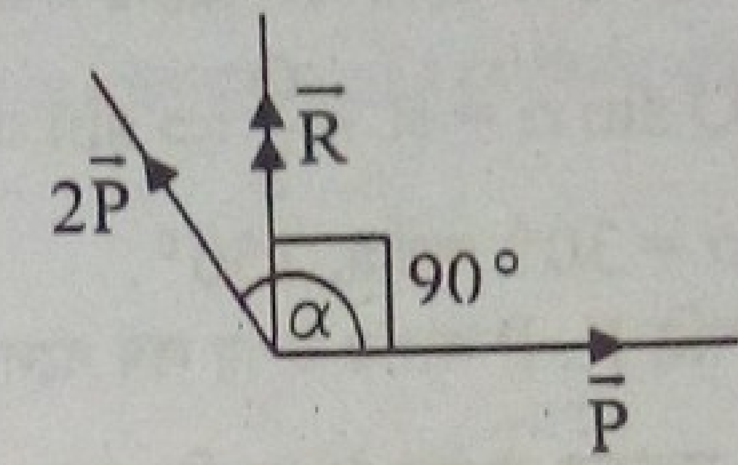
## প্রশ্নমালা VIII A

**1(a) কোনো বিন্দুতে ক্রিয়ারত P ও 2P বলদ্বয়ের লব্ধি R যদি P এর ক্রিয়ারেখার উপর লম্ব হয় তবে বলদ্বয়ের মধ্যবর্তী কোণ নির্ণয় কর।**

[ টেক্সটাইল'১২-১৩]

**সমাধান ঃ পদ্ধতি -১ ঃ** মনে করি, বলদ্বয়ের মধ্যবর্তী কোণ $\alpha$ ।

P এর দিক বরাবর লম্বাংশ নিয়ে পাই, $P\cos 0° + 2P\cos\alpha = R\cos 90°$




$\Rightarrow P + 2P\cos\alpha = 0 \Rightarrow \cos\alpha = -\frac{1}{2} = \cos 120° \Rightarrow \alpha = 120°$

$\therefore$ বলদ্বয়ের মধ্যবর্তী কোণ $120°$ ।

**পদ্ধতি-২ ঃ** মনে করি, বলদ্বয়ের মধ্যবর্তী কোণ $\alpha$ । $\vec{P}$ এবং $2\vec{P}$ বলদ্বয়ের লব্ধি $\vec{R}$ বলে, $\vec{R} = \vec{P} + 2\vec{P}$

$\therefore \vec{R}\cdot\vec{P} = (\vec{P} + 2\vec{P})\cdot\vec{P} \Rightarrow RP\cos 90° = P^2 + P.2P\cos\alpha$

$\Rightarrow 0 = P^2 + 2P^2\cos\alpha \Rightarrow \cos\alpha = -\frac{1}{2} = \cos 120° \Rightarrow \alpha = 120°$ $\therefore$ বলদ্বয়ের মধ্যবর্তী কোণ $120°$ ।

**পদ্ধতি-৩ ঃ** মনে করি, বলদ্বয়ের মধ্যবর্তী কোণ $\alpha$ ।

শর্তানুসারে, $\tan 90° = \frac{2P\sin\alpha}{P + 2P\cos\alpha} \Rightarrow \cot 90° = \frac{P + 2P\cos\alpha}{2P\sin\alpha} \Rightarrow 0 = \frac{1 + 2\cos\alpha}{2\sin\alpha}$

$\Rightarrow \cos\alpha = -\frac{1}{2} = \cos 120° \Rightarrow \alpha = 120°$ $\therefore$ বলদ্বয়ের মধ্যবর্তী কোণ $120°$ ।

**1(b) একটি বিন্দুতে ক্রিয়ারত P ও 13 N বল দুইটির লব্ধি 12 N যার ক্রিয়ারেখা P এর সাথে 90° কোণ উৎপন্ন করে। P এর মান নির্ণয় কর।**



**সমাধান ঃ** মনে করি, বলদ্বয়ের মধ্যবর্তী কোণ $\alpha$ ।

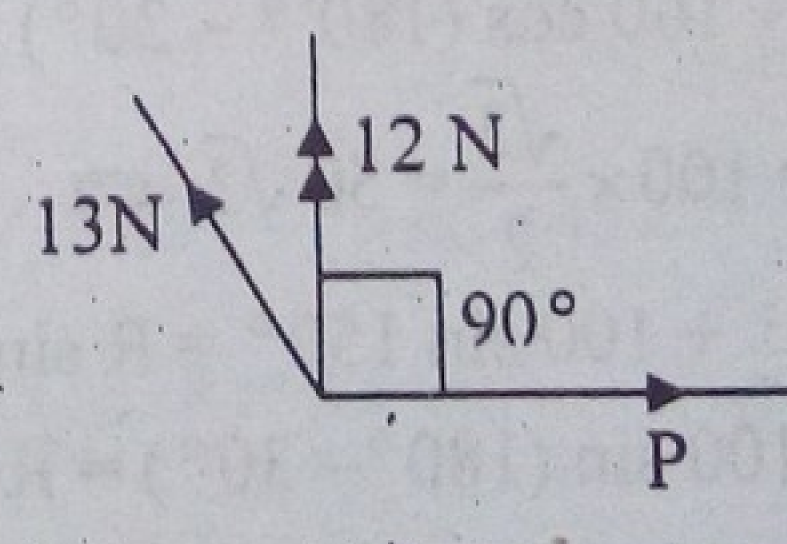
P এর দিক বরাবর লম্বাংশ নিয়ে পাই, $P\cos 0° + 13\cos\alpha = 12\cos 90°$

$\Rightarrow P + 13\cos\alpha = 12\times 0 \Rightarrow \cos\alpha = -P/13$

এখন, $(12)^2 = P^2 + (13)^2 + 2.P.13\cos\alpha \Rightarrow 144 = P^2 + 169 + 26.P(-P/13)$

$\Rightarrow 144 = P^2 + 169 - 2.P^2 \Rightarrow P^2 = 169 - 144 = 25 \quad \therefore P = 5\,N$

**বিকল্প পদ্ধতি ঃ** $Q^2 = P^2 + R^2 - 2PR\cos\theta$ সূত্র প্রয়োগ করে পাই,




$13^2 = P^2 + 12^2 - 2P\times 12\times\cos 90^0$

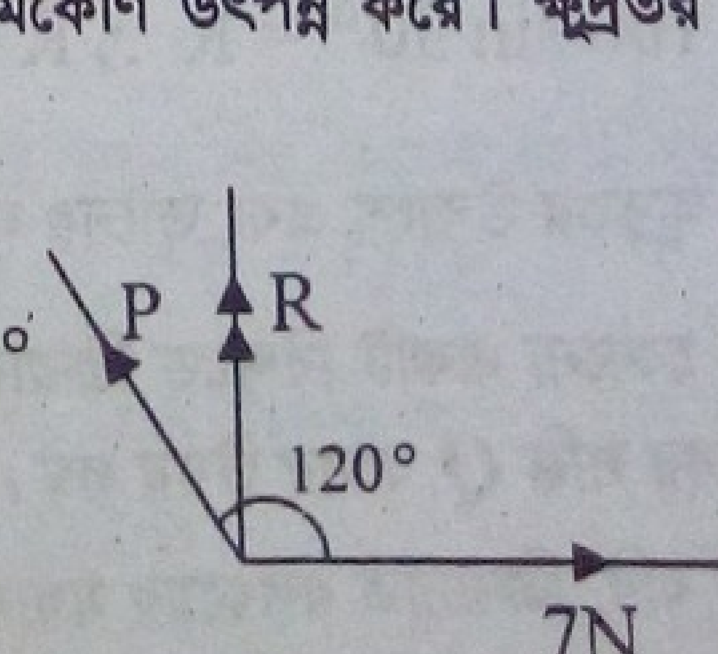
$\Rightarrow 169 = P^2 + 144 - 24\times 0$

$\Rightarrow P^2 = 169 - 144 = 25 \quad \therefore P = 5\,N$

**1(c) কোনো বিন্দুতে 120° কোণে ক্রিয়াশীল দুইটি বলের লব্ধি ক্ষুদ্রতর বলের সাথে সমকোণ উৎপন্ন করে। ক্ষুদ্রতর বলটির মান 7N হলে বৃহত্তর বলটির মান নির্ণয় কর।**

**সমাধান ঃ** ধরি, বৃহত্তর বলটির মান P নিউটন এবং তাদের লব্ধির মান R নিউটন ।

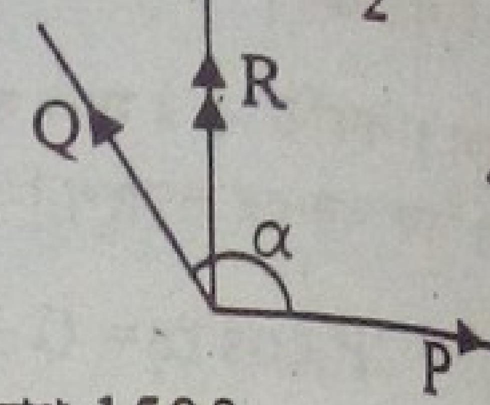
ক্ষুদ্রতর বলটির দিক বরাবর লম্বাংশ নিয়ে পাই, $7\cos 0° + P\cos 120° = R\cos 90°$




$\Rightarrow 7 + P\times(-\frac{1}{2}) = 0 \Rightarrow P = 14$ $\therefore$ বৃহত্তর বলটির মান 14 নিউটন।

**1(d) একটি কণার উপর ক্রিয়ারত দুইটি বলের লব্ধি একটি বলের উপর লম্ব এবং এর মান অপরটির অর্ধেকের সমান। দেখাও যে, তাদের মধ্যবর্তী কোণ $150°$.**

সমাধান ঃ মনে করি, পরস্পর $\alpha$ কোণে ক্রিয়ারত P ও Q বলের লব্ধি R , যা P বলের উপর লম্ব। তাহলে, $R = \frac{Q}{2}$.




চ বলের দিকের উপর লম্ব বরাবর লম্বাংশ নিয়ে পাই, $P \sin 0° + Q\sin\alpha = R\sin 90°$

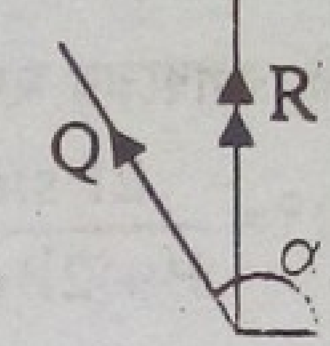
$\Rightarrow Q\sin\alpha = R = \frac{Q}{2} \Rightarrow \sin\alpha = \frac{1}{2} = \sin 30° = \sin(180° - 30°)$

$\therefore \alpha = 30°$ অথবা, $150°$.

কিন্তু লব্ধি R, P বলের উপর লম্ব বলে $\alpha = 30°$ হতে পারে না । সুতরাং, বলদ্বয়ের মধ্যবর্তী কোণ $150°$.

**1(e) কোনো কণার উপর ক্রিয়ারত দুইটি বলের লব্ধি একটি বলের উপর লম্ব এবং এর মান অপরটির মানের এক তৃতীয়াংশের সমান। দেখাও যে, বল দুইটির অনুপাত $2\sqrt{2} : 3$.** [য.'১০; বুয়েট'১২-১৩]

প্রমাণঃ মনে করি, পরস্পর $\alpha$ কোণে ক্রিয়ারত চ ও Q বলের লব্ধি R , যা P বলের উপর লম্ব। তাহলে, $R = \frac{Q}{3}$.




P বলের দিক বরাবর লম্বাংশ নিয়ে পাই, $P\cos 0° + Q\cos\alpha = R\cos 90°$

$\Rightarrow P + Q\cos\alpha = 0 \Rightarrow Q\cos\alpha = -P \cdots\cdots$ (i)

আবার, $R^2 = P^2 + Q^2 + 2PQ\cos\alpha \Rightarrow (\frac{Q}{3})^2 = P^2 + Q^2 + 2P(-P)$

$\Rightarrow \frac{Q^2}{9} = Q^2 - P^2 \Rightarrow P^2 = Q^2 - \frac{Q^2}{9} = \frac{8Q^2}{9} \Rightarrow \frac{P^2}{Q^2} = \frac{8}{9} \Rightarrow \frac{P}{Q} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$

$\therefore$ বল দুইটির অনুপাত $= 2\sqrt{2} : 3$

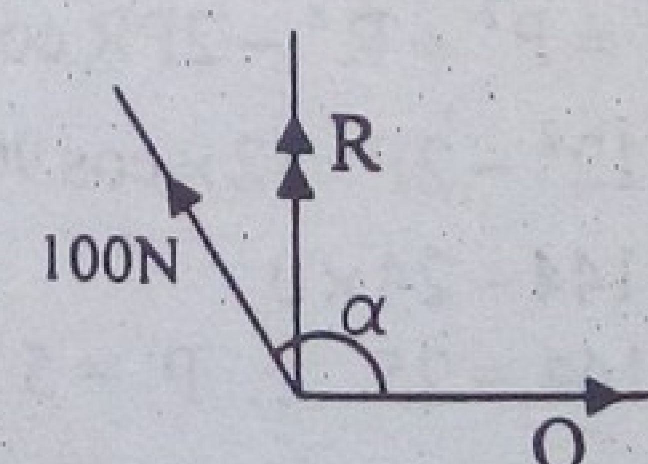


**1(f) কোন বিন্দুতে $150°$ কোণে ক্রিয়ারত দুইটি বলের লব্ধি ক্ষুদ্রতর উপাংশের উপর লম্ব। বৃহত্তর উপাংশের পরিমাণ 100N হলে ক্ষুদ্রতর উপাংশ এবং তাদের লব্ধির মান নির্ণয় কর।**

সমাধান ঃ মনে করি, ক্ষুদ্রতর উপাংশ এবং তাদের লব্ধির মান যথাক্রমে Q নিউটন এবং R নিউটন। তাহলে,
Q এর দিক এবং এর উপর লম্ব বরাবর লম্বাংশ নিয়ে পাই, $Q\cos 0° + 100\cos 150° = R\cos 90°$

$\Rightarrow Q + 100\cos(180° - 30°) = 0 \Rightarrow Q - 100\cos 30° = 0$

$\therefore Q = 100 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 50\sqrt{3}$ এবং




$Q\sin 0° + 100\sin 150° = R\sin 90°$

$\Rightarrow 0 + 100\sin(180° - 30°) = R \times 1$

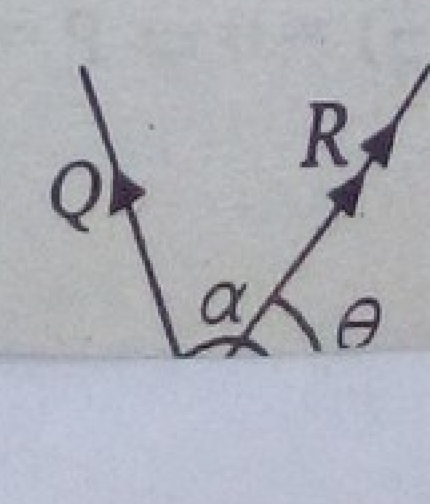
$\Rightarrow 100\sin 30° = R \;\therefore R = 100 \times \frac{1}{2} = 50$

$\therefore$ ক্ষুদ্রতর উপাংশ এবং তাদের লব্ধির মান যথাক্রমে $50\sqrt{3}$ N এবং 50 N .

**1(g) কোনো একটি বিন্দুতে ক্রিয়ারত P, Q দুটি বলের লব্ধি P হলে দেখাও যে, একই রেখা বরাবর ক্রিয়ারত 2P ও Q বলের লব্ধি Q বলের উপর লম্ব।**

প্রমাণ ঃ ধরি, ক্রিয়ারত বলদ্বয়ের মধ্যবর্তী কোণ $\alpha$.

১ম ক্ষেত্রে বলের সামান্তরিক সূত্র হতে পাই, $P^2 = P^2 + Q^2 + 2PQ\cos\alpha$



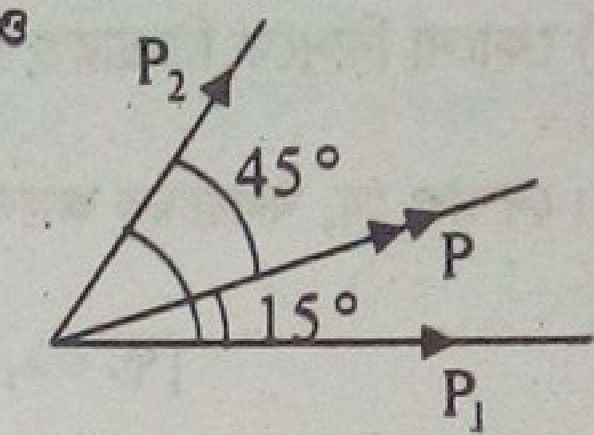
$\Rightarrow Q^2 + 2PQ\cos\alpha = 0 \Rightarrow Q + 2P\cos\alpha = 0,\ [\because Q \neq 0]$

২য় ক্ষেত্রে, ধরি 2P ও Q বলদ্বয়ের লব্ধি R, যা Q বলের সাথে $\theta$ কোণ উৎপন্ন করে। তাহলে, Q বলের দিক বরাবর লম্বাংশ নিয়ে পাই, $R\cos\theta = Q\cos 0° + 2P\cos\alpha = Q + 2P\cos\alpha = 0$

$\because\ R \neq 0,\ \cos\theta = 0 = \cos 90° \Rightarrow \theta = 90°$ $\therefore$ লব্ধি, Q বলের উপর লম্ব।

**2(a) P বলের উপাংশদ্বয় বিপরীত দিকে P এর সাথে 15° ও 45° কোণ উৎপন্ন করে। উপাংশদ্বয়ের মান নির্ণয় কর।**

**সমাধান ঃ** মনে করি, P বলের উপাংশদ্বয় $P_1$ ও $P_2$ বিপরীত দিকে P এর সাথে 15° ও 45° কোণ উৎপন্ন করে। তাহলে,




$$P_1 = \frac{P\sin 45^0}{\sin(15^0+45^0)} = \frac{P(1/\sqrt{2})}{\sin 60^0} = \frac{P(1/\sqrt{2})}{\sqrt{3}/2} = \frac{P}{\sqrt{2}} \times \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}P$$

এবং $$P_2 = \frac{P\sin 15^0}{\sin 60^0} = \frac{P(\sqrt{6}-\sqrt{2})/4}{\sqrt{3}/2} = \frac{P(\sqrt{6}-\sqrt{2})}{4} \times \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2\sqrt{3}}P$$

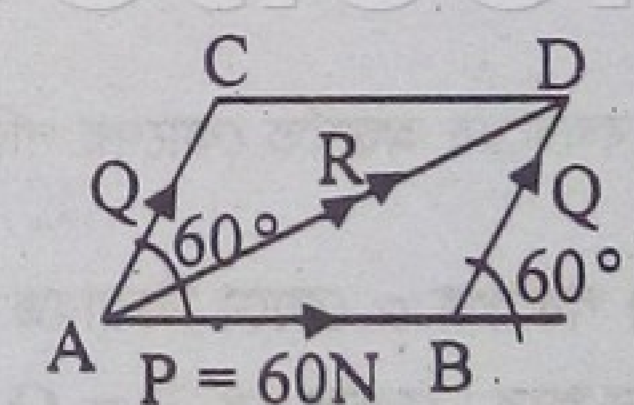
**2(b) A বিন্দুতে ক্রিয়াশীল $\overrightarrow{F_1}$ ও $\overrightarrow{F_2}$ বলদ্বয় যথাক্রমে $\overline{AB}$ ও $\overline{AC}$ দ্বারা প্রকাশিত। যদি $F_1 = 50$ N, $F_2 = 40$ N এবং $AB = 0{\cdot}5$ মিটার হয়, তবে AC এর মান নির্ণয় কর।**

