(ii) লব্ধি $\vec{R}$ এর ভেক্টর রূপায়ন $\vec{R} = \frac{5}{2}\hat{i} + \frac{3\sqrt{3}}{2}\hat{j}$

(iii) $\vec{R}$ এর মান $R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} = \sqrt{\frac{25}{4} + \frac{27}{4}} = \sqrt{13}$ N এবং

$\vec{R}$ এর দিক $\theta = \tan^{-1}\left(\frac{3\sqrt{3}/2}{5/2}\right) = \tan^{-1}\frac{3\sqrt{3}}{5}$

2(b) $\overline{F_1} = 2\hat{i} + 3\hat{j} - 5\hat{k}$, $\overline{F_2} = -5\hat{i} + \hat{j} + 3\hat{k}$, $\overline{F_3} = \hat{i} - 2\hat{j} + 4\hat{k}$ ও $\overline{F_4} = 4\hat{i} - 3\hat{j} - 2\hat{k}$ বল চারটি একটি বস্তুকণায় ক্রিয়াশীল। এদের লব্ধি ও তার মান নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ লব্ধি $\vec{R} = \overline{F_1} + \overline{F_2} + \overline{F_3} + \overline{F_4}$

$$= (2\hat{i} + 3\hat{j} - 5\hat{k}) + (-5\hat{i} + \hat{j} + 3\hat{k}) + (\hat{i} - 2\hat{j} + 4\hat{k}) + (4\hat{i} - 3\hat{j} - 2\hat{k})$$

$$= (2 - 5 + 1 + 4)\,\hat{i} + (3 + 1 - 2 - 3)\,\hat{j} + (-5 + 3 + 4 - 2)\,\hat{k} = 2\hat{i} - \hat{j}$$

$\therefore$ $\vec{R}$ এর মান $R = \sqrt{2^2 + (-1)^2} = \sqrt{5}$ একক।

প্রশ্নমালা VIII B

1(a) 5N, 7N ও 8N বলত্রয় একটি বস্তুর উপর ক্রিয়া করে ভারসাম্য সৃষ্টি করলে 8N ও 5N বলদ্বয়ের মধ্যবর্তী কোণ নির্ণয় কর। **[বুয়েট'০৫-০৬]**

সমাধান ঃ মনে করি, 8N ও 5N বলদ্বয়ের মধ্যবর্তী কোণ α । যেহেতু প্রদত্ত বলত্রয় একটি বস্তুর উপর ক্রিয়া করে ভারসাম্য সৃষ্টি করে, সুতরাং প্রত্যেকটি বল অপর দুইটি বলের লব্ধির মানের সমান ও বিপরীমুখী ক্রিয়াশীল। তাহলে, 8N ও 5N বলদ্বয়ের লব্ধির মান হবে 7N । সুতরাং বলের সামান্তরিক সূত্র হতে পাই,

$7^2 = 8^2 + 5^2 + 2 \times 8 \times 5 \cos\alpha \Rightarrow 49 = 64 + 25 + 80\cos\alpha \Rightarrow 80\cos\alpha = -40$

$\Rightarrow \cos\alpha = -\frac{1}{2} = \cos 120° \Rightarrow \alpha = 120°$ $\therefore$ 8N ও 5N বলদ্বয়ের মধ্যবর্তী কোণ $=120°$

1(b) কোনো বিন্দুতে 60° কোণে ক্রিয়ারত দুইটি সমান বলকে একই বিন্দুতে ক্রিয়ারত 15 N বলের সাহায্যে ভারসাম্যে রাখলে বলের মান নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ মনে করি, P, P সমান বলদ্বয় পরস্পর 60° কোণে ক্রিয়াশীল। শর্তানুসারে এদের লব্ধি হবে R = 15 N.

$\therefore$ $R^2 = P^2 + P^2 + 2P.P\cos 60° = 2P^2 + 2P^2 \times \frac{1}{2} = 3P^2$ $\therefore$ বলের মান, $P = \frac{R}{\sqrt{3}} = \frac{15}{\sqrt{3}}$ N $= 5\sqrt{3}$ N

1(c) কোনো বিন্দুতে 1, 2 ও $\sqrt{3}$ একক বলত্রয় ক্রিয়া করে সাম্যাবস্থা সৃষ্টি করে। বলগুলোর মধ্যবর্তী কোণ নির্ণয় কর। **[সি.'০১]**

সমাধান ঃ যেহেতু প্রদত্ত বলত্রয় কোনো বিন্দুতে ক্রিয়া করে ভারসাম্য সৃষ্টি করে, সুতরাং প্রত্যেকটি বল অপর দুইটি বলের লব্ধির মানের সমান ও বিপরীমুখী ক্রিয়াশীল। তাহলে, 1 ও 2, 2 ও $\sqrt{3}$ এবং $\sqrt{3}$ ও 1 এর মধ্যবর্তী কোণ যথাক্রমে α, β ও γ হলে বলের সামান্তরিক সূত্র হতে পাই,

$(\sqrt{3})^2 = 1^2 + 2^2 + 2 \times 1 \times 2\cos\alpha \Rightarrow -2 = 4\cos\alpha \Rightarrow \cos\alpha = -\frac{1}{2} = \cos 120° \therefore \alpha = 120°$

$1^2 = 2^2 + (\sqrt{3})^2 + 2 \times 2 \times \sqrt{3}\cos\beta \Rightarrow -6 = 4\sqrt{3}\cos\beta \Rightarrow \cos\beta = -\frac{6}{4\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\Rightarrow \cos\beta = -\cos 30° = \cos(180° - 30°) = \cos 150° \quad \therefore \beta = 150°$

এবং $2^2 = 1^2 + (\sqrt{3})^2 + 2 \times 1 \times \sqrt{3}\cos\gamma \Rightarrow 0 = 2\sqrt{3}\cos\gamma \Rightarrow \cos\gamma = 0 = \cos 90° \therefore \gamma = 90°$

সুতরাং বলগুলোর মধ্যবর্তী কোণ $120°, 150°, 90°$.

1(d) কোন্ শর্তে একটি বস্তুকণার উপর কার্যরত 3 : 4 : 7 অনুপাতের বলগুলো সাম্যাবস্থায় থাকবে?

সমাধান ঃ মনে করি, বস্তুকণার উপর কার্যরত বল তিনটি $P = 3k$, $Q = 4k$ এবং $R = 7k$, যেখানে k একটি সমানুপাতিক ধ্রুবক।

যেহেতু $P + Q = 3k + 4k = 7k = R$, সুতরাং বলত্রয় সাম্যাবস্থায় থাকবে যদি তারা একই সরলরেখা বরাবর এবং P ও Q বলদ্বয় একত্রে যেদিকে R তার বিপরীত দিকে ক্রিয়াশীল হয়।

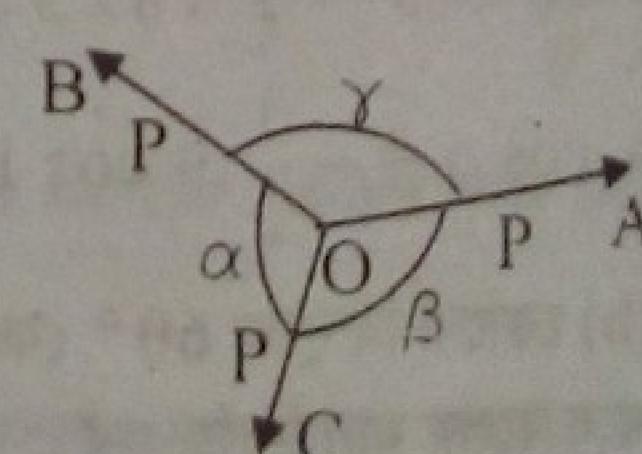
1(e) দেখাও যে কোন বস্তুর উপর ক্রিয়ারত 5 : 6: 12 অনুপাতের বলগুলো সাম্যাবস্থা সৃষ্টি করতে পারে না।

প্রমাণঃ মনে করি, বলগুলোর মান $P = 5k$, $Q = 6k$ ও $R = 12k$ একক। বলের ত্রিভুজ সূত্র হতে আমরা জানি, একবিন্দুতে ক্রিয়ারত তিনটি বলের মান ও দিক একইক্রমে কোনো ত্রিভুজের তিনটি বাহু দ্বারা সূচিত করা গেলে তারা সাম্যাবস্থা সৃষ্টি করে। আবার বলগুলোর মানের যেকোনো দুইটির সমষ্টি তৃতীয়টি অপেক্ষা বৃহত্তম না হলে এদের দ্বারা কোন ত্রিভুজ গঠিত হয় না।

এক্ষেত্রে, $P + Q = 5k + 6k = 11k < 12k$ অর্থাৎ $P + Q < R$. সুতরাং প্রদত্ত বল তিনটি কোনো ত্রিভুজের বাহু দ্বারা সূচিত করা যায় না। কাজেই তারা সাম্যাবস্থা সৃষ্টি করতে পারে না।

2 (a) কোনো বিন্দুতে ক্রিয়ারত তিনটি সমান বল সাম্যাবস্থা সৃষ্টি করলে এদের মধ্যবর্তী কোণ নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ মনে করি, O বিন্দুতে OA, OB, OC বরাবর ক্রিয়ারত P, P, P বলত্রয় সাম্যাবস্থা সৃষ্টি করে। সুতরাং লামির সূত্র থেকে পাই,



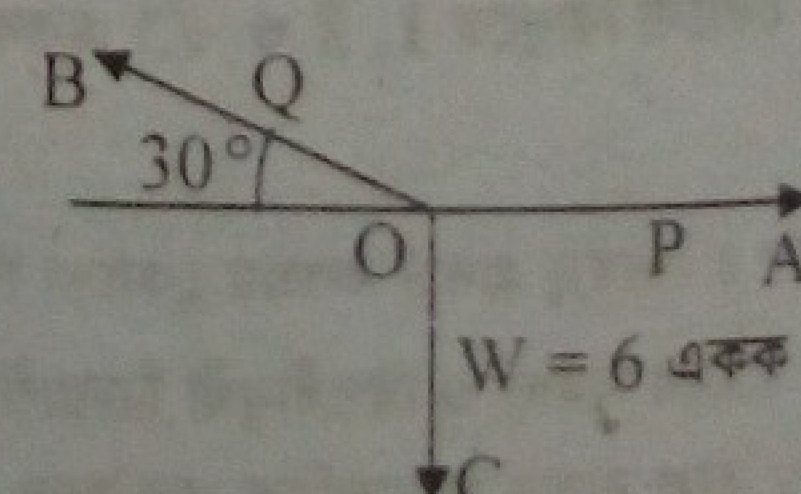
$\frac{P}{\sin\alpha} = \frac{P}{\sin\beta} = \frac{P}{\sin\gamma}$, যেখানে $\angle BOC = \alpha$, $\angle COA = \beta$, $\angle AOB = \gamma$.

$\Rightarrow \sin\alpha = \sin\beta = \sin\gamma \Rightarrow \alpha = \beta = \gamma = \frac{360^0}{3} = 120^0 \quad \therefore$ বলগুলোর মধ্যবর্তী কোণ $120°$.

2(b) 6 একক ওজনের একটি বস্তুকে দুইটি বল দ্বারা টেনে রাখা হয়েছে। তাদের একটি অনুভূমিক এবং অপরটি অনুভূমিকের সাথে 30° কোণ করেছে। বলদ্বয় নির্ণয় কর।

[বুয়েট'০৬-০৭]

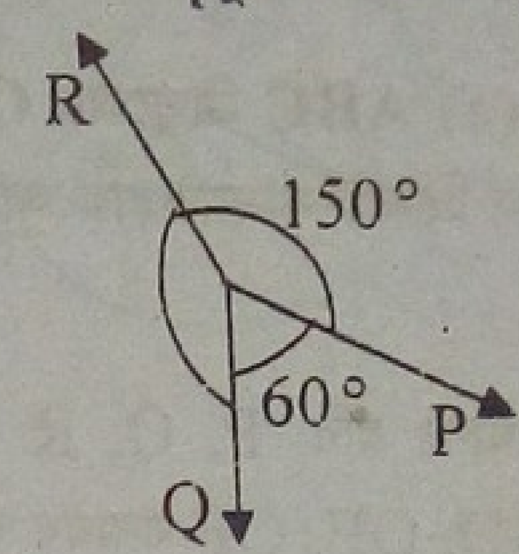
সমাধান ঃ মনে করি, O বিন্দুতে উল্লম্ব OC বরাবর ক্রিয়ারত W = 6 একক ওজনের বস্তুটিকে অনুভূমিক OA ও অনুভূমিকের সাথে 30° কোণে আনত OB বরাবর ক্রিয়ারত যথাক্রমে P ও Q বল দ্বারা টেনে রাখা হয়েছে। লামির সূত্র থেকে পাই, $\frac{P}{\sin(90^0 + 30^0)} = \frac{Q}{\sin 90^0} = \frac{W}{\sin(180^0 - 30^0)}$



$$\Rightarrow \frac{P}{\cos 30^0} = \frac{Q}{1} = \frac{W}{\sin 30^0} \Rightarrow \frac{P}{\sqrt{3}/2} = Q = \frac{W}{1/2}$$

$\therefore$ বলদ্বয় $P = \sqrt{3}\ W = 6\sqrt{3}$ একক এবং $Q = 2W = 2 \times 6 = 12$ একক।

2(c) কোনো বিন্দুতে ক্রিয়ারত P, Q, R বলত্রয় সাম্যাবস্থায় আছে। P ও Q এর অন্তর্গত কোণ 60° এবং P ও R এর অন্তর্গত কোণ 150° হলে দেখাও যে, $P = Q = \frac{R}{\sqrt{3}}$. [কুয়েট'০৫-০৬]



প্রমাণঃ দেওয়া আছে, P ও Q এর অন্তর্গত কোণ 60° এবং P ও R এর অন্তর্গত কোণ 150°

$\therefore$ P ও R এর অন্তর্গত কোণ $= \{360° - (150° + 60°)\} = 150°$

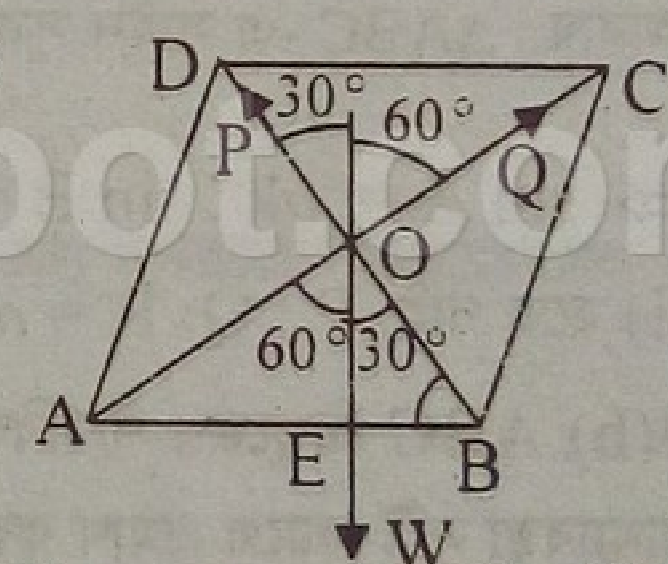
$\therefore$ লামির সূত্র থেকে পাই,

$$\frac{P}{\sin 150^0} = \frac{Q}{\sin 150^0} = \frac{R}{\sin 60^0} \Rightarrow \frac{P}{1/2} = \frac{Q}{1/2} = \frac{R}{\sqrt{3}/2}$$

$$\therefore P = Q = \frac{R}{\sqrt{3}}.$$

2(d) রম্বস আকারের একটি সুষম পাতের একটি ধার ভূ-সমান্তরাল ও একটি কোণ 120°, রম্বসটির কেন্দ্র থেকে কর্ণ বরাবর P ও Q বল দুইটি ক্রিয়া করে একে খাড়াভাবে স্থির রাখে। P > Q হলে প্রমাণ কর যে, $P^2 = 3Q^2$. [চ.'১০]

প্রমাণঃ মনে করি, ABCD রম্বসের AB বাহু ভূ-সমান্তরাল, $\angle ABC = 120°$ এবং AC ও BD কর্ণদ্বয় পরস্পর O বিন্দুতে ছেদ করে। পাতের ওজন W (ধরি) AB এর উপর লম্ব OE বরাবর ক্রিয়ারত। তাহলে, $\angle OBE = \frac{1}{2}\angle ABC = 60°$



$\therefore \angle BOE = 30°$ [$\because \angle OEB = 90°$]

$\therefore \angle AOE = 60°$ [$\because \angle AOB = 90°$]

যেহেতু লব্ধি বৃহত্তর বলের দিকে অধিক আনত এবং $P > Q$, সুতরাং P, Q যথাক্রমে OD ও OC বরাবর ক্রিয়াশীল হবে। O বিন্দুতে P, Q, W বলত্রয় সাম্যাবস্থায় থাকলে লমির সূত্র হতে পাই,

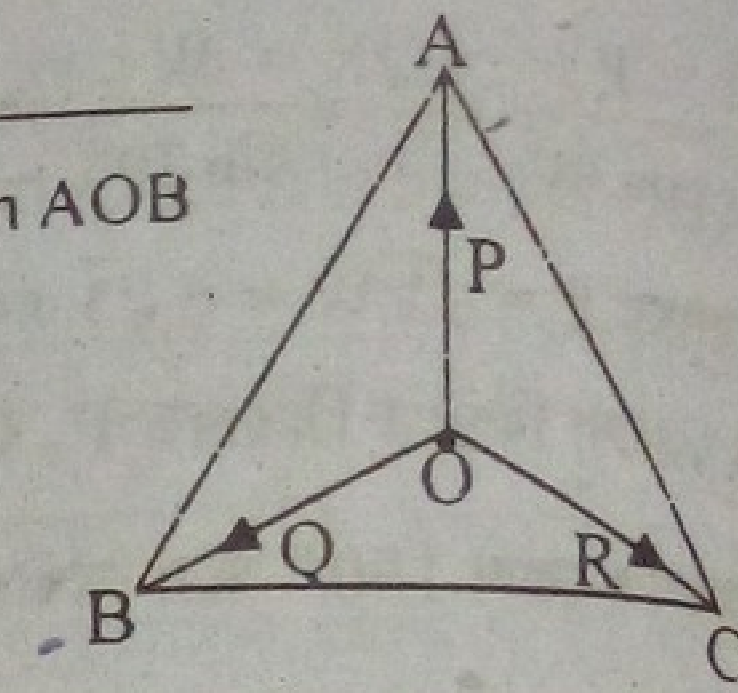
$$\frac{P}{\sin COE} = \frac{Q}{\sin DOE} = \frac{R}{\sin DOC} \Rightarrow \frac{P}{\sin(90^0 + 30^0)} = \frac{Q}{\sin(90^0 + 60^0)}$$

$$\Rightarrow \frac{P}{\cos 30^0} = \frac{Q}{\cos 60^0} \Rightarrow \frac{P}{\sqrt{3}/2} = \frac{Q}{1/2} \Rightarrow P = \sqrt{3}\,Q \ \therefore P^2 = 3\,Q^2$$

