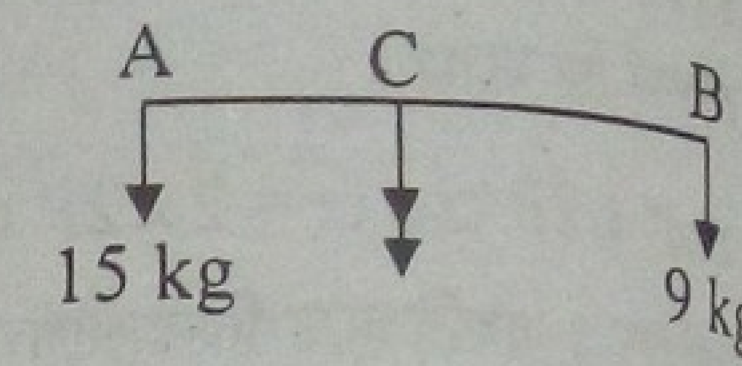
প্রশ্নমালা VIII C

1(a) 32 cm ব্যবধানে দুইটি বিন্দুতে 15 kg ও 9 kg ওজনের দুইটি সমান্তরাল বল কার্যরত আছে। এদের লব্ধি ও তার প্রয়োগ বিন্দু নির্ণয় কর, যখন (i) বলদ্বয় সদৃশ (ii) বলদ্বয় বিসদৃশ।

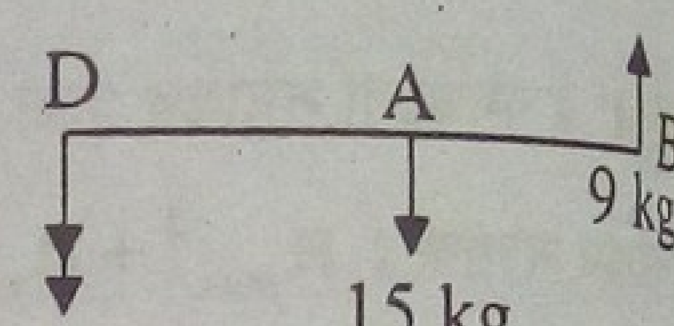


সমাধানঃ (i) ধরি, 32 cm ব্যবধানে A ও B বিন্দুতে যথাক্রমে 15 kg ও 9 kg ওজনের দুইটি সদৃশ সমান্তরাল বল ক্রিয়া করে এবং এদের লব্ধি R = (15 + 9) অর্থাৎ 24 kg-wt, যা AB এর C বিন্দুতে কার্যরত।

$\therefore\ 15\times AC = 9\times BC = 9(AB - AC) \Rightarrow (15+9)\times AC = 9\times AB$

$\Rightarrow 24\times AC = 9\times AB\ \therefore\ AC = \dfrac{9}{24}\times 32 = 12$ cm.

$\therefore$ লব্ধি 24 kg-wt, যা বৃহত্তম বল থেকে 12 cm দূরে কার্যরত।



(ii) ধরি, 32 cm ব্যবধানে A ও B বিন্দুতে যথাক্রমে 15 kg ও 9 kg ওজনের দুইটি বিসদৃশ সমান্তরাল বল ক্রিয়া করে এবং এদের লব্ধি R = (15 − 9) অর্থাৎ 6 kg-wt, যা বর্ধিত BA এর D বিন্দুতে কার্যরত।

$\therefore\ 15\times AD = 9\times BD = 9\times(AD + AB) \Rightarrow (15-9)\times AD = 9\times AB$

$\Rightarrow 6\times AD = 9\times AB\ \therefore AD = \dfrac{9}{6}\times 32 = 48$ cm.

$\therefore$ লব্ধি 6 kg-wt, যা বৃহত্তম বল থেকে 48 cm দূরে কার্যরত।

1(b) AB হালকা দন্ডের দুই প্রান্তে ঝুলানো দুইটি সমান্তরাল বলের লব্ধি 16 N এবং লব্ধির ক্রিয়াবিন্দু AB কে 5 : 3 অনুপাতে বিভক্ত করে। বল দুইটি নির্ণয় কর, যখন (i) বলদ্বয় সদৃশ (ii) বলদ্বয় বিসদৃশ।

সমাধানঃ মনে করি, A ও B বিন্দুতে ঝুলানো যথাক্রমে P ও Q (P < Q) নিউটন সমান্তরাল বলদ্বয়ের লব্ধি 16 N, যা AB কে C বিন্দুতে 5 : 3 অনুপাতে বিভক্ত করে।