**সমাধান ঃ** এখানে, $\overline{AB} = \overrightarrow{F_1}$ এবং $\overline{AC} = \overrightarrow{F_2}$

$$\therefore\ \frac{AB}{F_1} = \frac{AC}{F_2} \Rightarrow \frac{0{\cdot}5}{50} = \frac{AC}{40} \Rightarrow AC = 0{\cdot}4 \text{ মিটার।}$$

**2(c) A বিন্দুতে ক্রিয়াশীল P ও Q বলদ্বয় ABDC সামান্তরিকে AB ও AC বাহু দ্বারা প্রকাশিত। P = 60 N, AB = 4 m, AC = 3 m এবং $\angle A = 60°$ হলে, P ও Q এর লব্ধির প্রাপ্ত মান হতে সামান্তরিকটির AD কর্ণের দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।**






**সমাধান ঃ** লব্ধি R হলে, $\overline{R} = \overline{AD}$

এখন, $\overline{AB} = \overline{P}$, $\overline{AC} = \overline{Q}$, $\overline{AD} = \overline{R}$.

$$\therefore\ \frac{AB}{P} = \frac{AC}{Q} = \frac{AD}{R} \Rightarrow \frac{4}{60} = \frac{3}{Q} = \frac{AD}{R} \ldots\ldots \text{(i)}$$

$$\therefore\ Q = \frac{3\times 60}{4} = 45N \text{ এবং } R^2 = P^2 + Q^2 + 2PQ\cos 60° = 60^2 + 45^2 + 2\times 60\times 45\times\frac{1}{2}$$

$$= 15^2(4^2 + 3^2 + 12) = 15^2 \times 37\ \therefore\ R = 15\sqrt{37}$$

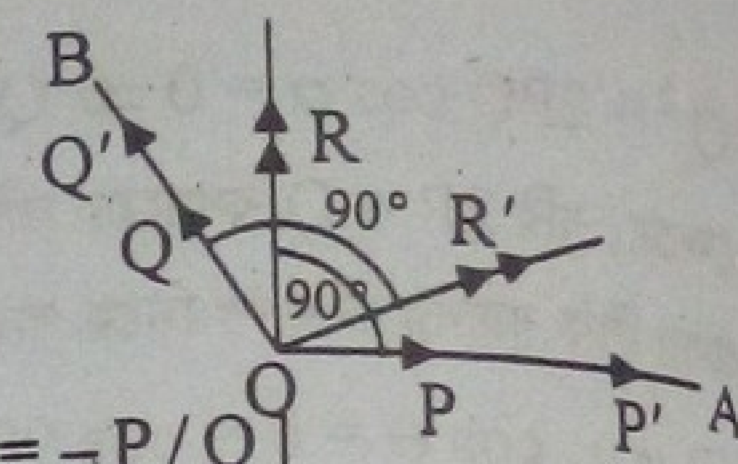
(i) নং হতে পাই, $\frac{4}{60} = \frac{AD}{15\sqrt{37}}$ $\therefore\ AD = \sqrt{37}$ m (Ans.)

**3(a) OA ও OB সরলরেখা বরাবর ক্রিয়ারত P ও Q বল দুইটির লব্ধি OA এর উপর লম্ব। একই রেখা বরাবর ক্রিয়ারত যথাক্রমে $P'$ এবং $Q'$ বল দুইটির লব্ধি OB এর উপর লম্ব হলে প্রমাণ কর যে, $PP' = QQ'$.**

**প্রমাণঃ** ধরি, P ও Q বল দুইটির লব্ধি R, যা OA এর উপর লম্ব বরাবর ক্রিয়া করে এবং $\angle AOB = \alpha$

OA বরাবর লম্বাংশ নিয়ে পাই, $P\cos 0° + Q\cos\alpha = R\cos 90°$

$\Rightarrow P + Q\cos\alpha = R\times 0 \Rightarrow \cos\alpha = -P/Q$




আবার ধরি, একই রেখা বরাবর ক্রিয়ারত $P'$ এবং $Q'$ বল দুইটির লব্ধির $R'$, যা OB এর উপর লম্ব বরাবর ক্রিয়া করে।

OB বরাবর লম্বাংশ নিয়ে পাই, $Q'\cos 0° + P'\cos\alpha = R'\cos 90°$

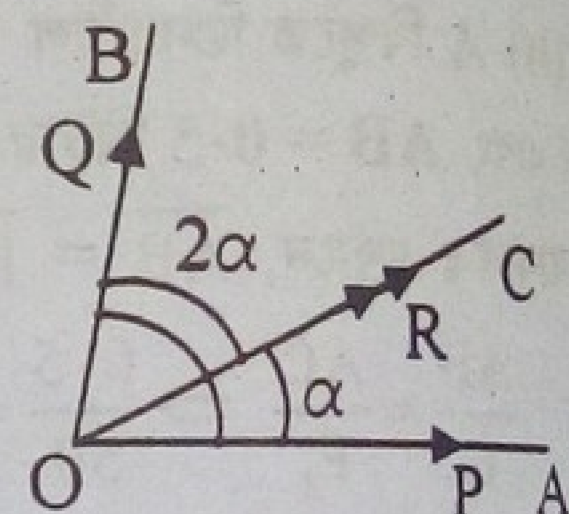
$\Rightarrow Q' + P'\cos\alpha = R' \times 0 \Rightarrow Q' + P'(-P/Q) = 0 \quad [\because \cos\alpha = -P/Q]$

$\therefore \; PP' = QQ'$.

**3(b) কোনো বিন্দুতে ক্রিয়ারত P ও Q ( P > Q ) বল দুইটির লব্ধি তাদের অন্তর্গত কোণকে এক-তৃতীয়াংশে বিভক্ত করে। দেখাও যে, বলদ্বয়ের অন্তর্গত কোণের পরিমাণ $3\cos^{-1}(\frac{P}{2Q})$ এবং লব্ধির মান $\frac{P^2-Q^2}{Q}$.**

**[কু.'০১,'১০; রা.'০১,'০৪, '০৮ ; চ.'০১; ব.'০৩; য.'০৬,'১২; ঢা.'১৩; টেক্সটাইল'০৯-১০]**

**প্রমাণঃ** মনে করি, পরস্পর $3\alpha$ কোণে OA ও OB বরাবর ক্রিয়ারত যথাক্রমে P ও Q (P>Q) বল দুইটির লব্ধি R, যা OC বরাবর ক্রিয়ারত। তাহলে, $\angle AOB = 3\alpha$, $\angle AOC = \alpha$ এবং $\angle COB = 2\alpha$, $[\because P>Q]$




এখন OC এবং এর উপর লম্ব বরাবর লম্বাংশ নিয়ে পাই,

$R\cos 0° = P\cos(-\alpha) + Q\cos 2\alpha \Rightarrow R = P\cos\alpha + Q\cos 2\alpha \cdots$(i)

এবং $R\sin 0° = P\sin(-\alpha) + Q\sin 2\alpha$

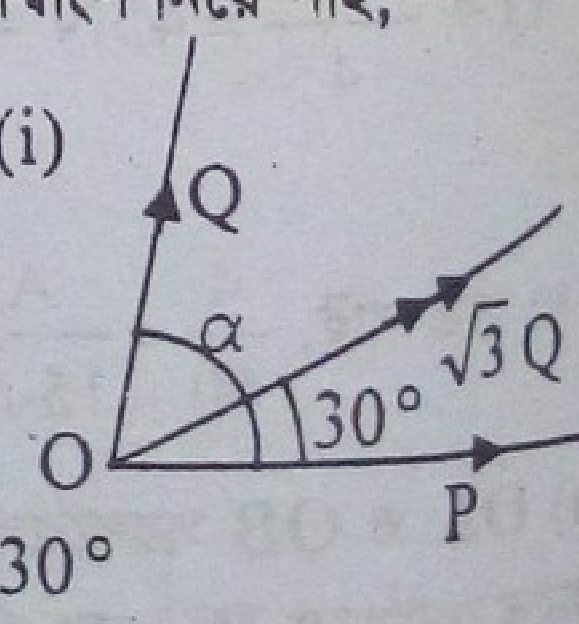
$\Rightarrow 0 = -P\sin\alpha + Q\,.2\sin\alpha\cos\alpha \Rightarrow \cos\alpha = \frac{P}{2Q} \Rightarrow \alpha = \cos^{-1}(\frac{P}{2Q})$

(i) হতে, $R = P\cos\alpha + Q(2\cos^2\alpha - 1) = P \times \frac{P}{2Q} + Q(2\frac{P^2}{4Q^2} - 1) = \frac{P^2}{2Q} + \frac{P^2}{2Q} - Q = \frac{P^2-Q^2}{Q}$

$\therefore$ বলদ্বয়ের অন্তর্গত কোণের পরিমাণ $= 3\alpha = 3\cos^{-1}(\frac{P}{2Q})$ এবং লব্ধির মান $= \frac{P^2-Q^2}{Q}$

**3(c) পরস্পর $\alpha$ কোণে ক্রিয়ারত P ও Q বল দুইটির লব্ধির মান $\sqrt{3}\,Q$ এবং তা P এর ক্রিয়ারেখার সাথে 30° কোণ উৎপন্ন করে। দেখাও যে, P = Q অথবা, P = 2Q.** **[সি.'০৫]**

**প্রমাণঃ** P এর দিক এবং এর উপর লম্ব বরাবর P ও Q বলদ্বয় এবং এদেও লব্ধি $\sqrt{3}\,Q$ এর লম্বাংশ নিয়ে পাই,




$\sqrt{3}\,Q\cos 30° = P\cos 0° + Q\cos\alpha \Rightarrow Q\cos\alpha = \sqrt{3}\,Q\cos 30° - P \cdots$(i)

এবং $\sqrt{3}\,Q\sin 30° = P\sin 0° + Q\sin\alpha$

$\Rightarrow Q\sin\alpha = \sqrt{3}\,Q\sin 30° \cdots\cdots$(ii)

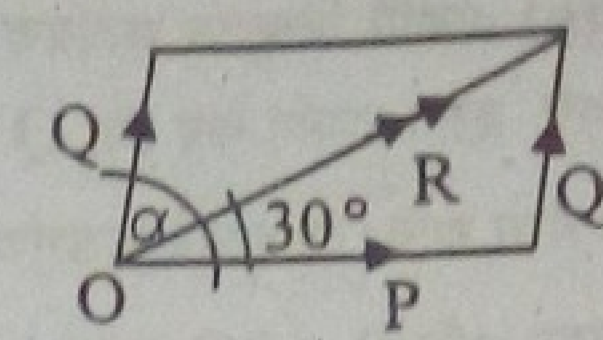
$(i)^2 + (ii)^2 \Rightarrow Q^2 = 3Q^2\cos^2 30° - 2\sqrt{3}\,QP\cos 30° + P^2 + 3Q^2\sin^2 30°$

$\Rightarrow Q^2 = 3Q^2 - 2\sqrt{3}\,QP \times \frac{\sqrt{3}}{2} + P^2 \Rightarrow P^2 + 2Q^2 - 3PQ = 0 \Rightarrow P^2 - 2PQ - PQ + 2Q^2 = 0$

$\Rightarrow P(P-2Q) - Q(P-2Q) = 0 \Rightarrow (P-2Q)(P-Q) = 0 \therefore P = Q$ অথবা, $P = 2Q$

**বিকল্প পদ্ধতি ঃ** এখানে বল দুইটির লব্ধি $R = \sqrt{3}\,Q$, যা P এর ক্রিয়ারেখার সাথে $\theta = 30°$ কোণ উৎপন্ন করে।

$\therefore$ $Q^2 = P^2 + R^2 - 2PR\cos\theta$ [ ত্রিভুজের কোসাইন সূত্র হতে ]




$Q^2 = P^2 + (\sqrt{3}\,Q)^2 - 2P\times\sqrt{3}\,Q\cos 30°$

$\Rightarrow Q^2 = P^2 + 3Q^2 - 2P\times\sqrt{3}\,Q\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$\Rightarrow P^2 + 2Q^2 - 3PQ = 0 \Rightarrow P^2 - 2PQ - PQ + 2Q^2 = 0$

$\Rightarrow P(P-2Q) - Q(P-2Q) = 0 \Rightarrow (P-2Q)(P-Q) = 0 \;\therefore P = Q$ অথবা, $P = 2Q$

**4(a) কোনো বিন্দুতে 7 N এবং 8 N মানের দুইটি বল পরস্পর 60° কোণে কার্যরত আছে। এদের লব্ধির মান নির্ণয় কর।**

**সমাধান ঃ** ধরি, প্রদত্ত বল দুইটির লব্ধির মান R নিউটন। তাহলে,

$R^2 = 7^2 + 8^2 + 2\times 7\times 8\cos 60° = 49 + 64 + 2\times 56\times\dfrac{1}{2} = 169 \;\therefore R = 13$

$\therefore$ বল দুইটির লব্ধির মান 13 N.

**4(b) দুইটি বল সমকোণে ক্রিয়া করলে লব্ধির মান $2\sqrt{13}$ N এবং এদের বৃহত্তম লব্ধির মান 10N, বল দুইটি 120° কোণে ক্রিয়া করলে লব্ধির মান নির্ণয় কর।**

**সমাধান ঃ** মনে করি, বল দুইটি P নিউটন ও Q নিউটন ( P > Q ). তাহলে, বল দুইটি সমকোণে ক্রিয়া করে বলে,

$P^2 + Q^2 = (2\sqrt{13})^2 = 52 \cdots\cdots$ (i) এবং বৃহত্তম লব্ধি, $P + Q = 10 \cdots\cdots$ (ii)

(i) হতে পাই, $2(P^2+Q^2) = 2\times 52 \Rightarrow (P+Q)^2 + (P-Q)^2 = 104 \Rightarrow 10^2 + (P-Q)^2 = 104$



$\Rightarrow (P-Q)^2 = 4 \Rightarrow P - Q = 2 \cdots\cdots$ (iii)

(ii) + (iii) $\Rightarrow 2P = 12 \;\therefore\; P = 6,\; Q = 10 - P = 10 - 6 = 4$

$\therefore$ বল দুইটি 120° কোণে ক্রিয়া করলে লব্ধির মান $= \sqrt{6^2 + 4^2 + 2\times 6\times 4\cos 120^0}$

$= \sqrt{36 + 16 - 24} = \sqrt{28} = 2\sqrt{7}$

**4(c) একটি কণার উপর কার্যরত P, P দুইটি বলের লব্ধি P হলে বল দুইটির অন্তর্গত কোণ নির্ণয় কর।**

**সমাধান ঃ** মনে করি, প্রদত্ত বল দুইটির অন্তর্গত কোণ $\alpha$ . তাহলে বলের সামান্তরিক সূত্র হতে আমরা পাই,

$P^2 = P^2 + P^2 + 2PP\cos\alpha \Rightarrow 2P^2\cos\alpha + P^2 = 0 \Rightarrow \cos\alpha = -\dfrac{1}{2} = \cos 120° \Rightarrow \alpha = 120°$

$\therefore$ বল দুইটির অন্তর্গত কোণ = 120°

**4(d) একটি বিন্দুতে 60° কোণে ক্রিয়ারত দুইটি সমান বলের লব্ধির মান 6 N হলে বল দুইটির মান নির্ণয় কর।**

**সমাধান ঃ** মনে করি, P নিউটন মানের সমান বল দুইটির লব্ধি 6N । তাহলে বলের সামান্তরিক সূত্র হতে আমরা পাই,

$6^2 = P^2 + P^2 + 2PP\cos 60° \Rightarrow 36 = 2P^2 + 2P^2\left(\dfrac{1}{2}\right)$

$\Rightarrow 3P^2 = 36 \Rightarrow P^2 = 12 \Rightarrow P = 2\sqrt{3}$ . অতএব সমান বল দুইটির মান $2\sqrt{3}$ N , $2\sqrt{3}$ N.

**4(e) একটি বিন্দুতে কার্যরত P ও Q বলের লব্ধি R ; Q বলকে দ্বিগুণ করলে নতুন লব্ধি P বলের ক্রিয়া রেখার উপর লম্ব হয়। প্রমাণ কর যে, Q = R.**

প্রমাণঃ মনে করি, বলদ্বয়ের অন্তর্গত কোণ $\alpha$ . তাহলে ১ম ক্ষেত্রে, $R^2 = P^2 + Q^2 + 2PQ\cos\alpha \cdots\cdots$(i)

২য় ক্ষেত্রে, ধরি P ও 2Q বলের লব্ধি $R_1$ , যা P বলের ক্রিয়া রেখার উপর লম্ব । তাহলে, P বলের দিক বরাবর লম্বাংশ নিয়ে পাই, $P\cos 0° + 2Q\cos\alpha = R_1\cos 90° \Rightarrow P + 2Q\cos\alpha = 0 \Rightarrow 2Q\cos\alpha = -P.$

$\therefore$ (i) হতে পাই, $R^2 = P^2 + Q^2 + P(-P) = P^2 + Q^2 - P^2 \Rightarrow R^2 = Q^2 \;\therefore\; R = Q$ (Proved)

**5(a) $2\alpha$ কোণে ক্রিয়ারত দুইটি সমান বলের লব্ধি , $2\beta$ কোণে ক্রিয়ারত বল দুইটির লব্ধির দ্বিগুণ হলে, প্রমাণ কর যে, $\cos\alpha = 2\cos\beta$.** [সি.'০৩; রা.'০৫,'১০; কু.'১২]

প্রমাণঃ মনে করি, $2\beta$ কোণে ক্রিয়ারত P ও P সমান বল দুইটির লব্ধি R. তাহলে $2\alpha$ কোণে ক্রিয়ারত বল দুইটির লব্ধি 2R হবে।

$\therefore$ বলের সামান্তরিক সূত্র হতে পাই, $R^2 = P^2 + P^2 + 2PP\cos 2\beta = 2P^2(1+\cos 2\beta)$

$\Rightarrow R^2 = 2P^2 \times 2\cos^2\beta \Rightarrow R^2 = 4P^2\cos^2\beta \cdots\cdots$ (i)

আবার, $(2R)^2 = P^2 + P^2 + 2PP\cos 2\alpha = 2P^2(1+\cos 2\alpha)$

$\Rightarrow 4R^2 = 2P^2 \times 2\cos^2\alpha \Rightarrow R^2 = P^2\cos^2\alpha \Rightarrow 4P^2\cos^2\beta = P^2\cos^2\alpha$ , [(i) হতে।]

$\Rightarrow \cos^2\alpha = 4\cos^2\beta \quad \therefore \cos\alpha = 2\cos\beta$ (Proved)

**5(b) পরস্পর $\theta$ কোণে ক্রিয়াশীল P, Q মানের বলদ্বয়ের লব্ধির মান $(2m+1)\sqrt{P^2+Q^2}$ , তারা যখন $(\frac{\pi}{2} - \theta)$ কোণে ক্রিয়া করে , তখন লব্ধির মান $(2m+1)\sqrt{P^2+Q^2}$ হয়। প্রমাণ কর যে, $\tan\theta = \frac{m-1}{m+1}$** [রা.'০৬,'০৯; ঢা.'০৮,'১২]



প্রমাণঃ সামান্তরিক সূত্রানুযায়ী ১ম শর্ত হতে পাই, $\{(2m+1)\sqrt{P^2+Q^2}\}^2 = P^2 + Q^2 + 2PQ\cos\theta$

$\Rightarrow (4m^2 + 4m + 1)(P^2 + Q^2) = P^2 + Q^2 + 2PQ\cos\theta$

$\Rightarrow (4m^2 + 4m + 1 - 1)(P^2 + Q^2) = 2PQ\cos\theta \Rightarrow 4m(m+1) = 2PQ\cos\theta \cdots\cdots$ (i)

