b}{}$	$x - \alpha = \pm \dfrac{a}{}$	$y - \beta = \pm \dfrac{b}{}$

ঝ. উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য :	$\frac{2b^2}{a}$	$\frac{2a^2}{b}$	$\frac{2b^2}{a}$	$\frac{2a^2}{b}$
ঞ. উপকেন্দ্রিক লম্বের সমীকরণ :	$x = \pm ae$	$y = \pm be$	$x - \alpha = \pm ae$	$y - \beta = \pm be$

প্রশ্নমালা IV C

1(a) $9x^2 - 16y^2 = 144$ অধিবৃত্তের কেন্দ্র, শীর্ষবিন্দু, উৎকেন্দ্রিকতা, উপকেন্দ্র এবং অক্ষ ও উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য এবং দিকাক্ষের সমীকরণ নির্ণয় কর। [চ.'০৩; সি.'০৫; মা.বো.'০৪]

সমাধান : প্রদত্ত সমীকরণ $9x^2 - 16y^2 = 144$ অর্থাৎ $\frac{x^2}{4^2} - \frac{y^2}{3^2} = 1$ কে অধিবৃত্তের আদর্শ সমীকরণ $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ এর সঙ্গে তুলনা করে পাই, $a = 4$, $b = 3$.

$\therefore$ উৎকেন্দ্রিকতা, $e = \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{a^2}} = \sqrt{\frac{16+9}{16}} = \frac{5}{4}$

$\therefore$ অধিবৃত্তের কেন্দ্র $(0, 0)$

শীর্ষবিন্দু $(\pm a, 0) = (\pm 4, 0)$

উপকেন্দ্র $(\pm ae, 0) = (\pm 4\frac{5}{4}, 0) = (\pm 5, 0)$

আড় অক্ষের দৈর্ঘ্য $2a = 2.4 = 8$

অনুবন্ধী অক্ষের দৈর্ঘ্য $2b = 2.3 = 6$

উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য $\frac{2b^2}{a} = \frac{2 \times 9}{4} = \frac{9}{2}$

এবং দিকাক্ষের সমীকরণ $x = \pm \frac{a}{e} = \pm \frac{4}{5/4}$

$\therefore \; 5x = \pm 16$ (Ans.)

1(b) $9x^2 - 16y^2 + 72x - 32y - 16 = 0$

বক্ররেখাটির প্রকৃতি, তার কেন্দ্র ও উপকেন্দ্রদ্বয়ের স্থানাঙ্ক, নিয়ামকরেখার সমীকরণ ও নাভিলম্বের দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

সমাধান: প্রদত্ত বক্ররেখাটিতে x^2 ও y^2 সম্বলিত পদ বিদ্যমান। x^2 ও y^2 এর সহগ অসমান ও ভিন্ন চিহ্নযুক্ত। সুতরাং, প্রদত্ত বক্ররেখা একটি অধিবৃত্তের সমীকরণ।

এখন, $9x^2 - 16y^2 + 72x - 32y - 16 = 0$

$\Rightarrow 9(x^2 + 8x) - 16(y^2 + 2y) = 16$

$\Rightarrow 9(x^2 + 2.x.4 + 4^2) - 144$
$\quad - 16(y^2 + 2y.1 + 1^2) + 16 = 16$

$\Rightarrow 9(x+4)^2 - 16(x+1)^2 = 144$

$\Rightarrow \frac{(x+4)^2}{16} - \frac{(x+1)^2}{9} = 1$

$\Rightarrow \frac{(x+4)^2}{4^2} - \frac{(x+1)^2}{3^2} = 1$

ইহাকে অধিবৃত্তের সাধারণ সমীকরণ $\frac{(x-\alpha)^2}{a^2} - \frac{(y-\beta)^2}{b^2} = 1$ এর সাথে তুলনা করে পাই, $a = 4$, $b = 3$, $\alpha = -4$ এবং $\beta = -1$

$\therefore$ কেন্দ্রের স্থানাঙ্ক $(\alpha, \beta) = (-4, -1)$

উৎকেন্দ্রিকতা, $e = \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{a^2}} = \sqrt{\frac{16+9}{16}} = \frac{5}{4}$

উপকেন্দ্র দুইটির স্থানাঙ্ক $= (\alpha \pm ae, \beta)$

$= (-4 \pm 4 \times \frac{5}{4}, -1) = (-4 \pm 5, -1) = (1, -1)$

এবং $(-9, -1)$

নিয়ামকরেখার সমীকরণ, $x - \alpha = \pm \frac{a}{e}$

$\Rightarrow x + 4 = \pm \frac{4}{5/4} \quad \therefore x + 4 = \pm \frac{16}{5}$

নাভিলম্বের দৈর্ঘ্য $= \frac{2b^2}{a} = \frac{2 \times 3^2}{4} = \frac{9}{2}$ একক।

2(a) দেখাও যে, $x^2 - 8y^2 = 2$ অধিবৃত্তের দিকাক্ষের সমীকরণ $3x = \pm 4$ এবং উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য $1/2\sqrt{2}$. [বুয়েট'১০-১১]

[ব.'০৪; য.'০৭,'১৩; কু.'১০; ঢা.'১২; চ.'১২; সি.'১২]

m. উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য : $\frac{2b^2}{a}$	$\frac{2a^2}{b}$	$\frac{2b^2}{a}$	$\frac{2a^2}{b}$
n. উপকেন্দ্রিক লম্বের সমীকরণ : $x = \pm ae$	$y = \pm be$	$x - \alpha = \pm ae$	$y - \beta = \pm be$

প্রশ্নমালা IV C

1(a) $9x^2 - 16y^2 = 144$ অধিবৃত্তের কেন্দ্র, শীর্ষবিন্দু, উৎকেন্দ্রিকতা, উপকেন্দ্র এবং অক্ষ ও উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য এবং দিকাক্ষের সমীকরণ নির্ণয় কর। [চ.'০০; সি.'০৫; মা.বো.'০৪]

সমাধান : প্রদত্ত সমীকরণ $9x^2 - 16y^2 = 144$ অর্থাৎ $\frac{x^2}{4^2} - \frac{y^2}{3^2} = 1$ কে অধিবৃত্তের আদর্শ সমীকরণ $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ এর সঙ্গে তুলনা করে পাই, $a = 4$, $b = 3$.

$\therefore$ উৎকেন্দ্রিকতা, $e = \sqrt{\frac{a^2+b^2}{a^2}} = \sqrt{\frac{16+9}{16}} = \frac{5}{4}$

$\therefore$ অধিবৃত্তের কেন্দ্র $(0, 0)$

শীর্ষবিন্দু $(\pm a, 0) = (\pm 4, 0)$

উপকেন্দ্র $(\pm ae, 0) = (\pm 4\frac{5}{4}, 0) = (\pm 5, 0)$

আড় অক্ষের দৈর্ঘ্য $2a = 2.4 = 8$

অনুবন্ধী অক্ষের দৈর্ঘ্য $2b = 2.3 = 6$

উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য $\frac{2b^2}{a} = \frac{2\times 9}{4} = \frac{9}{2}$

এবং দিকাক্ষের সমীকরণ $x = \pm\frac{a}{e} = \pm\frac{4}{5/4}$

$\therefore$ $5x = \pm 16$ (Ans.)

1(b) $9x^2 - 16y^2 + 72x - 32y - 16 = 0$ বক্ররেখাটির প্রকৃতি, তার কেন্দ্র ও উপকেন্দ্রদ্বয়ের স্থানাঙ্ক, নিয়ামকরেখার সমীকরণ ও নাভিলম্বের দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

সমাধান: প্রদত্ত বক্ররেখাটিতে x^2 ও y^2 সম্বলিত পদ বিদ্যমান। x^2 ও y^2 এর সহগ অসমান ও ভিন্ন চিহ্নযুক্ত। সুতরাং, প্রদত্ত বক্ররেখা একটি অধিবৃত্তের সমীকরণ।

এখন, $9x^2 - 16y^2 + 72x - 32y - 16 = 0$

$\Rightarrow 9(x^2 + 8x) - 16(y^2 + 2y) = 16$

$\Rightarrow 9(x^2 + 2.x.4 + 4^2) - 144 - 16(y^2 + 2y.1 + 1^2) + 16 = 16$

$\Rightarrow 9(x+4)^2 - 16(x+1)^2 = 144$

$\Rightarrow \frac{(x+4)^2}{16} - \frac{(x+1)^2}{9} = 1$

$\Rightarrow \frac{(x+4)^2}{4^2} - \frac{(x+1)^2}{3^2} = 1$

ইহাকে অধিবৃত্তের সাধারণ সমীকরণ $\frac{(x-\alpha)^2}{a^2} - \frac{(y-\beta)^2}{b^2} = 1$ এর সাথে তুলনা করে পাই, $a = 4$, $b = 3$, $\alpha = -4$ এবং $\beta = -1$

$\therefore$ কেন্দ্রের স্থানাঙ্ক $(\alpha, \beta) = (-4, -1)$

উৎকেন্দ্রিকতা, $e = \sqrt{\frac{a^2+b^2}{a^2}} = \sqrt{\frac{16+9}{16}} = \frac{5}{4}$

উপকেন্দ্র দুইটির স্থানাঙ্ক $= (\alpha \pm ae, \beta)$

$= (-4 \pm 4\times\frac{5}{4}, -1) = (-4 \pm 5, -1) = (1, -1)$ এবং $(-9, -1)$

নিয়ামকরেখার সমীকরণ, $x - \alpha = \pm\frac{a}{e}$

$\Rightarrow x + 4 = \pm\frac{4}{5/4}$ $\therefore x + 4 = \pm\frac{16}{5}$

নাভিলম্বের দৈর্ঘ্য $= \frac{2b^2}{a} = \frac{2\times 3^2}{4} = \frac{9}{2}$ একক।

2(a) দেখাও যে, $x^2 - 8y^2 = 2$ অধিবৃত্তের দিকাক্ষের সমীকরণ $3x = \pm 4$ এবং উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য $1/2\sqrt{2}$. [বুয়েট'১০-১১]

[ব.'০৪; য.'০৭,'১৩; কু.'১০; ঢা.'১২; চ.'১২; সি.'১২]

সমাধান : প্রদত্ত সমীকরণ $x^2 - 8y^2 = 2$ অর্থাৎ

$\frac{x^2}{(\sqrt{2})^2} - \frac{y^2}{(1/2)^2} = 1$ কে অধিবৃত্তের আদর্শ সমীকরণ

$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ এর সঙ্গে তুলনা করে পাই, $a = \sqrt{2}$, $b = \frac{1}{2}$.