তাহলে, $AC : BC = 5 : 3 \Rightarrow \dfrac{AC}{BC} = \dfrac{5}{3}$ এবং $P\times AC = Q\times BC \Rightarrow \dfrac{Q}{P} = \dfrac{AC}{BC} = \dfrac{5}{3} \Rightarrow Q = \dfrac{5}{3}P\cdots$(i)

(i) বলদ্বয় সদৃশ হলে, $P + Q = 16 \Rightarrow P + \dfrac{5}{3}P = 16 \Rightarrow \dfrac{8}{3}P = 16 \Rightarrow P = 6$ এবং $Q = 16 - 6 = 10$

$\therefore$ সদৃশ বলদ্বয় 10 N ও 6 N.

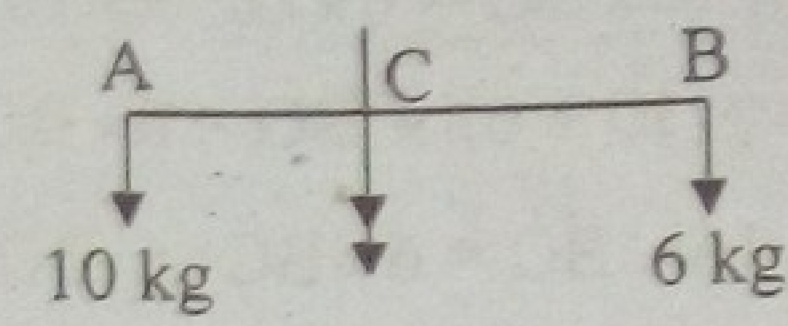
(ii) বলদ্বয় বিসদৃশ হলে, $Q - P = 16 \Rightarrow \dfrac{5}{3}P - P = 16 \Rightarrow \dfrac{2}{3}P = 16 \Rightarrow P = 24$ এবং

$Q = 16 + 24 = 40$ $\therefore$ বিসদৃশ বলদ্বয় 40 N ও 24 N.

1(c) AB দন্ডের A ও B প্রান্তে যথাক্রমে 10 kg ও 6 kg ওজন স্থাপন করে C বিন্দুতে রশি বেঁধে ঝুলানো হলে দন্ডটি অনুভূমিকভাবে অবস্থান করে। যদি A প্রান্তে 75 kg ওজন রাখা হয় তবে B প্রান্তে কত ওজন দিলে দন্ডটি অনুভূমিকভাবে স্থির থাকবে?

সমাধানঃ যেহেতু দন্ডটি অনুভূমিকভাবে স্থির থাকে, সুতরাং C বিন্দুটি AB কে 10 kg ও 6 kg ওজনের ব্যস্ত অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত করে।

$\therefore \dfrac{AC}{6} = \dfrac{BC}{10} \Rightarrow \dfrac{AC}{3} = \dfrac{BC}{5} \Rightarrow \dfrac{AC}{BC} = \dfrac{6}{10} = \dfrac{3}{5}$

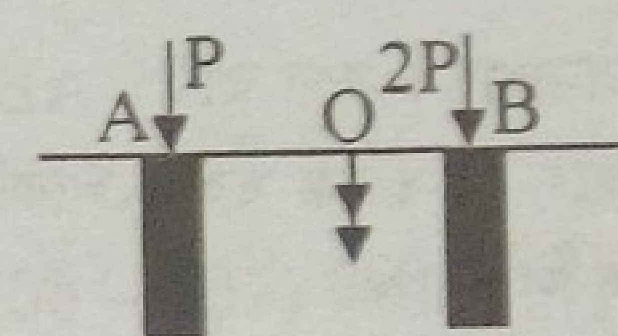


ধরি, B প্রান্তে w ওজন স্থাপন করলে দণ্ডটি অনুভূমিকভাবে স্থির থাকবে।

$\therefore \dfrac{AC}{BC} = \dfrac{w}{75\text{ kg}} \Rightarrow w = 75 \times \dfrac{3}{5}\text{ kg} = 45\text{ kg}.$

1(d) একটি ভারি সুষম রড 24 cm ব্যবধানে অবস্থিত দুইটি খুঁটির উপর অনুভূমিকভাবে স্থাপিত। যদি খুঁটিদ্বয়ের উপর চাপের অনুপাত 1 : 2 হয়, তবে রডের মধ্যবিন্দু থেকে খুঁটির অবস্থান নির্ণয় কর।