২য় শর্ত হতে পাই, $\{(2m-1)\sqrt{P^2+Q^2}\}^2 = P^2 + Q^2 + 2PQ\cos(\frac{\pi}{2} - \theta)$

$\Rightarrow (4m^2 - 4m + 1)(P^2 + Q^2) = P^2 + Q^2 + 2PQ\sin\theta$

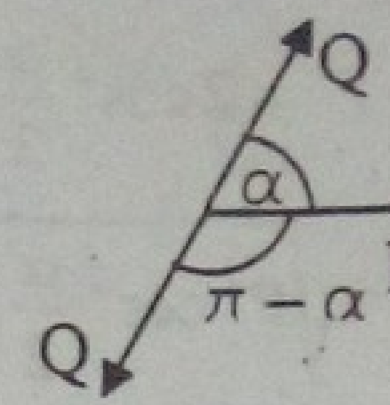
$\Rightarrow (4m^2 - 4m + 1 - 1)(P^2 + Q^2) = 2PQ\sin\theta \Rightarrow 4m(m-1) = 2PQ\sin\theta \cdots\cdots$ (ii)

$$(ii) \div (i) \Rightarrow \frac{2PQ\sin\theta}{2PQ\cos\theta} = \frac{4m(m-1)}{4m(m+1)} \quad \therefore \tan\theta = \frac{m-1}{m+1} \text{ (Proved)}$$

**5(c) একটি বিন্দুতে কার্যরত P ও Q বলের লব্ধি R; Q বলকে দ্বিগুণ করলে R দ্বিগুণ হয়। আবার Q বিপরীতমুখী হলেও R দ্বিগুণ হয়। প্রমাণ কর যে, $P : Q : R = \sqrt{2} : \sqrt{3} : \sqrt{2}$ .**

প্রমাণঃ ধরি, P ও Q বল দুইটির মধ্যবর্তী কোণ $\alpha$. তাহলে Q বিপরীতমুখী হলে বলদ্বয়ের মধ্যবর্তী কোণ হবে $(\pi - \alpha)$

প্রদত্ত শর্তানুসারে বলের সামান্তরিক সূত্র হতে পাই,




১ম ক্ষেত্রে ঃ $R^2 = P^2 + Q^2 + 2PQ\cos\alpha \cdots\cdots$(i)

২য় ক্ষেত্রে ঃ $(2R)^2 = P^2 + (2Q)^2 + 2P.2Q\cos\alpha$

$\Rightarrow 4R^2 = P^2 + 4Q^2 + 4PQ\cos\alpha \cdots$ (ii)

৩য় ক্ষেত্রে ঃ $4R^2 = P^2 + Q^2 + 2PQ\cos(\pi - \alpha) \Rightarrow 4R^2 = P^2 + Q^2 - 2PQ\cos\alpha \cdots\cdots$(iii)

এখন, (i) + (iii) $\Rightarrow 5R^2 = 2P^2 + 2Q^2 \Rightarrow 2P^2 + 2Q^2 - 5R^2 = 0 \cdots\cdots$ (iv)

(ii) + 2×(iii)$\Rightarrow 12R^2 = 3P^2 + 6Q^2 \Rightarrow P^2 + 2Q^2 - 4R^2 = 0 \cdots\cdots$ (v)

বজ্রগুণন পদ্ধতি প্রয়োগ করে (iv) ও (v) থেকে পাই, $\dfrac{P^2}{-8+10} = \dfrac{Q^2}{-5+8} = \dfrac{R^2}{4-2} \Rightarrow \dfrac{P^2}{2} = \dfrac{Q^2}{3} = \dfrac{R^2}{2}$

$\therefore\ P : Q : R = \sqrt{2} : \sqrt{3} : \sqrt{2}$.

**5(d) এক বিন্দুতে ক্রিয়াশীল দুইটি বলের বৃহত্তম ও ক্ষুদ্রতম লব্ধির মান যথাক্রমে 8 ও 2 কেজি ওজন। যখন বলদ্বয়ের মধ্যবর্তী কোণ 60° তখন এদের লব্ধির মান নির্ণয় কর।**

**সমাধান ঃ** মনে করি, বল দুইটির মান P ও Q (P>Q) কেজি-ওজন।

$\therefore$ প্রশ্নমতে, $P + Q = 8 \cdots\cdots$ (i) এবং $P - Q = 2 \cdots\cdots$ (ii)

(i) + (ii) $\Rightarrow 2P = 10 \Rightarrow P = 5$. (i) − (ii) $\Rightarrow 2Q = 6 \Rightarrow Q = 3$.

যখন বল দুইটির মধ্যবর্তী কোণ 60° তখন তাদের লব্ধির মান R কেজি-ওজন হলে,



$R^2 = P^2 + Q^2 + 2PQ\cos 60° = 5^2 + 3^2 + 2\times5\times3\times\dfrac{1}{2} = 25 + 9 + 15 = 49 \Rightarrow R = 7$

$\therefore$ লব্ধির মান 7 কেজি ওজন।

**5(e) কোনো বিন্দুতে ক্রিয়ারত দুইটি বলের বৃহত্তম ও ক্ষুদ্রতম লব্ধির মান যথাক্রমে F ও G। প্রমাণ কর যে, বলদ্বয়ের ক্রিয়ারেখার মধ্যবর্তী কোণ $\alpha$ হলে তাদের লব্ধির মান $\sqrt{F^2\cos^2\dfrac{\alpha}{2} + G^2\sin^2\dfrac{\alpha}{2}}$ হবে।** [দি.'১২]

**প্রমাণঃ** মনে করি, P ও Q বল দুইটির বৃহত্তম ও ক্ষুদ্রতম লব্ধির মান যথাক্রমে F ও G. তাহলে,

$P + Q = F \cdots\cdots$ (i), $P - Q = G \cdots\cdots$ (ii)

(i) + (ii) $\Rightarrow P = (F+G)/2$ এবং (i) − (ii) $\Rightarrow Q = (F-G)/2$.

ধরি, বলদ্বয়ের মধ্যবর্তী কোণ $\alpha$ হলে লব্ধির মান R.

$\therefore$ বলের সামান্তরিক সূত্র হতে পাই, $R^2 = P^2 + Q^2 + 2PQ\cos\alpha$

$\therefore\ R^2 = \dfrac{1}{4}(F+G)^2 + \dfrac{1}{4}(F-G)^2 + 2.\dfrac{1}{2}(F+G).\dfrac{1}{2}(F-G)\cos\alpha$

$= \dfrac{2}{4}(F^2 + G^2) + \dfrac{1}{2}(F^2 - G^2)\cos\alpha = \dfrac{1}{2}F^2(1+\cos\alpha) + \dfrac{1}{2}G^2(1-\cos\alpha)$

2

$$=\frac{1}{2}F^2\times 2\cos^2\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{2}G^2\times 2\sin^2\frac{\alpha}{2}$$

$\therefore$ লব্ধির মান $R=\sqrt{F^2\cos^2\frac{\alpha}{2}+G^2\sin^2\frac{\alpha}{2}}$

**6(a) কোনো কণার উপর একই সময়ে ক্রিয়াশীল দুইটি বলের লব্ধি এদের একটির ক্রিয়ারেখার সাথে 60° কোণ উৎপন্ন করে। এই বলটিকে দ্বিগুণ করলে উক্ত কোণটি 30° হয়। বলদ্বয়ের অন্তর্গত কোণ নির্ণয় কর।** [বুয়েট'১১-১২]

সমাধান ঃ ধরি, $\alpha$ কোণে কার্যরত P ও Q বল দুইটির লব্ধি P এর সাথে $60°$ কোণ উৎপন্ন করে।

$$\therefore\ \tan 60° = \frac{Q\sin\alpha}{P+Q\cos\alpha}\cdots\text{(i) এবং }\tan 30° = \frac{Q\sin\alpha}{2P+Q\cos\alpha}\cdots\text{(ii)}$$

$$\text{(i)}\div\text{(ii)}\Rightarrow \frac{\tan 60^0}{\tan 30^0}=\frac{2P+Q\cos\alpha}{P+Q\cos\alpha}\Rightarrow\frac{\sqrt{3}}{1/\sqrt{3}}=\frac{2P+Q\cos\alpha}{P+Q\cos\alpha}$$

$$\Rightarrow 2P+Q\cos\alpha = 3\,(P+Q\cos\alpha)\Rightarrow P=-2Q\cos\alpha\cdots\cdots\text{(iii)}$$

এখন (i) হতে পাই, $\sqrt{3}=\dfrac{Q\sin\alpha}{-2Q\cos\alpha+Q\cos\alpha}=\dfrac{\sin\alpha}{-\cos\alpha}=-\tan\alpha$

$\Rightarrow \tan\alpha = -\tan 60° = \tan(180°-60°)$ $\therefore$ বলদ্বয়ের অন্তর্গত কোণ $\alpha = 120°$

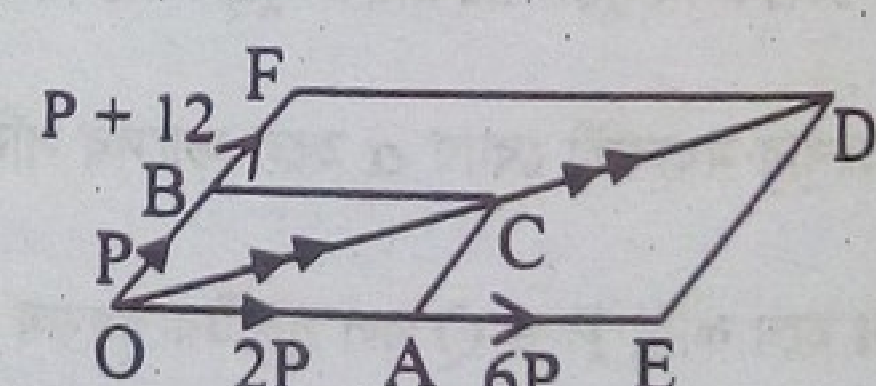
**6(b) কোনো একটি বিন্দুতে 2P এবং P মানের বলদুইটি ক্রিয়ারত। প্রথমটিকে তিনগুণ করলে এবং দ্বিতীয়টির মান 12 একক বৃদ্ধি করলে লব্ধির দিক অপরিবর্তিত থাকে। P এর মান নির্ণয় কর।**

সমাধানঃ মনে করি, O বিন্দুতে ক্রিয়ারত OA ও OB দ্বারা সূচিত যথাক্রমে 2P ও P বল দুইটির লব্ধি OABC সামান্তরিকের কর্ণ OC দ্বারা মানে ও দিকে সুচিত হবে।



আবার, OE ও OF দ্বারা সূচিত যথাক্রমে 6P ও P + 12 বল দুইটির লব্ধি OEDF সামান্তরিকের কর্ণ OD দ্বারা মানে ও দিকে সুচিত হবে, যা OC বরাবর ক্রিয়াশীল।

এখন $\Delta OAC$ এবং $\Delta OED$ সদৃশকোণী।

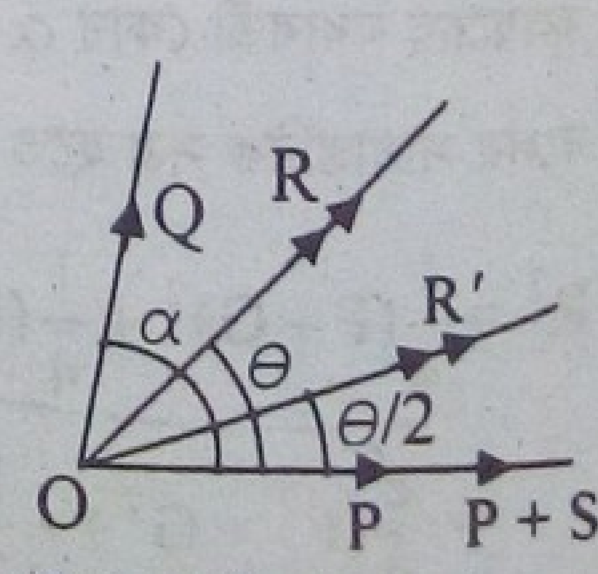



$$\therefore\ \frac{OA}{AC}=\frac{OE}{ED}\Rightarrow\frac{2P}{P}=\frac{6P}{P+12}\Rightarrow 1=\frac{3P}{P+12}$$

$\Rightarrow P+12=3P\Rightarrow 2P=12\ \therefore\ P=6$ (একক)

**6(c) P, Q বলদ্বয়ের লব্ধি R, যদি P কে S পরিমাণে বাড়ানো হয় তবে নতুন লব্ধি, R এবং P এর মধ্যবর্তী কোণকে সমদ্বিখণ্ডিত করে, দেখাও যে, S = R.**

প্রমাণ ঃ ধরি, $\alpha$ কোণে ক্রিয়ারত P, Q বলদ্বয়ের লব্ধি R, P এর সাথে $\theta$ কোণ উৎপন্ন করে। তাহলে নতুন লব্ধি $R'$ (ধরি), P এর সাথে $\theta/2$ কোণ উৎপন্ন করে।




১ম ক্ষেত্রে, P এর ক্রিয়ারেখা এবং এর উপর লম্ব বরাবর লম্বাংশ নিয়ে পাই,

$P+Q\cos\alpha = R\cos\theta\cdots$ (i) এবং $Q\sin\alpha = R\sin\theta\cdots$ (ii)

২য় ক্ষেত্রে, $\alpha$ কোণে ক্রিয়ারত $(P+S)$ ও Q বলদ্বয়ের লব্ধি $R'$, $(P+S)$ এর সাথে $\theta/2$ কোণ উৎপন্ন করে।

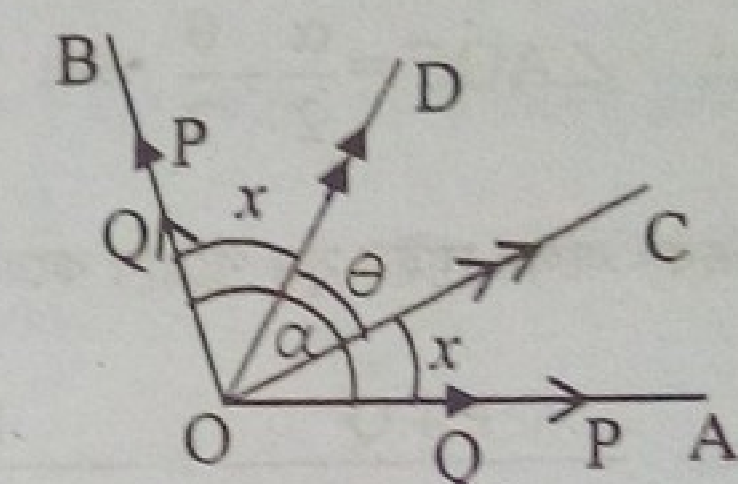
$\therefore \tan\frac{\theta}{2} = \frac{Q\sin\alpha}{P+S+Q\cos\alpha} = \frac{R\sin\theta}{S+R\cos\theta}$, [ (i) ও (ii) হতে।]

$\Rightarrow \frac{\sin(\theta/2)}{\cos(\theta/2)} = \frac{2R\sin(\theta/2)\cos(\theta/2)}{S+R\cos\theta} \Rightarrow S+R\cos\theta = 2R\cos^2\frac{\theta}{2}$

$\Rightarrow S+R\cos\theta = R(\cos\theta+1) = R\cos\theta + R \quad \therefore S = R$ (Showed)

7(a) P ও Q (P>Q) বল দুইটি পরস্পর $\alpha$ কোণে ক্রিয়ারত । এদের অবস্থান বিনিময় করলে লব্ধি $\theta$ কোণে ঘুরে যায়। প্রমাণ কর যে, $\tan\frac{\theta}{2} = \frac{P-Q}{P+Q}\tan\frac{\alpha}{2}$. [চা.'০৯]

প্রমাণঃ মনে করি, OA ও OB বরাবর ক্রিয়ারত যথাক্রমে P ও Q বল দুইটির লব্ধি OC বরাবর ক্রিয়ারত। এদের অবস্থান বিনিময় করলে অর্থাৎ OA ও OB বরাবর ক্রিয়ারত যথাক্রমে Q ও P বল দুইটির লব্ধি OD বরাবর ক্রিয়ারত। তাহলে, $\angle AOB = \alpha$, $\angle COD = \theta$, $\angle AOC = \angle DOB = x$ (ধরি)




$\therefore x+\theta+x = \alpha \Rightarrow x = \frac{1}{2}(\alpha-\theta) = \angle AOC$ এবং

$\angle BOC = x+\theta = \frac{1}{2}(\alpha-\theta)+\theta = \frac{1}{2}(\alpha+\theta)$

এখন, বলের সাইন সূত্র প্রয়োগ করে পাই, $\frac{P}{\sin BOC} = \frac{Q}{\sin AOC}$

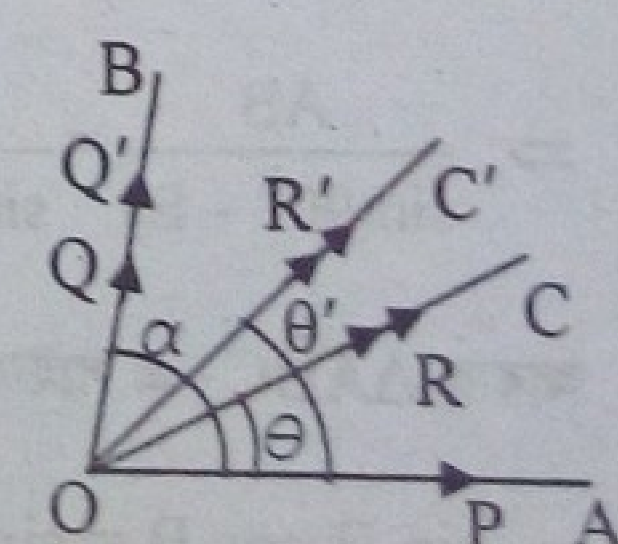
$\therefore \frac{P}{\sin\frac{1}{2}(\alpha+\theta)} = \frac{Q}{\sin\frac{1}{2}(\alpha-\theta)} \Rightarrow \frac{P}{Q} = \frac{\sin\frac{1}{2}(\alpha+\theta)}{\sin\frac{1}{2}(\alpha-\theta)} \Rightarrow \frac{P+Q}{P-Q} = \frac{\sin\frac{1}{2}(\alpha+\theta)+\sin\frac{1}{2}(\alpha-\theta)}{\sin\frac{1}{2}(\alpha+\theta)-\sin\frac{1}{2}(\alpha-\theta)}$



$\Rightarrow \frac{P+Q}{P-Q} = \frac{2\sin\frac{1}{2}\alpha\cos\frac{1}{2}\theta}{2\sin\frac{1}{2}\theta\cos\frac{1}{2}\alpha} = \frac{\tan\frac{1}{2}\alpha}{\tan\frac{1}{2}\theta} \quad \therefore \tan\frac{\theta}{2} = \frac{P-Q}{P+Q}\tan\frac{\alpha}{2}$.