$\therefore$ উৎকেন্দ্রিকতা, $e = \sqrt{\frac{a^2+b^2}{a^2}} = \sqrt{\frac{2+\frac{1}{4}}{2}}$

$= \sqrt{\frac{9}{4\times 2}} = \frac{3}{2\sqrt{2}}$

$\therefore$ অধিবৃত্তের দিকাক্ষের সমীকরণ,

$x = \pm\frac{a}{e} = \pm\frac{\sqrt{2}}{\frac{3}{2\sqrt{2}}} = \pm\frac{4}{3}$ $\therefore 3x = \pm 4$

এবং উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য $\frac{2b^2}{a} = \frac{2\times\frac{1}{4}}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2\sqrt{2}}$

2(b) $\frac{x^2}{144} - \frac{y^2}{25} = 1$ **অধিবৃত্তের উৎকেন্দ্রিকতা এবং উপকেন্দ্রের স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।** [রা.'০৩; চ.'০৫; সি.'০৮]

সমাধান : $\frac{x^2}{144} - \frac{y^2}{25} = 1$ অর্থাৎ $\frac{x^2}{12^2} - \frac{y^2}{5^2} = 1$ কে

অধিবৃত্তের আদর্শ সমীকরণ $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ এর সঙ্গে তুলনা করে পাই, $a = 12$, $b = 5$.

$\therefore$ উৎকেন্দ্রিকতা, $e = \sqrt{\frac{a^2+b^2}{a^2}} = \sqrt{\frac{144+25}{144}}$

$= \frac{13}{12}$

এবং উপকেন্দ্রের স্থানাঙ্ক $= (\pm ae, 0)$

$= (\pm 12.\frac{13}{12}, 0) = (\pm 13, 0)$

2(c) $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$ **এর উপকেন্দ্রের স্থানাঙ্ক এবং দিকাক্ষের সমীকরণ নির্ণয় কর।**

[রা.'০০,'০৬; য.'০৫,'১০; ঢা.'০৭,'১১; সি.'০৯]

সমাধান : $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$ অর্থাৎ $\frac{x^2}{3^2} - \frac{y^2}{4^2} = 1$ কে

অধিবৃত্তের আদর্শ সমীকরণ $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ এর সঙ্গে তুলনা করে পাই, $a = 3$, $b = 4$.

$\therefore$ উৎকেন্দ্রিকতা, $e = \sqrt{\frac{a^2+b^2}{a^2}} = \sqrt{\frac{9+16}{9}} = \frac{5}{3}$

$\therefore$ উপকেন্দ্রের স্থানাঙ্ক $= (\pm ae, 0)$

$= (\pm 3.\frac{5}{3}, 0) = (\pm 5, 0)$

এবং দিকাক্ষের সমীকরণ $x = \pm\frac{a}{e} = \pm\frac{3}{5/3}$

$\therefore 5x = \pm 9$

2(d) $9x^2 - 4y^2 + 36 = 0$ **অধিবৃত্তের শীর্ষবিন্দু, উপকেন্দ্র, উপকেন্দ্রিক লম্ব ও দিকাক্ষের সমীকরণ নির্ণয় কর।** [য.'০৯]

সমাধান : প্রদত্ত সমীকরণ $9x^2 - 4y^2 + 36 = 0$ অর্থাৎ

$\frac{y^2}{3^2} - \frac{x^2}{2^2} = 1$ কে অধিবৃত্তের আদর্শ সমীকরণ

$\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$ এর সঙ্গে তুলনা করে পাই, $a = 2$, $b = 3$.

$\therefore$ উৎকেন্দ্রিকতা, $e = \sqrt{\frac{a^2+b^2}{b^2}} = \sqrt{\frac{4+9}{9}} = \frac{\sqrt{13}}{3}$

$\therefore$ অধিবৃত্তের শীর্ষবিন্দু স্থানাঙ্ক $= (0, \pm b) = (0, \pm 3)$

উপকেন্দ্রের স্থানাঙ্ক $= (0, \pm be)$

$= (0, \pm 3\frac{\sqrt{13}}{3}) = (0, \pm\sqrt{13})$

উপকেন্দ্রিক লম্বের সমীকরণ, $y = \pm be$

$\Rightarrow\ y = \pm 3.\dfrac{\sqrt{13}}{3}\ \therefore\ y = \pm\sqrt{13}$

এবং দিকাক্ষের সমীকরণ, $y = \pm\dfrac{b}{e} = \pm\dfrac{3}{\sqrt{13}/3}$

$\therefore\ \sqrt{13}\,y = \pm 9$

2(e) $25x^2 - 16y^2 = 400$ অধিবৃত্তের কেন্দ্র, উপকেন্দ্র, উৎকেন্দ্রিকতা নির্ণয় কর। [সি.'০১]

সমাধান : প্রদত্ত সমীকরণ $25x^2 - 16y^2 = 400$ অর্থাৎ

$\dfrac{x^2}{4^2} - \dfrac{y^2}{5^2} = 1$ কে অধিবৃত্তের আদর্শ সমীকরণ

$\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ এর সঙ্গে তুলনা করে পাই, $a = 4$, $b = 5$.

$\therefore$ উৎকেন্দ্রিকতা, $e = \sqrt{\dfrac{a^2+b^2}{a^2}}$

$= \sqrt{\dfrac{16+25}{16}} = \dfrac{\sqrt{41}}{4}$

অধিবৃত্তের কেন্দ্রের স্থানাঙ্ক = $(0, 0)$

উপকেন্দ্রের স্থানাঙ্ক = $(\pm ae, 0)$

$= (\pm 4.\dfrac{\sqrt{41}}{4}, 0) = (\pm\sqrt{41}, 0)$

2(f) $16x^2 - 25y^2 = 400$ অধিবৃত্তের উৎকেন্দ্রিকতা এবং উপকেন্দ্রের স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

[রা.'০৪,'০৮; কু.'০৫]

সমাধান : প্রদত্ত সমীকরণ $16x^2 - 25y^2 = 400$ অর্থাৎ

$\dfrac{x^2}{5^2} - \dfrac{y^2}{4^2} = 1$ কে অধিবৃত্তের আদর্শ সমীকরণ

$\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ এর সঙ্গে তুলনা করে পাই, $a = 5$, $b = 4$.

$\therefore$ উৎকেন্দ্রিকতা, $e = \sqrt{\dfrac{a^2+b^2}{a^2}}$

$= \sqrt{\dfrac{25+16}{25}} = \dfrac{\sqrt{41}}{5}$

এবং উপকেন্দ্রের স্থানাঙ্ক = $(\pm ae, 0)$

$= (\pm 5.\dfrac{\sqrt{41}}{5}, 0) = (\pm\sqrt{41}, 0)$

2(g) $4y^2 - 5x^2 = 20$ অধিবৃত্তের উৎকেন্দ্রিকতা, উপকেন্দ্র, দিকাক্ষের সমীকরণ নির্ণয় কর। [চ.'০৭]

সমাধান : প্রদত্ত সমীকরণ $4y^2 - 5x^2 = 20$ অর্থাৎ

$\dfrac{y^2}{(\sqrt{5})^2} - \dfrac{x^2}{2^2} = 1$ কে অধিবৃত্তের আদর্শ সমীকরণ

$\dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{x^2}{a^2} = 1$ এর সঙ্গে তুলনা করে পাই, $a = 2$, $b = \sqrt{5}$.