2(e) সমান দৈর্ঘ্যের তিনটি একতলীয় সরলরেখা OA, OB, OC যদি O বিন্দুগামী কোন সরলরেখার একই পার্শ্বে অবস্থিত না হয় এবং P, Q, R বলত্রয় যদি উক্ত রেখাগুলো বরাবর এমনভাবে ক্রিয়া করে যেন $\frac{P}{\Delta OBC} = \frac{Q}{\Delta OCA} = \frac{R}{\Delta OAB}$ হয়, তবে দেখাও যে বলত্রয় সাম্যাবস্থায় থাকবে। [চ.'০২]

প্রমাণঃ দেওয়া আছে, $OA = OB = OC$ এবং $\frac{P}{\Delta OBC} = \frac{Q}{\Delta OCA} = \frac{R}{\Delta OAB}$

$$\Rightarrow \frac{P}{\frac{1}{2}OB \times OC \sin BOC} = \frac{Q}{\frac{1}{2}OA \times OC \sin AOC} = \frac{R}{\frac{1}{2}OA \times OB \sin AOB}$$



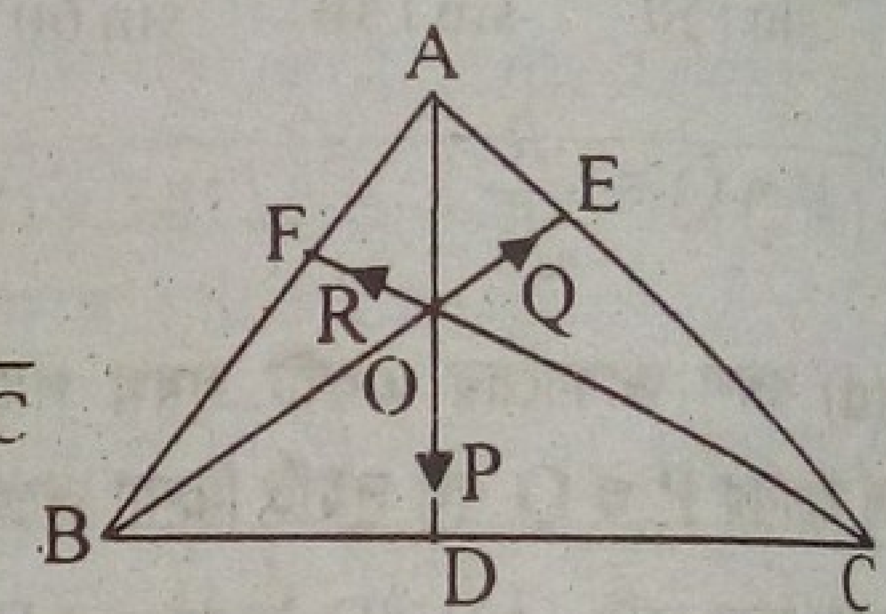
$$\Rightarrow \frac{P}{\sin BOC} = \frac{Q}{\sin AOC} = \frac{R}{\sin AOB} \quad [\because OA = OB = OC]$$

লামির সূত্রের বিপরীত সূত্রানুসারে P, Q, R বলত্রয় সাম্যাবস্থায় থাকবে।

3(a) ABC ত্রিভুজের O লম্বকেন্দ্র। O থেকে BC, CA, AB বাহুর উপর লম্ব বরাবর কার্যরত যথাক্রমে P, Q, R বল তিনটি সাম্যাবস্থায় আছে। প্রমাণ কর যে, (i) P:Q:R = sinA: sinB: sinC [চুয়েট'০৩-০৪]

(ii) P: Q: R = $a : b : c$ [রা.'০৩; ঢা.'১১; সি.'১১; ব.'১২]

প্রমাণঃ ধরি, P, Q, R বল তিনটি ABC ত্রিভুজের লম্বকেন্দ্র O থেকে যথাক্রমে BC, CA, AB বাহুর উপর লম্ব OD, OE, OF বরাবর কার্যরত।



লামির সূত্র হতে পাই, $\frac{P}{\sin EOF} = \frac{Q}{\sin DOF} = \frac{R}{\sin DOE}$

$$\Rightarrow \frac{P}{\sin(\pi - A)} = \frac{Q}{\sin(\pi - B)} = \frac{R}{\sin(\pi - C)} \Rightarrow \frac{P}{\sin A} = \frac{Q}{\sin B} = \frac{R}{\sin C}$$

$\therefore$ P : Q: R = sinA : sinB : sinC ⋯ ⋯ (i) (Showed)

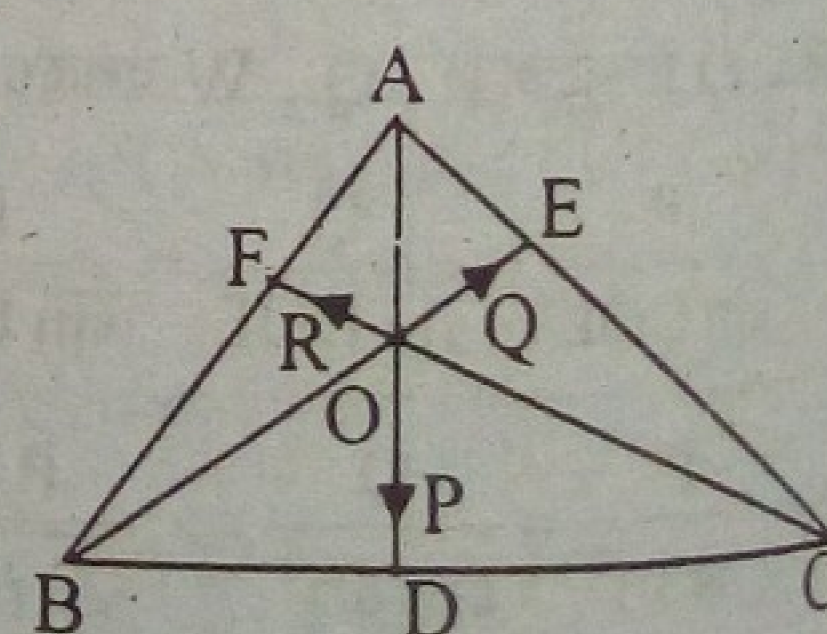
আবার, ΔABC -এ সাইন সূত্র প্রয়োগ করে পাই, $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = \frac{1}{k}$ (ধরি)

$\Rightarrow \sin A = ak$, $\sin B = bk$, $\sin C = ck$

(i) হতে পাই, P : Q: R = $ak : bk : ck$ $\therefore$ P : Q: R = $a : b : c$ (Showed)

3(b) ABC ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দু A, B, C হতে বিপরীত বাহুর উপর লম্ব বরাবর ক্রিয়ারত যথাক্রমে P, Q, R বলত্রয় সাম্যাবস্থা সৃষ্টি করলে প্রমাণ কর যে, P : Q : R = $a : b : c$ [ঢা., য., চ,'০০; সি.'০৪; বুয়েট ৯৯]

প্রমাণঃ মনে করি, ABC ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দু A , B, C হতে বিপরীত বাহুর উপর অঙ্কিত লম্ব AD, BE, CF পরস্পরকে O বিন্দুতে ছেদ করে। সুতরাং প্রদত্ত বলত্রয়ের ক্রিয়ারেখা O বিন্দুতে ছেদ করে সাম্যাবস্থা সৃষ্টি করে।



লামির সূত্র হতে পাই, $\frac{P}{\sin EOF} = \frac{Q}{\sin DOF} = \frac{R}{\sin DOE}$

$$\Rightarrow \frac{P}{\sin(\pi - A)} = \frac{Q}{\sin(\pi - B)} = \frac{R}{\sin(\pi - C)} \Rightarrow \frac{P}{\sin A} = \frac{Q}{\sin B} = \frac{R}{\sin C}$$

$\Rightarrow$ P : Q: R = sinA : sinB : sinC ⋯ (i)

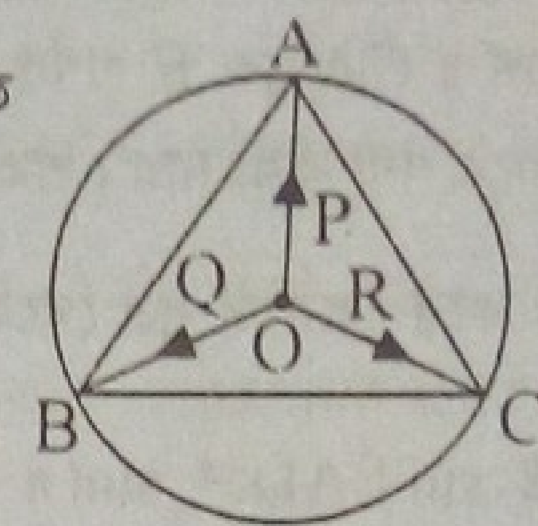
আবার, ΔABC -এ সাইন সূত্র প্রয়োগ করে পাই, $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = \frac{1}{k}$ (ধরি)

$\Rightarrow \sin A = ak$, $\sin B = bk$, $\sin C = ck$

(i) হতে পাই, $P : Q : R = ak : bk : ck \therefore P : Q : R = a : b : c$ (Showed)

3(c) ABC ত্রিভুজের পরিকেন্দ্র O থেকে OA, OB, OC বরাবর কার্যরত যথাক্রমে P, Q, R বলত্রয় সাম্যাবস্থা সৃষ্টি করলে প্রমাণ কর যে, $\dfrac{P}{a^2(b^2+c^2-a^2)} = \dfrac{Q}{b^2(c^2+a^2-b^2)} = \dfrac{R}{c^2(a^2+b^2-c^2)}$

প্রমাণ : দেওয়া আছে, ABC ত্রিভুজের পরিকেন্দ্র O থেকে OA, OB, OC বরাবর কার্যরত যথাক্রমে P, Q, R বলত্রয় সাম্যাবস্থা সৃষ্টি করে। লামির সূত্র থেকে পাই,



$$\frac{P}{\sin BOC} = \frac{Q}{\sin AOC} = \frac{R}{\sin AOB} \Rightarrow \frac{P}{\sin 2A} = \frac{Q}{\sin 2B} = \frac{R}{\sin 2C}$$

[∵ বৃত্তস্থ কোণ কেন্দ্রস্থ কোণের দ্বিগুণ]

$$\Rightarrow \frac{P}{2\sin A\cos A} = \frac{Q}{2\sin B\cos B} = \frac{R}{2\sin C\cos C}$$

$$\Rightarrow \frac{P}{(a/2r)(b^2+c^2-a^2)/2bc} = \frac{Q}{(b/2r)(c^2+a^2-b^2)/2ca} = \frac{R}{(c/2r)(a^2+b^2-c^2)/2ab}$$

;যেখানে ABC ত্রিভুজের পরিব্যাসার্ধ r ।

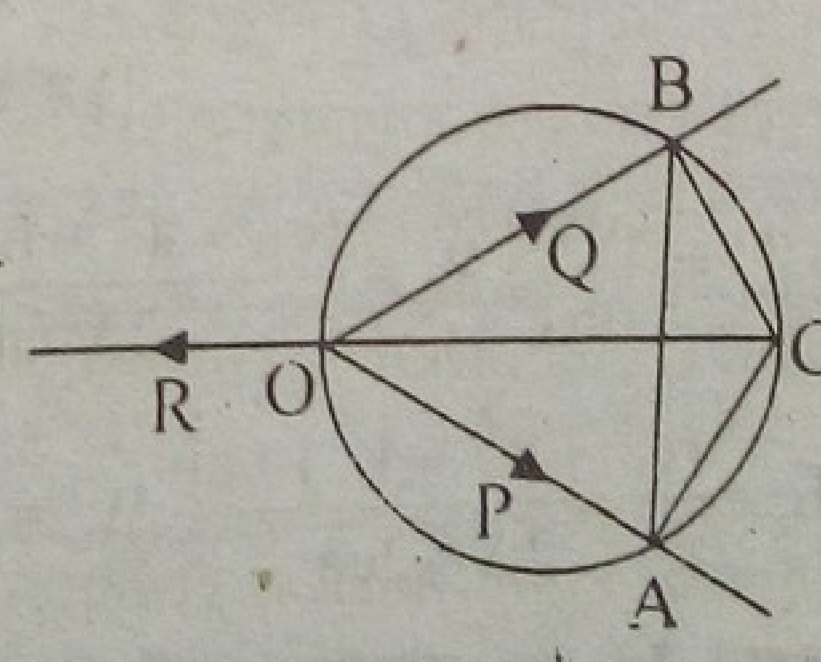
$$\Rightarrow \frac{4abcrP}{a^2(b^2+c^2-a^2)} = \frac{4abcrQ}{b^2(c^2+a^2-b^2)} = \frac{4abcrR}{c^2(a^2+b^2-c^2)}$$

$$\therefore \frac{P}{a^2(b^2+c^2-a^2)} = \frac{Q}{b^2(c^2+a^2-b^2)} = \frac{R}{c^2(a^2+b^2-c^2)}$$

3(d) O বিন্দুতে কার্যরত P, Q, R বলত্রয় সাম্যাবস্থা সৃষ্টি করে। O বিন্দুগামী একটি বৃত্ত বলত্রয়ের ক্রিয়ারেখাকে যথাক্রমে A, B, C বিন্দুতে ছেদ করে। প্রমাণ কর যে, P : Q : R = BC : CA : AB.

প্রমাণঃ O বিন্দুতে কার্যরত P, Q, R বলত্রয় সাম্যাবস্থা সৃষ্টি করে। লামির সূত্র থেকে পাই,

$$\frac{P}{\sin(Q \wedge R)} = \frac{Q}{\sin(R \wedge P)} = \frac{R}{\sin(P \wedge Q)}$$



$$\Rightarrow \frac{P}{\sin(\pi - \angle BOC)} = \frac{Q}{\sin(\pi - \angle AOC)} = \frac{R}{\sin AOB}$$

$$\Rightarrow \frac{P}{\sin BOC} = \frac{Q}{\sin AOC} = \frac{R}{\sin(\pi - \angle ACB)}$$

$$\Rightarrow \frac{P}{\sin BAC} = \frac{Q}{\sin ABC} = \frac{R}{\sin ACB} \cdots (i)$$

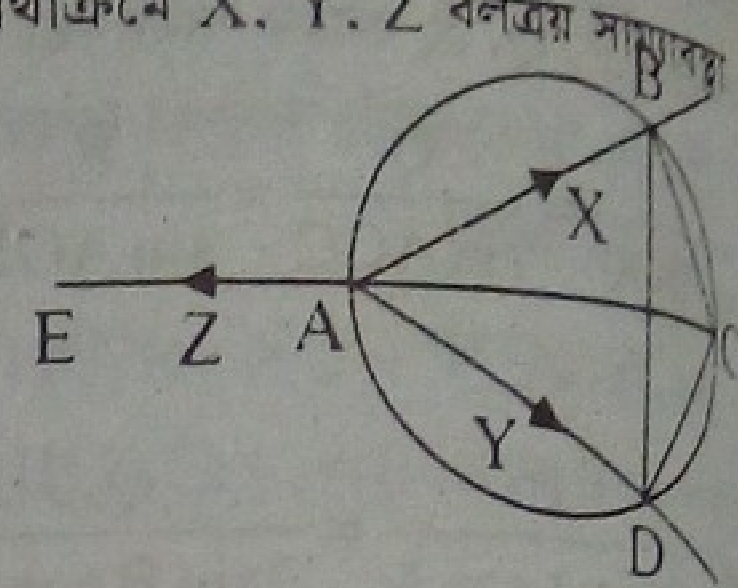
[∵ বৃত্তস্থ চতুর্ভুজের বিপরীত কোণদ্বয় সম্পূরক এবং একই চাপের উপর দন্ডায়মান বৃত্তস্থ কোণদ্বয় সমান।]

$$\Rightarrow \frac{P}{BC/2r} = \frac{Q}{AC/2r} = \frac{R}{AB/2r}$$; এখানে r, ABC ত্রিভুজের পরিব্যাসার্ধ।

$\therefore\ P : Q : R = BC : CA : AB$

3(e) ABCD বৃত্তস্থ চতুর্ভুজের AB, AD বরাবর যথাক্রমে X, Y বলদ্বয় ক্রিয়ারত আছে। C হতে A এর দিকে CA বরাবর ক্রিয়ারত Z বল দ্বারা নিষ্ক্রিয় করা হলে, দেখাও যে, $\frac{X}{CD} = \frac{Y}{CB} = \frac{Z}{BD}$. [য.'০৫]

প্রমাণ ঃ CA কে E পর্যন্ত বর্ধিত করি। তাহলে, CA বরাবর ক্রিয়ারত Z বলটিকে A বিন্দুতে AE বরাবর ক্রিয়াশীল হিসাবে গণ্য করা যায়। শর্তানুসারে A বিন্দুতে AB, AD, AE বরাবর ক্রিয়ারত যথাক্রমে X, Y, Z বলত্রয় সাম্যাবস্থা সৃষ্টি করে। লামির সূত্র থেকে পাই, $\frac{X}{\sin EAD} = \frac{Y}{\sin BAE} = \frac{Z}{\sin BAD}$