7(b) পরস্পর $\alpha$ ( $\alpha \neq \pi$ ) কোণে আনত OA ও OB রেখাংশ বরাবর ক্রিয়ারত যথাক্রমে P ও Q বল দুইটির লব্ধি R, যা OA এর সাথে $\theta$ কোণ উৎপন্ন করে। একই রেখা বরাবর Q এর স্থলে Q$'$ ক্রিয়া করলে এদের লব্ধি R$'$, যা OA এর সাথে $\theta'$ কোণ উৎপন্ন করে প্রমাণ কর যে, $\frac{R}{R'} = \frac{\sin(\alpha-\theta')}{\sin(\alpha-\theta)}$. [দি.'১০; ব.'১৩]

প্রমাণঃ ধরি, R ও R$'$ যথাক্রমে OC ও OC$'$ বরাবর ক্রিয়ারত।




বলের সাইন সূত্র প্রয়োগ করে ১ম ক্ষেত্রে পাই, $\frac{P}{\sin BOC} = \frac{Q}{\sin AOC} = \frac{R}{\sin AOB}$

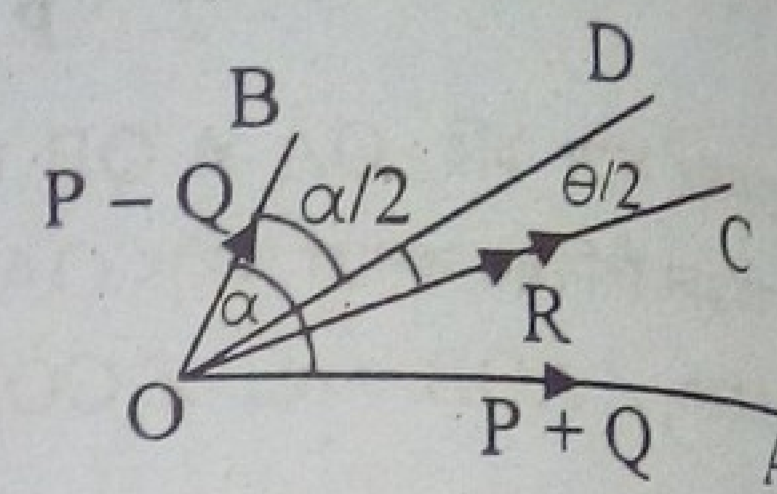
$\Rightarrow \frac{P}{\sin(\alpha-\theta)} = \frac{R}{\sin\alpha}$ ...... (i), [১ম ও ৩য় অনুপাত নিয়ে]

এবং ২য় ক্ষেত্রে পাই, $\dfrac{P}{\sin BOC'} = \dfrac{Q'}{\sin AOC'} = \dfrac{R'}{\sin AOB}$

$\Rightarrow \dfrac{P}{\sin(\alpha-\theta')} = \dfrac{R'}{\sin\alpha} \cdots\cdots$ (ii) $\therefore$ (i) $\div$ (ii) $\Rightarrow \dfrac{R}{R'} = \dfrac{\sin(\alpha-\theta')}{\sin(\alpha-\theta)}$

**7(c) $P+Q$ ও $P-Q$ বলদ্বয় $\alpha$ কোণে ক্রিয়ারত। তাদের লব্ধি বলদ্বয়ের অন্তর্গত কোণের সমদ্বিখণ্ডকের সাথে $\dfrac{\theta}{2}$ কোণ উৎপন্ন করে। দেখাও যে, $P : Q = \tan\dfrac{\alpha}{2} : \tan\dfrac{\theta}{2}$** [চ.'০৪; সি.'১৩]

প্রমাণঃ মনে করি, OA ও OB বরাবর ক্রিয়ারত যথাক্রমে $P+Q$ ও $P-Q$ বলদ্বয়ের লব্ধি R, OC বরাবর ক্রিয়াশীল এবং $\angle AOB$ কোণের সমদ্বিখণ্ডক OD, OC এর সাথে $\theta/2$ কোণ উৎপন্ন করে অর্থাৎ $\angle COD = \theta/2$, $\angle AOD = \angle BOD = \alpha/2$.




$\therefore \angle AOC = \dfrac{\alpha}{2} - \dfrac{\theta}{2}$ এবং $\angle COB = \dfrac{\alpha}{2} - \dfrac{\theta}{2}$

এখন বলের সাইন সূত্র পয়োগ করে পাই, $\dfrac{P+Q}{\sin BOC} = \dfrac{P-Q}{\sin AOC} = \dfrac{R}{\sin AOB}$

$$\Rightarrow \frac{P+Q}{\sin(\alpha/2+\theta/2)} = \frac{P-Q}{\sin(\alpha/2-\theta/2)} \Rightarrow \frac{P+Q}{P-Q} = \frac{\sin(\alpha/2+\theta/2)}{\sin(\alpha/2-\theta/2)}$$

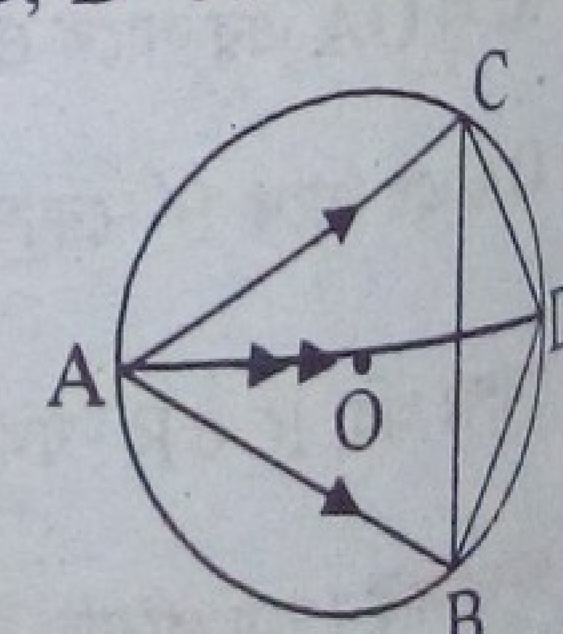


$$\Rightarrow \frac{2P}{2Q} = \frac{\sin(\alpha/2+\theta/2)+\sin(\alpha/2-\theta/2)}{\sin(\alpha/2+\theta/2)-\sin(\alpha/2-\theta/2)} = \frac{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\theta}{2}}{2\sin\frac{\theta}{2}\operatorname{co}\frac{\alpha}{2}} = \frac{2\tan\frac{\alpha}{2}}{2\tan\frac{\theta}{2}}$$

$$\therefore P : Q = \tan\frac{\alpha}{2} : \tan\frac{\theta}{2}$$

**7(d) $\overline{AB}$ এবং $\overline{AC}$ বল দুইটির লব্ধি $\Delta ABC$ এর পরিকেন্দ্রগামী হলে, প্রমাণ কর যে, ত্রিভুজটি সমকোণী বা সমদ্বিবাহু হবে।**

প্রমাণঃ মনে করি, $\Delta ABC$ এর পরিকেন্দ্র O এবং A বিন্দুগামী AD ব্যাস। C, D এবং B, D যোগ করি। তাহলে, $\angle CAD = \angle CBD = 90° - \angle CBA = 90° - B$. তদ্রূপ, $\angle BAD = 90° - C$.




বলের সাইন সূত্র প্রয়োগ করে পাই, $\dfrac{\overline{AB}}{\sin CAD} = \dfrac{\overline{AC}}{\sin BAD}$

$$\Rightarrow \frac{AB}{\sin(90^0-B)} = \frac{AC}{\sin(90^0-C)} \Rightarrow \frac{AB}{\cos B} = \frac{AC}{\cos C} \Rightarrow \frac{AB}{AC} = \frac{\cos B}{\cos C} \cdots \text{(i)}$$

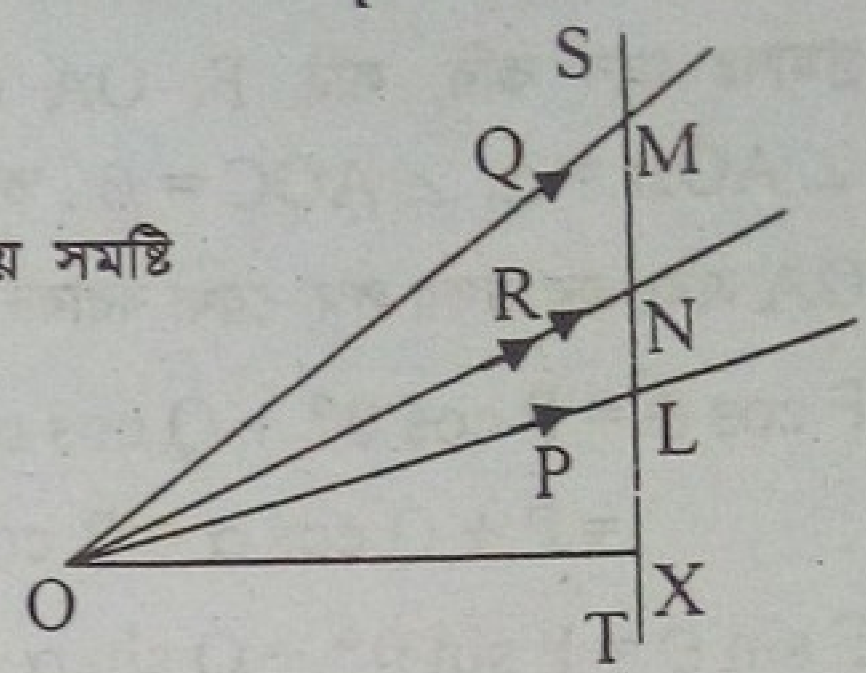
আবার $\Delta ABC$ –এ সাইন সূত্র প্রয়োগ করে পাই, $\dfrac{AB}{\sin C} = \dfrac{AC}{\sin B} \Rightarrow \dfrac{\sin C}{\sin B} = \dfrac{AB}{AC} = \dfrac{\cos B}{\cos C}$ [(i) হতে]

$$\Rightarrow \sin B\cos B = \sin C\cos C \Rightarrow \sin 2B = \sin 2C \Rightarrow 2B = 2C \Rightarrow B = C \;\therefore AC = AB.$$

আবার, $\sin 2B = \sin 2C = \sin(180° - 2C) \Rightarrow 2B = 180° - 2C \therefore B + C = 90° = A$

সুতরাং, ABC ত্রিভুজটি সমকোণী বা সমদ্বিবাহু।

**৪(a) O বিন্দুতে ক্রিয়াশীল P, Q বল দুইটির লব্ধি R. যদি কোনো ছেদক P, Q, R বলের ক্রিয়া রেখাকে যথাক্রমে L, M, N বিন্দুতে ছেদ করে তবে দেখাও যে, $\frac{P}{OL} + \frac{Q}{OM} = \frac{R}{ON}$.** [য.'০৮; রুয়েট'১১-১২]



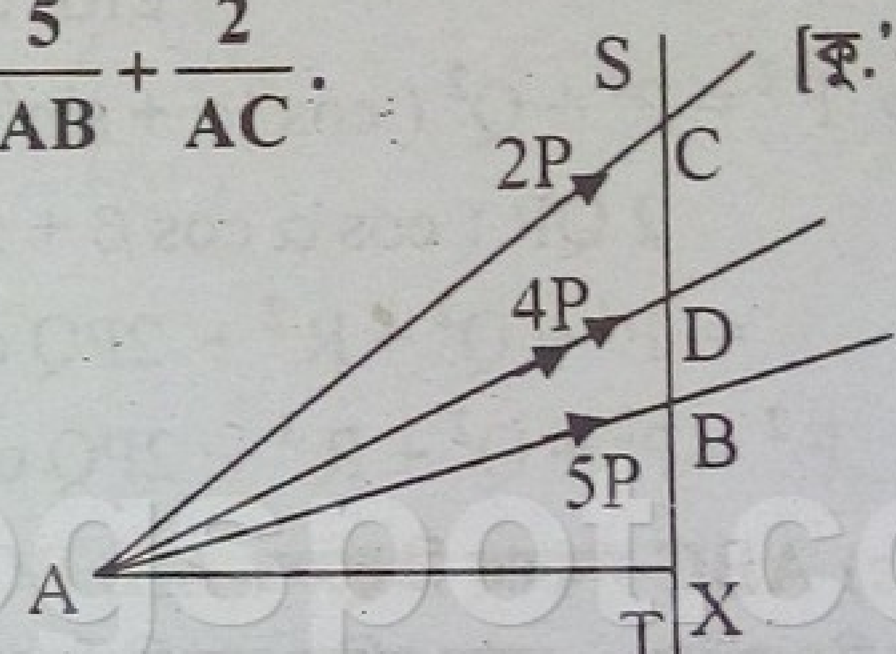

প্রমাণঃ ধরি, ছেদকটি ST এবং O হতে ছেদক ST এর উপর OX লম্ব।

সমতলস্থ যেকোনো রেখা বরাবর P ও Q বল দুইটির লম্বাংশের বীজগণিতীয় সমষ্টি তাদের লব্ধি R এর লম্বাংশের সমান বলে OX বরাবর তাদের লম্বাংশ নিয়ে পাই,

$$P\cos XOL + Q\cos XOM = R\cos XON$$

$$\Rightarrow P\frac{OX}{OL} + Q\frac{OX}{OM} = R\frac{OX}{ON} \quad \therefore \frac{P}{OL} + \frac{Q}{OM} = \frac{R}{ON} \text{ (Showed)}$$

**৪(b) 5P ও 2P মানের দুইটি বল A বিন্দুতে ক্রিয়াশীল এবং এদের লব্ধির মান 4P। যদি কোনো ছেদক এদের ক্রিয়া রেখাকে যথাক্রমে B, C ও D বিন্দুতে ছেদ করে তবে দেখাও যে, $\frac{4}{AD} = \frac{5}{AB} + \frac{2}{AC}$.** [কু.'০৫]




প্রমাণঃ ধরি, ছেদকটি ST এবং A হতে ছেদক ST এর উপর AX লম্ব।

সমতলস্থ যেকোনো রেখা বরাবর 5P ও 2P বল দুইটির লম্বাংশের বীজগণিতীয় সমষ্টি তাদের লব্ধি 4P এর লম্বাংশের সমান বলে AX বরাবর তাদের লম্বাংশ নিয়ে পাই,

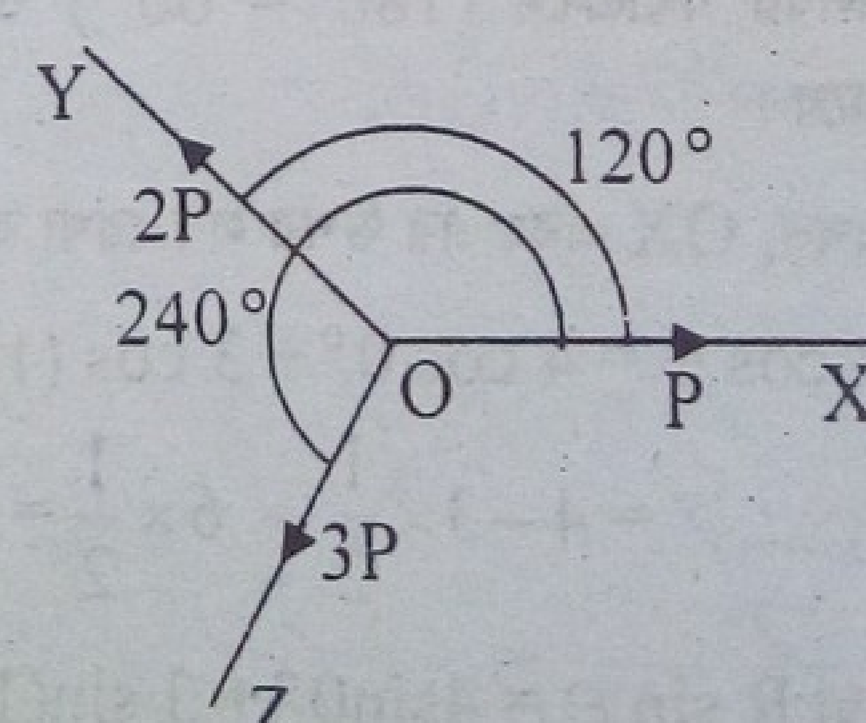


$$5P\cos XAB + 2P\cos XAC = 4P\cos XAD$$

$$\Rightarrow 5\frac{AX}{AB} + 2\frac{AX}{AC} = 4\frac{AX}{AD} \quad \therefore \frac{4}{AD} = \frac{5}{AB} + \frac{2}{AC} \text{ (Showed)}$$

**9(a) একটি বিন্দুতে পরস্পর 120° কোণে ক্রিয়ারত P, 2P, 3P মানের বলত্রয়ের লব্ধির মান ও দিক নির্ণয় কর।**

সমাধান ঃ মনে করি, O বিন্দুতে OX, OY, OZ বরাবর ক্রিয়ারত যথাক্রমে P, 2P, 3P বলগুলোর লব্ধির মান R, যা P এর ক্রিয়ারেখার সাথে $\theta$ কোণে কার্যরত।




এখন OX এবং এর উপর লম্ব বরাবর লম্বাংশ নিয়ে পাই,

$$R\cos\theta = P\cos 0° + 2P\cos 120° + 3P\cos 240°$$

$$= P - 2P\times(-\frac{1}{2}) + 3P\times(-\frac{1}{2}) = -\frac{3}{2}P \cdots\cdots \text{(i)}$$

এবং $R\sin\theta = P\sin 0° + 2P\sin 120° + 3P\sin 240°$

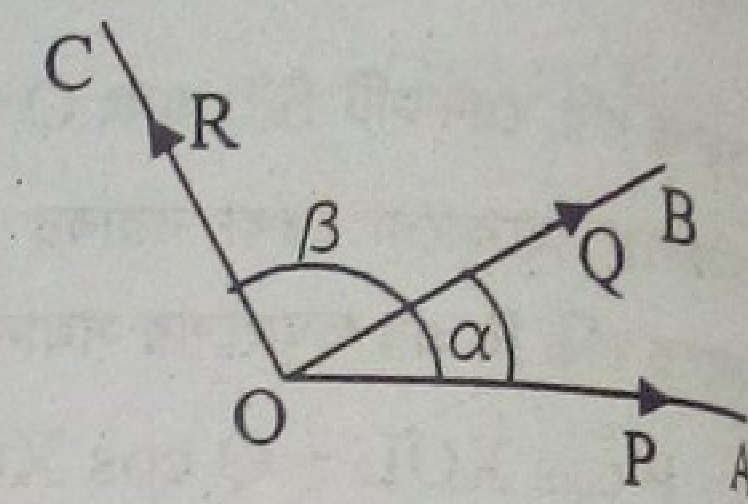
$$= 0 + 2P\times\frac{\sqrt{3}}{2} + 3P\times(-\frac{\sqrt{3}}{2}) = -\frac{\sqrt{3}}{2}P \cdots \text{(ii)}$$

$(i)^2 + (ii)^2 \Rightarrow R^2 = \frac{9}{4}P^2 + \frac{3}{4}P^2 = 3P^2$. $\therefore$ বলগুলোর লব্ধির মান $\sqrt{3}P$.

(ii) $\div$ (i) $\Rightarrow \tan\theta = \dfrac{1}{\sqrt{3}} = \tan 30° = \tan(180° + 30°)$

$\therefore\ \theta = 210°$ , যেহেতু $R\sin\theta$ এবং $R\cos\theta$ উভয়ে ঋণাত্মক।

**9(b) একই সমতলে অবস্থিত OA , OB, OC রেখা বরাবর যথাক্রমে P, Q, R বলগুলোর লব্ধি F হলে প্রমাণ কর যে, $F^2 = P^2 + Q^2 + R^2 + 2QR\cos BOC + 2RP\cos COA + 2PQ\cos AOB$**




প্রমাণঃ মনে করি, লব্ধি F, OA এর সাথে $\theta$ কোণ উৎপন্ন করে এবং $\angle AOB = \alpha$, $\angle AOC = \beta$ . তাহলে, $\angle BOC = \beta - \alpha$.