$\therefore$ উৎকেন্দ্রিকতা, $e = \sqrt{\dfrac{a^2+b^2}{b^2}} = \sqrt{\dfrac{4+5}{5}} = \dfrac{3}{\sqrt{5}}$

উপকেন্দ্রের স্থানাঙ্ক = $(0, \pm be)$

$= (0, \pm\sqrt{5}\,\dfrac{3}{\sqrt{5}}) = (0, \pm 3)$

এবং দিকাক্ষের সমীকরণ $y = \pm\dfrac{b}{e} = \pm\dfrac{\sqrt{5}}{3/\sqrt{5}}$

$\therefore\ 3y = \pm 5$

3 একটি অধিবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর যার দিকাক্ষ $2x + y = 1$, উপকেন্দ্রের স্থানাঙ্ক $(1, 1)$ এবং উৎকেন্দ্রিকতা $\sqrt{3}$. [কু. '০৪,'০৮; রা. '০১; য. '০৩,'০৮; ঢা. '০৪, '০৮,'১৩; ব.'০৮; মা.বো.'০৭; দি.'০৯; চ.'১১]

সমাধান ঃ $(1, 1)$ উপকেন্দ্র, $2x + y - 1 = 0$ দিকাক্ষ এবং $\sqrt{3}$ উৎকেন্দ্রিকতা বিশিষ্ট উপবৃত্তের সমীকরণ,

$$(x-1)^2 + (y-1)^2 = (\sqrt{3})^2\,\frac{(2x+y-1)^2}{2^2+1^2}$$

$\left[(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = e^2\,\dfrac{(ax+by+c)^2}{a^2+b^2}\right.$ সূত্রের সাহায্যে]

$\Rightarrow x^2 - 2x + 1 + y^2 - 2y + 1$

$$= \frac{3(4x^2 + y^2 + 1 + 4xy - 4x - 2y)}{5}$$

$\Rightarrow 5x^2 + 5y^2 - 10x - 10y + 10 = 12x^2 + 3y^2 + 12xy - 12x - 6y + 3$

$\therefore\ 7x^2 - 2y^2 + 12xy - 2x + 4y - 7 = 0$

4(a) একটি অধিবৃত্ত (6, 4) ও (– 3, 1) বিন্দু দিয়ে অতিক্রম করে। এর কেন্দ্র মূলবিন্দুতে এবং আড় অক্ষ x-অক্ষ বরাবর হলে, অধিবৃত্তটির সমীকরণ নির্ণয় কর। [য.'০৪,'১১; ব.'০৬]

সমাধান ঃ ধরি, কেন্দ্র মূলবিন্দুতে ও আড় অক্ষ x-অক্ষ বরাবর এরূপ অধিবৃত্তের সমীকরণ $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \cdots (1)$

(1) অধিবৃত্তটি (6 , 4) ও (– 3 , 1) বিন্দু দিয়ে অতিক্রম করে।

$\therefore \frac{36}{a^2} - \frac{16}{b^2} = 1 \cdots (2)$ এবং $\frac{9}{a^2} - \frac{1}{b^2} = 1 \cdots (3)$

$(2) - 16 \times (3) \Rightarrow (36 - 144)\frac{1}{a^2} = 1 - 16$

$\Rightarrow -108\ \frac{1}{a^2} = -15 \Rightarrow a^2 = \frac{108}{15} = \frac{36}{5}$

(3) হতে আমরা পাই, $9 \times \frac{5}{36} - \frac{1}{b^2} = 1$

$\Rightarrow \frac{1}{b^2} = \frac{5}{4} - 1 = \frac{1}{4} \Rightarrow b^2 = 4.$

$\therefore$ অধিবৃত্তটির সমীকরণ, $\frac{5x^2}{36} - \frac{y^2}{4} = 1.$

4(b) (4 , 0) , (5, 2.25) বিন্দুগামী একটি অধিবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর যার কেন্দ্র মূলবিন্দুতে এবং আড় অক্ষ x-অক্ষ বরাবর অবস্থিত। [চ.'০৩]

সমাধান ঃ ধরি, কেন্দ্র মূলবিন্দুতে ও আড় অক্ষ x-অক্ষ বরাবর এরূপ অধিবৃত্তের সমীকরণ $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \cdots (1)$

(1) অধিবৃত্তটি (4 , 0) ও (5 ,2.25) অর্থাৎ $(5, \frac{9}{4})$ বিন্দু দিয়ে অতিক্রম করে।

$\therefore\ \frac{16}{a^2} - 0 = 1 \Rightarrow a^2 = 16$

এবং $\frac{25}{a^2} - \frac{81/16}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{25}{16} - \frac{81}{16b^2} = 1$

$\Rightarrow 25b^2 - 81 = 16b^2 \Rightarrow 9b^2 = 81$

$\therefore\ b^2 = 9$

$\therefore$ অধিবৃত্তটির সমীকরণ, $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1.$

4(c) একটি অধিবৃত্ত (–2,1) ও (–3,–2) বিন্দু দিয়ে অতিক্রম করে। এর কেন্দ্র মূলবিন্দুতে এবং আড় অক্ষ x-অক্ষ বরাবর হলে, অধিবৃত্তটির সমীকরণ নির্ণয় কর। [ব.'০৯]

সমাধান ঃ ধরি, কেন্দ্র মূলবিন্দুতে ও আড় অক্ষ x-অক্ষ বরাবর এরূপ অধিবৃত্তের সমীকরণ $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \cdots (1)$

(1) অধিবৃত্তটি (– 2 , 1) ও (– 3, – 2) বিন্দু দিয়ে অতিক্রম করে।

$\therefore \frac{4}{a^2} - \frac{1}{b^2} = 1 \cdots (2)$, $\frac{9}{a^2} - \frac{4}{b^2} = 1 \cdots (3)$

$(2) \times 4 - (3) \Rightarrow \frac{16}{a^2} - \frac{9}{a^2} = 4 - 1$

$\Rightarrow\ \frac{7}{a^2} = 3\ \therefore\ a^2 = \frac{7}{3}$

(2) হতে আমরা পাই, $\frac{4}{7/3} - \frac{1}{b^2} = 1$

$\Rightarrow\ \frac{1}{b^2} = \frac{12}{7} - 1 = \frac{5}{7} \Rightarrow b^2 = \frac{7}{5}$

$\therefore$ অধিবৃত্তটির সমীকরণ, $\frac{x^2}{7/3} - \frac{y^2}{7/5} = 1$

$\Rightarrow\ 3x^2 - 5y^2 = 7$ (Ans.)

5(a) অক্ষ দুইটিকে স্থানাঙ্কের অক্ষ ধরে একটি অধিবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর যার আড় অক্ষ এবং অনুবন্ধী অক্ষের দৈর্ঘ্য যথাক্রমে 6 এবং 8 একক।

সমাধান ঃ অক্ষ দুইটিকে স্থানাঙ্কের অক্ষ ধরে অধিবৃত্তের সমীকরণ $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \cdots\cdots (1)$

(1) উপবৃত্তের আড় অক্ষের দৈর্ঘ্য $= 2a$ একক
এবং অনুবন্ধী অক্ষের দৈর্ঘ্য $= 2b$
প্রশ্নমতে, $2a = 6 \Rightarrow a = 3$ এবং
$2b = 8 \Rightarrow b = 4.$

$\therefore$ অধিবৃত্তটির সমীকরণ $\frac{x^2}{3^2} - \frac{y^2}{4^2} = 1$

$\Rightarrow \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1 \therefore 16x^2 - 9y^2 = 144$

5(b) অক্ষ দুইটিকে স্থানাঙ্কের অক্ষ ধরে একটি অধিবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর যার অনুবন্ধী অক্ষের দৈর্ঘ্য 24 এবং উপকেন্দ্রের স্থানাঙ্ক $(0, \pm 13)$। [কু.'০৭]

সমাধান ঃ অধিবৃত্তটির উপকেন্দ্র $(0, \pm13)$, y –অক্ষের উপর অবস্থিত এবং অক্ষ দুইটি স্থানাঙ্কের অক্ষ। সুতরাং এর আড় অক্ষটি y–অক্ষ বরাবর।

ধরি, অধিবৃত্তের সমীকরণ $\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1 \cdots (1)$

(1) উপবৃত্তের অনুবন্ধী অক্ষের দৈর্ঘ্য $= 2a$ একক
এবং উপকেন্দ্রের স্থানাঙ্ক $(0, \pm be)$.
প্রশ্নমতে, $2a = 24 \Rightarrow a = 12$ এবং
$\pm be = \pm 13 \Rightarrow be = 13$
আবার, $a^2 = b^2e^2 - b^2$
$\Rightarrow 12^2 = 13^2 - b^2 \Rightarrow b^2 = 13^2 - 12^2$
$\therefore b^2 = 5^2 = 25$

$\therefore$ অধিবৃত্তটির সমীকরণ, $\frac{y^2}{25} - \frac{x^2}{144} = 1$

5(c) অক্ষ দুইটিকে স্থানাঙ্কের অক্ষ ধরে একটি অধিবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর যার উপকেন্দ্র দুইটির মধ্যবর্তীর দূরত্ব 16 একক এবং উৎকেন্দ্রিকতা $\sqrt{2}$ ।

[রা.'০৭; কু.'১২;চ.'১৩; বুয়েট'১২-১৩]

সমাধান ঃ ধরি, অক্ষ দুইটিকে স্থানাঙ্কের অক্ষ ধরে অধিবৃত্তের সমীকরণ $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \cdots\cdots (1)$

প্রশ্নমতে, (1) উপবৃত্তের উৎকেন্দ্রিকতা $e = \sqrt{2}$
এবং উপকেন্দ্র দুইটির মধ্যবর্তীর দূরত্ব $2ae = 16$

$\Rightarrow a \times \sqrt{2} = 8 \Rightarrow a = \frac{8}{\sqrt{2}} = 4\sqrt{2}$

এখন, $b^2 = a^2(e^2 - 1) = (4\sqrt{2})^2(2 - 1)$
$\therefore b^2 = 32$

$\therefore$ অধিবৃত্তটির সমীকরণ $\frac{x^2}{(4\sqrt{2})^2} - \frac{y^2}{32} = 1$

$\therefore x^2 - y^2 = 32$

5(d) আড় অক্ষকে y-অক্ষ এবং অনুবন্ধী অক্ষকে x-অক্ষ ধরে একটি অধিবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর যার উপকেন্দ্র দুইটির মধ্যবর্তীর দূরত্ব 2 একক এবং উৎকেন্দ্রিকতা $\sqrt{2}$।