কিন্তু $\sin EAD = \sin(\pi - \angle CAD) = \sin CAD = \sin CBD$

$\sin BAE = \sin(\pi - \angle BAC) = \sin BAC = \sin BDC$

$\sin BAD = \sin(\pi - \angle BCD) = \sin BCD$

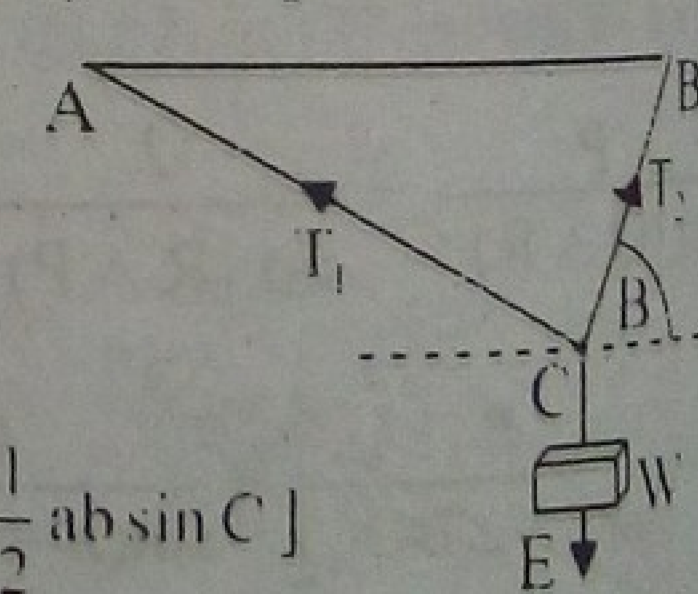
$\therefore\ \frac{X}{\sin CBD} = \frac{Y}{\sin BDC} = \frac{Z}{\sin BCD} \Rightarrow \frac{X}{CD/2R} = \frac{Y}{BC/2R} = \frac{Z}{BD/2R}$; এখানে R, BCD ত্রিভুজের পরিব্যাসার্ধ।

$\therefore\ \frac{X}{CD} = \frac{Y}{CB} = \frac{Z}{BD}$

4(a) ACB রশির দুই প্রান্তে একই অনুভূমিক রেখার A ও B বিন্দুতে আবদ্ধ আছে। রশিটির C বিন্দুতে W ওজনের একটি বস্তুকে গিঁট দিয়ে বাঁধা। ABC ত্রিভুজের বাহুগুলোর দৈর্ঘ্য *a*, *b*, *c* এবং ক্ষেত্রফল Δ দ্বারা সূচিত হলে দেখাও যে, রশির CA অংশের টান $\frac{Wb}{4c\Delta}(c^2 + a^2 - b^2)$ [য.'০০; ঢা.,চ.'০৭]

প্রমাণঃ মনে করি, CA ও CB অংশের টান যথাক্রমে T_1 ও T_2 এবং বস্তুর ওজন W খাড়া নিচের দিকে CE বরাবর কার্যরত। এখন C বিন্দুতে ক্রিয়ারত T_1, T_2 ও W বলত্রয় সাম্যাবস্থায় আছে। সুতরাং লামির সূত্র হতে পাই,

$$\frac{T_1}{\sin BCE} = \frac{T_2}{\sin ACE} = \frac{W}{\sin C} \Rightarrow \frac{T_1}{\sin(90^\circ + B)} = \frac{W}{\sin C}$$



[১ম ও ৩য় অনুপাত হতে]

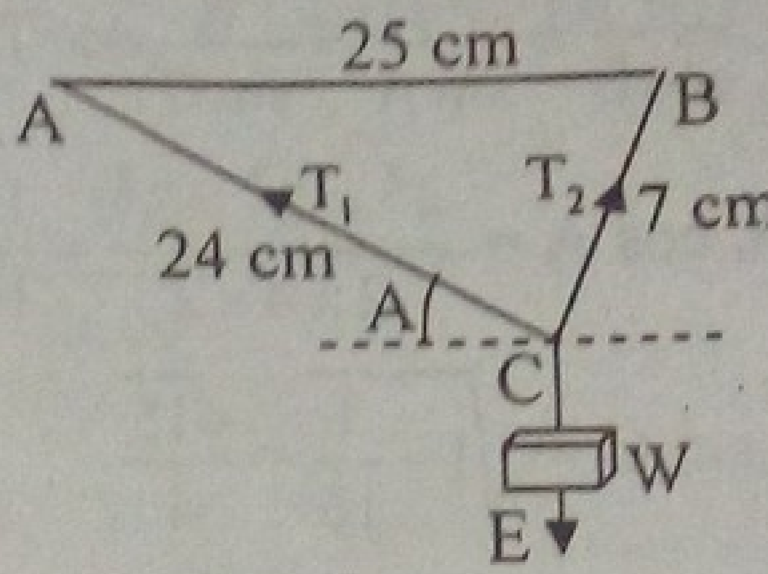
$$\Rightarrow \frac{T_1}{\cos B} = \frac{W}{\sin C} \Rightarrow T_1 = \frac{\cos B}{\sin C}W = \frac{(c^2 + a^2 - b^2)/2ca}{2\Delta/ab}W\ [\because \Delta = \frac{1}{2}ab\sin C]$$

$\therefore$ CA অংশের টান, $T_1 = \frac{(c^2 + a^2 - b^2) \cdot ab}{2\Delta \times 2ca}W = \frac{Wb}{4c\Delta}(c^2 + a^2 - b^2)$ (Showed)

4(b) একটি অনুভূমিক রেখায় 25 cm ব্যবধানে দুইটি বিন্দুতে 31 cm লম্বা একটি রশির দুইপ্রান্ত বাঁধা আছে। রশির একপ্রান্ত হতে 7 cm দূরে W ওজনের একটি বস্তু সংযুক্ত করা হলে 7 cm রশির টান 48 কেজি-ওজন হয়। W এর মান নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ মনে করি, রশিটি AB = 25 cm অনুভূমিক রেখার A ও B বিন্দুতে বাঁধা আছে এবং C বিন্দুতে W ওজনের বস্তুটি সংযুক্ত আছে, যেখানে BC = 7 cm, AC = (31 – 7) cm = 24 cm.

যেহেতু $AC^2 + BC^2 = 24^2 + 7^2 = 625 = 25^2 = AB^2$, সুতরাং $\angle ACB = 90°$.

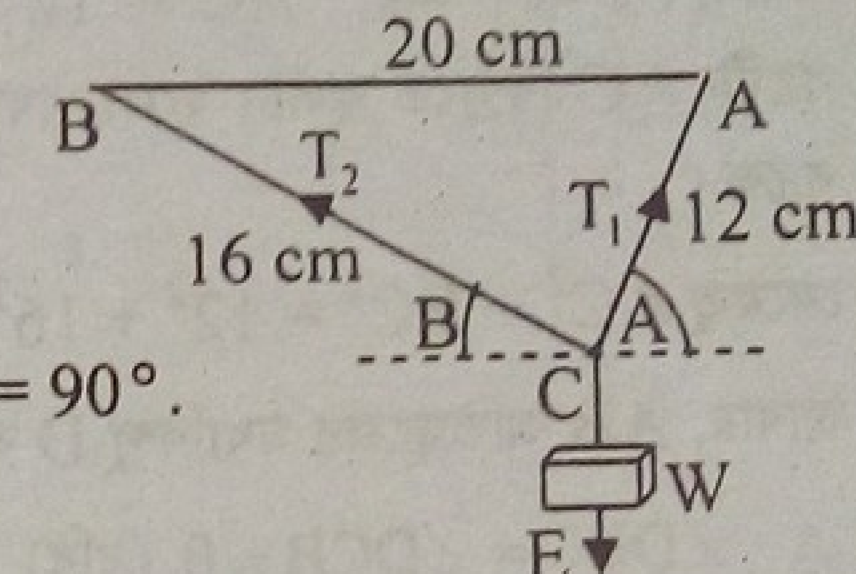


ধরি, CA ও CB রশির টান যথাক্রমে T_1 ও $T_2 = 48$ কেজি ওজন এবং বস্তুর ওজন CE বরাবর ক্রিয়াশীল। C বিন্দুতে বলত্রয় সাম্যাবস্থা সৃষ্টি করে। সুতরাং লামির সূত্র হতে পাই,

$$\frac{T_1}{\sin BCE} = \frac{T_2}{\sin ACE} = \frac{W}{\sin ACB} \Rightarrow \frac{T_2}{\sin(90^0 + A)} = \frac{W}{\sin 90^0}$$

$$\Rightarrow \frac{T_2}{\cos A} = \frac{W}{1} \Rightarrow W = T_2 \sec A \Rightarrow W = \frac{AB}{AC} T_2 = \frac{25}{24} \times 48 \text{ কেজি ওজন} = 50 \text{ কেজি ওজন (Ans.)}$$

4(c). 5 কেজি-ওজনের একটি বস্তু 12 cm ও 16 cm দীর্ঘ দুইটি রশির সাহায্যে একটি অনুভূমিক রেখার 20 cm ব্যবধানে দুইটি বিন্দুতে বাঁধা আছে। রশিতে টানের পরিমাণ নির্ণয় কর।



সমাধান ঃ মনে করি, রশি দুইটি AB = 20 cm অনুভূমিক রেখার A ও B বিন্দুতে বাঁধা আছে এবং C বিন্দুতে W = ৫ কেজি-ওজন পরিমাণের বস্তুটি সংযুক্ত আছে, যেখানে AC = 12 cm, BC = 16 cm.

যেহেতু $AC^2 + BC^2 = 12^2 + 16^2 = 400 = 20^2 = AB^2$, সুতরাং $\angle ACB = 90°$.

ধরি, CA ও CB রশির টান যথাক্রমে T_1 ও T_2 এবং বস্তুর ওজন CE বরাবর ক্রিয়াশীল। C বিন্দুতে বলত্রয় সাম্যাবস্থা সৃষ্টি করে। সুতরাং লামির সূত্র হতে পাই,

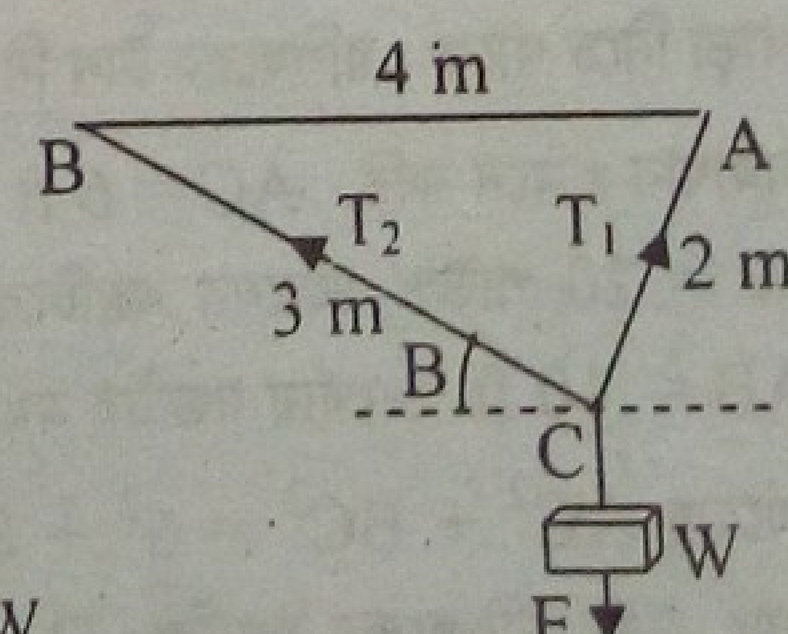
$$\frac{T_1}{\sin BCE} = \frac{T_2}{\sin ACE} = \frac{W}{\sin ACB} \Rightarrow \frac{T_1}{\sin(90^0 + B)} = \frac{T_2}{\sin(90^0 + A)} = \frac{W}{\sin 90}$$

$$\Rightarrow \frac{T_1}{\cos B} = \frac{T_2}{\cos A} = \frac{W}{1} \quad \therefore T_1 = W \cos B = \frac{BC}{AB} W = \frac{16}{20} \times 5 \text{ কেজি-ওজন} = 4 \text{ কেজি-ওজন এবং}$$

$$T_2 = W \cos A = \frac{AC}{AB} W = \frac{12}{20} \times 5 \text{ কেজি-ওজন} = 3 \text{ কেজি-ওজন}।$$

$\therefore$ রশিতে টানের পরিমাণ 3 কেজি-ওজন ও 4 কেজি-ওজন।

4(d) 4 মি. দৈর্ঘ্যের অনুভূমিক AB রেখার A, B বিন্দুতে 2 মি. ও 3 মি. দৈর্ঘ্যের দুইটি তারের দুইপ্রান্ত বাঁধা আছে। C বিন্দুতে তারের অপর প্রান্তদ্বয় দিয়ে 8 কেজি- ওজনের একটি বস্তুকে বেঁধে ঝুলানো হলে তার দুইটির টান নির্ণয় কর।



সমাধান ঃ মনে করি, তারটি AB = 4 মি. অনুভূমিক রেখার A ও B বিন্দুতে বাঁধা আছে এবং C বিন্দুতে W = 8 কেজি- ওজনের বস্তুটি সংযুক্ত আছে, যেখানে AC = 2 মি., BC = 3 মি.। ধরি, CA ও CB তারের টান যথাক্রমে T_1 ও T_2 এবং বস্তুর ওজন CE বরাবর ক্রিয়াশীল। C বিন্দুতে W, T_1 ও T_2 সাম্যাবস্থা সৃষ্টি করে। সুতরাং লামির সূত্র হতে পাই,

$$\frac{T_1}{\sin BCE} = \frac{T_2}{\sin ACE} = \frac{W}{\sin ACB} \Rightarrow \frac{T_1}{\sin(90^0 + B)} = \frac{T_2}{\sin(90^0 + A)} = \frac{W}{\sin C}$$

$$\frac{T_1}{\cos B}=\frac{T_2}{\sin A}=\frac{W}{\sin C} \Rightarrow T_1=\frac{\cos B}{\sin C}W \cdots\cdots(i) \text{ এবং } T_2=\frac{\cos A}{\sin C}W$$

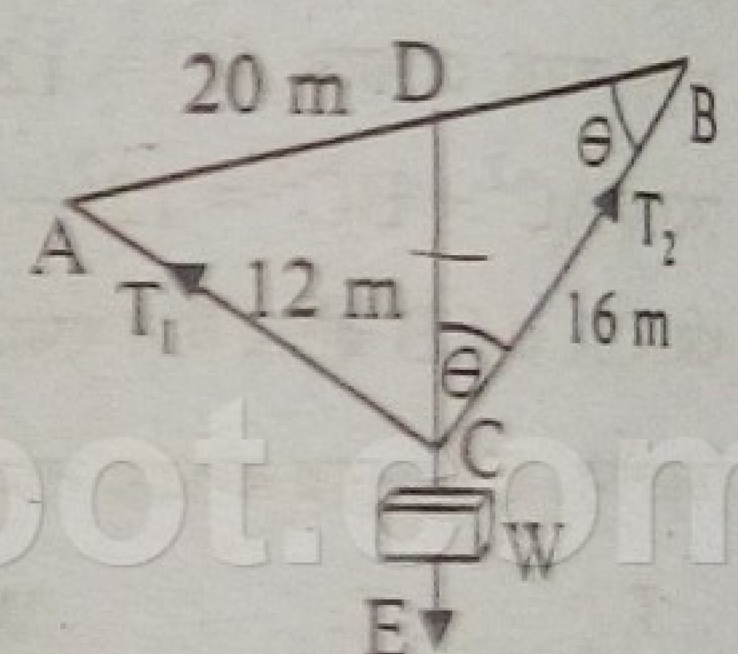
এখন, $\cos A=\frac{4^2+2^2-3^2}{2\times4\times2}=\frac{11}{16}$, $\cos B=\frac{4^2+3^2-2^2}{2\times4\times3}=\frac{7}{8}$, $\cos C=\frac{3^2+2^2-4^2}{2\times3\times2}=\frac{-1}{4}$

$\therefore\ \sin C=\sqrt{1-\frac{1}{16}}=\frac{\sqrt{15}}{4}$

$\therefore$ তার দুইটির টান, $T_1=\frac{7/8}{\sqrt{15}/4}\times8$ অর্থাৎ $\frac{28}{\sqrt{15}}$ কেজি-ওজন এবং $T_2=\frac{11/16}{\sqrt{15}/4}\times8$ অর্থাৎ $\frac{22}{\sqrt{15}}$ কেজি-ওজন

4 (e) 12 মি. ও 16 মি. দৈর্ঘ্যের দুইটি রশির সাহায্যে 30 কেজি-ওজনের একটি বস্তুকে ঝুলান হলো। রশি দুইটির অপর প্রান্ত 20 মি. দৈর্ঘ্যের একটি দন্ডের দুই প্রান্তে বাঁধা আছে। দন্ডটি এরূপভাবে স্থাপন করা হলো যেন বস্তুটি এর মধ্যবিন্দুর ঠিক খাড়া নিচে থাকে। রশিদ্বয়ের টান নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ মনে করি, AC = 12 মি. ও BC = 16 মি. দৈর্ঘ্যের দুইটি রশির সাহায্যে W = 30 কেজি-ওজনের বস্তুটিকে C বিন্দুতে ঝুলান হলো, যেখানে C বিন্দু AB = 20 মি. দৈর্ঘ্যের দন্ডটির মধ্যবিন্দু D এর ঠিক খাড়া নিচে থাকে।



যেহেতু $AC^2+BC^2=12^2+16^2=20^2=AB^2$, তাই $\angle ACB=90°$

আবার, AB অতিভুজের মধ্যবিন্দু D হলে, DC = BD.