OA এবং এর উপর লম্ব রেখা বরাবর বলগুলোর লম্বাংশ নিয়ে পাই,

$F\cos\theta = P\cos 0° + Q\cos\alpha + R\cos\beta$

$\quad = P + Q\cos\alpha + R\cos\beta \cdots\cdots$ (i) এবং

$F\sin\theta = P\sin 0° + Q\sin\alpha + R\sin\beta = Q\sin\alpha + R\sin\beta \cdots\cdots$ (ii)

$\therefore$ (i)$^2$ + (ii)$^2 \Rightarrow F^2 = P^2 + Q^2\cos^2\alpha + R\cos^2\beta + 2PQ\cos\alpha + 2\,QR\cos\alpha\cos\beta$
$\quad + 2RP\cos\beta + Q^2\sin^2\alpha + R^2\sin^2\beta + 2QR\sin\alpha\sin\beta.$

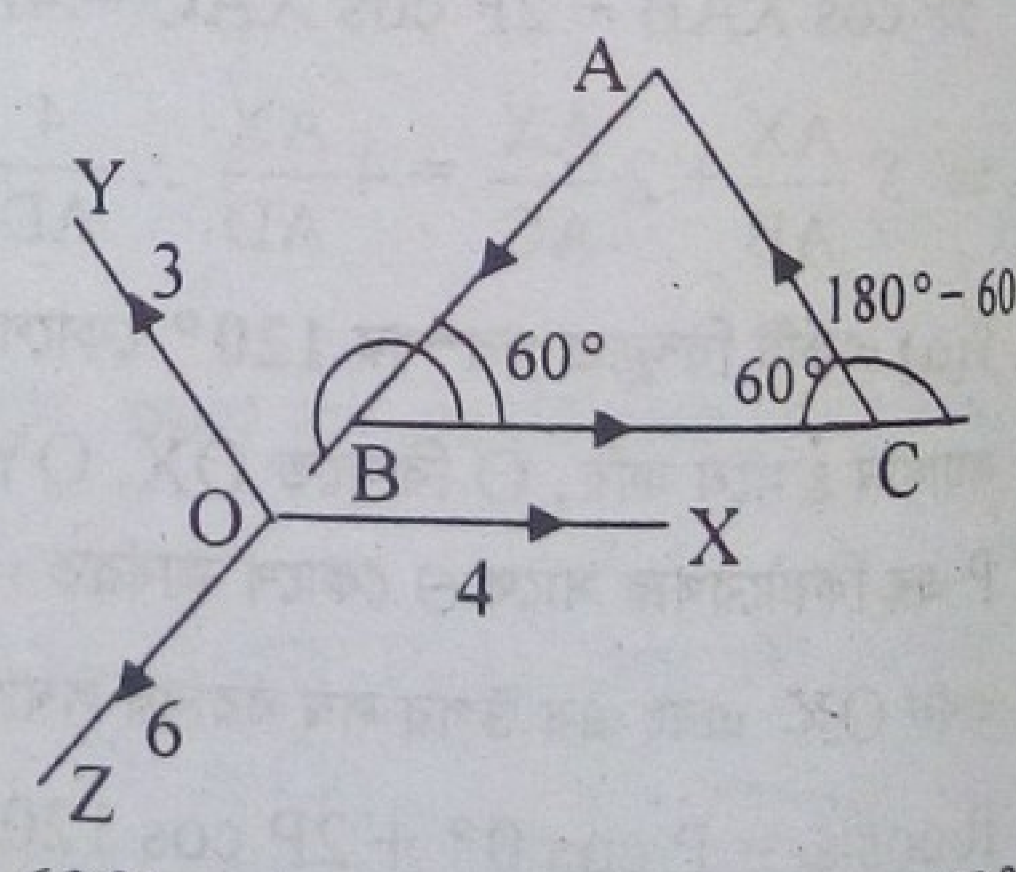
$\Rightarrow F^2 = P^2 + Q^2(\cos^2\alpha + \sin^2\alpha) + R^2(\cos^2\beta + \sin^2\beta) + 2PQ\cos\alpha + 2RP\cos\beta +$
$\quad 2\,QR(\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta)$

$\quad = P^2 + Q^2 + R^2 + 2PQ\cos\alpha + 2RP\cos\beta + 2\,QR\cos(\beta - \alpha)$

$\therefore\ F^2 = P^2 + Q^2 + R^2 + 2PQ\cos AOB + 2QR\cos BOC + 2RP\cos COA$



**9(c) ABC সমবাহু ত্রিভুজের AB, BC, CA বাহুর সমান্তরালে যথাক্রমে 4 N, 3 N, 6 N মানের তিনটি সমবিন্দু বল ক্রিয়াশীল। এদের লব্ধির মান নির্ণয় কর।**




সমাধান ঃ মনে করি, ABC সমবাহু ত্রিভুজের BC, CA, BC বাহুর সমান্তরালে যথাক্রমে 4 N, 3 N, 6 N মানের বল তিনটি O বিন্দুতে OX, OY, OZ বরাবর কার্যরত। ধরি, বলগুলোর লব্ধি R, যা OX এর সাথে $\theta$ কোণ উৎপন্ন করে। এখানে, OX এর সাথে 3 N ও 6 N বলদ্বয় যথাক্রমে $(180° - 60°)$ ও $(180° + 60°)$ কোণ উৎপন্ন করে।

এখন, OX এবং এর উপর লম্ব রেখা বরাবর উপাংশ নিয়ে পাই,

$R\cos\theta = 4\cos 0° + 3\cos(180° - 60°) + 6\cos(180° + 60°) = 4 - 3\cos 60° - 6\cos 60°$

$\quad = 4 - 3\times\dfrac{1}{2} - 6\times\dfrac{1}{2} = -\dfrac{1}{2} \cdots$ (i)

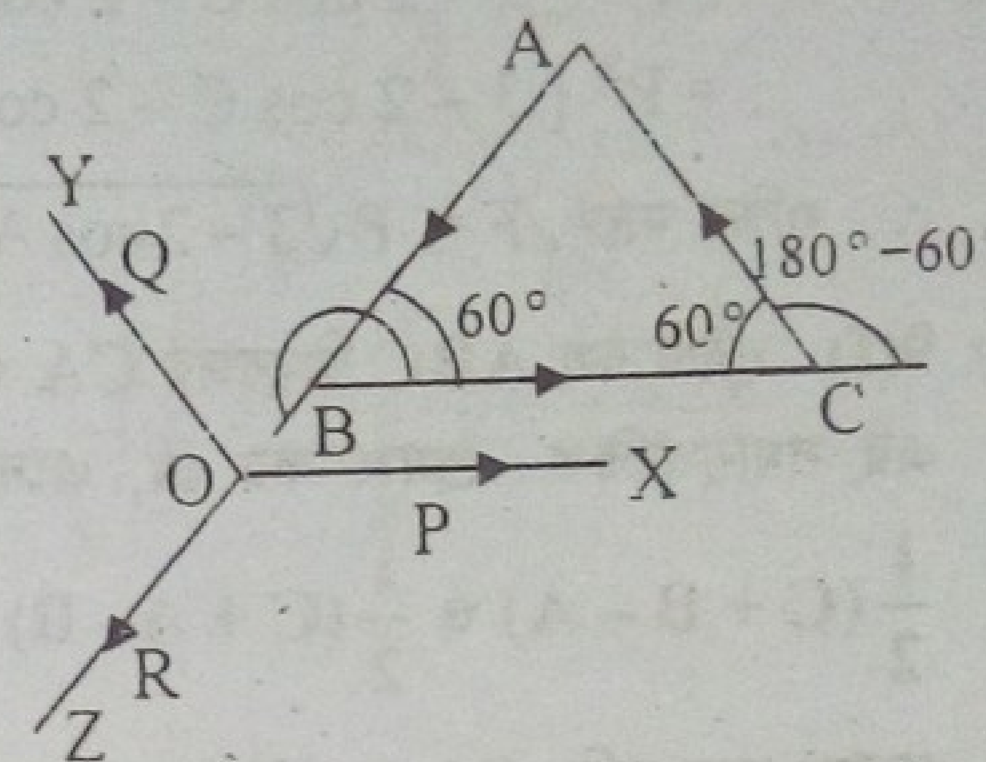
এবং $R\sin\theta = 4\sin 0° + 3\sin(180° - 60°) + 6\sin(180° + 60°)$

$\quad = 3\sin 60° - 6\sin 60° = 3\times\dfrac{\sqrt{3}}{2} - 6\times\dfrac{\sqrt{3}}{2} = -\dfrac{3\sqrt{3}}{2} \cdots$ (ii)

$(i)^2 + (ii)^2 \Rightarrow R^2 = \frac{1}{4} + \frac{27}{4} = \frac{28}{4} = 7 \quad \therefore$ লব্ধির মান $\sqrt{7}$ N

**9(d) কোন বিন্দুতে ক্রিয়ারত P, Q, R মানের বলগুলির দিক একইক্রমে কোন সমবাহু ত্রিভুজের বাহুগুলির সমান্তরাল। প্রমাণ কর যে, এদের লব্ধির মান $\sqrt{P^2 + Q^2 + R^2 - QR - RP - PQ}$**

প্রমাণঃ মনে করি, O বিন্দুতে OX, OY, OZ বরাবর কার্যরত যথাক্রমে P, Q, R মানের বলগুলোর দিক ABC সমবাহু ত্রিভুজের BC, CA, AB বাহুর সমান্তরাল। ধরি, বলগুলোর লব্ধি F, যা OX এর সাথে $\theta$ কোণ উৎপন্ন করে। এখানে, OX এর সাথে Q ও R বলদ্বয় যথাক্রমে $(180° - 60°)$ ও $(180° + 60°)$ কোণ উৎপন্ন করে।




এখন, OX এবং এর উপর লম্ব রেখা বরাবর উপাংশ নিয়ে পাই,

$$F\cos\theta = P\cos 0° + Q\cos(180° - 60°) + R\cos(180° + 60°)$$

$$= P - Q\cos 60° - R\cos 60° = P - \frac{1}{2}Q - \frac{1}{2}R \cdots (i)$$

এবং $F\sin\theta = P\sin 0° + Q\sin(180° - 60°) + R\sin(180° + 60°)$

$$= Q\sin 60° - R\sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}Q - \frac{\sqrt{3}}{2}R \cdots (ii)$$

$$(i)^2 + (ii)^2 \Rightarrow F^2 = P^2 + \frac{1}{4}Q^2 + \frac{1}{4}R^2 - PQ + \frac{1}{2}QR - RP + \frac{3}{4}Q^2 + \frac{3}{4}R^2 - \frac{3}{2}QR$$

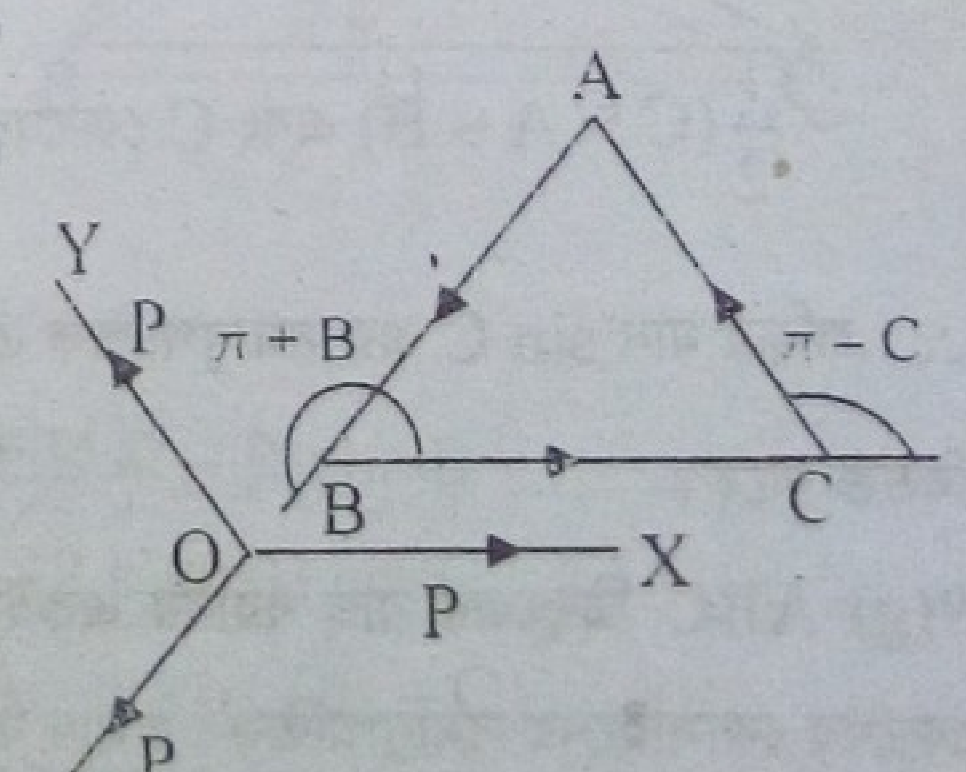
$$= P^2 + Q^2 + R^2 - PQ - RP - QR \Rightarrow F = \sqrt{P^2 + Q^2 + R^2 - QR - RP - PQ}$$

$\therefore$ লব্ধির মান $\sqrt{P^2 + Q^2 + R^2 - QR - RP - PQ}$.

**9(e) P মানের তিনটি বল একটি বিন্দুতে এরূপভাবে কার্যরত যেন এদের দিক $\Delta ABC$ এর BC, CA এবং AB বাহুর সমান্তরাল। প্রমাণ করে যে, এদের লব্ধির মান $P\sqrt{3 - 2\cos A - 2\cos B - 2\cos C}$.**

[ঢা.'১০; বুয়েট'০০-০১]

প্রমাণঃ মনে করি, O বিন্দুতে OX, OY, OZ বরাবর কার্যরত যথাক্রমে P মানের বল তিনটি দিক ABC ত্রিভুজের BC, CA, AB বাহুর সমান্তরাল। ধরি, বলগুলোর লব্ধি F, যা OX এর সাথে $\theta$ কোণ উৎপন্ন করে।




এখন, OX এবং এর উপর লম্ব রেখা বরাবর উপাংশ নিয়ে পাই,

$$F\cos\theta = P\cos 0^c + P\cos(\pi - C) + P\cos(\pi + B)$$

$$= P(1 - \cos C - \cos B)$$

এবং $F\sin\theta = P\sin 0° + P\sin(\pi - C) + P\sin(\pi + B)$

$$= P(\sin C - \sin B)$$

(i) ও (ii) এর বর্গের সমষ্টি নিয়ে পাই,

$$F^2 = P^2 (1 + \cos^2 C + \cos^2 B - 2\cos C - 2\cos B + 2\cos B\cos C + \sin^2 C + \sin^2 B - 2\sin B\sin C)$$

$$\Rightarrow F^2 = P^2 \{3 - 2\cos C - 2\cos B + 2\cos(B + C)\}$$

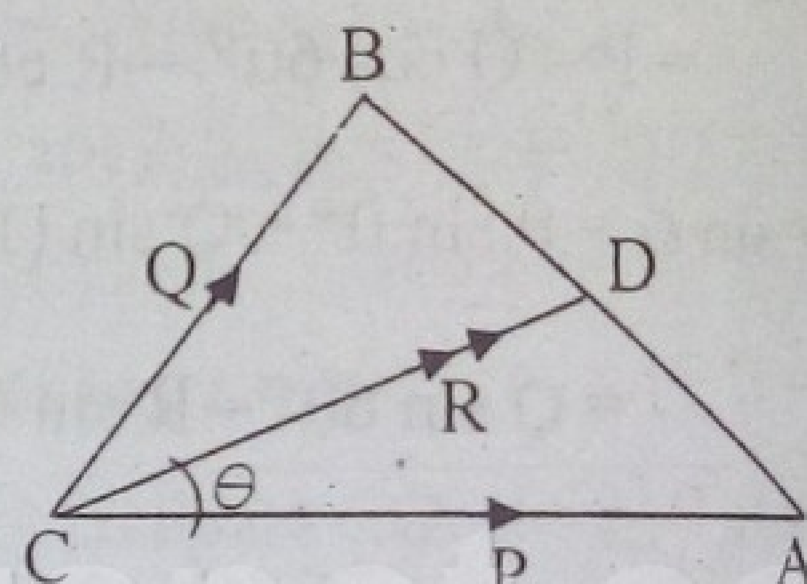
$$= P^2 \{3 - 2\cos C - 2\cos B + 2\cos(\pi - A)\}$$

$\therefore$ লব্ধির মান , $F = P\sqrt{3 - 2\cos A - 2\cos B - 2\cos C}$

**9(f) দুইটি বল ABC ত্রিভুজের CA ও CB বাহু বরাবর ক্রিয়া করে এবং এদের মান যথাক্রমে cos A ও cos B এর সমানুপাতিক। প্রমাণ কর যে, এদের লব্ধির মান sin C এর সমানুপাতিক এবং এর গতি পথ C কোণকে $\frac{1}{2}(C + B - A)$ ও $\frac{1}{2}(C + A - B)$ এ দুই অংশে বিভক্ত করে।** [ব.'০৫,'১০; ঢা.'০৬; চ.'১১]

প্রমাণঃ মনে করি, CA ও CB বাহু বরাবর ক্রিয়ারত যথাক্রমে P ও Q বলের লব্ধি R, যা CD বরাবর ক্রিয়াশীল। ধরি, $\angle ACD = \theta$. শর্তানুসারে, $P = k\cos A$, $Q = k\cos B$, যেখানে k একটি সমানুপাতিক ধ্রুবক।

CA এবং এর উপর লম্ব বরাবর লম্বাংশ নিয়ে পাই,




$$R\cos\theta = P\cos 0^\circ + Q\cos C = P + Q\cos C$$

$$= k\cos A + k\cos B\cos C$$

$$= k\cos(\pi - \overline{A + B}) + k\cos B\cos C$$

$$= -k\cos(B + C) + k\cos B\cos C$$

$$= -k\cos B\cos C + k\sin B\sin C + k\cos A\cos C$$



$\therefore R\cos\theta = k\sin B\sin C \cdots\cdots$ (i) এবং

$R\sin\theta = Q\sin C = k\cos B\sin C \cdots\cdots$ (ii)

$(i)^2 + (ii)^2 \Rightarrow R^2 = k^2\sin^2 C(\sin^2 B + \cos^2 B) = k^2\sin^2 C \Rightarrow R = k\sin C.$

$\therefore$ লব্ধির মান sin C এর সমানুপাতিক ।

এখন $(ii) \div (i) \Rightarrow \tan\theta = \cot B = \tan(\frac{\pi}{2} - B) \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{2} - B = \frac{1}{2}(A + B + C) - B$

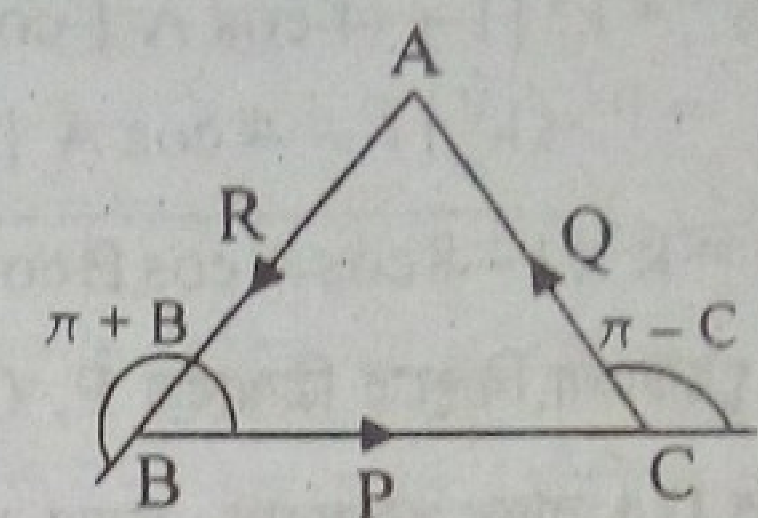
$= \frac{1}{2}(C + A - B)$ এবং C কোণের অপর অংশ $= C - \theta = C - \frac{1}{2}(C + A - B) = \frac{1}{2}(C + B - A)$

$\therefore$ লব্ধির মান sin C এর সমানুপাতিক এবং এর গতি পথ C কোণকে $\frac{1}{2}(C + B - A)$ ও $\frac{1}{2}(C + A - B)$ অংশে বিভক্ত করে।