[চ.'১০; ব.'১৩; দি.'১৩]

সমাধান ঃ ধরি, আড় অক্ষকে y-অক্ষ এবং অনুবন্ধী অক্ষকে x-অক্ষ ধরে অধিবৃত্তের সমীকরণ $\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1 \cdots (1)$

প্রশ্নমতে, (1) উপবৃত্তের উৎকেন্দ্রিকতা $e = \sqrt{2}$
এবং উপকেন্দ্র দুইটির মধ্যবর্তী দূরত্ব $2b = 2$
$\Rightarrow b = 1 \therefore b^2 = 1$
এখন, $a^2 = b^2(e^2 - 1) = (2 - 1) = 1$

$\therefore$ অধিবৃত্তটির সমীকরণ $\frac{y^2}{1} - \frac{x^2}{1} = 1$

$\therefore y^2 - x^2 = 1$

6(a) আড় অক্ষকে x- অক্ষ এবং একটি দিকাক্ষকে y-অক্ষ ধরে অধিবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর যার উৎকেন্দ্রিকতা 2 এবং উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য 8 একক।

সমাধান ঃ মনে করি, আড় অক্ষকে x-অক্ষ এবং একটি দিকাক্ষকে y-অক্ষ ধরে অধিবৃত্তের সমীকরণ

$$\frac{(x \pm \frac{a}{e})^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \cdots (1)$$

(1) উপবৃত্তের উৎকেন্দ্রিকতা $e = 2$ এবং

উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য $\frac{2b^2}{a} = 8$

$\Rightarrow b^2 = 4a \cdots\cdots (2)$

এখন, $b^2 = a^2(e^2 - 1)$

$\Rightarrow 4a = a^2(2^2 - 1) \Rightarrow 4 = 3a \therefore a = \frac{4}{3}$

(2) হতে পাই, $b^2 = 4 \times \frac{4}{3} = \frac{16}{3}$

$\therefore$ অধিবৃত্তটির সমীকরণ $\frac{(x \pm \frac{4/3}{2})^2}{(4/3)^2} - \frac{y^2}{16/3} = 1$

$\Rightarrow \frac{(x \pm \frac{2}{3})^2}{16/9} - \frac{y^2}{16/3} = 1$

$\Rightarrow 9\frac{(3x \pm 2)^2}{9} - 3y^2 = 16$

$\therefore (3x \pm 2)^2 - 3y^2 = 16$

6(b) আড় অক্ষকে y - অক্ষ এবং একটি উপকেন্দ্রকে মূলবিন্দু ধরে অধিবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর যার দিকাক্ষ দুইটির মধ্যবর্তী দূরত্ব 6 একক এবং উপকেন্দ্র দুইটির মধ্যবর্তী দূরত্ব 12 একক।

সমাধান ঃ মনে করি, আড় অক্ষকে y-অক্ষ এবং একটি উপকেন্দ্রকে x-অক্ষ ধরে অধিবৃত্তের সমীকরণ

$\frac{(y \pm be)^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1 \cdots (1)$

(1) অধিবৃত্তের দিকাক্ষ দুইটির মধ্যবর্তী দূরত $\frac{2b}{e}$ একক এবং উপকেন্দ্র দুইটির মধ্যবর্তী দূরত্ব 2be একক।

$\therefore$ প্রশ্নমতে, $\frac{2b}{e} = 6 \cdots (2)$ এবং $2be = 12 \cdots (3)$

$\therefore (2) \times (3) \Rightarrow 4b^2 = 72 \Rightarrow b^2 = 18$

$\Rightarrow b = 3\sqrt{2}$

$(3) \div (2) \Rightarrow e^2 = 2 \Rightarrow e = \sqrt{2}$

এখন, $a^2 = b^2(e^2 - 1) = 18(2 - 1) = 18$

$\therefore$ অধিবৃত্তটির সমীকরণ,

$\frac{(y \pm 3\sqrt{2} \times \sqrt{2})^2}{18} - \frac{x^2}{18} = 1$

$\therefore (y \pm 6)^2 - x^2 = 18$ (Ans.)

6(c) একটি দিকাক্ষকে x -অক্ষ এবং আড় অক্ষকে y-অক্ষ ধরে অধিবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর যার উৎকেন্দ্রিকতা $\frac{5}{4}$ এবং আড় অক্ষের দৈর্ঘ্য 8 একক।

সমাধান ঃ মনে করি, একটি দিকাক্ষকে x -অক্ষ এবং আড় অক্ষকে y-অক্ষ ধরে অধিবৃত্তের সমীকরণ

$\frac{(y \pm \frac{b}{e})^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1 \cdots (1)$

(1) অধিবৃত্তের উৎকেন্দ্রিকতা $e = \frac{5}{4}$ এবং উপকেন্দ্র দুইটির মধ্যবর্তী দূরত্ব $2b = 8 \therefore b = 4$

এখন, $a^2 = b^2(e^2 - 1) = 16(\frac{25}{16} - 1) = 9$

$\therefore$ অধিবৃত্তটির সমীকরণ,

$\frac{(y \pm \frac{4}{5/4})^2}{16} - \frac{x^2}{9} = 1$

$\therefore \frac{(y \pm 16/5)^2}{16} - \frac{x^2}{9} = 1$ (Ans.)

7(a) $25x^2 - 16y^2 = 400$ অধিবৃত্তের একটি জ্যা এর সমীকরণ নির্ণয় কর যার মধ্যবিন্দুর স্থানাঙ্ক (5, 3).

সমাধান ঃ $25x^2 - 16y^2 = 400$ অধিবৃত্তের যে জ্যা এর মধ্যবিন্দুর স্থানাঙ্ক (5, 3) তার সমীকরণ,

$25(x.5) - 16(y.3) = 25.5^2 - 16.3^2$

[$xx_1 + yy_1 = x_1^2 + y_1^2$ সূত্রের সাহায্যে]

$\Rightarrow 125x - 48y = 625 - 144$

$\therefore 125x - 48y = 481$ (Ans.)

7(b) $3x^2 - 2y^2 + 6 = 0$ অধিবৃত্তের (2 , 3) বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ $3x^2 - 2y^2 + 6 = 0$ অধিবৃত্তের (2 , 3) বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ $3(x \cdot 2) - 2(y \cdot 3) + 6 = 0$

$\Rightarrow 6x - 6y + 6 = 0 \therefore x - y + 1 = 0$

7(c) $y = k - 2x$ সরলরেখাটি $xy = 1$ বক্ররেখাকে স্পর্শ করলে k এর মান নির্ণয় কর।

সমাধান : $y = k - 2x \cdots \cdots (1)$ হতে y এর মান $xy = 1 \cdots \cdots (2)$ বক্ররেখায় বসিয়ে পাই,

$x(k - 2x) = 1 \Rightarrow kx - 2x^2 = 1$

$\Rightarrow 2x^2 - kx + 1 = 0 \cdots (3)$, যা x-এর একটি দ্বিঘাত সমীকরণ। অতএব, এ সমীকরণ থেকে x-এর দুইটি মান পাওয়া যাবে।

(1) রেখাটি (2) বক্ররেখাকে স্পর্শ করবে যদি x-এর মান দুইটি সমান হয়, অর্থাৎ (3) সমীকরণের নিশ্চায়ক শূন্য হয়।

$\therefore\ k^2 = 4.2.1 = 8 \Rightarrow k = \pm 2\sqrt{2}$ (Ans.)

7(d) $25x^2 - 16y^2 = 400$ অধিবৃত্তের অসীমতটদ্বয়ের অন্তর্ভুক্ত সূক্ষ্মকোণ নির্ণয় কর।

সমাধান : প্রদত্ত অধিবৃত্তের অসীমতটদ্বয়ের সমীকরণ,

$25x^2 - 16y^2 = 0 \Rightarrow 16y^2 = 25x^2$

$\Rightarrow y = \pm \frac{5}{4}x$

অসীমতটদ্বয়ের ঢাল, (ধরি) $m_1 = \frac{5}{4}$ ও $m_2 = -\frac{5}{4}$

$\therefore$ অসীমতটদ্বয়ের অন্তর্ভুক্ত সূক্ষ্মকোণ

$$= \tan^{-1}\left|\frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2}\right| = \tan^{-1}\left|\frac{\frac{5}{4} - (-\frac{5}{4})}{1 + \frac{5}{4}(-\frac{5}{4})}\right|$$