$\therefore\ \angle DBC=\angle DCB=\theta$ (ধরি)

CE বরাবর বস্তুর ওজন এবং CA ও CB বরাবর রশির টান যথাক্রমে T_1 ও T_2 এ বলত্রয় C তে ক্রিয়া করে সাম্যাবস্থা সৃষ্টি করে। সুতরাং লামির সূত্র হতে পাই,

$$\frac{T_1}{\sin BCE}=\frac{T_2}{\sin ACE}=\frac{W}{\sin ACB}\Rightarrow\frac{T_1}{\sin(180^0-\theta)}=\frac{T_2}{\sin(90^0-\theta)}=\frac{W}{\sin 90^0}$$

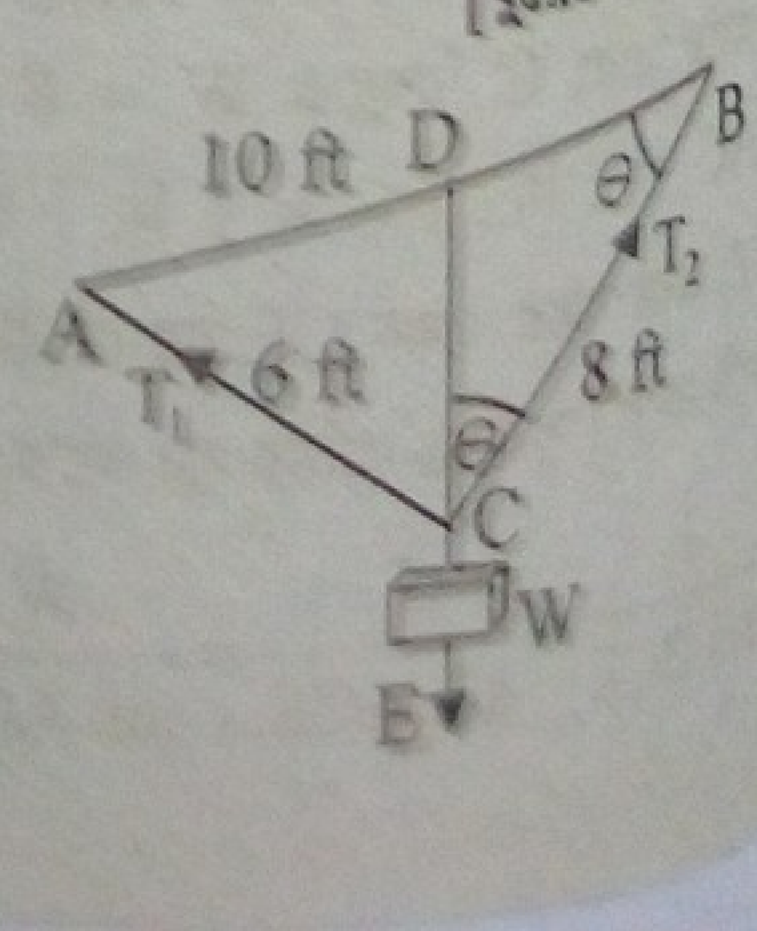
$$\Rightarrow\ \frac{T_1}{\sin\theta}=\frac{T_2}{\cos\theta}=\frac{W}{1}\Rightarrow\frac{T_1}{12/20}=\frac{T_2}{16/20}=W$$

$\therefore$ রশির টান, $T_1=\frac{12}{20}\times30$ অর্থাৎ 18 কেজি-ওজন এবং $T_2=\frac{16}{20}\times30$ অর্থাৎ 24 কেজি-ওজন

4(f) 6 ft ও 8 ft দৈর্ঘ্যের দুইটি রশির সাহায্যে 20 পাউন্ড-ওজনের একটি বস্তুকে ঝুলান হলো। রশি দুইটির অপর প্রান্ত 10 ft দৈর্ঘ্যের একটি দন্ডের দুই প্রান্তে বাঁধা আছে। দন্ডটি এরূপভাবে স্থাপন করা হলো যেন বস্তুটি এর মধ্যবিন্দুর ঠিক খাড়া নিচে থাকে। রশিদ্বয়ের টান নির্ণয় কর।

[বুয়েট' ০৮-০৯]

সমাধান ঃ মনে করি, AC = 6 ft ও BC = 8 ft দৈর্ঘ্যের দুইটি রশির সাহায্যে W = 20 পাউন্ড-ওজনের বস্তুটিকে C বিন্দুতে ঝুলান হলো, যেখানে C বিন্দু AB = 10 ft দৈর্ঘ্যের দন্ডটির মধ্যবিন্দু D এর ঠিক খাড়া নিচে থাকে।



যেহেতু $AC^2+BC^2=6^2+8^2=10^2=AB^2$, তাই $\angle ACB=90°$

এবং AB অতিভুজের মধ্যবিন্দু D. $\therefore \angle DBC=\angle DCB=\theta$ (ধরি)

CE বরাবর বস্তুর ওজন এবং CA ও CB বরাবর রশির টান যথাক্রমে T_1 ও T_2 এ বলত্রয় C তে ক্রিয়া করে সাম্যাবস্থা সৃষ্টি করে। সুতরাং লামির সূত্র হতে পাই,

$$\frac{T_1}{\sin BCE}=\frac{T_2}{\sin ACE}=\frac{W}{\sin ACB}\Rightarrow\frac{T_1}{\sin(180^0-\theta)}=\frac{T_2}{\sin(90^0-\theta)}=\frac{W}{\sin 90^0}$$

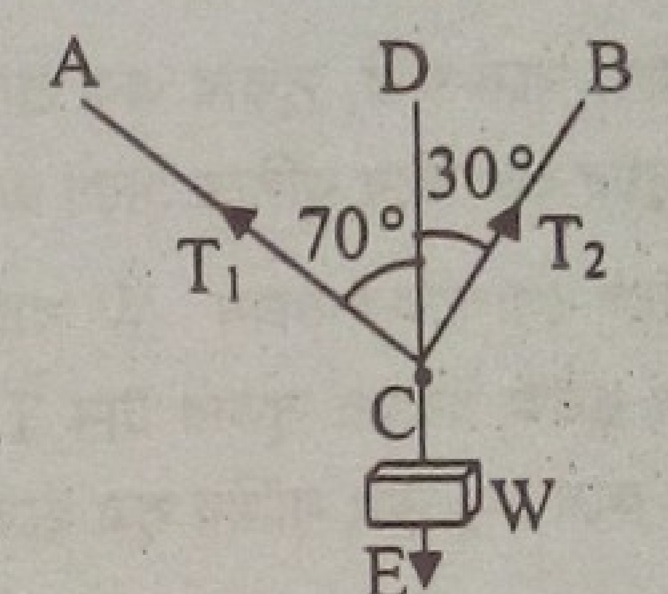
$$\Rightarrow\frac{T_1}{\sin\theta}=\frac{T_2}{\cos\theta}=\frac{W}{1}\Rightarrow\frac{T_1}{6/10}=\frac{T_2}{8/10}=W$$

$\therefore$ রশির টান, $T_1=\frac{6}{10}\times 20$ অর্থাৎ 12 lb-wt এবং $T_2=\frac{8}{10}\times 20$ অর্থাৎ 16 lb-wt

4(g) 60 কেজি-ওজনের একটি বস্তুকে দুইখন্ড তার দিয়ে দুইজন ব্যক্তি বহন করে। তার দুইটি উল্লম্বের সাথে 70° ও 30° কোণ উৎপন্ন করলে তার দুইটির টান নির্ণয় কর।

[চুয়েট'০৫-০৬]

সমাধান ঃ মনে করি, W = 60 কেজি-ওজনের বস্তুটিকে AC ও BC তার দিয়ে দুইজন ব্যক্তি বহন করে। CA ও CB রশি CD উল্লম্ব রেখার সাথে যথাক্রমে 70° ও 30° কোণ উৎপন্ন করে এবং বস্তুর ওজন CE বরাবর ক্রিয়ারত।



ধরি, CA ও CB রশির টান যথাক্রমে T_1 ও T_2। তাহলে C বিন্দুতে T_1, T_2 ও W ভারসাম্য সৃষ্টি করে। সুতরাং লামির সূত্র হতে পাই,

$$\frac{T_1}{\sin BCE}=\frac{T_2}{\sin ACE}=\frac{W}{\sin ACB}$$

$$\Rightarrow\frac{T_1}{\sin(180^0-30^0)}=\frac{T_2}{\sin(180^0-70^0)}=\frac{W}{\sin 100^0}\Rightarrow\frac{T_1}{\sin 30^0}=\frac{T_2}{\sin 70^0}=\frac{W}{\sin 100^0}$$

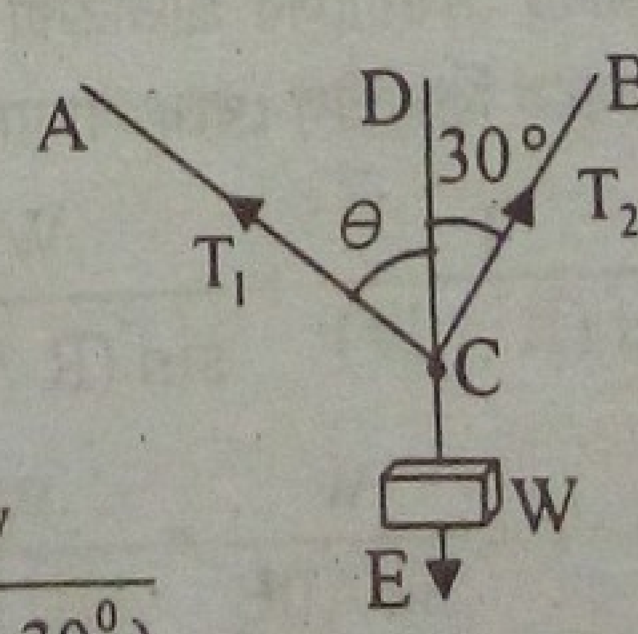
$\therefore\ T_1=\frac{\sin 30^0}{\sin 100^0}W=\frac{0.5}{0.985}\times 60$ অর্থাৎ 30.46 kg-wt (প্রায়)

এবং $T_2=\frac{\sin 70^0}{\sin 100^0}W=\frac{0.94}{.985}\times 60$ অর্থাৎ 57.26 kg-wt (প্রায়)

$\therefore$ রশিতে টানের পরিমাণ 30.46 কেজি-ওজন (প্রায়) ও 57.26 কেজি-ওজন (প্রায়)।.

4(h) W ওজন দুইটি রশি দ্বারা ঝুলানো হল। একটি রশি উল্লম্ব রেখার সাথে 30° কোণ উৎপন্ন করে। অপর রশিটি উল্লম্ব রেখার সাথে কত কোণ উৎপন্ন করলে এতে টানের পরিমাণ ক্ষুদ্রতম হবে। এক্ষেত্রে রশি দুইটির টানের পরিমাণ নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ মনে করি, AC ও BC রশি দুইটি দ্বারা W ওজনের বস্তুকে ঝুলানো হলো। CA ও CB রশি CD উল- ম্ব রেখার সাথে যথাক্রমে θ ও 30° কোণ উৎপন্ন করে। ধরি, CA ও CB রশির টান যথাক্রমে T_1 ও T_2 এবং বস্ত্তুটির ওজন CE বরাবর ক্রিয়ারত। তাহলে C বিন্দুতে T_1, T_2 ও W ভারসাম্য সৃষ্টি করে। সুতরাং লামির সূত্র হতে পাই,



$$\frac{T_1}{\sin BCE}=\frac{T_2}{\sin ACE}=\frac{W}{\sin ACB}=\frac{T_1}{\sin(180^0-30^0)}=\frac{T_2}{\sin(180^0-\theta)}=\frac{W}{\sin(\theta+30^0)}$$

$$\Rightarrow \frac{T_1}{\sin 30^0} = \frac{T_2}{\sin\theta} = \frac{W}{\sin(\theta + 30^0)} \quad \therefore T_1 = \frac{W\sin 30^0}{\sin(\theta + 30^0)} \cdots (i),\ T_2 = \frac{W\sin\theta}{\sin(\theta + 30^0)} \cdots (ii)$$

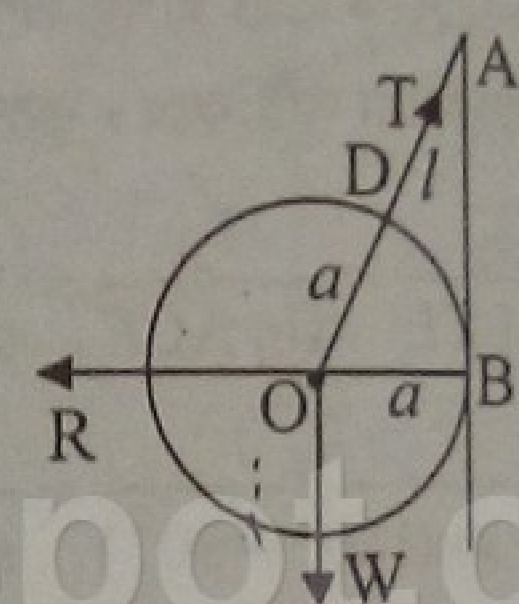
এখন, T_2 এর মান ক্ষুদ্রতম হবে, যখন $\sin(\theta + 30^0)$ এর মান বৃহত্তম হবে।

অর্থাৎ যখন $\sin(\theta + 30^0) = 1 = \sin 90° \Rightarrow \theta + 30° = 90° \Rightarrow \theta = 60°$ হবে।

এক্ষেত্রে রশি দুইটির টানের পরিমাণ $T_1 = \frac{W}{1} \times \frac{1}{2} = \frac{W}{2}$ এবং $T_2 = \frac{W\sin 60^0}{1} = \frac{\sqrt{3}}{2}W$

4(i) ***l*** **দৈর্ঘ্যবিশিষ্ট একটি সুতার এক প্রান্ত একটি উলম্ব দেয়ালের আটকানো আছে এবং অন্য প্রান্ত *a* ব্যাসার্ধবিশিষ্ট একটি সুষম গোলকের উপরস্থ কোন বিন্দুতে যুক্ত আছে। গোলকটির ওজন W হলে দেখাও যে, রশির টান $T = \frac{W(l + a)}{\sqrt{2al + l^2}}$** [ব.'০৬; দি.'০৯; য.'১৩; বুয়েট'০৪-০৫]

প্রমাণঃ মনে করি, সুতার এক প্রান্ত একটি উলম্ব দেয়ালের A বিন্দুতে আটকানো আছে এবং অপর প্রান্ত গোলকটির D বিন্দুতে যুক্ত করে ঝুলিয়ে দিলে তা উলম্ব দেয়ালের B বিন্দুতে স্পর্শ করে। ধরি, সুতার টান T এবং বৃত্তের কেন্দ্র O।



তাহলে গোলকের ওজন W খাড়া নিচের দিকে, BO বরাবর দেওয়ালের প্রতিক্রিয়া R এবং ডিউঅ বরাবর সুতার টান T - এ বল তিনটি O বিন্দুতে ক্রিয়াশীল থেকে সাম্যাবস্থা সৃষ্টি করে। সুতরাং লামির সূত্র হতে পাই,

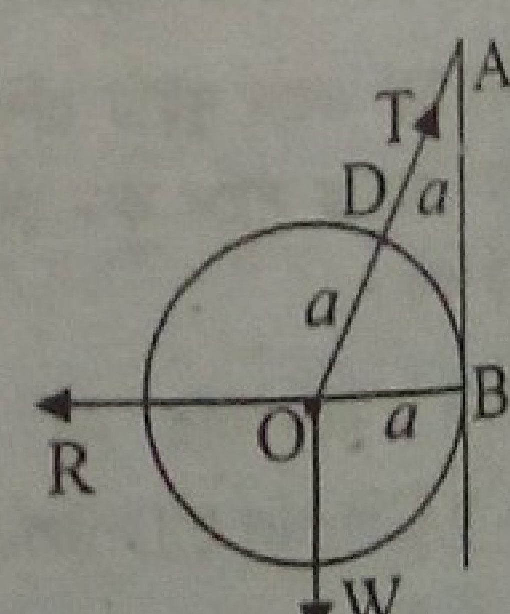
$$\frac{T}{\sin(R \wedge W)} = \frac{W}{\sin(R \wedge T)} = \frac{R}{\sin(T \wedge W)}$$

$$\Rightarrow \frac{T}{\sin 90^0} = \frac{W}{\sin(180^0 - \angle A0B)}$$

$$\Rightarrow T = \frac{W}{\sin A0B} = \frac{W}{AB/AO} = \frac{AO}{\sqrt{AO^2 - OB^2}}W = \frac{l + a}{\sqrt{(l + a)^2 - a^2}}W = \frac{W(l + a)}{\sqrt{2al + l^2}}$$

4(j) ***a*** **দৈর্ঘ্যবিশিষ্ট একটি সুতার একপ্রান্ত একটি উল্লম্ব দেয়ালের আটকানো এবং অন্য প্রান্ত *a* ব্যাসার্ধ বিশিষ্ট একটি সুষম গোলকের সাথে যুক্ত আছে। গোলকটির ওজন W হলে দেখাও যে, সুতার টান $T = \frac{2}{\sqrt{3}}W$.** [বুয়েট'০৪-০৫]

প্রমাণঃ মনে করি, সুতার এক প্রান্ত একটি উল্লম্ব দেয়ালের A বিন্দুতে আটকানো আছে এবং অপর প্রান্ত গোলকটির D বিন্দুতে যুক্ত করে ঝুলিয়ে দিলে তা উল্লম্ব দেয়ালের B বিন্দুতে স্পর্শ করে। ধরি বৃত্তের কেন্দ্র O। তাহলে গোলকের ওজন W খাড়া নিচের দিকে, BO বরাবর দেওয়ালের প্রতিক্রিয়া R এবং ODA বরাবর সুতার টান T- এ বল তিনটি O বিন্দুতে ক্রিয়াশীল থেকে সাম্যাবস্থা সৃষ্টি করে। সুতরাং লামির সূত্র হতে পাই,

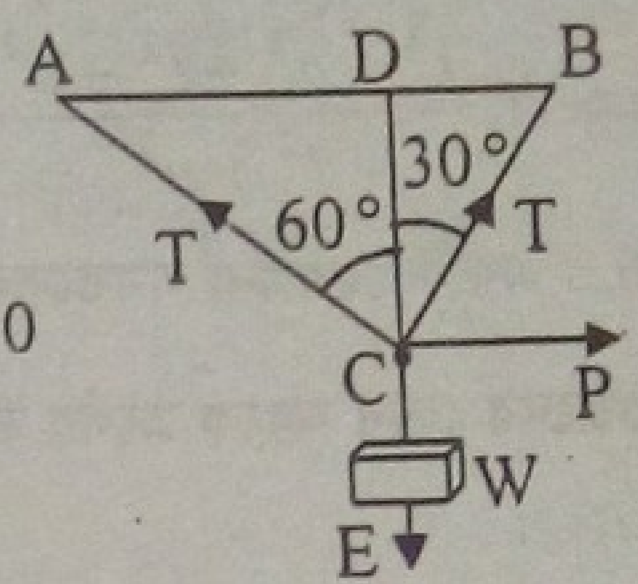


$$\frac{T}{\sin(R \wedge W)} = \frac{W}{\sin(R \wedge T)} = \frac{R}{\sin(T \wedge W)} \Rightarrow \frac{T}{\sin 90^0} = \frac{W}{\sin(180^0 - \angle A0B)}$$

$$\Rightarrow T = \frac{W}{\sin A0B} = \frac{W}{AB/AO} = \frac{AO}{\sqrt{AO^2 - OB^2}}W = \frac{2a}{\sqrt{(2a)^2 - a^2}}W = \frac{2a}{\sqrt{3}a}W \quad \therefore T = \frac{2}{\sqrt{3}}W.$$

5(a) একই অনুভূমিক রেখায় অবস্থিত দুইটি বিন্দুতে একটি রশির দুইপ্রান্ত বাঁধা আছে। W ওজনের একটি মসৃণ আংটা রশির উপর দিয়ে অবাধে চলাচল করতে পারে। এর উপর একটি অনুভূমিক বল P কার্যরত হলে স্থিরাবস্থায় রশির অংশদ্বয় উল্লম্ব রেখার সাথে $30°$ ও $60°$ কোণ সৃষ্টি করে। দেখাও যে, $P = W(2-\sqrt{3})$ এবং রশির টান $T = W(\sqrt{3}-1)$.