**9(g) ABC ত্রিভুজের বাহু বরাবর একইক্রমে কার্যরত তিনটি সমবিন্দু বলের মান এদের স্ব স্ব ক্রিয়ারেখার বিপরীত কোণের কোসাইনের সমানুপাতিক। প্রমাণ কর যে, $\sqrt{1 - 8\cos A\cos B\cos C}$.**

প্রমাণঃ মনে করি, ABC ত্রিভুজের BC , CA, AB বাহু বরাবর ক্রিয়ারত বলত্রয় যথাক্রমে $P = k\cos A$, $Q = k\cos B$ এবং $R = k\cos C$, যেখানে k একটি সমানুপাতিক ধ্রুবক।

ধরি, বলগুলোর লব্ধি F, যা BC এর সাথে $\theta$ কোণ উৎপন্ন করে।




P বলের দিক এবং এর উপর লম্ব বরাবর লম্বাংশ নিয়ে পাই,

$$F\cos\theta = P\cos 0^\circ + Q\cos(\pi - C) + R\cos(\pi + B)$$
$$= P - Q\cos C - R\cos B$$
$$= k\cos A - k\cos B\cos C - k\cos C\cos B$$
$$= k\cos A - 2k\cos B\cos C$$
$$= k\cos A - k\{\cos(B + C) + \cos(B - C)\}$$
$$= 2k\cos A - k\cos(B - C)\cdots\text{(i)},$$
$$[\because \cos(B + C) = \cos(\pi - A) = -\cos A]$$

এবং $F\sin\theta = P\sin 0^\circ + Q\sin(\pi - C) + R\sin(\pi + B) = Q\sin C - R\sin B$

$$= k\cos B\sin C - k\cos C\sin B = -k\sin(B - C)\cdots\cdots\text{(ii)}$$

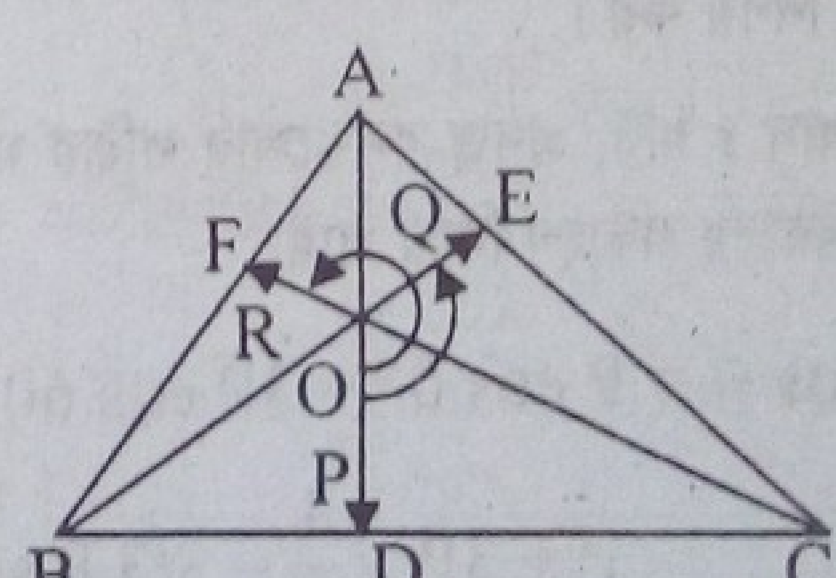
এখন, $(i)^2 + (ii)^2 \Rightarrow F^2 = k^2\{4\cos^2 A + \cos^2(B - C) - 4\cos A\cos(B - C) + \sin^2(B - C)\}$

$$\Rightarrow F^2 = k^2[1 - 4\cos A\{\cos(B - C) - \cos A\}]$$
$$= k^2[1 - 4\cos A\{\cos(B - C) + \cos(B + C)\}] = k^2[1 - 8\cos A\cos B\cos C]$$

$\Rightarrow F = k\sqrt{1 - 8\cos A\cos B\cos C}$ $\therefore$ লব্ধির মান $\sqrt{1 - 8\cos A\cos B\cos C}$ এর সমানুপাতিক।



**9(h) ABC ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দু থেকে বিপরীত বাহুর উপর অঙ্কিত লম্ব বরাবর ক্রিয়ারত বলগুলোর মান এদের অনুসঙ্গী শীর্ষ কোণের কোসাইনের সমানুপাতিক। প্রমাণ কর যে, এদের লব্ধির মান $\sqrt{1 - 8\cos A\cos B\cos C}$ এর সমানুপাতিক।**




প্রমাণঃ মনে করি, ABC ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দু থেকে বিপরীত বাহুর উপর অঙ্কিত লম্ব AD, BE, CF বরাবর ক্রিয়ারত যথাক্রমে P, Q, R বলত্রয় পরস্পর O বিন্দুতে মিলিত হয়। শর্তানুসারে, $P = k\cos A$, $Q = k\cos B$ এবং $R = k\cos C$, যেখানে k একটি সমানুপাতিক ধ্রুবক। ধরি, বলগুলোর লব্ধি S, যা P বলের সাথে $\theta$ কোণ উৎপন্ন করে। P বলটি Q বলের সাথে $\angle DOE = \pi - C$ এবং R বলের সাথে $2\pi - \angle DOF = 2\pi - (\pi - B) = \pi + B$ কোণ উৎপন্ন করে।

P বলের দিক এবং এর উপর লম্ব বরাবর লম্বাংশ নিয়ে পাই,

$$S\cos\theta = P\cos 0^\circ + Q\cos(\pi - C) + R\cos(\pi + B) = P - Q\cos C - R\cos B$$
$$= k\cos A - k\cos B\cos C - k\cos C\cos B = k\cos A - 2k\cos B\cos C$$
$$= k\cos A - k\{\cos(B + C) + \cos(B - C)\} = 2k\cos A - k\cos(B - C)\cdots\text{(i)}$$
$$[\because \cos(B + C) = \cos(\pi - A) = -\cos A]$$

এবং $S \sin\theta = P\sin 0^\circ + Q\sin(\pi - C) + R\sin(\pi + B) = Q\sin C - R\sin B$

$= k\cos B\sin C - k\cos C\sin B = -k\sin(B - C)$ ...... (ii)

এখন, $(i)^2 + (ii)^2 \Rightarrow S^2 = k^2\{4\cos^2 A + \cos^2(B-C) - 4\cos A\cos(B-C) + \sin^2(B-C)\}$

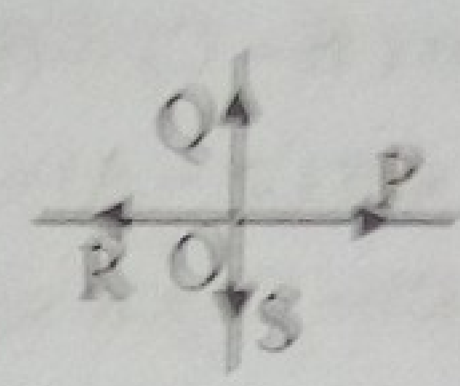
$\Rightarrow S^2 = k^2[1 - 4\cos A\{\cos(B-C) - \cos A\}]$

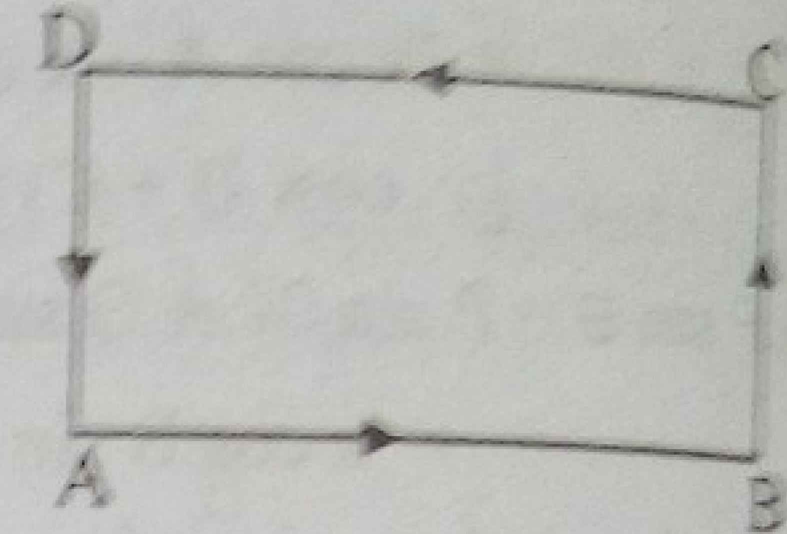
$= k^2[1 - 4\cos A\{\cos(B-C) + \cos(B+C)\}] = k^2[1 - 8\cos A\cos B\cos C]$

$\Rightarrow S = k\sqrt{1 - 8\cos A\cos B\cos C}$ $\therefore$ লব্ধির মান $\sqrt{1-8\cos A\cos B\cos C}$ এর সমানুপাতিক।

**10(a)** কোনো বিন্দুতে ক্রিয়ারত P, Q, R, S মানের বলগুলির দিক ABCD আয়তক্ষেত্রের যথাক্রমে AB, BC, CD ও DA বাহুর সমান্তরাল। প্রমাণ কর যে, এদের লব্ধির মান $\sqrt{P^2 + Q^2 + R^2 + S^2 - 2PQ - 2QS}$.

প্রমাণ: মনে করি, বলগুলো O বিন্দুতে ক্রিয়ারত এবং এদের লব্ধির মান F, যা P এর দিক AB এর সাথে $\theta$ কোণ উৎপন্ন করে। তাহলে, P এর দিক AB এবং এর উপর লম্ব বরাবর লম্বাংশ নিয়ে পাই,




$F\cos\theta = P\cos 0^\circ + Q\cos 90^\circ + R\cos 180^\circ + S\cos 270^\circ$

$\Rightarrow F\cos\theta = P - R$ ...... (i) এবং

$F\sin\theta = P\sin 0^\circ + Q\sin 90^\circ + R\sin 180^\circ + S\sin 270^\circ = Q - S$ ...... (ii)

$(i)^2 + (ii)^2 \Rightarrow F^2 = P^2 + R^2 - 2PR + Q^2 + S^2 - 2QS$

$\therefore$ লব্ধির মান, $F = \sqrt{P^2 + Q^2 + R^2 + S^2 - 2PQ - 2QS}$

**10(b)** P, 3P, $\sqrt{3}$ P ও $\sqrt{3}$ P মানের বলগুলো যথাক্রমে একতলীয় OA, OB, OC ও OD সরলরেখা বরাবর ক্রিয়া করে। যদি $\angle AOB = 60^\circ$, $\angle BOC = 90^\circ$ এবং $\angle COD = 120^\circ$ হয়, তাহলে এদের লব্ধির মান ও দিক নির্ণয় কর।

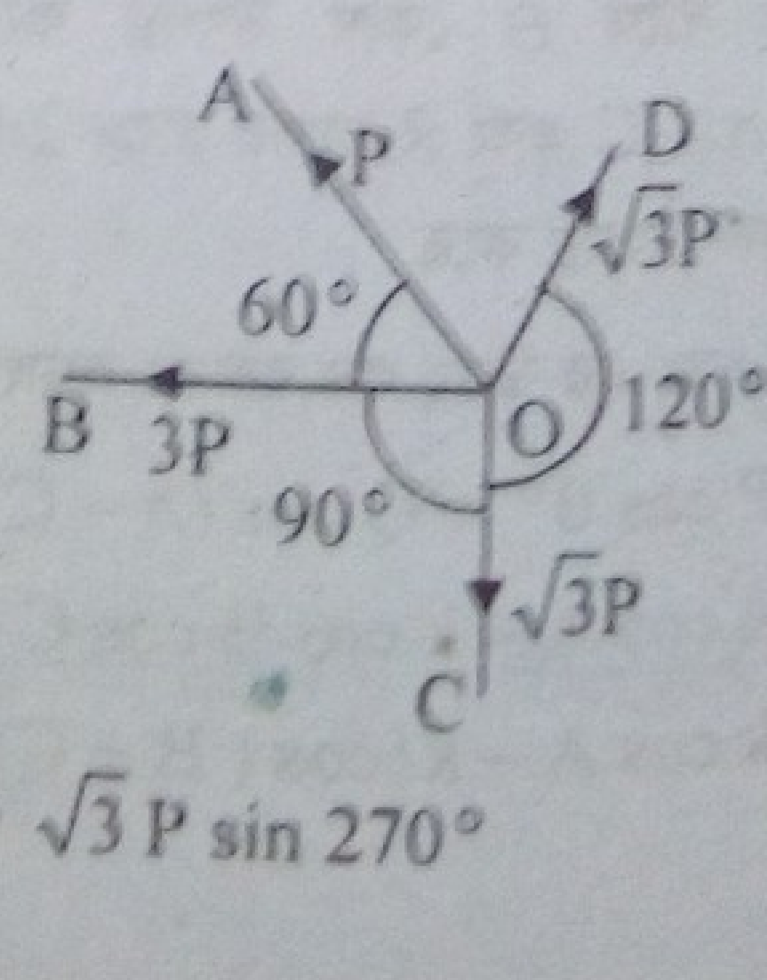
সমাধান: ধরি, প্রদত্ত বলগুলোর লব্ধির মান R, যা OA এর সাথে $\theta$ কোণ উৎপন্ন করে। OA বরাবর এবং এর উপর লম্ব বরাবর লম্বাংশ নিয়ে পাই,

$R\cos\theta = P\cos 0^\circ + 3P\cos 60^\circ + \sqrt{3}P\cos(90^\circ + 60^\circ) + \sqrt{3}P\cos 270^\circ$

$P + 3P \times \frac{1}{2} - \sqrt{3}P\sin 60^\circ + \sqrt{3}P \times 0$

$P + 3P \times \frac{1}{2} - \sqrt{3}P\sin 60^\circ + \sqrt{3}P \times 0$

$= P + \frac{3}{2}P - \sqrt{3}P \times \frac{\sqrt{3}}{2} = P$ ...... (i) এবং




$\sin\theta = P\sin 0^\circ + 3P\sin 60^\circ + \sqrt{3}P\sin(90^\circ + 60^\circ) + \sqrt{3}P\sin 270^\circ$

$$= 3P \times \frac{\sqrt{3}}{2} + \sqrt{3}\,P\cos 60^\circ - \sqrt{3}\,P = \frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}P - \sqrt{3}\,P = \sqrt{3}\,P$$

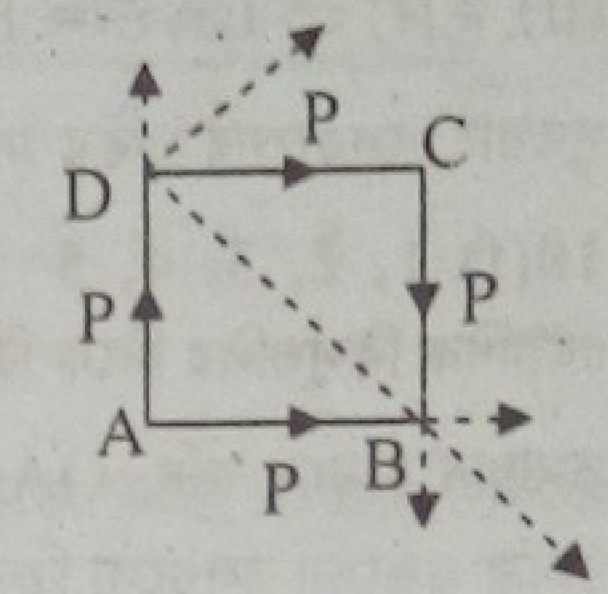
$(i)^2 + (ii)^2 \Rightarrow R^2 = P^2 + 3P^2 = 4P^2 \;\therefore\; R = 2P$

$(ii) \div (i) \Rightarrow \tan\theta = \sqrt{3} = \tan 60^\circ \;\therefore \theta = 60^\circ$

$\therefore$ লব্ধির মান 2P, যা P বলের ক্রিয়ারেখার সাথে $60^\circ$ কোণ উৎপন্ন করে।

**(c) P মানের চারটি বল ABCD বর্গের AB, CB , AD ও DC বরাবর ক্রিয়াশীল। লব্ধির মান ও দিক নির্ণয় কর।**

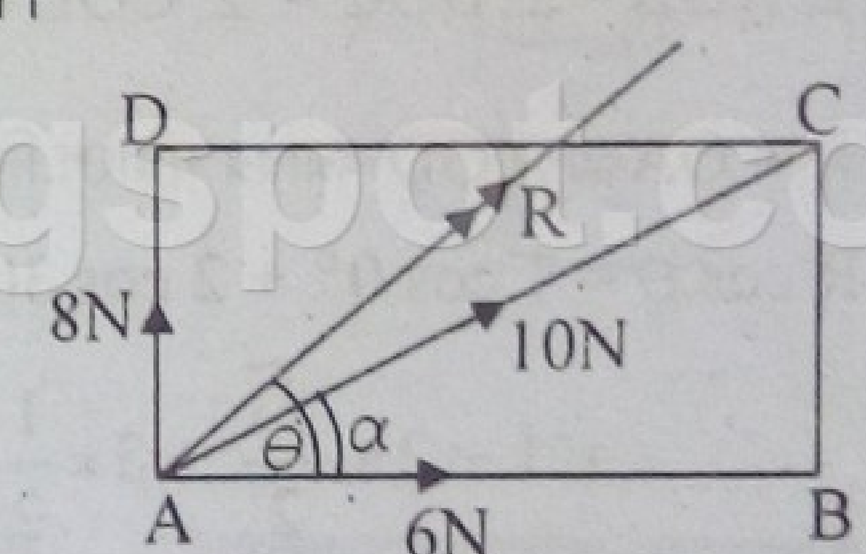
সমাধান ঃ AB ও CB বরাবর সমকোণে কার্যরত P মানের সমান বল দুইটির লব্ধি মান $= \sqrt{P^2 + P^2} = \sqrt{2}P$, যা DB কর্ণ বরাবর ক্রিয়ারত।




আবার, AD ও DC বরাবর সমকোণে কার্যরত P মানের সমান বল দুইটির লব্ধি মান $= \sqrt{P^2 + P^2} = \sqrt{2}P$, যা DC এর সাথে $45^\circ$ কোণে ক্রিয়ারত।

এখন, পরস্পর সমকোণে কার্যরত $\sqrt{2}P$ মানের সমান বল দুইটির লব্ধি অর্থাৎ P মানের সমান বল চারটির লব্ধির মান $= \sqrt{(P\sqrt{2})^2 + (P\sqrt{2})^2} = \sqrt{2P^2 + 2P^2} = 2P$, যা DC বরাবর ক্রিয়ারত।

**10(d) ABCD আয়তক্ষেত্রের AB ও BC বাহু যথাক্রমে 4 cm এবং 3 cm । AB, AC, AD বরাবর ক্রিয়ারত যথাক্রমে 6N, 10N ও 8N সমবিন্দু বল তিনটির লব্ধি ও ক্রিয়া রেখা নির্ণয় কর।**




সমাধান ঃ দেওয়া আছে, AB = 4 cm, BC = 3 cm.

$\therefore\; AC^2 = AB^2 + BC^2 = 4^2 + 3^2 \Rightarrow AC = 5$

ধরি, $\angle BAC = \alpha$. তাহলে, $\sin\alpha = \frac{3}{5}$ এবং $\cos\alpha = \frac{4}{5}$.