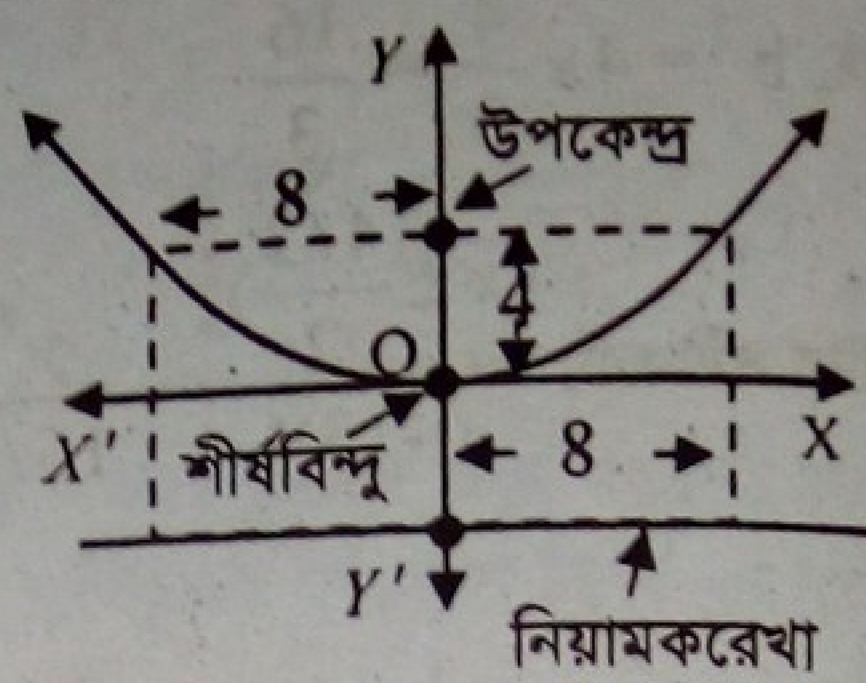
$$= \tan^{-1}\left|\frac{\frac{10}{4}}{\frac{16-25}{16}}\right| = \tan^{-1}\left|\frac{40}{-9}\right| = \tan^{-1}\frac{40}{9}$$

8. নিম্নলিখিত কণিকগুলির আকার কি হবে তা কারণসহ উল্লেখ কর। এদের স্কেচ অঙ্কন করে উপকেন্দ্র ও নিয়ামকরেখা চিহ্নিত কর।

(a) $x^2 = 16y = 4.4.y$

প্রদত্ত সমীকরণে x^2 সম্বলিত পদ বিদ্যমান কিন্তু y^2 সম্বলিত পদ অনুপস্থিত। সুতরাং, ইহা একটি পরাবৃত্তের সমীকরণ।

নিম্নে ইহার স্কেচ অঙ্কন করে উপকেন্দ্র ও নিয়ামকরেখা চিহ্নিত করা হলো :



8(b) $y^2 = 4y + 4x - 16$

$\Rightarrow\ y^2 - 4y = -4x - 16$

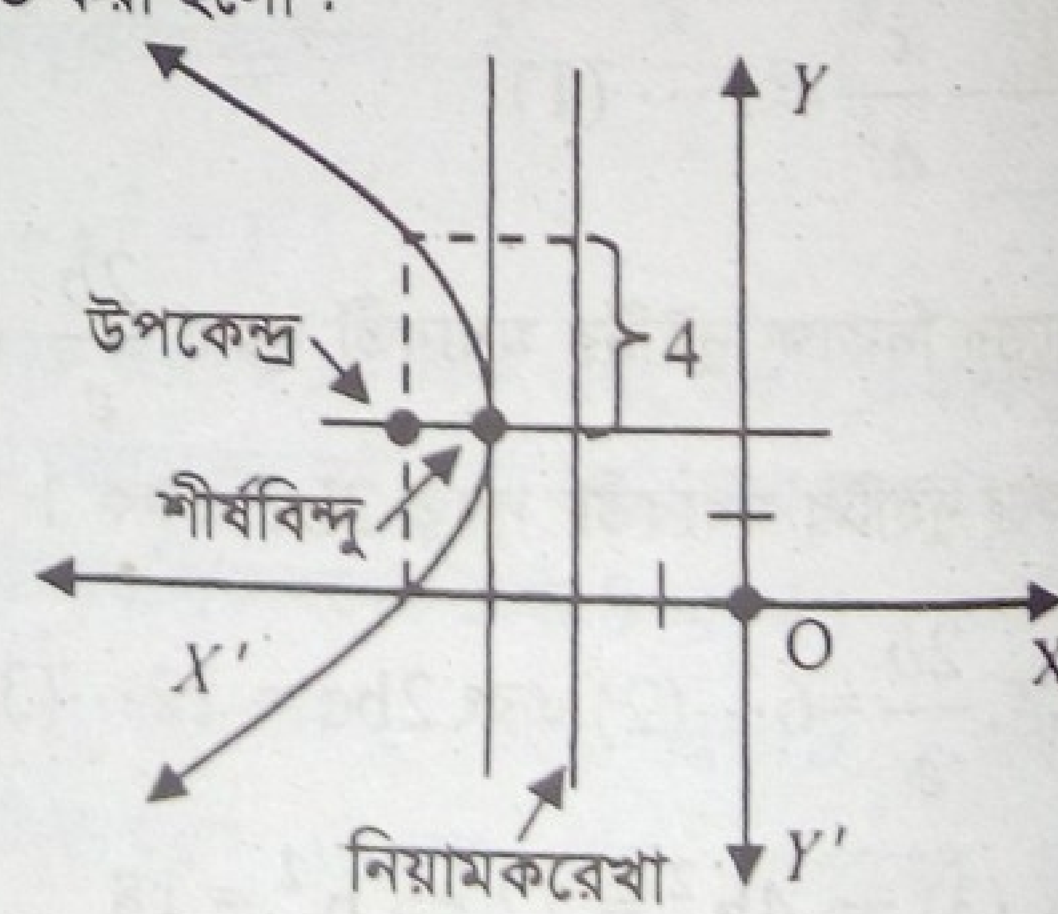
$\Rightarrow\ (y-2)^2 = -4x - 16 + 4$

$\Rightarrow\ (y-2)^2 = -4(x+3)$

$\Rightarrow\ (y-2)^2 = 4(-1)(x+3)$

প্রদত্ত সমীকরণে y^2 সম্বলিত পদ বিদ্যমান কিন্তু x^2 সম্বলিত পদ অনুপস্থিত। সুতরাং, ইহা একটি পরাবৃত্তের সমীকরণ।

নিম্নে ইহার স্কেচ অঙ্কন করে উপকেন্দ্র ও নিয়ামকরেখা চিহ্নিত করা হলো :



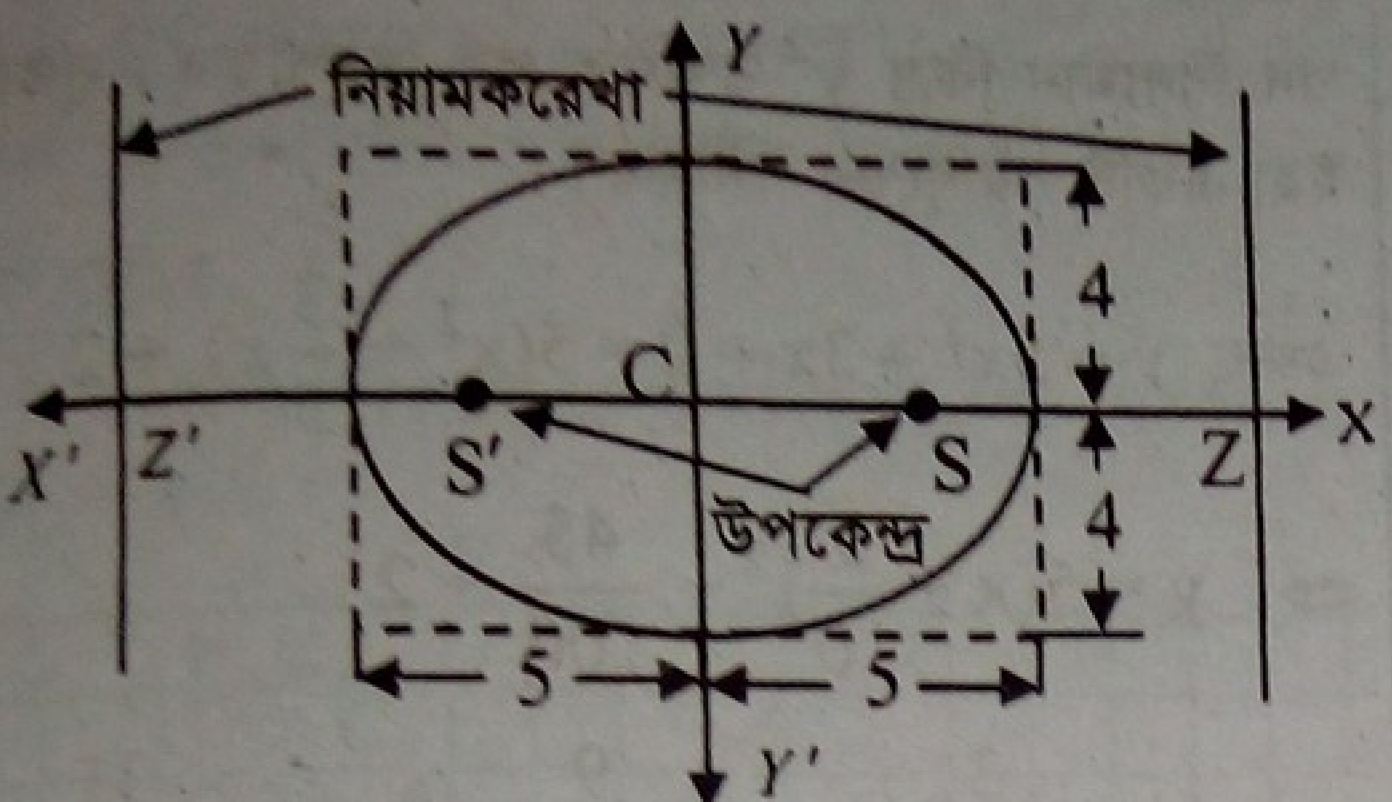
8(c) $16x^2 + 25y^2 = 400$

$\Rightarrow\ \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{5^2} + \frac{y^2}{4^2} = 1$