প্রমাণ: মনে করি, একই অনুভূমিক রেখায় অবস্থিত A ও B বিন্দুতে রশিটির প্রান্তদ্বয় বাঁধা আছে এবং অনুভূমিক P বল কার্যরত থাকায় আংটাটি C বিন্দুতে স্থির আছে। ধরি, CB ও CA রশির অংশদ্বয় CD উল্লম্ব রেখার সাথে যথাক্রমে $30°$ ও $60°$ কোণ সৃষ্টি করে। যেহেতু আংটাটি রশির উপর দিয়ে অবাধে চলাচল করতে পারে, সুতরাং তারের টান T (ধরি) সর্বত্র সমান থাকবে।



শর্তানুসারে C বিন্দুতে ক্রিয়ারত T, T, W ও P বল চারটির লব্ধি শূন্য। সুতরাং P বলের দিক ও এর উপর লম্ব বরাবর বলগুলির লম্বাংশ নিয়ে পাই,

$$P\cos 0° + T\cos(90° - 30°) + T\cos(90° + 60°) + W\cos 270° = 0$$

$$\Rightarrow P + T\sin 30° - T\sin 60° + 0 = 0 \Rightarrow P + (\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2})T = 0$$

$$\Rightarrow P = \frac{\sqrt{3}-1}{2}T \cdots \cdots \text{(i) এবং}$$

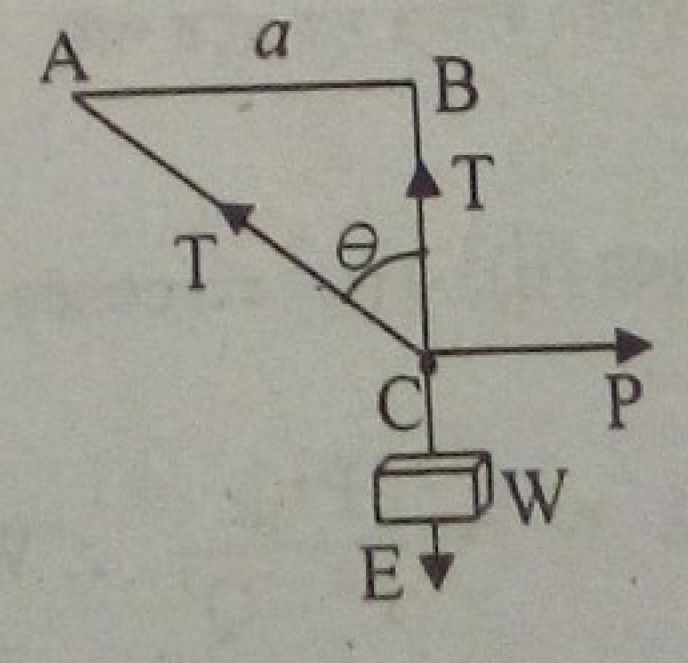
$$P\sin 0° + T\sin(90° - 30°) + T\sin(90° + 60°) + W\sin 270° = 0$$

$$\Rightarrow 0 + T\cos 30° + T\cos 60° - W = 0$$

$$\Rightarrow W = (\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2})T \Rightarrow T = \frac{2}{\sqrt{3}+1}W = \frac{2(\sqrt{3}-1)}{3-1}W$$

$\therefore\ T = W(\sqrt{3}-1)$ এবং (i) হতে পাই, $P = \frac{(\sqrt{3}-1)^2}{2}W = \frac{W}{2}(3 - 2\sqrt{3} + 1) = W(2-\sqrt{3})$

5(b) l দৈর্ঘ্যের একটি সূতার দুইপ্রান্ত একই অনুভূমিক রেখার a দূরত্বে অবস্থিত A ও B বিন্দুতে বাঁধা আছে। W ওজনের একটি মসৃণ আংটা রশির উপর দিয়ে অবাধে চলাচল করতে পারে। একটি অনুভূমিক বল P আংটাটিকে টেনে B বিন্দুর খাড়া নিচে স্থির রাখে। দেখাও যে, $P = \frac{aW}{l}$ এবং সূতার টান $T = \frac{W(a^2+l^2)}{2l^2}$.



প্রমাণ: মনে করি, একই অনুভূমিক রেখায় অবস্থিত A ও B বিন্দুতে রশিটির প্রান্তদ্বয় বাঁধা আছে এবং অনুভূমিক বল P আংটাটিকে টেনে B বিন্দুর খাড়া নিচে C বিন্দুতে স্থির রাখে। যেহেতু আংটাটি রশির উপর দিয়ে অবাধে চলাচল করতে পারে, সুতরাং রশির টান সর্বত্র সমান থাকবে। ধরি, রশির টান T এবং $BC = x$। তাহলে $AC = l - x$

ABC সমকোণী ত্রিভুজ হতে পাই, $a^2 + x^2 = (l-x)^2$

$$\Rightarrow a^2 + x^2 = l^2 - 2lx + x^2 \Rightarrow x = (l^2 - a^2)/2l = BC$$

$$\therefore\ AC = l - \frac{l^2 - a^2}{2l} = \frac{l^2 + a^2}{2l}$$

শর্তানুসারে C বিন্দুতে ক্রিয়ারত T, T, W ও P বল চারটির লব্ধি শূন্য। সুতরাং P বলের দিক ও এর উপর লম্ব বরাবর বলগুলির লম্বাংশ নিয়ে পাই,

$P\cos 0^\circ + T\cos 90^\circ + T\cos(90^\circ + \theta) + W\cos 270^\circ = 0$; যেখানে $\angle ACB = \theta$

$\Rightarrow P + 0 - T\sin\theta + 0 = 0 \Rightarrow P = T\sin\theta = T\dfrac{AB}{AC} = T\dfrac{a}{(l^2+a^2)/2l} = \dfrac{2alT}{l^2+a^2} \cdots$(i) এবং

$P\sin 0^\circ + T\sin 90^\circ + T\sin(90^\circ + \theta) + W\sin 270^\circ = 0.$

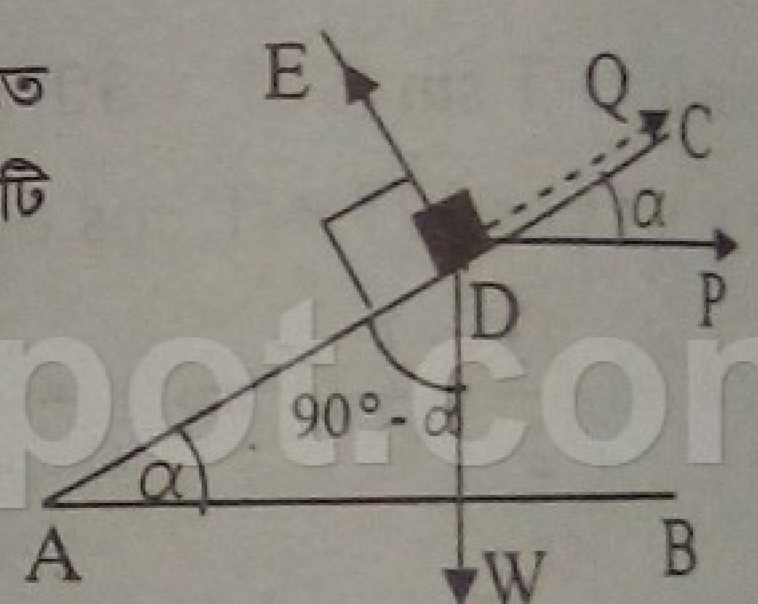
$\Rightarrow 0 + T + T\cos\theta - W = 0 \Rightarrow T\left(1 + \dfrac{BC}{AC}\right) = W \Rightarrow T\left\{1 + \dfrac{(l^2-a^2)/2l}{(l^2+a^2)/2l}\right\} = W$

$\Rightarrow T\dfrac{l^2+a^2+l^2-a^2}{l^2+a^2} = W \therefore T = \dfrac{W(a^2+l^2)}{2l^2}$ এবং $P = \dfrac{2al}{l^2+a^2} \times \dfrac{W(a^2+l^2)}{2l^2} = \dfrac{aW}{l}$

6. একটি হেলানো সমতলের ভূমি ও দৈর্ঘ্যের সমান্তরালে ক্রিয়াশীল যথাক্রমে P ও Q বলদ্বয় প্রত্যেকে এককভাবে W ওজনের কোন বস্তুকে তলের উপর স্থির রাখতে পারে। প্রমাণ কর যে, $W = \dfrac{PQ}{\sqrt{P^2 - Q^2}}$; $P > Q$.

[রা.'০২; ঢা.'০৪; চ.'০৯]

প্রমাণঃ মনে করি, AB অনুভূমিকের সাথে α কোণে আনত AC হেলানো সমতল । ভূমির সমান্তরালে ক্রিয়াশীল P বল W ওজনের বস্তুটিকে AC এর উপর D বিন্দুতে স্থির রাখলে, $DE \perp AC$ বরাবর ক্রিয়াশীল তলের প্রতিক্রিয়া , W ও P- এ তিনটি বল D বিন্দুতে সাম্যাবস্থা সৃষ্টি করবে। সুতরাং লামির সূত্র হতে পাই,



$$\frac{P}{\sin\{90^0 + (90^0 - \alpha)\}} = \frac{W}{\sin(90^0 + \alpha)}$$

$$\Rightarrow \frac{P}{\sin(180^0 - \alpha)} = \frac{W}{\cos\alpha} \Rightarrow \frac{P}{\sin\alpha} = \frac{W}{\cos\alpha} \Rightarrow \cot\alpha = \frac{W}{P} \cdots\cdots \text{(i)}$$

আবার, হেলানো সমতলের দৈর্ঘ্যের সমান্তরালে ক্রিয়াশীল Q বল W ওজনের বস্তুটিকে AC এর উপর D বিন্দুতে স্থির রাখলে, $DE \perp AC$ বরাবর ক্রিয়াশীল তলের প্রতিক্রিয়া , W ও Q- এ তিনটি বল D বিন্দুতে সাম্যাবস্থা সৃষ্টি করবে। সুতরাং লামির সূত্র হতে পাই, $\dfrac{Q}{\sin(180^0 - \alpha)} = \dfrac{W}{\sin 90^0} \Rightarrow \dfrac{Q}{\sin\alpha} = \dfrac{W}{1} \Rightarrow \operatorname{cosec}\alpha = \dfrac{W}{P} \cdots\cdots$(ii)

এখন $(ii)^2 - (i)^2 \Rightarrow \operatorname{cosec}^2\alpha - \cot^2\alpha = W^2\left(\dfrac{1}{Q^2} - \dfrac{1}{P^2}\right) \Rightarrow 1 = W^2\left(\dfrac{P^2 - Q^2}{P^2Q^2}\right)$

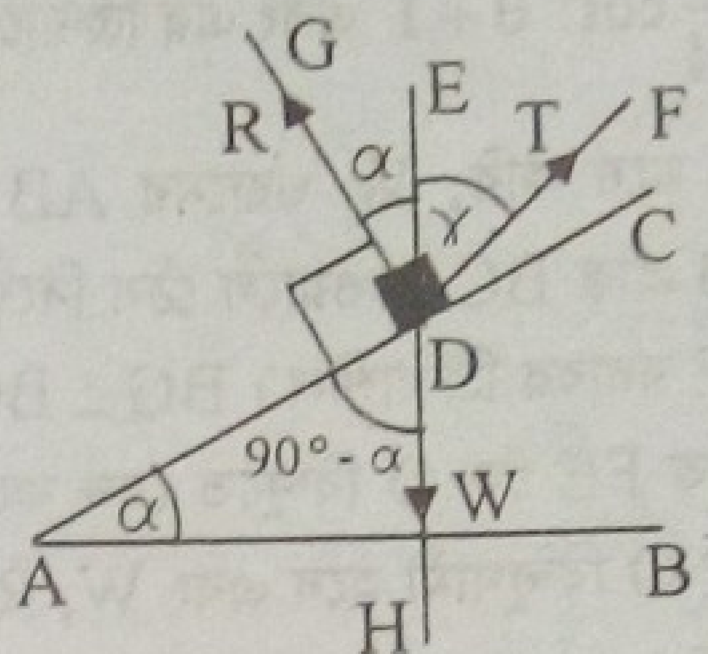
$$\Rightarrow W^2 = \frac{P^2Q^2}{P^2 - Q^2} \quad \therefore W = \frac{PQ}{\sqrt{P^2 - Q^2}}$$

অতিরিক্ত প্রশ্ন (সমাধানসহ)

1(a) অনুভূমিকের সাথে α কোণে আনত একটি মসৃণ সমতলের উপর একটি বস্তু উল্লম্বের সাথে γ কোণে রত একটি রশি দ্বারা সুস্থিত আছে। তলের নতি β ($\beta > \alpha$) হলে এবং γ অপরিবর্তিত থাকলে রশির টান দ্বিগুণ হয়। দেখাও যে, $\cot\alpha - 2\cot\beta = \cot\gamma$.

প্রমাণঃ মনে করি, AB অনুভূমিকের সাথে α কোণে আনত AC মসৃণ সমতলের উপর D বিন্দুতে W ওজনের একটি বস্তু DE উল্লম্বের সাথে γ কোণে রত DF রশি দ্বারা সুস্থিত আছে। ধরি, তলের উল্লম্ব প্রতিক্রিয়া R, W যথাক্রমে DG , DH বরাবর ক্রিয়ারত। তাহলে, $\angle GDH = 90° + 90° - \alpha = 180° - \alpha, \angle EDG = 180° - (180° - \alpha) = \alpha$

১ম ক্ষেত্রে, D বিন্দুতে তলের উল্লম্ব প্রতিক্রিয়া R, সুতার টান T (ধরি) ও W সাম্যাবস্থায় আছে। সুতরাং লামির সূত্র হতে পাই, $\frac{T}{\sin(180^0 - \alpha)} = \frac{W}{\sin(\alpha + \gamma)} \Rightarrow \frac{T}{\sin\alpha} = \frac{W}{\sin(\alpha+\gamma)} \cdots (i)$



২য় ক্ষেত্রে, তলের নতি β ($\beta > \alpha$) হলে, সুতার টান 2T হয়।

সুতরাং অনুরূপভাবে পাই, $\frac{2T}{\sin\beta} = \frac{W}{\sin(\beta+\gamma)} \cdots\cdots (ii)$

$(i) \div (ii) \Rightarrow \frac{\sin\beta}{2\sin\alpha} = \frac{\sin(\beta+\gamma)}{\sin(\alpha+\gamma)}$

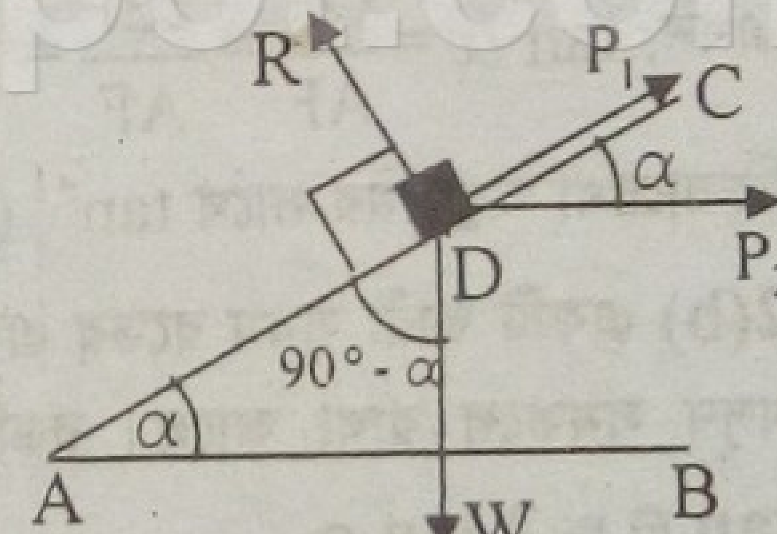
$\Rightarrow \sin\beta(\sin\alpha\cos\gamma + \sin\gamma\cos\alpha) = 2\sin\alpha(\sin\beta\cos\gamma + \sin\gamma\cos\beta)$

$\Rightarrow \sin\alpha\sin\beta\cos\gamma + \sin\beta\sin\gamma\cos\alpha = 2\sin\alpha\sin\beta\cos\gamma + 2\sin\alpha\sin\gamma\cos\beta$

$\Rightarrow \sin\beta\sin\gamma\cos\alpha - 2\sin\alpha\sin\gamma\cos\beta = \sin\alpha\sin\beta\cos\gamma$