মনে করি , বলগুলোর লব্ধির মান R নিউটন, যা A বিন্দুতে AC এর সাথে $\theta$ কোণে ক্রিয়াশীল।

AB এবং AD বরাবর লম্বাংশ নিয়ে পাই,

$R\cos\theta = 6\cos 0^\circ + 10\cos\alpha + 8\cos 90^\circ = 6 + 10\times\frac{4}{5} = 14 \cdots\cdots$ (i) এবং

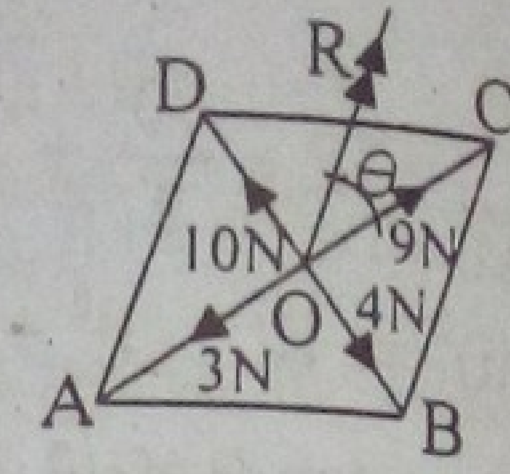
$R\sin\theta = 6\sin 0^\circ + 10\sin\alpha + 8\sin 90^\circ = 10\times\frac{3}{5} + 8 = 14 \cdots\cdots$ (ii)

$(i)^2 + (ii)^2 \Rightarrow R^2 = (14)^2 + (14)^2 = 2(14)^2 \Rightarrow R = 14\sqrt{2}$

$(ii) \div (i) \Rightarrow \tan\theta = 1 = \tan 45^\circ \Rightarrow \theta = 45^\circ$

সুতরাং, বলগুলোর লব্ধির মান $14\sqrt{2}$ N এবং তা $\angle BAD$ এর সমদ্বিখণ্ডক বরাবর কিয়াশীল।

**10(e) ABCD রম্বসের কর্ণদ্বয়ের ছেদ বিন্দু O তে 3 N, 4 N, 9 N এবং 10 N মানের বলগুলো যথাক্রমে OA, OB, OC এবং OD বরাবর ক্রিয়া করে। লব্ধির মান ও দিক নির্ণয় কর।**




সমাধান ঃ ধরি, বলগুলোর লব্ধির মান R নিউটন, যা O বিন্দুতে OC এর সাথে $\theta$ কোণে ক্রিয়াশীল। তাহলে, OC এবং OD বরাবর লম্বাংশ নিয়ে পাই,

$$R\cos\theta = 9\cos 0^\circ + 10\cos 90^\circ + 3\cos 180^\circ + 4\cos 270^\circ$$
$$= 9 - 3 = 6 \cdots \text{(i)}$$

এবং $R\sin\theta = 9\sin 0^\circ + 10\sin 90^\circ + 3\sin 180^\circ + 4\sin 270^\circ = 10 - 4 = 6 \cdots \text{(ii)}$

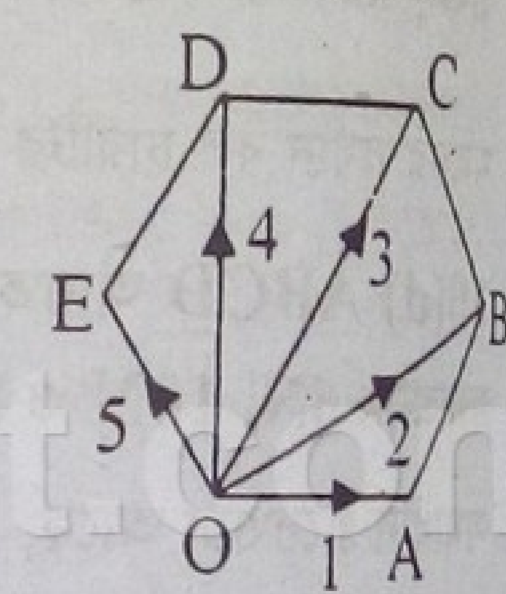
$\text{(i)}^2 + \text{(ii)}^2 \Rightarrow R^2 = (6)^2 + (6)^2 = 2.(6)^2 \Rightarrow R = 6\sqrt{2}$

$\text{(ii)} \div \text{(i)} \Rightarrow \tan\theta = 1 = \tan 45^\circ \Rightarrow \theta = 45^\circ$

সুতরাং, বলগুলোর লব্ধির মান $6\sqrt{2}$ N এবং তা O বিন্দুতে OC এর সাথে $45^\circ$ কোণে কিয়াশীল।

**10(f) 1, 2, 3, 4, 5 কেজি ওজনের বলগুলি কোন সুষম ষড়ভুজের একটি কৌণিক বিন্দু থেকে যথাক্রমে অপর কৌণিক বিন্দুগুলির দিকে ক্রিয়ারত আছে। এদের লব্ধির মান নির্ণয় কর।**

সমাধান ঃ মনে করি, OABCDE সুষম ষড়ভুজের OA, OB, OC, OD, OF বরাবর যথাক্রমে 1, 2, 3, 4, 5 কেজি ওজনের বলগুলো ক্রিয়াশীল এবং এদের লব্ধির মান R কেজি ওজন, যা OA এর সাথে $\theta$ কোণ উৎপন্ন করে।




তাহলে, $\angle AOE = 180^\circ - \dfrac{360^0}{6} = 120^\circ$ এবং

$$\angle AOB = \angle BOC = \angle COD = \angle DOE = \frac{120^0}{4} = 30^\circ$$



এখন OA এবং OD বরাবর লম্বাংশ নিয়ে পাই,

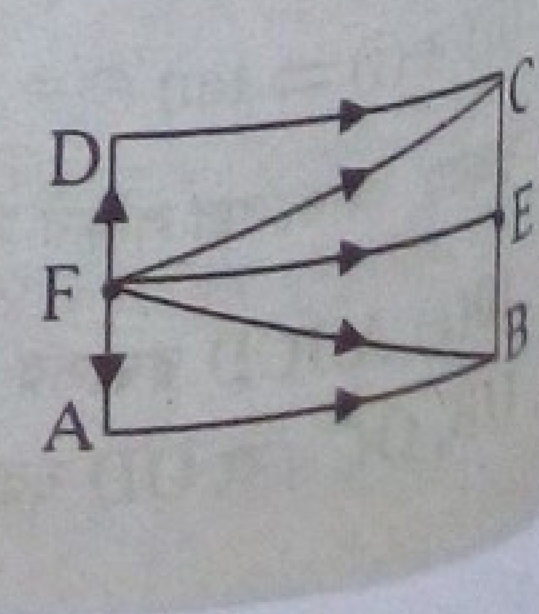
$$R\cos\theta = 1\cos 0^\circ + 2\cos 30^\circ + 3\cos 60^\circ + 4\cos 90^\circ + 5\cos 120^\circ$$
$$= 1 + 2\times\frac{\sqrt{3}}{2} + 3\times\frac{1}{2} + 4\times 0 + 5\times -\frac{1}{2} = \sqrt{3} \cdots\cdots \text{(i) এবং}$$

$$R\sin\theta = 1\sin 0^\circ + 2\sin 30^\circ + 3\sin 60^\circ + 4\sin 90^\circ + 5\sin 120^\circ$$
$$= 1\times 0 + 2\times\frac{1}{2} + 3\times\frac{\sqrt{3}}{2} + 4\times 1 + 5\times\frac{\sqrt{3}}{2} = 5 + 4\sqrt{3} \cdots\cdots \text{(ii)}$$

$\text{(i)}^2 + \text{(ii)}^2 \Rightarrow R^2 = (\sqrt{3})^2 + (5 + 4\sqrt{3})^2 = 3 + 25 + 48 + 40\sqrt{3} = 76 + 40\sqrt{3}$

$\therefore$ বলগুলোর লব্ধির মান $= \sqrt{76 + 40\sqrt{3}} = 2\sqrt{19 + 10\sqrt{3}}$ কেজি ওজন।

**11(a) ABCD চতুর্ভুজের BC ও AD এর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে E, F. দেখাও যে, $\overline{AB}$ ও $\overline{DC}$ বলদ্বয়ের লব্ধি $2\overline{FE}$.**




প্রমাণঃ F, B এবং F, C যোগ করি। বল সংযোজনের ত্রিভুজ সূত্র হতে,

$$\overline{AB} + \overline{DC} = (\overline{AF} + \overline{FB}) + (\overline{DF} + \overline{FC})$$
$$= (\overline{AF} + \overline{DF}) + (\overline{FB} + \overline{FC})$$

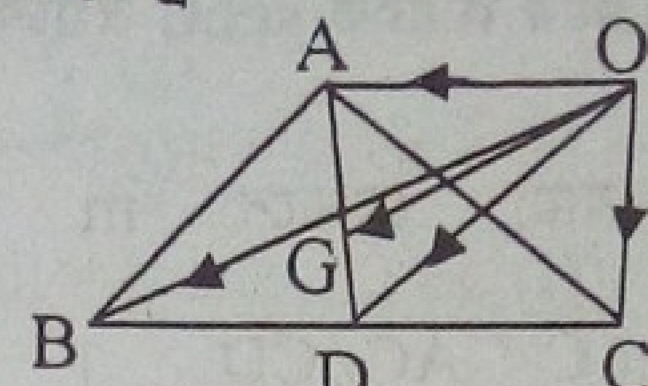
$= \underline{0} + 2\overline{FE}$ [ অনুপাত সূত্র দ্বারা ]

$\therefore \overline{AB} + \overline{DC} = 2\overline{FE}$ (প্রমাণিত)

**(b) $\Delta$ABC এর ভরকেন্দ্র G হলে, দেখাও যে** **প্রশ্নমালা VIII A** **$\overline{OA}$, $\overline{OB}$, $\overline{OC}$ বলত্রয়ের লব্ধি $3\overline{OG}$.**

প্রমাণঃ O, D যোগ করি, যেখানে D, BC এর ABC এর ভরকেন্দ্র

G, AD এর উপর অবস্থিত হবে এবং AG : GD = 2 : 1.




এখন, $\overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC} = \overline{OA} + (\overline{OB} + \overline{OC})$

$= 1.\overline{OA} + 2.\overline{OD}$ [ অনুপাত সূত্র দ্বারা ]

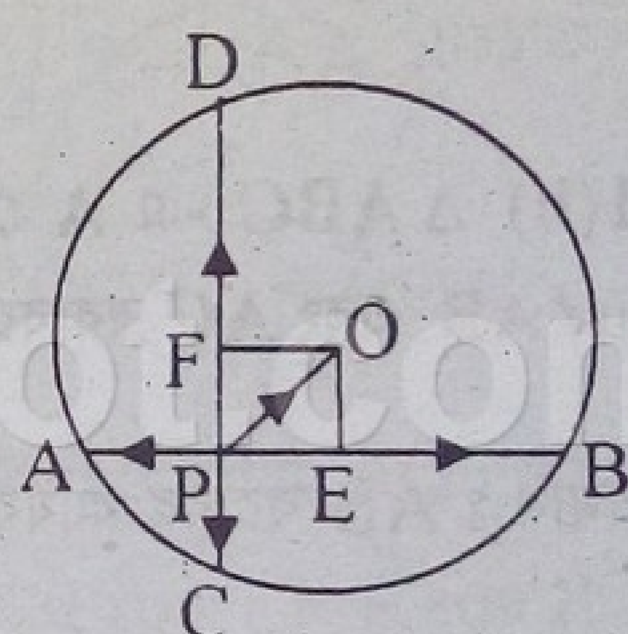
$= (1+2)\overline{OG}$ [ অনুপাত সূত্র দ্বারা ; যেহেতু AG : GD = 2 : 1]

$\therefore \overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC} = 3\,\overline{OG}$

**11(c) কোন বৃত্তের দুইটি জ্যা AB ও CD পরস্পর P বিন্দুতে সমকোণে ছেদ করে। বৃত্তের কেন্দ্র O হলে, দেখাও যে, $\overline{PA}$, $\overline{PB}$, $\overline{PC}$, $\overline{PD}$ বলগুলোর লব্ধি $2\overline{PO}$ হবে।**

প্রমাণঃ বৃত্তের কেন্দ্র O থেকে OE ⊥ AB এবং OF ⊥ CD অঙ্কন করি ।

তাহলে E ও F হবে যথাক্রমে AB ও CD এর মধ্যবিন্দু।




এখন, $\overline{PA} + \overline{PB} = (\overline{EA} - \overline{EP}) + (\overline{PE} + \overline{EB})$



$= \overline{EA} + \overline{PE} + \overline{AE} + \overline{PE}$ [$\because$ AE = EB]

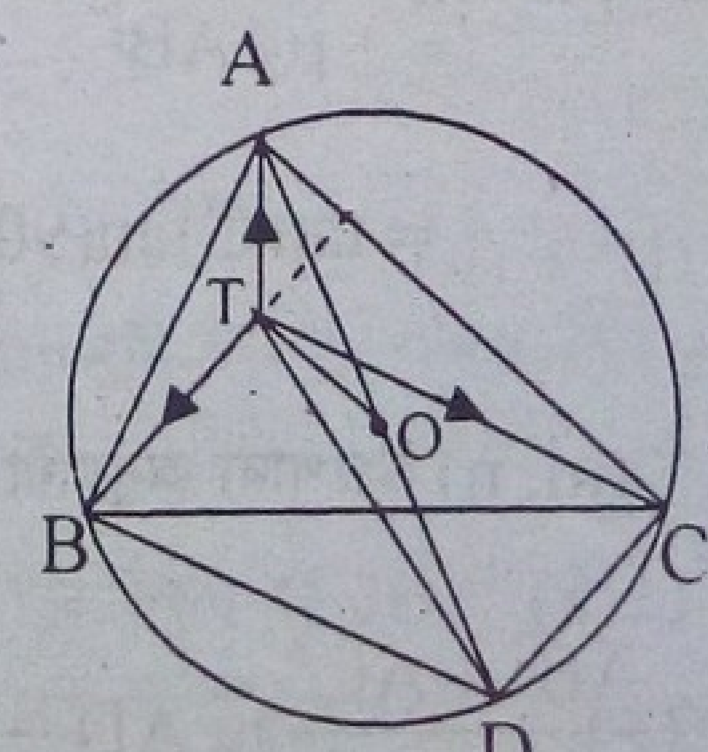
$= \overline{EA} + 2\overline{PE} - \overline{EA} = 2\overline{PE}$

অদ্রূপ, $\overline{PC} + \overline{PD} = 2\overline{PF}$

$\therefore \overline{PA} + \overline{PB} + \overline{PC} + \overline{PD} = 2\overline{PE} + 2\overline{PF} = 2(\overline{PE} + \overline{PF}) = 2\,\overline{P0}$ [ বলের সামন্ড্রিরিক সূত্রানুযায়ী। ]

**(d) T, O যথাক্রমে $\Delta$ABC –এর লম্ববিন্দু ও পরিকেন্দ্র। দেখাও যে, $\overline{TA}$, $\overline{TB}$, $\overline{TC}$ বলত্রয়ের লব্ধি $2\overline{TO}$**

প্রমাণঃ AO বর্ধিত করে AD ব্যাস অঙ্কন করি। B, D ও C, D যোগ করি। তাহলে,




∠ACD = 90° [ $\because$ অর্ধবৃত্তস্থ কোণ ] $\therefore$ DC ⊥ AC

আবার BT ⊥ AC [ $\because \Delta$ABC –এর লম্ববিন্দু T ]

$\therefore$ BT || DC . তদ্রূপ, BD || TC.

$\therefore$ BDCT একটি সামান্তরিক এবং TD একটি কর্ণ।

$\therefore$ বলত্রয়ের লব্ধি $= \overline{TA} + \overline{TB} + \overline{TC} = \overline{TA} + \overline{TD}$ [বলের সামান্তরিক সূত্র দ্বারা]

$= 2\,\overline{TO}$ [ $\because$ O, AD এর মধ্যবিন্দু।]

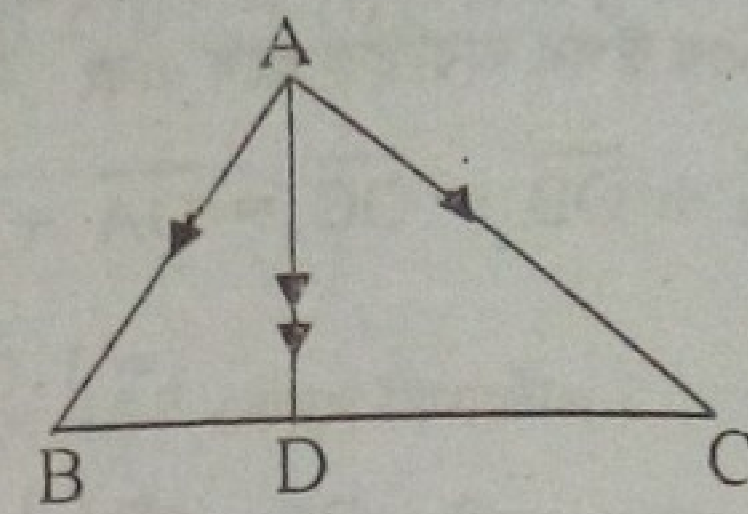
$\therefore$ বলত্রয়ের লব্ধি $2\,\overline{TO}$

অতিরিক্ত প্রশ্ন (সমাধানসহ)

**1(a) $\Delta ABC$ -এর $AB$ ও $AC$ বরাবর দুইটি বল $\sec B$ এবং $\sec C$ কার্যরত। দেখাও যে, এদের লব্ধি A হতে BC-এর উপর লম্ব বরাবর কার্যরত এবং এর মান $\tan B + \tan C$.**

প্রমাণ : BC -এর উপর AD লম্ব অঙ্কন করি। AB বরাবর কার্যরত $\sec B$ বলকে $(\frac{\sec B}{AB})\overline{AB} = m\overline{AB}$ এবং

AC বরাবর কার্যরত $\sec C$ বলকে $(\frac{\sec C}{AC})\overline{AC} = n\overline{AC}$ হিসাবে গণ্য




করা যায়, যেখানে $m = \frac{\sec B}{AB} = \frac{AB/BD}{AB} = \frac{1}{BD}$ এবং

$n = \frac{\sec C}{AC} = \frac{AC/CD}{AC} = \frac{1}{CD}$

এখন, $n : m = \frac{1}{CD} : \frac{1}{BD} = BD : CD.$

$\therefore$ (m, n) উপপাদ্য অনুযায়ী লব্ধি CD বরাবর কার্যরত এবং এর মান $= (m+n)AD = (\frac{1}{BD} + \frac{1}{CD})AD$

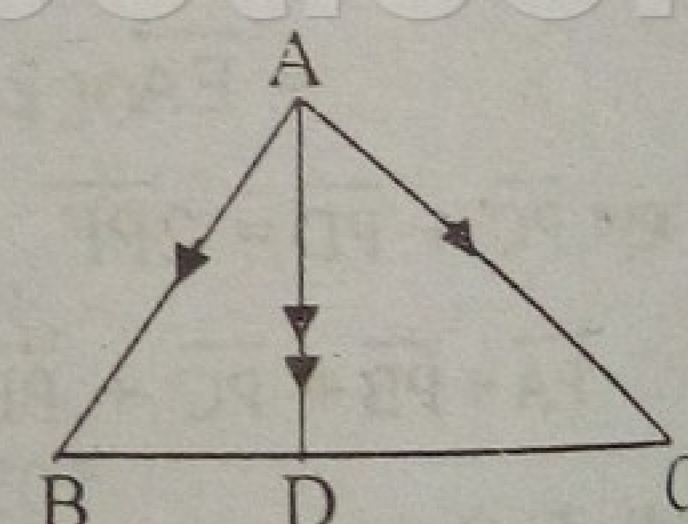
$$= \frac{AD}{BD} + \frac{AD}{CD} = \tan B + \tan C$$

**1(b) $\Delta ABC$ -এ A কোণটি এক সমকোণ। AD, BC বাহুর উপর লম্ব। প্রমাণ কর যে, AB বরাবর ক্রিয়ারত $\mu/AB$ এবং AC বরাবর ক্রিয়ারত $\mu/AC$ বলের লব্ধির মান $\mu/AD$ এবং লব্ধি বল AD বরাবর ক্রিয়া করে।**



প্রমাণ ঃ AB বরাবর কার্যরত $\mu/AB$ বলকে $(\frac{\mu}{AB^2})\overline{AB} = m\overline{AB}$ এবং AC