প্রদত্ত সমীকরণে x^2 ও y^2 সম্বলিত পদ বিদ্যমান। x^2 ও y^2 এর সহগ অসমান ও অভিন্ন চিহ্নযুক্ত। সুতরাং, ইহা একটি উপবৃত্তের সমীকরণ।

নিম্নে ইহার স্কেচ অঙ্কন করে উপকেন্দ্র ও নিয়ামকরেখা

চিহ্নিত করা হলো :



এখনে, $CS = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{25-16} = 3$ একক

এবং $CZ = \dfrac{a^2}{\sqrt{a^2-b^2}} = \dfrac{25}{3} = 8\dfrac{1}{3}$ একক

8(d) $9x^2 + 108x + 25y^2 - 150y + 324 = 0$

$\Rightarrow 9(x^2 + 12x + 6^2) - 324 +$
$25(y^2 - 6y + 3^2) - 225 + 324 = 0$

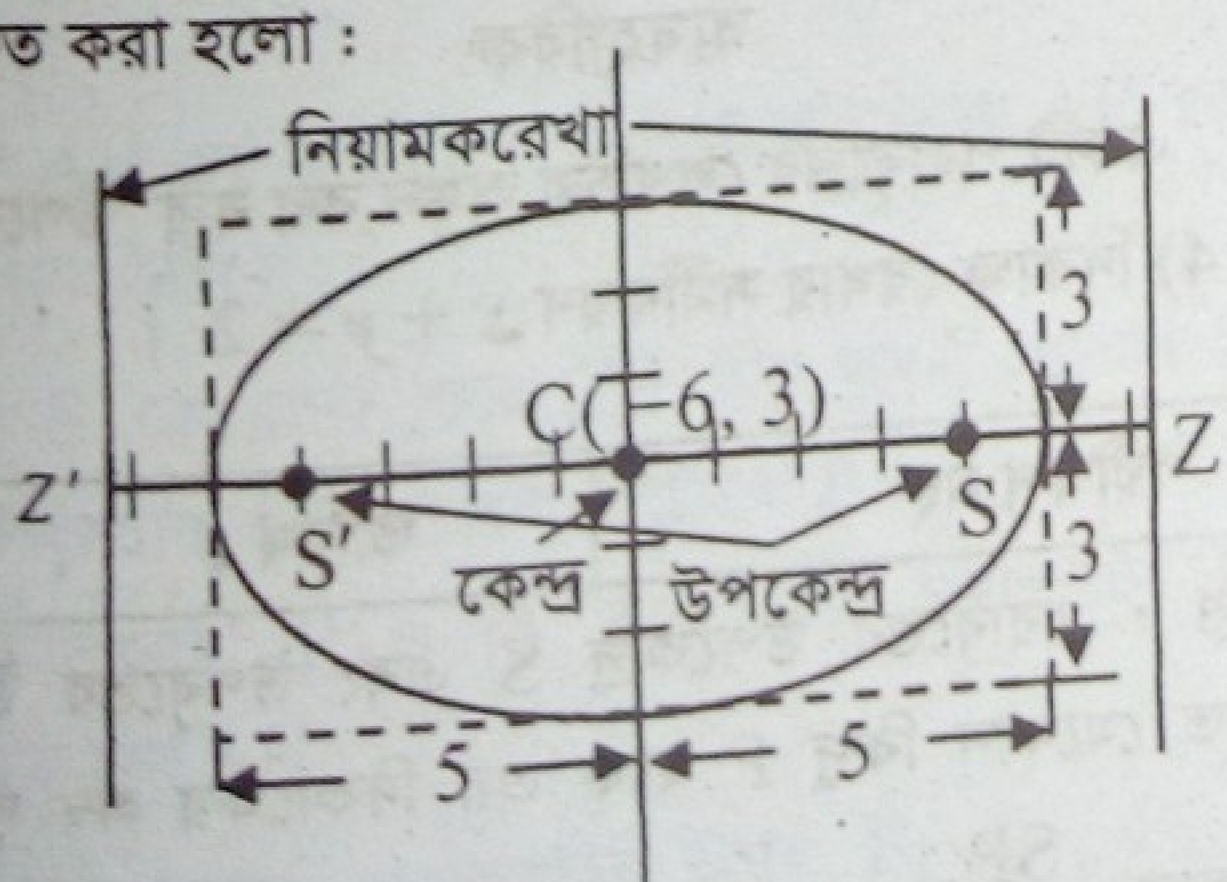
$\Rightarrow 9(x+6)^2 + 25(y-3)^2 = 225$

$\Rightarrow \dfrac{(x+6)^2}{25} + \dfrac{(y-3)^2}{9} = 1$

$\Rightarrow \dfrac{(x+6)^2}{5^2} + \dfrac{(y-3)^2}{3^2} = 1$

প্রদত্ত সমীকরণে x^2 ও y^2 সম্বলিত পদ বিদ্যমান। x^2 ও y^2 এর সহগ অসমান ও অভিন্ন চিহ্নযুক্ত । সুতরাং, ইহা একটি উপবৃত্তের সমীকরণ।

নিম্নে ইহার স্কেচ অঙ্কন করে উপকেন্দ্র ও নিয়ামকরেখা চিহ্নিত করা হলো :



এখনে, $CS = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{25-9} = 4$ একক এবং

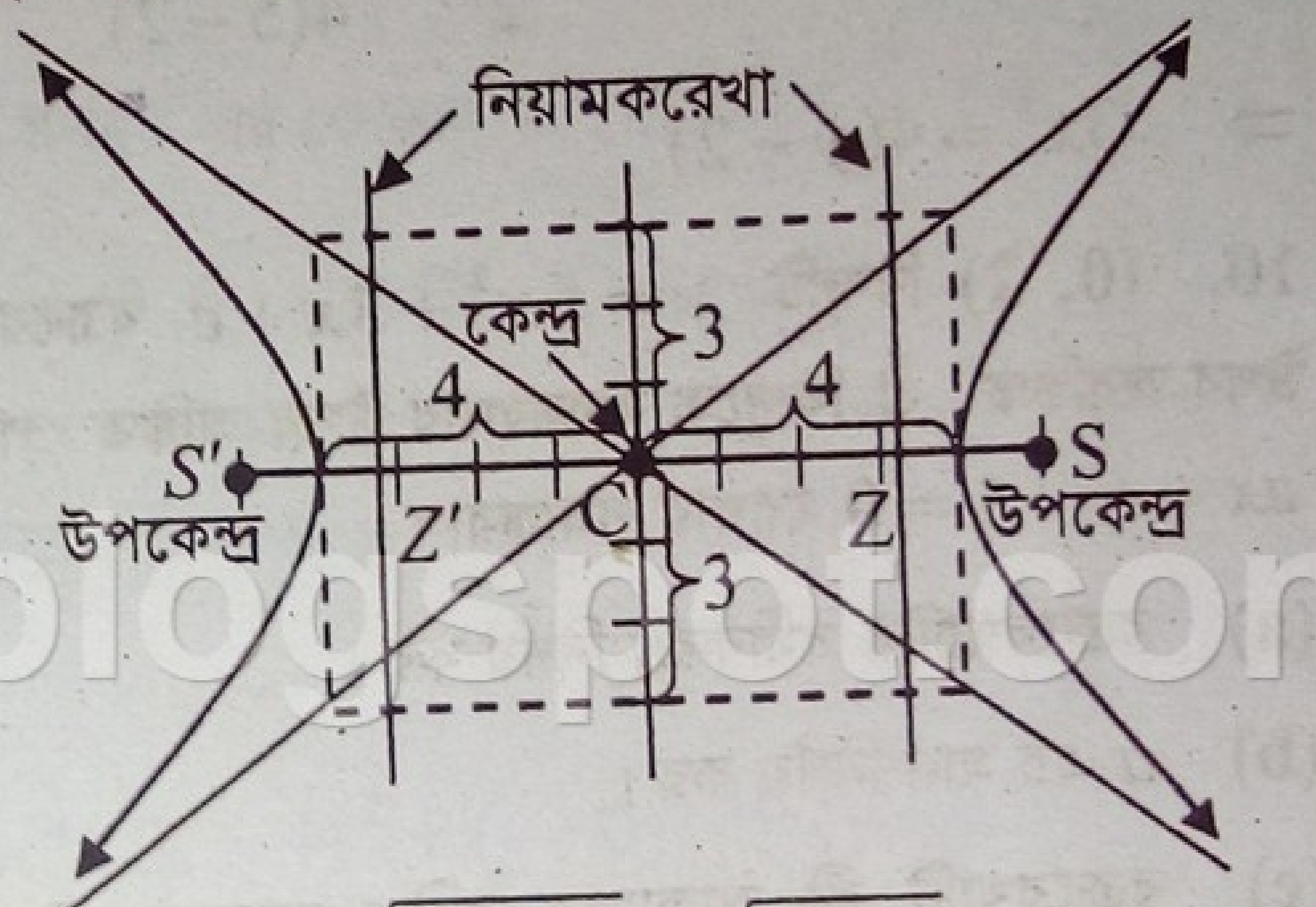
$CZ = \dfrac{a^2}{\sqrt{a^2-b^2}} = \dfrac{25}{4} = 6\cdot 25$ একক

8(e) $9x^2 - 16y^2 = 144$

$\Rightarrow \dfrac{x^2}{16} - \dfrac{y^2}{9} = 1 \Rightarrow \dfrac{x^2}{4^2} - \dfrac{y^2}{3^2} = 1$