$\therefore \cot\alpha - 2\cot\beta = \cot\gamma$ (Showed) [উভয় পক্ষকে $\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma$ দ্বারা ভাগ করে।]

1(b) ভূমির সাথে α কোণে নত একটি মসৃণ সমতলের দৈর্ঘ্যে ও ভূমির সমান্তরালে ক্রিয়াশীল যথাক্রমে P_1 ও P_2 বলদ্বয় একটি বস্তুকে তলের উপর সাম্যাবস্থায় রাখে। P_1, P_2 এবং α এর প্রত্যেকটির মান অর্ধেক হলেও বস্তুটি তলের উপর সাম্যাবস্থায় থাকে। প্রমাণ কর যে, $P_1 : P_2 = 2\cos^2\frac{\alpha}{4} : 1$



প্রমাণ: মনে করি, AB অনুভূমিকের সাথে α কোণে আনত AC সমতলের D বিন্দুতে W ওজনের বস্তুটিকে P_1 ও P_2 বলদ্বয় স্থির রাখে এবং এ বিন্দুতে তলের উল্লম্ব প্রতিক্রিয়া R। তাহলে D বিন্দুতে P_1, P_2, R, W এ চারটি বল সাম্যাবস্থা সৃষ্টি করে অর্থাৎ এদের লব্ধি শূন্য। সুতরাং AC বরাবর লম্বাংশ নিয়ে পাই,

$P_1\cos0° + R\cos90° + W\cos(270° - \alpha) + P_2\cos(360° - \alpha) = 0$

$\Rightarrow P_1 + 0 - W\sin\alpha + P_2\cos\alpha = 0 \Rightarrow P_1 + P_2\cos\alpha = W\sin\alpha \cdots (i)$

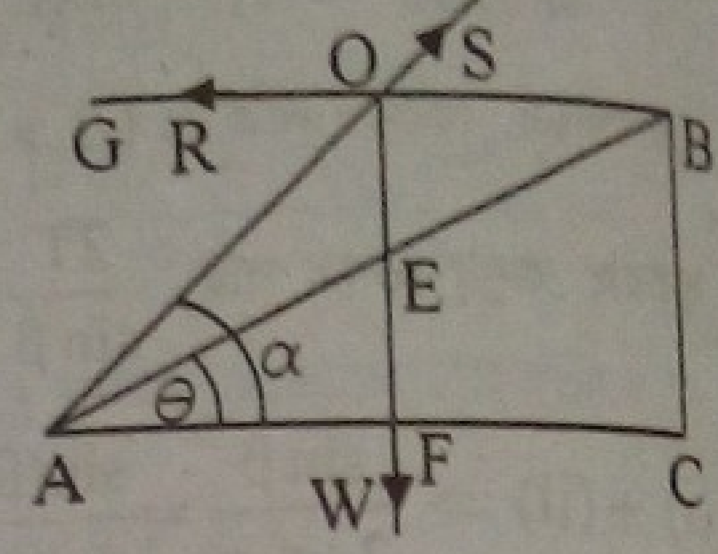
আবার, P_1, P_2 এবং α এর প্রত্যেকটির মান অর্ধেক হলেও বস্তুটি তলের উপর সাম্যাবস্থায় থাকে। সুতরাং অনুরূপভাবে পাই, $\frac{P_1}{2} + \frac{P_2}{2}\cos\frac{\alpha}{2} = W\sin\frac{\alpha}{2} \Rightarrow \frac{1}{2}(P_1 + P_2\cos\frac{\alpha}{2}) = W\sin\frac{\alpha}{2} \cdots\cdots (ii)$

$(i) \div (ii) \Rightarrow \frac{2(P_1 + P_2\cos\alpha)}{P_1 + P_2\cos\frac{\alpha}{2}} = \frac{\sin\alpha}{\sin\frac{\alpha}{2}} = \frac{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}} \Rightarrow P_1 + P_2\cos\alpha = P_1\cos\frac{\alpha}{2} + P_2\cos^2\frac{\alpha}{2}$

$\Rightarrow P_1(1 - \cos\frac{\alpha}{2}) = P_2(\cos^2\frac{\alpha}{2} - \cos\alpha) = P_2(\cos^2\frac{\alpha}{2} - 2\cos^2\frac{\alpha}{2} + 1) = P_2(1 - \cos^2\frac{\alpha}{2})$

$$\Rightarrow P_1 = P_2\left(1+\cos\frac{\alpha}{2}\right) = P_2\left(2\cos^2\frac{\alpha}{4}\right) \quad \therefore P_1 : P_2 = 2\cos^2\frac{\alpha}{4} : 1$$

2(a) W ওজনের একটি সুষম দন্ড একটি কব্জার চতুর্দিকে অবাধে ঘুরতে সক্ষম। এর এক প্রান্ত একটি মসৃণ দেওয়ালে ঠেস দিয়ে আছে। দন্ডটি যদি অনুভূমির সাথে θ কোণ করে, তাহলে প্রমাণ কর যে, কব্জার প্রতিক্রিয়া $W\sqrt{\frac{1}{4}\cot^2\theta+1}$ এবং এর ক্রিয়ারেখা অনুভূমির সাথে $\tan^{-1}(2\tan\theta)$ কোণ উৎপন্ন করে।



প্রমাণঃ মনে করি, W ওজনের AB দন্ডটির A প্রান্ত কব্জার সাথে আটকানো এবং B প্রান্ত BC দেওয়ালে ঠেস দিয়ে আছে। দন্ডের ওজন W এর মধ্যবিন্দু E তে EF বরাবর ক্রিয়াশীল। $BG \perp BC$ বরাবর ক্রিয়াশীল দেওয়ালের প্রতিক্রিয়া R বর্ধিত FE কে O বিন্দুতে ছেদ করে। ভারসাম্যের জন্য কব্জার প্রতিক্রিয়া S অবশ্যই O বিন্দুগামী হবে এবং W, R, S বলত্রয়কে OAF ত্রিভুজের যথাক্রমে OF, FA, AO বাহুত্রয় দ্বারা মানে ও দিকে একইক্রমে সূচিত করা যাবে। সুতরাং বলের ত্রিভুজ সূত্রের বিপরীত সূত্র হতে পাই,

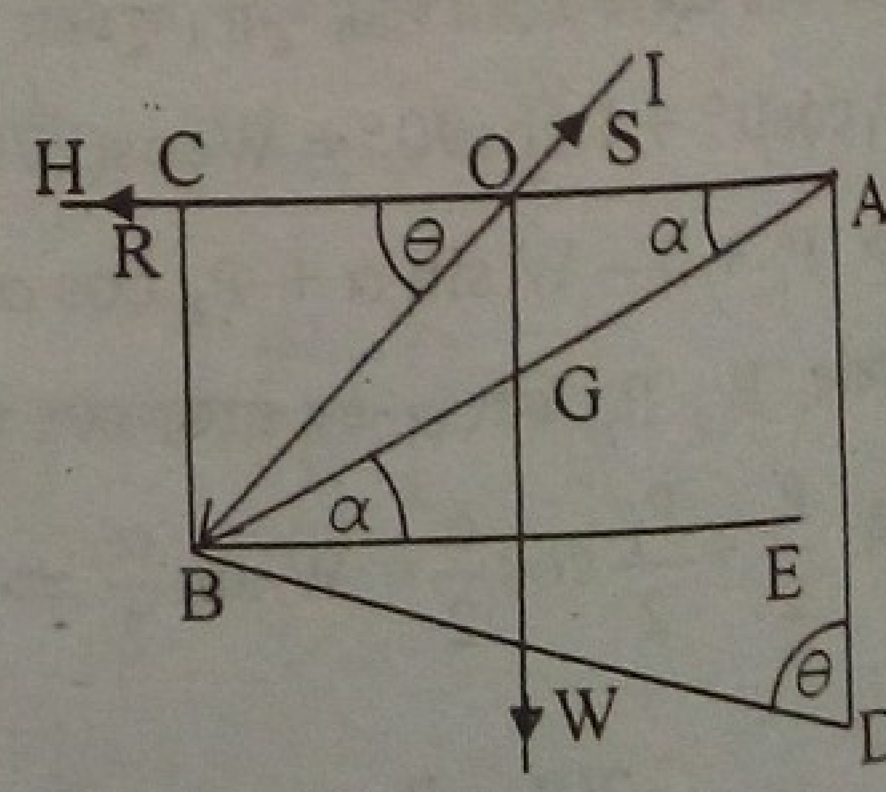
$$\frac{W}{OF} = \frac{S}{AO} \Rightarrow S = W \times \frac{AO}{OF} = W\sqrt{\frac{OF^2 + AF^2}{OF^2}} = W\sqrt{1+\left(\frac{AF}{OF}\right)^2} = W\sqrt{1+\left(\frac{AF}{2EF}\right)^2}$$

[$\because \Delta ABC$ –এ, $BC \parallel EF$ এবং AB এর মধ্যবিন্দু E , $OF = BC = 2EF$.]

$$\Rightarrow S = W\sqrt{1+\frac{1}{4}\left(\frac{AF}{EF}\right)^2} = W\sqrt{1+\frac{1}{4}\cot^2\theta}$$, যখন $\angle BAC = \theta$ এবং $\angle OAF = \alpha$

এখন, $\tan\alpha = \frac{OF}{AF} = \frac{2EF}{AF} = 2\tan\theta \Rightarrow \alpha = \tan^{-1}(2\tan\theta)$ $\therefore$ কব্জার প্রতিক্রিয়া $W\sqrt{\frac{1}{4}\cot^2\theta+1}$ এর ক্রিয়ারেখা অনুভূমির সাথে $\tan^{-1}(2\tan\theta)$ কোণ উৎপন্ন করে।

2(b) একটি ভারী সুষম রডের একপ্রান্ত একটি মসৃণ দেওয়ালে এবং অপর প্রান্ত দেওয়ালের সাথে θ কোণে নত একটি মসৃণ সমতলে রাখা আছে। রডটি সাম্যাবস্থায় থাকলে এবং ভূমির সাথে রডের নতি α হলে , প্রমাণ কর যে, $\tan\theta = 2\tan\alpha$.



প্রমাণঃ মনে করি, AB রডের A প্রান্ত AD দেওয়ালে এবং B প্রান্ত BD সমতলে রাখা আছে। $BG \perp BC$ বরাবর দেওয়ালের প্রতিক্রিয়া R, $BI \perp BD$ বরাবর সমতলের প্রতিক্রিয়া S এবং রডের ওজন W এর মধ্যবিন্দু G তে খাড়া নিম্নদিকে ক্রিয়া করে। যেহেতু রডটি সাম্যাবস্থায় আছে, সুতরাং R, S ও W এর ক্রিয়ারেখাত্রয় পারস্পর একবিন্দু (ধরি) O তে ছেদ করে। B থেকে R এর ক্রিয়ারেখার উপর অঙ্কিত লম্ব C বিন্দুতে ছেদ করে। তাহলে, $\angle ADB = \theta$, $\angle ABE = \angle BAC = \alpha$, যখন BE অনুভূমিক।

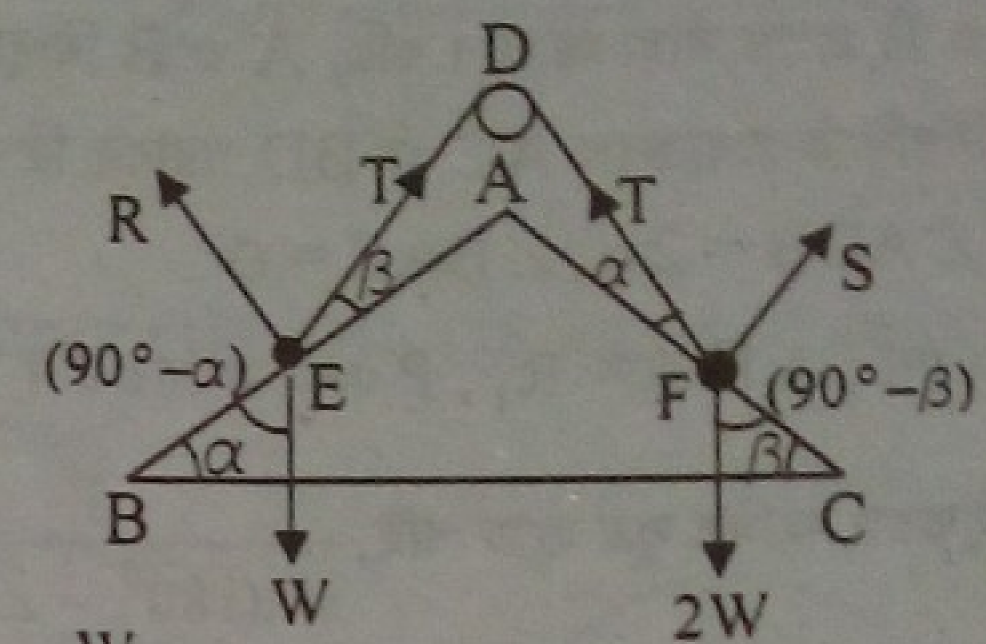
ADBO চতুর্ভুজে, $\angle DAO = \angle OBD = 90°$. $\therefore \angle ADB = \pi - \angle AOB = \angle BOC = \theta$

আবার, ΔABC এ $BC \parallel GO$ এবং G, AB এর মধ্যবিন্দু । সুতরাং O, AC এর মধ্যবিন্দু ।

এখন OBC সমকোণী ত্রিভুজে, $\tan\theta = \dfrac{BC}{OC} = \dfrac{BC}{AC/2} = 2\dfrac{BC}{AC}$ $\therefore \tan\theta = 2\tan\alpha$ (Showed)

2(c) AB ও AC মসৃণ তলদ্বয় ভূমিতলের সাথে যথাক্রমে α ও β কোণে হেলানো আছে। A বিন্দুর খাড়া উপরে স্থাপিত মসৃণ কপিকলের উপর দিয়ে একটি সুতার দুইপ্রান্তে সংযুক্ত W ও 2W ওজনের দুইটি বস্তু যথাক্রমে AB ও AC তলের উপর বসানো আছে। সুতার অংশদ্বয় AB ও AC এর সাথে যথাক্রমে β ও α কোণ উৎপন্ন করে। প্রমাণ কর যে, $\sin 2\alpha = 2\sin 2\beta$.

প্রমাণঃ মনে করি, মসৃণ কপিকলটি D বিন্দুতে স্থাপিত এবং W ও 2W ওজনের বস্তু দুইটি AB ও AC তলের উপর যথাক্রমে E ও F বিন্দুতে বসানো আছে। ধরি, E ও F বিন্দুতে তলের উল্লম্ব প্রতিক্রিয়া যথাক্রমে R ও S। কপিকলটি মসৃণ বলে সুতার টান T (ধরি) সর্বত্র সমান।



এখন E বিন্দুতে W, R, T সাম্যাবস্থা সৃষ্টি করে।

$\therefore$ লামির সূত্র হতে পাই, $\dfrac{T}{\sin(180^0-\alpha)} = \dfrac{W}{\sin(90^0-\beta)} \Rightarrow \dfrac{T}{\sin\alpha} = \dfrac{W}{\cos\beta} \cdots\cdots\cdots(i)$

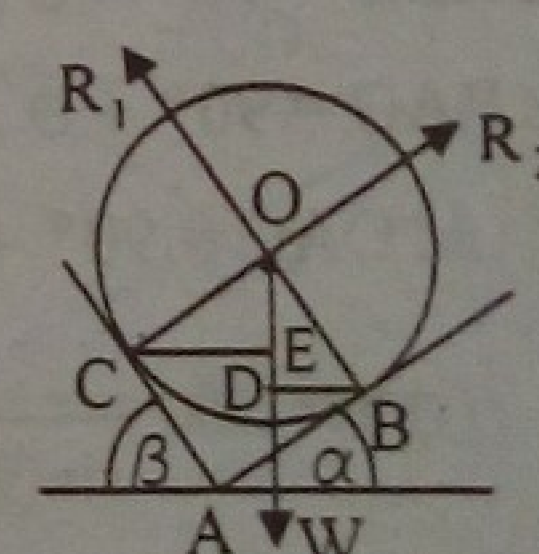
আবার F বিন্দুতে 2W, S, T সাম্যাবস্থা সৃষ্টি করে।

$\therefore$ লামির সূত্র হতে পাই, $\dfrac{T}{\sin(180^0-\beta)} = \dfrac{2W}{\sin(90^0-\alpha)} \Rightarrow \dfrac{T}{\sin\beta} = \dfrac{2W}{\cos\alpha} \cdots(ii)$

$$(i) \div (ii) \Rightarrow \frac{\sin\beta}{\sin\alpha} = \frac{\cos\alpha}{2\cos\beta} \Rightarrow 2\sin\alpha\cos\alpha = 2(2\sin\beta\cos\beta) \quad \therefore \sin 2\alpha = 2\sin 2\beta$$

2(d) ভূমির সাথে α, β কোণে নত দুইটি মসৃণ সমতল ভূতলের একটি রেখায় ছেদ করে। W ওজনের একটি গোলক এদের মধ্যে স্থাপিত হলে, তলদ্বয়ের প্রতিক্রিয়া নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ মনে করি, সমতল দুইটি ভূতলের একটি রেখাকে A বিন্দুতে ছেদ করে। স্পর্শবিন্দু B ও C তে তল দুইটির প্রতিক্রিয়া যথাক্রমে R_1 ও R_2 এবং গোলকের ওজন W এর কেন্দ্র O তে সাম্যাবস্থা সৃষ্টি করে । B ও C থেকে অঙ্কিত লম্ব W এর ক্রিয়ারেখাকে যথাক্রমে D ও E বিন্দুতে ছেদ করে। তাহলে,



$\alpha = \angle ABD = 90° - \angle OBD = \angle BOD$.