সমাধানঃ ধরি, 24 cm ব্যবধানে A ও B বিন্দুতে স্থাপিত খুঁটি দুইটির উপর চাপ যথাক্রমে P ও 2P এবং রডের মধ্যবিন্দু O। তাহলে, P ও 2P এর লব্ধি রডের ওজনের সমান এবং O তে ক্রিয়ারত হবে।



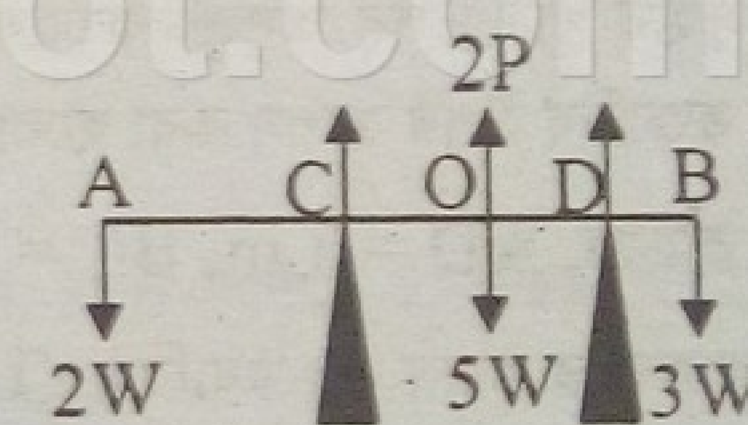
$\therefore P \times AO = 2P \times BO \Rightarrow AO = 2\,BO \Rightarrow \dfrac{AO}{2} = \dfrac{BO}{1} = \dfrac{AO+BO}{2+1} = \dfrac{AB}{3} = \dfrac{1}{3}(24\text{ cm}) = 8\text{ cm}$

$\Rightarrow AO = 2 \times 8\text{ cm} = 16\text{ cm}$ এবং $BO = 8\text{ cm}$

∴ রডের মধ্যবিন্দু থেকে খুঁটি 16 cm ও 8 cm দূরে অবস্থিত।

1(e) 20 cm দৈর্ঘ্য AB হালকা দণ্ডটি 10 cm ব্যবধানে দুইটি পেরেকের উপর অনুভূমিক ভাবে অবস্থিত। A ও B বিন্দুতে যথাক্রমে 2W ও 3W ওজন ঝুলানো হলে পেরেক দুইটির কোন্ অবস্থানের জন্য এদের উপর চাপ সমান হবে? [কু.'০৩]

সমাধানঃ ধরি, দণ্ডটি 10 cm ব্যবধানে C ও D বিন্দুতে অবস্থিত পেরেক দুইটির উপর সমান চাপদ্বয় P ও P। তাহলে এদের লব্ধি 2P, যা CD এর মধ্যবিন্দু O তে ক্রিয়া করবে। $\therefore OC = OD = 5$ cm.



সাম্যাবস্থার জন্য 2W ও 3W ওজনদ্বয়ের লব্ধি (2W + 3W) অর্থাৎ 5W, অবশ্যই O তে খাড়া নিম্নদিকে কার্যরত হবে।

$\therefore 2W \times AO = 3W \times BO \Rightarrow \dfrac{AO}{3} = \dfrac{BO}{2} = \dfrac{AO+BO}{3+2} = \dfrac{AB}{5} = \dfrac{20}{5}\text{ cm} = 4\text{ cm}$

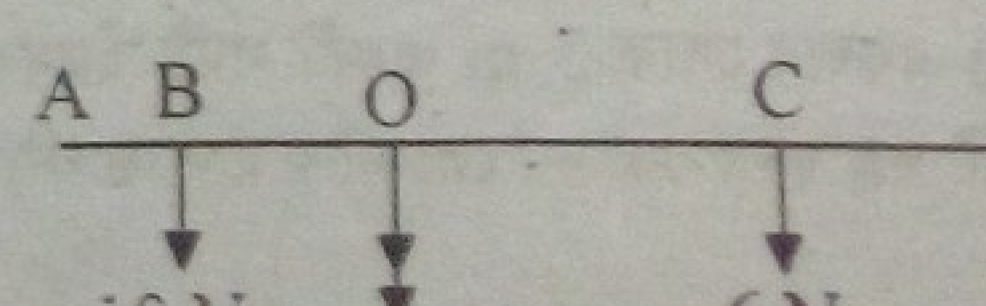
$\Rightarrow AO = 12$ cm এবং $BO = 8$ cm

$\therefore AC = AO - CO = (12-5)\text{ cm} = 7\text{ cm}$ এবং $BD = BO - OD = (8-5)\text{ cm} = 3\text{ cm}.$