প্রদত্ত সমীকরণে x^2 ও y^2 সম্বলিত পদ বিদ্যমান। x^2 ও y^2 এর সহগ অসমান ও ভিন্ন চিহ্নযুক্ত । সুতরাং, ইহা একটি অধিবৃত্তের সমীকরণ।

নিম্নে ইহার স্কেচ অঙ্কন করে উপকেন্দ্র ও নিয়ামকরেখা চিহ্নিত করা হলো :



এখনে, $CS = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{16+9} = 5$ একক এবং

$CZ = \dfrac{a^2}{\sqrt{a^2+b^2}} = \dfrac{16}{5} = 3\dfrac{1}{5}$ একক।

9(a) $11x^2 + 14y^2 - 4xy - 48x - 24y + 66 = 0$ একটি- **[BUET'11-12]**

A. বৃত্ত B. পরাবৃত্ত C. উপবৃত্ত D. অধিবৃত্ত

সমাধান : প্রদত্ত সমীকরণে x^2 ও y^2 সম্বলিত পদ বিদ্যমান। x^2 ও y^2 এর সহগ অসমান ও অভিন্ন চিহ্নযুক্ত । সুতরাং, ইহা একটি উপবৃত্তের সমীকরণ।

9(b) কোনো উপবৃত্তের উপকেন্দ্রিক লম্ব এর বৃহদাক্ষের অর্ধেক। এর উৎকেন্দ্রিকতা হলো- **[Textile'12-13]**

A. $\dfrac{1}{2}$ B. $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ C. 2 D. $\sqrt{2}$

সমাধান : এখানে, $\frac{2b^2}{a} = a \Rightarrow a^2 = 2b^2$

$$\therefore \quad e = \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{a^2}} = \sqrt{\frac{2b^2 - b^2}{2b^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

9(c) একটি পরাবৃত্তের শীর্ষবিন্দু (0,2), অক্ষরেখা y অক্ষের সমান্তরাল এবং যা (2, 5) বিন্দু দিয়ে অতিক্রম করে, তার সমীকরণ হলো- **[SUST'12-13]**

A. $4x^2 = 3(y-2)$ B. $3x^2 = 12(y-2)$

C. $3x^2 = 4(y-2)$ D. $2x^2 = 3(y-2)$

সমাধান : পরাবৃত্তের সমীকরণ, $\frac{x^2}{2^2} = \frac{4(y-2)}{4(5-2)}$

$$\Rightarrow \quad 3x^2 = 4(y-2)$$

10. (0, 2) বিন্দুটি $y = 5x^2 + 3x + c$ বক্ররেখার উপর অবস্থিত। ঐ বিন্দুতে বক্ররেখার উপর অঙ্কিত স্পর্শক $ax + cy + 1 = 0$ রেখার সমান্তরাল।

(a) বক্ররেখাটির সমীকরণ নির্ণয় কর।

(b) a এর মান নির্ণয় কর।

(c) বক্ররেখাটি কী আকারের কণিক কারণসহ উল্লেখ করে এর শীর্ষবিন্দু ও উপকেন্দ্রের স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

সমাধান : **(a)** দেওয়া আছে, (0, 2) বিন্দুটি $y = 5x^2 + 3x + c$ বক্ররেখার উপর অবস্থিত।

$$\therefore \quad 2 = 5\times 0 + 3\times 0 + c \Rightarrow c = 2$$

$\therefore$ বক্ররেখাটির সমীকরণ, $y = 5x^2 + 3x + 2$

10(b) (0, 2) বিন্দুটিতে $y = 5x^2 + 3x + 2$ বক্ররেখার উপর অঙ্কিত স্পর্শকের সমীকরণ,

$$\frac{1}{2}(y+2) = 5\times x\times 0 + \frac{3}{2}(x+0) + 2$$

$\Rightarrow y + 2 = 3x + 4 \Rightarrow 3x - y + 2 = 0$; যা $ax + cy + 1 = 0$ রেখার সমান্তরাল।

$$\therefore \quad \frac{a}{3} = \frac{c}{-1} \Rightarrow \frac{a}{3} = \frac{2}{-1} \Rightarrow a = -6$$

10(c) $y = 5x^2 + 3x + 2$ সমীকরণে x^2 সম্বলিত পদ বিদ্যমান কিন্তু y^2 সম্বলিত পদ অনুপস্থিত। সুতরাং, ইহা একটি পরাবৃত্তের সমীকরণ।

এখন, $y = 5x^2 + 3x + 2 = 5(x^2 + \frac{3}{5}x) + 2$

$$\Rightarrow \quad y = 5(x + \frac{3}{10})^2 - \frac{45}{100} + 2$$

$$\Rightarrow \quad 5(x + \frac{3}{10})^2 = y + \frac{9}{20} - 2 = y - \frac{31}{20}$$

$$\Rightarrow \quad (x + \frac{3}{10})^2 = \frac{1}{5}(y - \frac{31}{20})$$

$$\Rightarrow \quad (x + \frac{3}{10})^2 = 4.\frac{1}{20}(y - \frac{31}{20})$$

ইহাকে পরাবৃত্তের সাধারণ সমীকরণ $(x + \alpha)^2 = 4a(y + \beta)$ এর সাথে তুলনা করে পাই,

$a = \frac{1}{20}$, $\alpha = -\frac{3}{10}$ এবং $\beta = \frac{31}{20}$

$\therefore$ কেন্দ্রের স্থানাঙ্ক $(\alpha, \beta) = (-\frac{3}{4}, \frac{31}{20})$

উপকেন্দ্রের স্থানাঙ্ক $= (\alpha, -a + \beta)$

$$= (-\frac{3}{10}, \frac{1}{20} + \frac{31}{20}) = (-\frac{3}{10}, \frac{32}{20})$$

$\therefore$ উপকেন্দ্রের স্থানাঙ্ক $= (-\frac{3}{10}, \frac{8}{5})$

ব্যবহারিক

1. একটি পরাবৃত্তের লেখচিত্র অঙ্কন কর যার উপকেন্দ্র (3 , 4) দিকাক্ষ রেখার সমীকরণ $x + y = 2$ ।

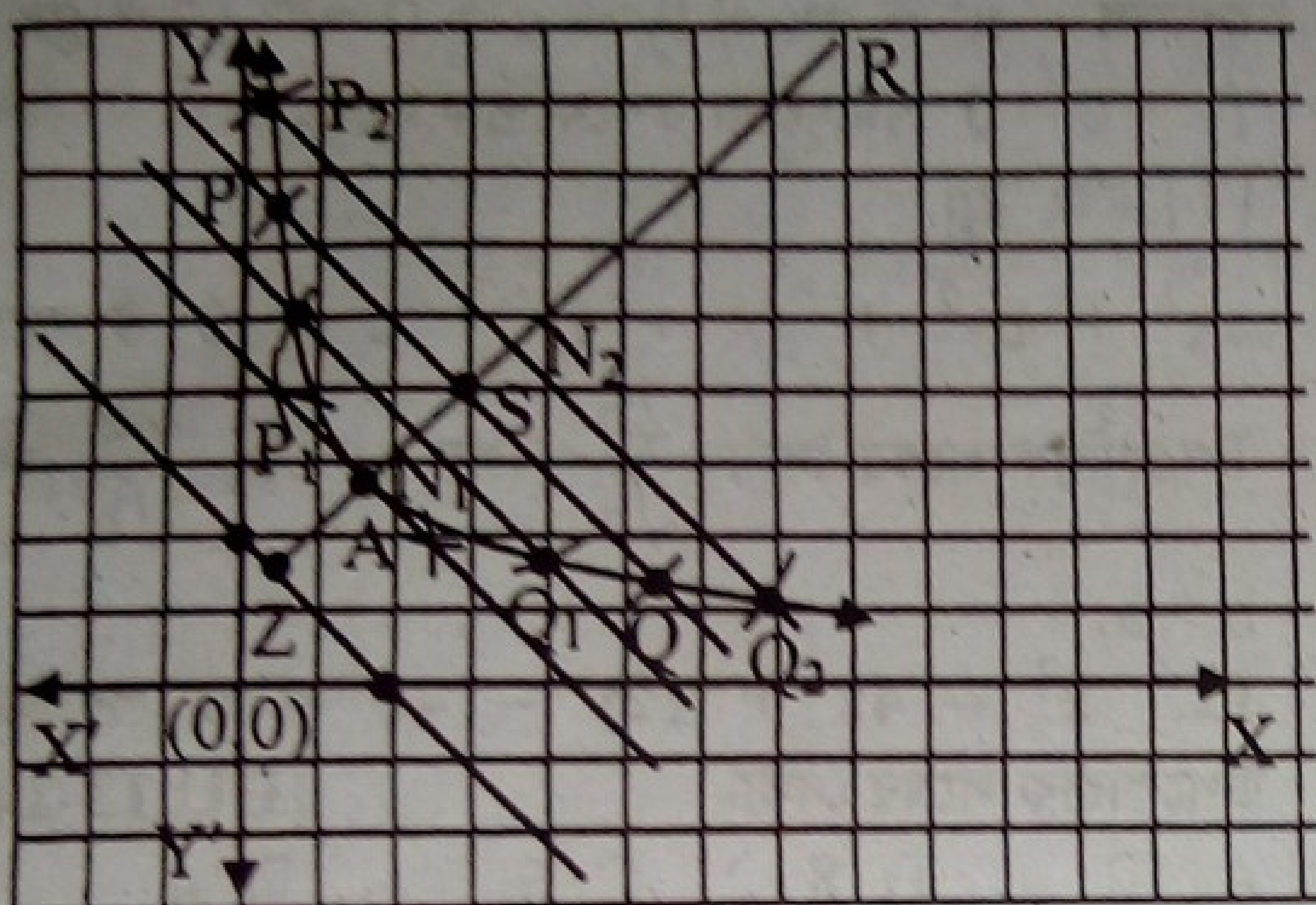
পরীক্ষণ নং	তারিখ :