অনুরূপ, $\beta = \angle COD$. লামির সূত্র থেকে পাই,

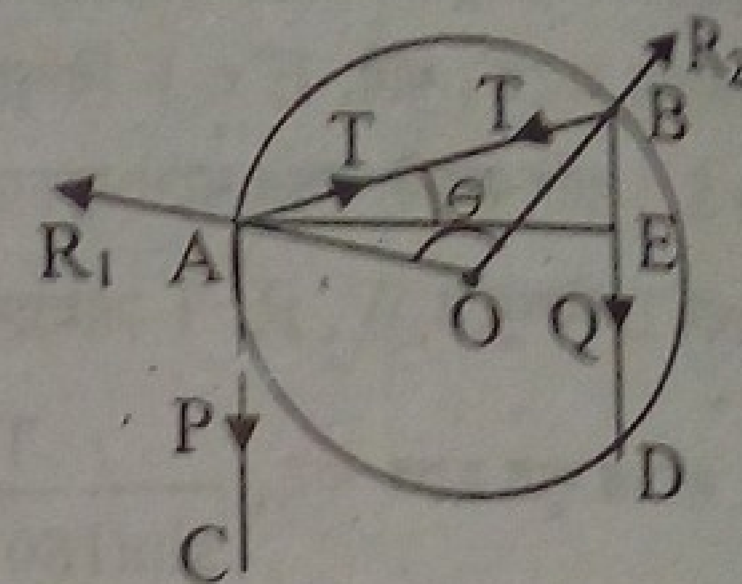
$$\frac{R_1}{\sin(W \wedge R_2)} = \frac{R_2}{\sin(R_1 \wedge W)} = \frac{W}{\sin(R_1 \wedge R_2)}$$

$$\Rightarrow \frac{R_1}{\sin(180^0 - \angle COD)} = \frac{R_2}{\sin(180^0 - \angle BOD)} = \frac{W}{\sin BOC} \Rightarrow \frac{R_1}{\sin COD} = \frac{R_2}{\sin BOD} = \frac{W}{\sin(\alpha+\beta)}$$

$\Rightarrow \dfrac{R_1}{\sin\beta} = \dfrac{R_2}{\sin\alpha} = \dfrac{W}{\sin(\alpha+\beta)}$ $\therefore$ তলদ্বয়ের প্রতিক্রিয়া $R_1 = \dfrac{W\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}$ এবং $R_2 = \dfrac{W\sin\alpha}{\sin(\alpha+\beta)}$

2(e) P ও Q $(P > Q)$ ওজনের দুইটি আংটি একটি খাড়া মসৃণ বৃত্তাকার তারের উপরের অংশে ওজনহীন একটি সুতার দুই প্রান্ত বাঁধা আছে। সুতার টান অবস্থায় এর দৈর্ঘ্য কেন্দ্রে 2φ কোণ তৈরী করে। অনুভূমিকের সাথে সুতা θ কোণ তৈরী করলে, দেখাও যে, $\tan\theta = \dfrac{P-Q}{P+Q}\tan\varphi$.

প্রমাণ : মনে করি, P ও Q ওজনের আংটি দুইটি O কেন্দ্র বিশিষ্ট বৃত্তাকার তারের উপরের অংশে যথাক্রমে AB সুতার A ও B প্রান্তে বাঁধা আছে। ধরি, A ও B বিন্দুতে প্রতিক্রিয়া R_1 ও R_2, যাদের কার্যরেখা O গামী এবং P ও Q খাড়া নিম্নদিকে যথাক্রমে AC ও BD বরাবর ক্রিয়া করে। AE অনুভূমিক রেখা BD কে E বিন্দুতে ছেদ করে। তাহলে, $\angle AOB = 2\varphi, \angle BAE = \theta$



এখন, A বিন্দুতে R_1, P এবং তারের টান T (ধরি) সাম্যবস্থা সৃষ্টি করে।

সুতরাং লামির সূত্র হতে পাই, $\dfrac{P}{\sin(180^0 - \angle OAB)} = \dfrac{T}{\sin(180^0 - \angle OAC)}$

$$\Rightarrow \frac{P}{\sin OAB} = \frac{T}{\sin OAC} \ldots \ldots (i)$$

আবার, B বিন্দুতে R_2, Q এবং T সাম্যবস্থা সৃষ্টি করে। সুতরাং লামির সূত্র হতে পাই,

$$\frac{Q}{\sin(180^0 - \angle ABO)} = \frac{T}{\sin(180^0 - \angle OBD)} \Rightarrow \frac{Q}{\sin ABO} = \frac{T}{\sin OBD} \ldots \ldots (ii)$$

ΔOAB -এ, $OA = OB$

$\therefore \angle OAB = \angle OBA = \frac{1}{2}(180° - \angle AOB) = \frac{1}{2}(180° - 2\varphi) = 90° - \varphi$.

$\angle ABD = 90° - \theta$, $\angle OBD = \angle ABD - \angle OBA = 90° - \theta - (90° - \varphi) = \varphi - \theta$.

$\angle BAC = 90° + \theta$, $\angle OAE = \angle OAB - \angle BAE = 90° - \varphi - \theta$

$\therefore \angle OAC = 90° - \angle OAE = 90° - 90° + \varphi + \theta = \varphi + \theta$

$\therefore$ (i) হতে পাই, $\dfrac{P}{\sin(90^0 - \varphi)} = \dfrac{T}{\sin(\theta + \varphi)} \Rightarrow \dfrac{P}{\cos\varphi} = \dfrac{T}{\sin(\theta + \varphi)} \ldots \ldots (iii)$

$$\frac{Q}{\sin(90^0 - \varphi)} = \frac{T}{\sin(\varphi - \theta)} \Rightarrow \frac{Q}{\cos\varphi} = \frac{T}{\sin(\varphi - \theta)} \ldots \ldots (iv)$$

$$(iii) \div (v \Rightarrow \frac{P}{Q} = \frac{\sin(\varphi + \theta)}{\sin(\varphi - \theta)} \Rightarrow \frac{P+Q}{P-Q} = \frac{\sin(\varphi + \theta) + \sin(\varphi - \theta)}{\sin(\varphi + \theta) - \sin(\varphi - \theta)} = \frac{2\sin\varphi\cos\theta}{2\cos\varphi\sin\theta} = \frac{\tan\varphi}{\tan\theta}$$

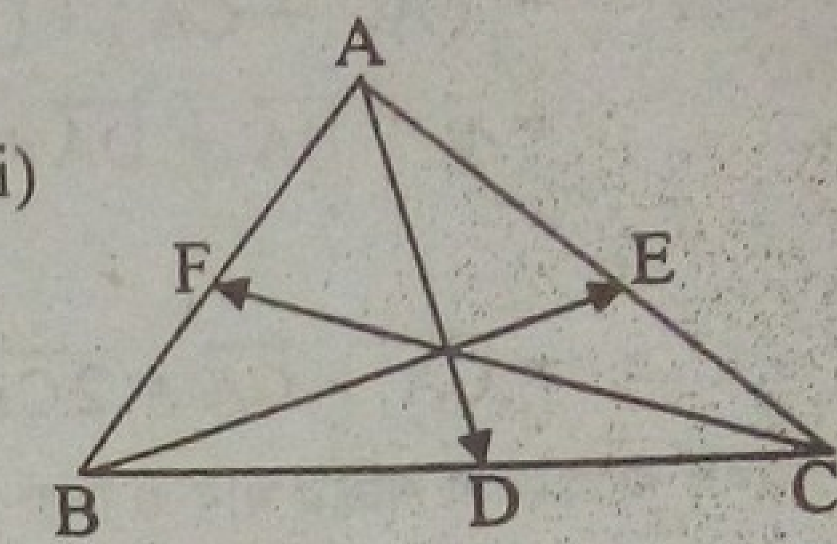
$$\therefore \tan\theta = \frac{P-Q}{P+Q}\tan\varphi$$

3(a) ABC ত্রিভুজের BC, CA, AB বাহুর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে D, E, F । প্রমাণ কর যে, AD, BE, CF মধ্যমা তিনটি দ্বারা সূচিত বলত্রয় কোন কণার উপর কার্যরত হলে তা সাম্যাবস্থা সৃষ্টি করবে।

প্রমাণ : ABC ত্রিভুজে AD মধ্যমা বলে, $\overline{AB} + \overline{AC} = 2\,\overline{AD} \cdots$(i)

অনুরূপভাবে, $\overline{BA} + \overline{BC} = 2\,\overline{BE} \cdots$(ii) এবং $\overline{CA} + \overline{CB} = 2\,\overline{CF} \cdots$(ii)

(i), (ii) ও (iii) যোগ করে পাই,

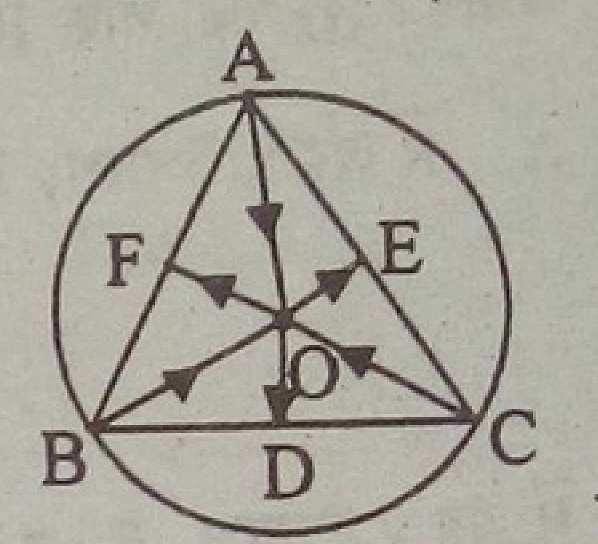


$$2(\overline{AD} + \overline{BE} + \overline{CF}) = (\overline{AB} + \overline{BA}) + (\overline{AC} + \overline{CA}) + (\overline{BC} + \overline{CB})$$
$$= \underline{0} + \underline{0} + \underline{0}$$

$\Rightarrow \overline{AD} + \overline{BE} + \overline{CF} = \underline{0}$. সুতরাং, বলত্রয় সাম্যাবস্থায় থাকবে।

3(b) ABC ত্রিভুজের পরিকেন্দ্র O এবং BC, CA, AB এর উপর যথাক্রমে OD, OE, OF লম্ব। প্রমাণ কর যে, AO, BO, CO, OD, OE, OF দ্বারা সূচিত বলগুলো সাম্যাবস্থা সৃষ্টি করবে।

প্রমাণঃ ABC ত্রিভুজের পরিকেন্দ্র O হতে BC, CA, AB এর উপর যথাক্রমে OD, OE, OF লম্ব। সুতরাং D, E, F বিন্দুত্রয় যথাক্রমে BC, CA, AB এর মধ্যবিন্দু।



$\therefore\ \Delta OBC$ এ, $\overline{OB} + \overline{OC} = 2\overline{OD} \cdots$(i) . ΔOAC এ, $\overline{OA} + \overline{OC} = 2\overline{OE} \cdots$(ii)

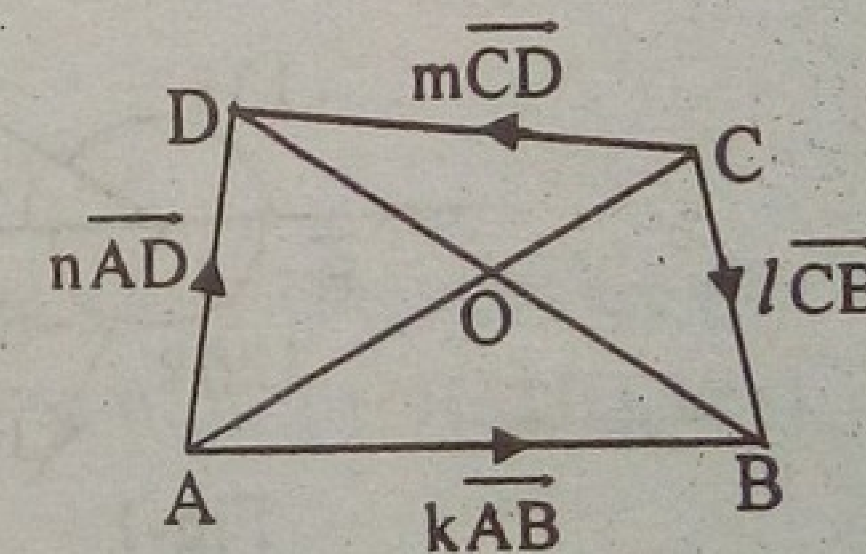
ΔOAB এ, $\overline{OA} + \overline{OB} = 2\overline{OF} \cdots$(iii)

(i) + (ii) + (iii) $\Rightarrow 2(\overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC}) = 2(\overline{OD} + \overline{OE} + \overline{OF})$

$\Rightarrow -\overline{AO} - \overline{BO} - \overline{CO} = \overline{OD} + \overline{OE} + \overline{OF} \Rightarrow \overline{AO} + \overline{BO} + \overline{CO} + \overline{OD} + \overline{OE} + \overline{OF} = \underline{0}$

সুতরাং বলগুলো সাম্যাবস্থা সৃষ্টি করে।

3(c) ABCD চতুর্ভুজের AB, CB, CD, AD বরাবর কার্যরত যথাক্রমে k.AB, l.CB, m.CD, n.AD মানের চারটি বল সাম্যাবস্থায় থাকলে, প্রমাণ কর যে, km = ln.



প্রমাণঃ অনুপাত সূত্র হতে পাই, $k\overline{AB} + n\overline{AD} = (k+n)\overline{AO} = \overline{R}$ (ধরি); যেখানে O, BD কে n : k অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত করে অর্থাৎ $k.BO = n.OD \cdots$(i)

যেহেতু প্রদত্ত বল চারটি সাম্যাবস্থায় আছে, সুতরাং $l\overline{CB}$ ও $m\overline{CD}$ এর লব্ধি S (ধরি) R এর সমান ও একই রেখায় বিপরীতমুখী ক্রিয়াশীল হবে।

$\therefore$ S এর ক্রিয়ারেখা CO বরাবর হবে এবং $l\overline{CB} + m\overline{CD} = (l+m)\overline{CO}$, যেখানে $l.BO = m.\ OD \cdots$(ii)

(i) ÷ (ii) $\Rightarrow \dfrac{k}{m} = \dfrac{l}{n}$ $\therefore$ km = ln.

3(d) ABCD একটি বর্গক্ষেত্র। দেখাও যে, AB, 2BC, 3CD এবং 2DA দ্বারা মানে ও দিকে সূচিত একই বিন্দুতে ক্রিয়ারত চারটি বলের লব্ধির মান ও দিক 2CA দ্বারা সূচিত হবে।

সমাধান ঃ ভেক্টরের সাহায্যে পাই,

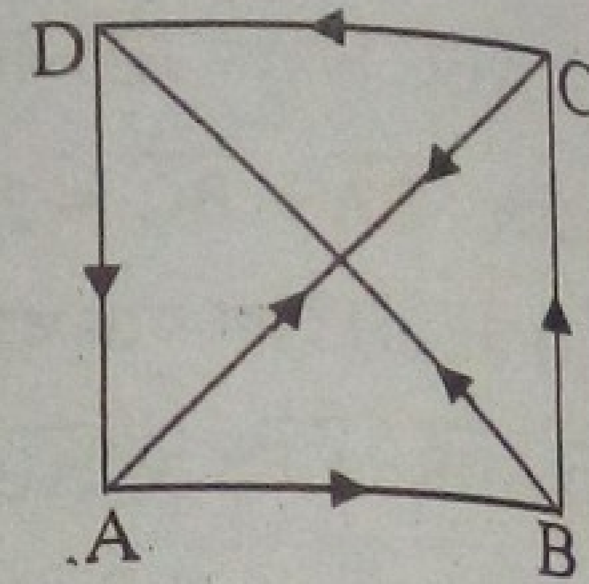
$$\overline{AB} + 2\,\overline{BC} + 3\,\overline{CD} + 4\,\overline{DA} = (\overline{AB} + \overline{BC}) + (\overline{BC} + \overline{CD}) + 2(\overline{CD} + \overline{DA}) + 2\,\overline{DA}$$
$$= \overline{AC} + \overline{BD} + 2\,\overline{CA} + 2\,\overline{DA}$$

$= (\overline{AC} + \overline{CA}) + (\overline{BD} + \overline{DA}) + \overline{DA} + \overline{CA}$

$= \underline{0} + \overline{BA} + \overline{DA} + \overline{CA} = (\overline{CD} + \overline{DA}) + \overline{CA}$

$[\because AB = DC, BA || CD]$

$= \overline{CA} + \overline{CA} = 2\overline{CA}$



$\therefore$ প্রদত্ত বলগুলোর লব্ধির মান ও দিক 2CA দ্বারা সূচিত হবে।

4(a) $\sqrt{6}$ **N,** $(1 + \sqrt{3})$ **N ও 2 N মানের তিনটি সমবিন্দুগামী বল যথাক্রমে** $\overrightarrow{F_1}$, $\overrightarrow{F_2}$ **ও** $\overrightarrow{F_3}$, **x-অক্ষের ধনাত্মক দিকের সাথে অনুক্রমে 45°, 180° এবং – 60° কোণ তৈরি করে। (i) লব্ধির মান নির্ণয়ের মাধ্যমে, (ii) বল ত্রিভুজের সূত্রানুসারে, (iii) লামীর উপপাদ্যের বিপরীত প্রতিজ্ঞানুসারে প্রমাণ কর যে, বলত্রয় সাম্যাবস্থায় আছে।**

প্রমাণ ঃ (i) ধরি, লব্ধি $\overline{R}$. $\therefore \overline{R} = \overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{F_2} + \overrightarrow{F_3}$

$\therefore$ $\overline{R}$ এর x উপাংশ, $R_x = \overrightarrow{F_1}x + \overrightarrow{F_2}x + \overrightarrow{F_3}x = \sqrt{6}\cos 45° + (1 + \sqrt{3})\cos 180° + 2\cos(-60°)$

$= \sqrt{6} \times \frac{1}{\sqrt{2}} + (1 + \sqrt{3}) \times -1 + 2 \times \frac{1}{2} = \sqrt{3} - 1 - \sqrt{3} + 1 = 0$

$\overline{R}$ এর y উপাংশ, $R_y = \overrightarrow{F_1}y + \overrightarrow{F_2}y + \overrightarrow{F_3}y = \sqrt{6}\sin 45° + (1 + \sqrt{3})\sin 180° + 2\sin(-60°)$