বরাবর কার্যরত $\mu/AC$ বলকে $(\frac{\mu}{AC^2})\overline{AC} = n\overline{AC}$ হিসাবে গণ্য করা যায়,




যেখানে $m = \mu/AB^2$ এবং $n = \mu/AC^2$

এখন, $n : m = \frac{\mu/AC^2}{\mu/AB^2} = \frac{AB^2}{AC^2} = \tan^2 C \quad [\because \angle A = 90^0]$

$$= \tan C \tan(90^0 - B) = \tan C \cot B = \frac{AD}{CD} \times \frac{BD}{AD} = BD : CD$$

$\therefore$ (m, n) উপপাদ্য অনুযায়ী লব্ধি CD বরাবর কার্যরত এবং এর মান $= (m+n)AD = (\frac{\mu}{AB^2} + \frac{\mu}{AC^2})AD$

$= (\frac{AB^2 + AC^2}{AB^2.AC^2})\mu AD = \frac{\mu.BC^2.AD}{AB^2.AC^2} = \mu.\frac{BC^2}{AB^2}.\frac{AD^2}{AC^2}.\frac{1}{AD} = \mu.\sec^2 B.\sin^2 C.\frac{1}{AD}$

$= \mu.\sec^2 B.\sin^2(90^0 - B).\frac{1}{AD} = \mu.\sec^2 B.\cos^2 B.\frac{1}{AD} = \frac{\mu}{AD}$

বিকল্প পদ্ধতি : ধরি, লব্ধির মান R, যা AB -এর সাথে $\theta$ কোণে কার্যরত। তাহলে R, AC এর সাথে $(90^\circ - \theta)$ কোণ উৎপন্ন করবে, যেহেতু $\angle BAC = 90^\circ$। বলের সাইন সূত্র হতে পাই,

$$\frac{\mu/AB}{\sin(90^\circ-\theta)}=\frac{\mu/AC}{\sin\theta}=\frac{R}{\sin 90^\circ}\Rightarrow\frac{\mu}{AB\cos\theta}=\frac{\mu}{AC\sin\theta}=R\ \cdots\cdots(i)$$

১ম ও ২য় অনুপাত হতে পাই, $\tan\theta=\dfrac{AC}{AB}=\cot C=\tan(90^\circ-B)=\tan BAD\Rightarrow\theta=\angle BAD$

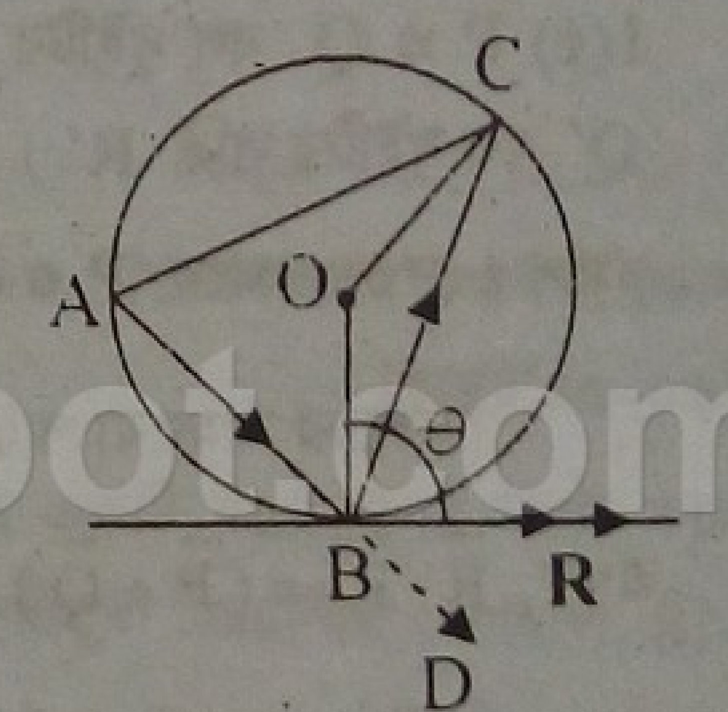
$\therefore$ লব্ধি AD বরাবর কার্যরত। আবার $\cos\theta=\cos BAD=\dfrac{AD}{AB}\Rightarrow AB\cos\theta=AD$

১ম ও ৩য় অনুপাত হতে পাই, $R=\dfrac{\mu}{AB\cos\theta}=\dfrac{\mu}{AD}$

$\therefore$ লব্ধির মান $\mu/AD$ এবং লব্ধি বল AD বরাবর ক্রিয়া করে।

**1(c) A, B, C একটি বৃত্তের পরিধিস্থ তিনটি বিন্দু। AB ও BC -এর সাথে ব্যস্তানুপাতিক দুইটি বল যথাক্রমে AB ও BC বরাবর ক্রিয়াশীল। দেখাও যে, এদের লব্ধি B বিন্দুতে বৃত্তের স্পর্শক বরাবর কার্যরত।**

প্রমাণ ঃ ধরি, AB ও BC বরাবর ক্রিয়াশীল বল দুইটি যথাক্রমে $\dfrac{k}{AB}$ ও $\dfrac{k}{BC}$ এর লব্ধি R. যা BO এর সাথে $\theta$ কোণ উৎপন্ন করে, যেখানে O বৃত্তের কেন্দ্র। OB কে D পর্যন্ত বর্ধিত করি।




এখন, কেন্দ্রস্থ $\angle BOC=2A$. $\Delta OBC$-এ, $OB=OC=r$ (বৃত্তের ব্যাসার্ধ)।

$\therefore\ \angle OCB=\angle OBC=\dfrac{1}{2}(180^\circ-\angle BOC)=\dfrac{1}{2}(180^\circ-2A)=90^\circ-A$



তদ্রূপ, $\angle OBA=90^\circ-C\ \therefore\ \angle OBD=180^\circ-(90^\circ-C)=90^\circ+C$.

এখন, BO বরাবর লম্বাংশ নিয়ে পাই,

$$R\cos\theta=\frac{k}{BC}\cos(90^\circ-A)+\frac{k}{AB}\cos(90^\circ+C)$$

$$\Rightarrow R\cos\theta=\frac{k}{2r\sin A}\sin A-\frac{k}{2r\sin C}\sin C=0\Rightarrow\cos\theta=0\quad[\because R\neq 0]$$

$$\Rightarrow\cos\theta=\cos 90^\circ\Rightarrow\theta=90^\circ$$

$\therefore$ লব্ধি B বিন্দুতে BO- এর সাথে লম্ব বরাবর, অর্থাৎ B বিন্দুতে বৃত্তের স্পর্শক বরাবর ক্রিয়াশীল।

**1(d) কোনো বিন্দুতে দুইটি বল এরূপভাবে ক্রিয়া করে যেন এদের একটিকে বিপরীতমুখী করলে লব্ধির দিক এক সমকোণ ঘুরে যায়। প্রমাণ কর যে, বলদ্বয়ের মান সমান।**

সমাধান : মনে করি, বলদ্বয় $\overline{P}$ ও $\overline{Q}$ এবং এদের লব্ধি $\overline{R}=\overline{P}+\overline{Q}$.

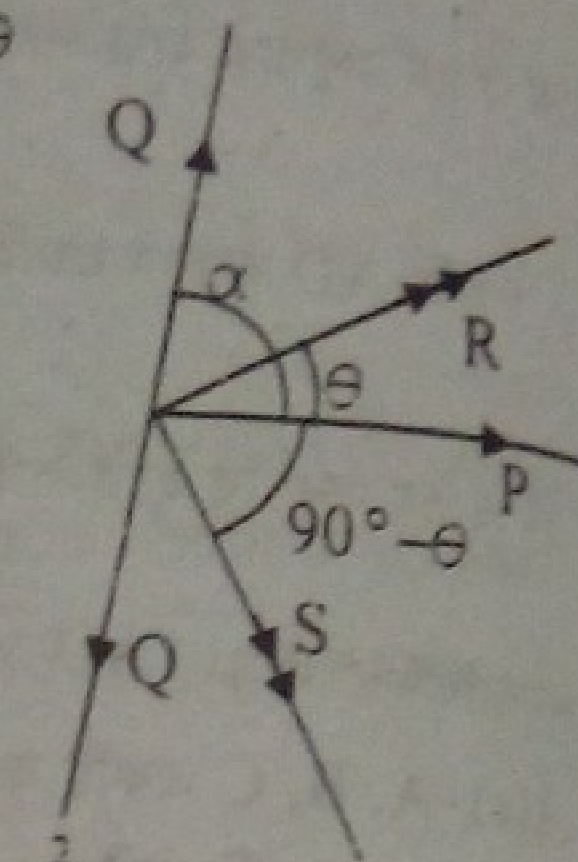
$\overline{Q}$ বলকে বিপরীতমুখী করা হলে, এদের লব্ধি হবে, $\overline{S}=\overline{P}-\overline{Q}$.

প্রশ্নমতে, $\overline{R}$ ও $\overline{S}$ এর মধ্যবর্তী কোণ $90^\circ$.

$\therefore\ \overline{R}\cdot\overline{S}=0\Rightarrow(\overline{P}+\overline{Q})\cdot(\overline{P}-\overline{Q})=0$

$\Rightarrow \overline{P}\cdot\overline{P}-\overline{P}\cdot\overline{Q}+\overline{Q}\cdot\overline{P}-\overline{Q}\cdot\overline{Q}=0 \Rightarrow P^2-\overline{P}\cdot\overline{Q}+\overline{P}\cdot\overline{Q}-Q^2=0$, যেহেতু $\overline{Q}\cdot\overline{P}=\overline{P}\cdot\overline{Q}$

$\Rightarrow P^2-Q^2=0 \Rightarrow P^2=Q^2 \therefore P=Q$. সুতরাং, বলদ্বয়ের মান সমান।




**বিকল্প পদ্ধতিঃ** মনে করি, $\alpha$ কোণে ক্রিয়ারত P ও Q বলের লব্ধি R. যা P এর সাথে $\theta$ কোণ উৎপন্ন করে। $\therefore \tan\theta=\dfrac{Q\sin\alpha}{P+Q\cos\alpha}\cdots\cdots(i)$

Q কে বিপরীতমুখী করলে বলদ্বয়ের মধ্যবর্তী কোণ হবে $(180°-\alpha)$ এবং প্রশ্নমতে এদের লব্ধি S (ধরি) P এর সাথে $(90°-\theta)$ কোণ উৎপন্ন করবে।

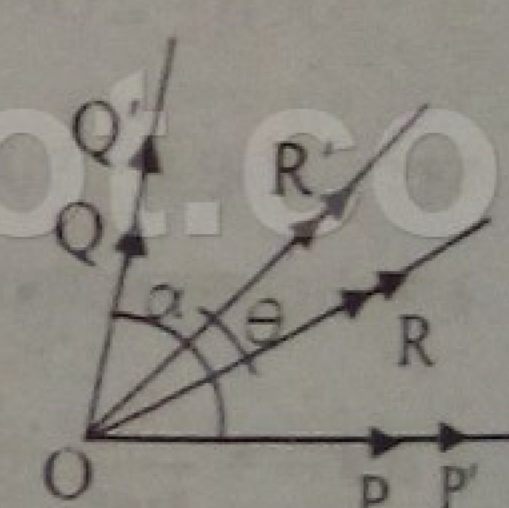
$\therefore \tan(90°-\theta)=\dfrac{Q\sin(180°-\alpha)}{P+Q\cos(180°-\alpha)} \Rightarrow \cot\theta=\dfrac{Q\sin\alpha}{P-Q\cos\alpha}\cdots(ii)$

$(i)\times(ii) \Rightarrow 1=\dfrac{Q\sin\alpha}{P+Q\cos\alpha}\times\dfrac{Q\sin\alpha}{P-Q\cos\alpha} \Rightarrow P^2-Q^2\cos^2\alpha=Q^2\sin^2\alpha$

$\Rightarrow P^2=Q^2(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha) \Rightarrow P^2=Q^2 \Rightarrow P=Q$ $\therefore$ বলদ্বয়ের মান সমান।

**1(e)** P ও Q বল দুইটির পরস্পর $\alpha$ কোণে আনত ও লব্ধির মান R ; একই রেখা বরাবর কার্যরত যথাক্রমে $P'$ ও $Q'$ বল দুইটির লব্ধি $R'$। $R\wedge R'=\theta$ হলে দেখাও যে, $RR'\cos\theta=(PQ'+P'Q)\cos\alpha+P'P+QQ'$

**প্রমাণ ঃ** দেওয়া আছে, P ও Q বল দুইটির লব্ধির মান R এবং $P'$ ও $Q'$ বল দুইটির লব্ধি মান $R'$।




$\therefore$ ভেক্টরের সাহায্যে পাই, $\overline{R}=\overline{P}+\overline{Q}$ এবং $\overline{R'}=\overline{P'}+\overline{Q'}$



এখন, $\overline{R}\cdot\overline{R'}=(\overline{P}+\overline{Q})\cdot(\overline{P'}+\overline{Q'})=\overline{P}\cdot\overline{P'}+\overline{P}\cdot\overline{Q'}+\overline{Q}\cdot\overline{P'}+\overline{Q}\cdot\overline{Q'}$

$\Rightarrow RR'\cos\theta=PP'\cos0^0+PQ'\cos\alpha+QP'\cos\alpha+QQ'\cos0^0$

$\therefore RR'\cos\theta=(PQ'+P'Q)\cos\alpha+P'P+QQ'$ (Showed)

**2(a)** এক বিন্দুতে ক্রিয়াশীল $\sqrt{3}$ N ও 2 N মানের বল $\overline{F_1}$ ও $\overline{F_2}$, $x$ অক্ষের ধনাত্মক দিকের সাথে যথাক্রমে $30°$ ও $60°$ কোণ উৎপন্ন করে।

**(i)** দ্বিমাত্রিক কার্তেসীয় উপাংশে এদের লব্ধি নির্ণয় কর; **(ii)** লব্ধির ভেক্টর রূপায়ন প্রদর্শন কর; **(iii)** লব্ধিটির মান ও দিক নির্ণয় কর।

**সমাধান ঃ** মনে করি, লব্ধি $\vec{R}$. তাহলে, $\vec{R}=\overline{F_1}+\overline{F_2}$

$\therefore R_x=F_1x+F_2x=\sqrt{3}\cos30°+2\cos60°=\sqrt{3}\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}+2\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{3}{2}+1=\dfrac{5}{2}$

$R_y=F_1y+F_2y=\sqrt{3}\sin30°+2\sin60°=\sqrt{3}\times\dfrac{1}{2}+2\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\sqrt{3}=\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$

$\therefore$ (i) দ্বিমাত্রিক কার্তেসীয় স্থানাঙ্কে লব্ধি $\vec{R}$ এর প্রকাশ $\left(\dfrac{5}{2},\dfrac{3\sqrt{3}}{2}\right)$

(ii) লব্ধি $\vec{R}$ এর ভেক্টর রূপায়ন $\vec{R} = \frac{5}{2}\hat{i} + \frac{3\sqrt{3}}{2}\hat{j}$

(iii) $\vec{R}$ এর মান $R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} = \sqrt{\frac{25}{4} + \frac{27}{4}} = \sqrt{13}$ N এবং

$\vec{R}$ এর দিক $\theta = \tan^{-1}\left(\frac{3\sqrt{3}/2}{5/2}\right) = \tan^{-1}\frac{3\sqrt{3}}{5}$

**2(b) $\overline{F_1} = 2\hat{i} + 3\hat{j} - 5\hat{k}$ , $\overline{F_2} = -5\hat{i} + \hat{j} + 3\hat{k}$ , $\overline{F_3} = \hat{i} - 2\hat{j} + 4\hat{k}$ ও $\overline{F_4} = 4\hat{i} - 3\hat{j} - 2\hat{k}$ বল চারটি একটি বস্তুকণায় ক্রিয়াশীল। এদের লব্ধি ও তার মান নির্ণয় কর।**

**সমাধান ঃ** লব্ধি $\vec{R} = \overline{F_1} + \overline{F_2} + \overline{F_3} + \overline{F_4}$

$$= (2\hat{i} + 3\hat{j} - 5\hat{k}) + (-5\hat{i} + \hat{j} + 3\hat{k}) + (\hat{i} - 2\hat{j} + 4\hat{k}) + (4\hat{i} - 3\hat{j} - 2\hat{k})$$

$$= (2 - 5 + 1 + 4)\,\hat{i} + (3 + 1 - 2 - 3)\,\hat{j} + (-5 + 3 + 4 - 2)\,\hat{k} = 2\hat{i} - \hat{j}$$

$\therefore$ $\vec{R}$ এর মান $R = \sqrt{2^2 + (-1)^2} = \sqrt{5}$ একক।

## প্রশ্নমালা VIII B

**1(a) 5N, 7N ও 8N বলত্রয় একটি বস্তুর উপর ক্রিয়া করে ভারসাম্য সৃষ্টি করলে 8N ও 5N বলদ্বয়ের মধ্যবর্তী কোণ নির্ণয় কর।** [বুয়েট'০৫-০৬]



**সমাধান ঃ** মনে করি, 8N ও 5N বলদ্বয়ের মধ্যবর্তী কোণ $\alpha$ । যেহেতু প্রদত্ত বলত্রয় একটি বস্তুর উপর ক্রিয়া করে ভারসাম্য সৃষ্টি করে, সুতরাং প্রত্যেকটি বল অপর দুইটি বলের লব্ধির মানের সমান ও বিপরীমুখী ক্রিয়াশীল। তাহলে, 8N ও 5N বলদ্বয়ের লব্ধির মান হবে 7N । সুতরাং বলের সামান্তরিক সূত্র হতে পাই,

$7^2 = 8^2 + 5^2 + 2 \times 8 \times 5 \cos\alpha \Rightarrow 49 = 64 + 25 + 80\cos\alpha \Rightarrow 80\cos\alpha = -40$

$\Rightarrow \cos\alpha = -\frac{1}{2} = \cos 120° \Rightarrow \alpha = 120°$ $\therefore$ 8N ও 5N বলদ্বয়ের মধ্যবর্তী কোণ $=120°$

**1(b) কোনো বিন্দুতে 60° কোণে ক্রিয়ারত দুইটি সমান বলকে একই বিন্দুতে ক্রিয়ারত 15 N বলের সাহায্যে ভারসাম্যে রাখলে বলের মান নির্ণয় কর।**

**সমাধান ঃ** মনে করি, P, P সমান বলদ্বয় পরস্পর 60° কোণে ক্রিয়াশীল। শর্তানুসারে এদের লব্ধি হবে R = 15 N.

$\therefore$ $R^2 = P^2 + P^2 + 2P.P\cos 60° = 2P^2 + 2P^2 \times \frac{1}{2} = 3P^2$ $\therefore$ বলের মান, $P = \frac{R}{\sqrt{3}} = \frac{15}{\sqrt{3}}$ N $= 5\sqrt{3}$ N

**1(c) কোনো বিন্দুতে 1, 2 ও $\sqrt{3}$ একক বলত্রয় ক্রিয়া করে সাম্যাবস্থা সৃষ্টি করে। বলগুলোর মধ্যবর্তী কোণ নির্ণয় কর।** [সি.'০১]

**সমাধান ঃ** যেহেতু প্রদত্ত বলত্রয় কোনো বিন্দুতে ক্রিয়া করে ভারসাম্য সৃষ্টি করে, সুতরাং প্রত্যেকটি বল অপর দুইটি বলের লব্ধির মানের সমান ও বিপরীমুখী ক্রিয়াশীল। তাহলে, 1 ও 2, 2 ও $\sqrt{3}$ এবং $\sqrt{3}$ ও 1 এর মধ্যবর্তী কোণ যথাক্রমে $\alpha$, $\beta$ ও $\gamma$ হলে বলের সামান্তরিক সূত্র হতে পাই,