মূলতত্ত্ব : পরাবৃত্তের উপকেন্দ্র S এবং উপবৃত্তের উপর অবস্থিত যেকোন বিন্দু P হতে এর দিকাক্ষের লম্ব দূরত্ব PM হলে, $\frac{SP}{PM} = 1 \Rightarrow SP = PM.$

প্রয়োজনীয় উপকরণ ঃ (i) পেন্সিল (ii) স্কেল (iii) গ্রাফ পেপার (iv) ইরেজার (v) শার্পনার (vi) চাঁদা (vii) পেন্সিল কম্পাস (viii) ক্যালকুলেটর ইত্যাদি।

কার্যপদ্ধতি ঃ

1. একটি ছক কাগজে স্থানাঙ্কের অক্ষ রেখা $X'OX$ ও YOY' আঁকি।



2. x-অক্ষ ও y- অক্ষ বরাবর ছোট বর্গের 1 বাহু = 1 একক ধরে পরাবৃত্তের উপকেন্দ্র S (3, 4) ছক কাগজে স্থাপন করি।

3. x-অক্ষের সমান্তরাল পরাবৃত্তের নিয়ামকরেখা $MM' \equiv x + y = 2$ আঁকি।

4. S বিন্দুগামী এবং দিকাক্ষ রেখার উপর লম্বরেখা ZR টানি যেন ZR রেখা MM' রেখাকে Z বিন্দুতে ছেদ করে।

5. ZS এর মধ্যবিন্দু A নির্ণয় করি যা পরাবৃত্তের শীর্ষ।

6. AR এর উপরিস্থিত S এর মধ্য দিয়ে AR রেখার উপর লম্ব টানি।

7. S কে কেন্দ্র করে ZS এর সমান ব্যাসার্ধ নিয়ে একটি বৃত্তচাপ আঁকি যা লম্বরেখাটিকে P ও Q বিন্দুতে ছেদ করে। সুতরাং, P ও Q বিন্দু দুইটি পরাবৃত্তটির উপর অবস্থিত হবে।

8. অনুরূপভাবে, পরাবৃত্তটির উপর P_1, Q_1, P_2, Q_2 ,...... ইত্যাটি বিন্দু নির্ধারণ করা যায়। বিন্দুগুলো মুক্ত হস্তে বক্রাকারে যোগ করে পরাবৃত্তটির লেখচিত্র অঙ্কন করি।

ভর্তি পরীক্ষার MCQ :

1. $3(x-1)^2 + 4y^2 = 12$ সমীকরণটি কি বর্ণনা করে ? [DU 98-99]

A. বৃত্ত যার কেন্দ্র (1, 0)

B. প্যারাবোলা যার শীর্ষ (1 , 0)

C. উপবৃত্ত যার ফোকাস (1 , 0)

D. উপবৃত্ত যার ফোকাস (0 , 0)

$Sol^n : \frac{(x-1)^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1, e = \sqrt{\frac{4-3}{4}} = \frac{1}{2}$

$\therefore$ উপবৃত্ত যার ফোকাস = $(\pm 2\frac{1}{2} + 1 , 0)$

$\therefore$ = (0 ,0) এবং (2, 0) . Ans. D

2. যে পরাবৃত্তের উপকেন্দ্রের স্থানাঙ্ক (4, 0) এবং নিয়ামক(দিকাক্ষ) $x + 2 = 0$ তার সমীকরণ – [DU 08-09]

$Sol^n : (x-4)^2 + (y-0)^2 = \frac{(x+2)^2}{1^2}$

$\Rightarrow x^2 - 8x + 16 + y^2 = x^2 + 4x + 4$

$\therefore y^2 = 12(x-1)$

3. $2x = y^2 + 8y + 22$ পরাবৃত্তটির শীর্ষ বিন্দুর স্থানাঙ্ক - [DU 07-08]

$Sol^n : (y+4)^2 = 2x - 22 + 16 = 2(x-3)$

$\therefore$ শীর্ষ বিন্দুর স্থানাঙ্ক (3, – 4)

4. $y^2 = 4x + 8y$ পরাবৃত্তটির শীর্ষ - [DU 01-02, 99-00, 96-97, 95-96]

$Sol^n : y^2 - 8y + 16 = 4x + 16$

$\Rightarrow (y-4)^2 = 4(x+4)$

$\therefore$ শীর্ষ বিন্দু (– 4 , 4)

5. $y^2 - 4y - 4x + 16 = 0$ পরাবৃত্তের উপকেন্দ্রের স্থানাঙ্ক - (DU 01-02]

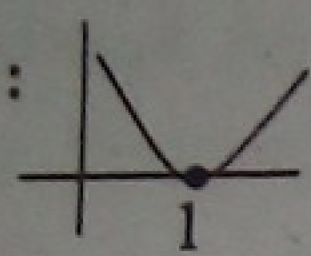
Solⁿ : $y^2 - 4y + 4 = 4x - 12$

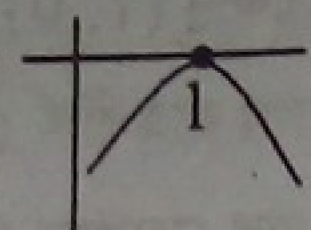
$\Rightarrow (y-2)^2 = 4.1.(x-3)$

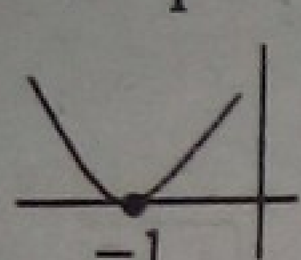
$\therefore$ উপকেন্দ্রের স্থানাঙ্ক $= (3+1, 2) = (4, 2)$

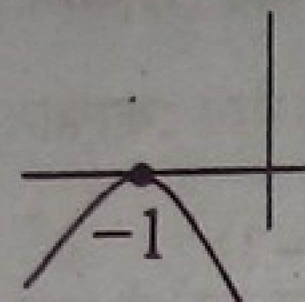
6. নিচের কোনটি $y = -(x-1)^2$ এর লেখচিত্র – [DU 02-03]

Solⁿ :

A. 

B. 

C. 

D. 

Solⁿ : পরাবৃত্তটির শীর্ষ (1, 0) এবং a ঋণাত্মক বলে ইহা অক্ষের নীচে অবস্থান করবে? Ans. B

7. $y^2 = 9x$ পরাবৃত্তের (4,6) বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ– [NU 08-09]

Solⁿ : $y.6 = \frac{9}{2}(x+4) \Rightarrow 4y = 3x + 12$

$\therefore 3x - 4y + 12 = 0$

8. সরলরেখা $y = kx - 1$ বক্ররেখা $y = x^2 + 3$ এর স্পর্শক হবে যদি k এর মান– [DU;NU 07-09]

Solⁿ : $y = kx - 1 = x^2 + 3$

$\Rightarrow x^2 - kx + 4 = 0 \therefore D = k^2 - 4.1.4 = 0$

$\therefore k = \pm 4$

9. $y = 2x + b$ রেখাটি $y^2 = 16x$ প্যারাবোলাকে স্পর্শ করে তবে b = ? [DU 96-97]

Solⁿ : $c = \frac{a}{m}$ সূত্রের সাহায্যে, $b = \frac{4}{2} = 2$

10. $\frac{(x-4)^2}{64} + \frac{(y+2)^2}{100} = 1$ উপবৃত্তের উৎকেন্দ্রিকতা- [DU 07-08, 05-06, 97-98; NU 08-09, 06-07]

Solⁿ : $e = \sqrt{\frac{100-64}{100}} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$

11. xy = 2 কোনটির সমীকরণ – [SU 08-09]

A. সরলরেখা B. বৃত্ত C. উপবৃত্ত D. অধিবৃত্ত

Solⁿ : এখানে $h = \frac{1}{2}, a = 0, b = 0$

$h^2 = \frac{1}{4} > ab$; সমীকরণটি উপবৃত্ত।

কৌশল : $x^2 + gx + fy + c = 0$ এবং $y^2 + gx + fy + c = 0$ পরাবৃত্তের উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য যথাক্রমে $|f|$ এবং $|g|$.

$ax^2 + by^2 + gx + fy + c = 0$ উপবৃত্তের উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য $\frac{2b}{\sqrt{a}}$, যখন $a > b$; $\frac{2a}{\sqrt{b}}$, যখন $b > a$.

12. $x^2 - 4x + 12y - 40 = 0$ পরাবৃত্তের উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য- [DU 13-14]

A. 12 B. 8 C. 6 D. 4

Solⁿ : উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য = | y এর সহগ | = 12

[$\because$ পরাবৃত্তের সমীকরণে y^2 অনুপস্থিত।]

13. $25x^2 + 16y^2 = 400$ উপবৃত্তটির উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য কত? [Textile 13-14]

A. $\frac{7}{30}$ B. $\frac{32}{5}$ C. $\frac{5}{32}$ D. $\frac{30}{7}$

Solⁿ : উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য $= \frac{2a}{\sqrt{b}} = \frac{2 \times 16}{\sqrt{25}}$

$= \frac{32}{5}$