$= \sqrt{6} \times \frac{1}{\sqrt{2}} + (1 + \sqrt{3}) \times 0 - 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3} - \sqrt{3} = 0$

$\therefore$ $R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} = \sqrt{0 + 0} = 0$. অতএব, বলত্রয় সাম্যাবস্থায় রয়েছে।

(ii)

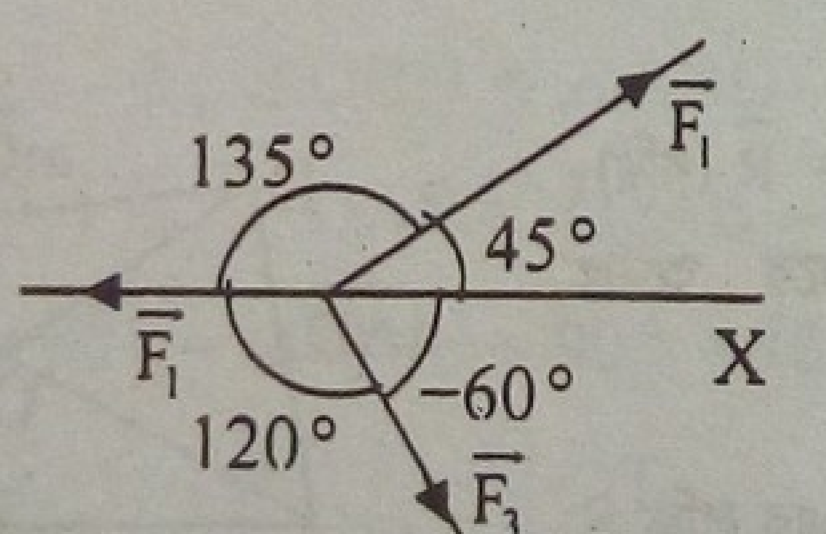


Fig-1

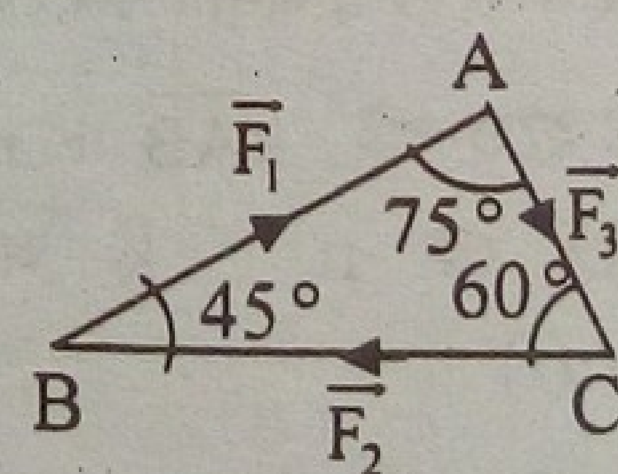


Fig-2

বলত্রয়ের সাথে সংশ্লিষ্ট ভেক্টরদ্বয় চিত্রে প্রদর্শিত হল।

এখন, $\frac{F_1}{AB} = \frac{\sqrt{6}}{k\sin 60^0} = \frac{\sqrt{6}}{k.\sqrt{3}/2} = \frac{2\sqrt{2}}{k}$, $\frac{F_2}{BC} = \frac{1+\sqrt{3}}{k\sin 75^0} = \frac{1+\sqrt{3}}{k\frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}} = \frac{2\sqrt{2}}{k}$,

$\frac{F_3}{AC} = \frac{2}{k\sin 45^0} = \frac{2}{k.1/\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{k}$ $\therefore \frac{F_1}{AB} = \frac{F_2}{BC} = \frac{F_3}{AC}$

$\therefore$ বলত্রিভুজের সূত্রানুসারে বলত্রয় সাম্যাবস্থায় আছে।

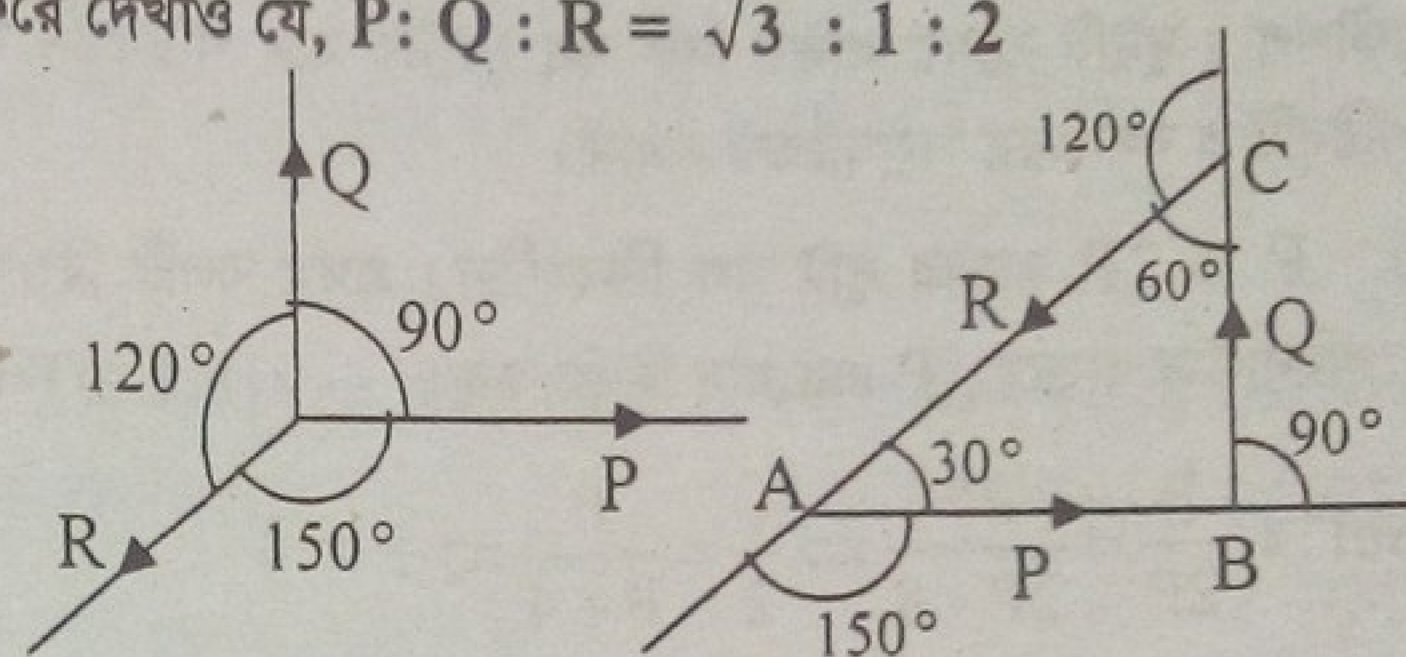
(iii) $\dfrac{F_1}{\sin(F_2 \wedge F_3)} = \dfrac{\sqrt{6}}{\sin 120^0} = \dfrac{\sqrt{6}}{\sqrt{3}/2} = 2\sqrt{2}$,

$\dfrac{F_2}{\sin(F_1 \wedge F_3)} = \dfrac{1+\sqrt{3}}{\sin 105^0} = \dfrac{1+\sqrt{3}}{\cos 15^0} = \dfrac{1+\sqrt{3}}{(1+\sqrt{3})/2\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$

$\dfrac{F_3}{\sin(F_1 \wedge F_2)} = \dfrac{2}{\sin 135^0} = \dfrac{2}{\cos 45^0} = \dfrac{2}{1/\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$

$\therefore$ ল্যামীর বিপরীত সূত্রানুসারে বলত্রয় সাম্যাবস্থায় আছে।

4(b) তিনটি সমতলীয় বল P, Q, R একটি বস্তুকণায় ক্রিয়া করে সাম্যাবস্থায় রয়েছে, যেখানে $P \wedge Q = 90°$, $Q \wedge R = 120°$ । বলত্রিভুজের বিপরীত সূত্র প্রয়োগ করে দেখাও যে, $P : Q : R = \sqrt{3} : 1 : 2$



প্রমাণ ঃ একটি বস্তুকণার উপর ক্রিয়ারত P, Q, R বলত্রয়ABC ত্রিভুজের যথাক্রমে AB, BC, CA বাহু দ্বারা মানে ও দিকে ক্রিয়ারত।

যেহেতু বলত্রয় সাম্যাবস্থায় আছে, সেহেতু বলত্রিভুজের বিপরীত সূত্র হতে পাই, $\dfrac{P}{AB} = \dfrac{Q}{BC} = \dfrac{R}{CA}$

$\Rightarrow \dfrac{P}{2R\sin 60^0} = \dfrac{Q}{2R\sin 30^0} = \dfrac{R}{2R\sin 90^0}$, [ত্রিভুজের সাইন সূত্র $\dfrac{AB}{\sin C} = \dfrac{BC}{\sin A} = \dfrac{CA}{\sin B} = 2R$ হতে।]

$\Rightarrow \dfrac{P}{\sqrt{3}/2} = \dfrac{Q}{1/2} = \dfrac{R}{1} \Rightarrow \dfrac{P}{\sqrt{3}} = \dfrac{Q}{1} = \dfrac{R}{2}$ $\therefore P : Q : R = \sqrt{3} : 1 : 2.$

ভর্তি পরীক্ষার MCQ :

1. কোনো সমবাহু ত্রিভুজের এক কৌণিক বিন্দুতে দুই বাহু বরাবর P ও 2P মানের দুটি বল ক্রিয়া করে। বল দুটির লব্ধির মান কত? **[RU 06-07,07-08; HSTU 05-06]**

Sol^n ঃ $R = \sqrt{P^2 + (2P)^2 + 2.P.2P\cos 60^0} = \sqrt{7}\,P$

2. একই বিন্দুতে ক্রিয়ারত 2 একক ও 3 একক মানের দুইটি বলের লব্ধির মান 4 একক। বল দুইটি অন্তর্ভুক্ত কোণ কত? **[DU 02-03; KUET 05-06; KU 09-10]**

Sol^n ঃ $4^2 = 2^2 + 3^2 + 2.2.3\cos\alpha$

3. যদি দুইটি বল 12N ও 5N একটি কণার উপর কিয়া করে এবং বল দুইটি দ্বারা সৃষ্ট কোণ 60° হয় , তবে বল দুইটির লব্ধি প্রথম বলের সাথে কত কোণ উৎপন্ন করবে? **[DU 00-01]**

Sol^n ঃ $\theta = \dfrac{5\sin 60^0}{12+\cos 60^0} \Rightarrow \theta = 16{\cdot}63°$

4. 20 কেজি ওজনের একটি বস্তুর সাথে দুইটি রশি বেঁধে দুজন লোক তা বহন করছে। রশিদ্বয় খাড়া রেখার সাথে সমান $45°$ কোণ উৎপন্ন করে। রশিদ্বয়ের টান হবে। [BUET 09-10]

Sol^n : $20^2 = T^2 + T^2 + 2T.T\cos(45° + 45°) \Rightarrow 2T^2 = 20^2 \Rightarrow T = 10\sqrt{2}$

কৌশল : α কোণে ক্রিয়ারত P, Q বলদ্বয়ের P কে m গুণ করায় লব্ধি m গুণ হলে, $\cos\alpha = -\frac{(m+1)Q}{2mP}$

5. 3P ও 2P বলদ্বয়ের লব্ধি R। প্রথম বলটিকে দ্বিগুণ করলে লব্ধির পরিমাণও দ্বিগুণ হয়। বলদ্বয়ের অর্ন্তগত কোণ কত? [DU 09-10, CU 06-07, HSTU 05-06]

Sol^n : $\cos\alpha = -\frac{(2+1)\times 2P}{2\times 2\times 3P} = -\frac{1}{2} \therefore \alpha = 120°$

কৌশল : দুইটি বলের লব্ধির দিক বল দুইটির মান পরিবর্তন করার পরও অপরিবর্তিত থাকলে, প্রদত্ত বলদ্বয়ের অনুপাত পরিবর্তিত বলদ্বয়ের অনুপাতের সমান।

6. P ও 2P মানের দুটি বল ক্রিয়াশীল। প্রথম বলটি দ্বিগুণ এবং দ্বিতীয়টির মান 8 একক বৃদ্ধির ফলে লব্ধির দিক অপরিবর্তিত থাকলে, P এর মান নির্ণয় কর। [KUET 08-09; KU 09-10; JUST 09-10; IU 04-05]

Sol^n : $\frac{P}{2P} = \frac{2P}{2P+8} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{P}{P+4} \Rightarrow P = 4$

কৌশল : α কোণে ক্রিয়ারত P, Q বলদ্বয়ের লব্ধি R, P বলের সাথে সমকোণ উৎপন্ন করলে, $\cos\alpha = -\frac{Q}{P}$, $R^2 = Q^2 - P^2$.

7. একটি বিন্দুতে ক্রিয়াশীল P নিউটন এবং 12 N দুইটি বলের লব্ধি $3\sqrt{7}$ N, যার ক্রিয়ারেখা P- এর দিকে $90°$ কোণ উৎপন্ন করে। P এর মান – [DU 08-09]

Sol^n : $(3\sqrt{7})^2 = 12^2 - P^2 \Rightarrow P = 9$

8. কোন বিন্দুতে দুইটি বল $120°$ কোণে ক্রিয়ারত। বৃহত্তর বলটির মান 10N এবং তাদের লব্ধি ক্ষুদ্রতর বলের সাথে সমকোণ উৎপন্ন করলে ক্ষুদ্রতর বলের মান নির্ণয় কর।

[DU 06-07, 03,04; NSTU 07-08; NU 08-09; Jt.U 06-07; RU 05-06; Textile 13-14]

Sol^n : $\cos 120° = -\frac{Q}{10} \Rightarrow -\frac{1}{2} = -\frac{Q}{10} \Rightarrow Q = 5$ N

কৌশল : $P = Q$ হলে, $R = 2Q\cos\frac{\alpha}{2}$.

9. কোন বিন্দুতে $60°$ কোণে ক্রিয়ারত দুইটি সমান বলকে একই বিন্দুতে ক্রিয়ারত 9N বলের সাহায্যে ভারসাম্যে রাখলে সমান বলদ্বয়ের প্রতিটির মান– [DU 08-09; HSTU 08-09]

Sol^n : $9 = 2P\cos 30° = 2P \times \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow P = 3\sqrt{3}$

10. সমমানের দুইটি বলের লব্ধির বর্গ বলদ্বয়ের গুণফলের তিনগুণ। এদের মধ্যবর্তী কোণ কত?

[BUET 10-11; RU 06-07; CU 07-08, 03-04; IU 04-05]

Sol^n : $R=2Q\cos\frac{\alpha}{2} \Rightarrow R^2=4Q^2\cos^2\frac{\alpha}{2}=3Q^2 \Rightarrow \cos\frac{\alpha}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}=\cos 30^\circ \Rightarrow \alpha=2\times 30^\circ=60^\circ$

11. 2α কোণে ক্রিয়ারত দুইটি সমান বলের লব্ধি, 2β কোণে ক্রিয়ারত একই বল দুইটির লব্ধির দ্বিগুণ হলে α ও β এর সম্পর্ক কি হবে? [CU 07-08]

Sol^n : $2P\cos\alpha = 2\times 2P\cos\beta \Rightarrow \cos\alpha = 2\cos\beta$.

কৌশল : একবিন্দুতে ক্রিয়াশীল সমান্তর ধারা সৃষ্টিকারী তিনটি বল সাম্যাবস্থা সৃষ্টি করলে অথবা একটি ত্রিভুজের তিনটি বাহু দ্বারা মানে ও দিকে একইক্রমে ক্রিয়াশীল হলে, তাদের লব্ধির মান = $\sqrt{3}$ × সমান্তর ধারার সাধারণ অন্তর।

12. ABC একটি সমবাহু ত্রিভুজ এবং 3P, 7P ও 5P মানের তিনটি বলের দিক যথাক্রমে AB, BC ও CA এর দিকে। বল তিনটির লব্ধির মান কত? [DU 00-01; KUET 07-08; RU 06-07]

Sol^n : বলগুলো সমান্তর ধারা গঠন করে যার সাধারণ অন্তর 2P । $\therefore$ লব্ধির মান $=\sqrt{3}\times 2P = 2\sqrt{3}P$

বিশেষ সম্পর্ক : $R_{max}{}^2+R_{min}{}^2=R_P{}^2$

13. একই বিন্দুতে পরিবর্তনশীল কোণে প্রযুক্ত দুইটি বলের লব্ধির বৃহত্তম মান 17N ; বল দুইটি লম্বভাবে ক্রিয়াশীল হলে লব্ধির মান হয় 13N । বল দুইটির লব্ধির ক্ষুদ্রতম মান কত হবে? [DU 04-05; IU 06-07]

Sol^n : $R_{max}{}^2+R_{min}{}^2=R_P{}^2 \Rightarrow 17^2+R_{min}{}^2=13^2 \Rightarrow R_{min}=7\text{ N}$

14. কোনো বিন্দুতে 2P-এর P মানের দুইটি বল ক্রিয়াশীল। প্রথম বলটিকে দ্বিগুণ করে দ্বিতীয়টির মান 8 একক বৃদ্ধি করা হলে তাদের লব্ধির দিক অপরিবর্তিত থাকে। P এর মান- [DU 13-14]

A. 1 B. 2 C. 4 D. 8

Sol^n : $\frac{2P}{P}=\frac{4P}{P+8} \Rightarrow 2=\frac{4P}{P+8} \Rightarrow 4P=2P+16 \Rightarrow 2P=16 \Rightarrow P=8$

14. $2, \sqrt{3}$ এবং 3 মানের তিনটি বল কোন এক বিন্দুতে ক্রিয়ারত। ইহারা পরস্পর ভারসাম্য সৃষ্টি করলে প্রথমোক্ত বলদ্বয়ের মধ্যবর্তী কোন কত? [Textile 13-14]

A. 30° B. 45° C. 60° D. 90°

Sol^n : $3^2=2^2+(\sqrt{3})^2+2\times 2\times\sqrt{3}\cos\alpha \Rightarrow 6\sqrt{3}\cos\alpha = 9-4-5 \Rightarrow \cos\alpha=0 \Rightarrow \alpha=90^0$