∴ পেরেক দুইটি A ও B বিন্দু থেকে যথাক্রমে 7 cm ও 3 cm দূরত্বে স্থাপন করতে হবে।

1(f) একটি দণ্ডের একপ্রান্ত হতে 2 cm ও 18 cm দূরত্বে অবস্থিত দুইটি বিন্দুতে যথাক্রমে 10 N ও 6 N সদৃশ সমান্তরাল বল দুইটি ক্রিয়া করছে। তাদের লব্ধির ক্রিয়াবিন্দু নির্ণয় কর।

সমাধানঃ মনে করি, একটি দণ্ডের A প্রান্ত হতে 2 cm ও 18 cm দূরত্বে B ও C বিন্দুতে যথাক্রমে 10 N ও 6 N দুইটি সদৃশ সমান্তরাল বল ক্রিয়া করছে এবং এদের লব্ধি O বিন্দুতে ক্রিয়ারত। তাহলে,



$AB = 2$ cm, $AC = 18$ cm.

$\therefore BC = AC - AB = (18-2)\text{ cm} = 16\text{ cm}.$

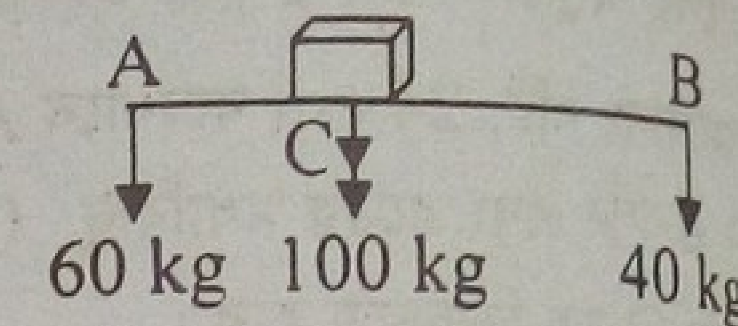
এখন, $10\times BO = 6\times OC \Rightarrow 10\times BO = 6\times(BC - BO)$

$\Rightarrow (10+6)\times BO = 6\times BC$

$\Rightarrow 16\times BO = 6\times BC \therefore BO = \frac{6}{16}\times 16 = 6$ cm

$\therefore$ প্রদত্ত বলদ্বয়ের লব্ধির ক্রিয়াবিন্দু বৃহত্তম বল হতে 6 cm দূরে অবস্থিত।

1(g) 2·5 m দীর্ঘ একটি হালকা তক্তার উপর 100 kg ওজনের একখন্ড পাথর রেখে দুইজন লোক তক্তার প্রান্তদ্বয় ধরে বহন করছে। পাথরখন্ডটি কোথায় রাখলে সবল লোকটি 60 kg ওজন বহন করবে?

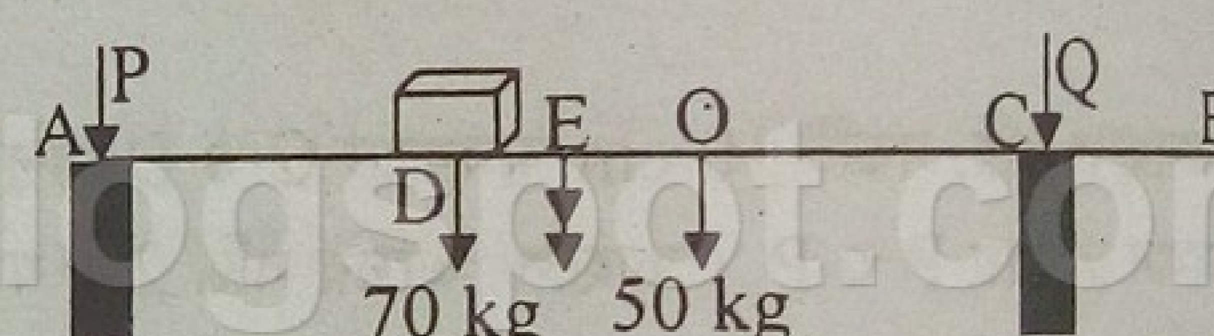


সমাধান ঃ মনে করি, AB = 2·5 m দীর্ঘ তক্তার C বিন্দুতে পাথর খন্ডটি রাখা হলে A প্রান্তে সবল লোকটি 60 কেজি ওজন বহন করবে। তাহলে, B প্রান্তে দূর্বল লোকটি (100 – 60) অর্থাৎ 40 কেজি ওজন বহন করবে।

$\therefore 60\times AC = 40\times BC = 40\times(AB - AC) \Rightarrow (60+40)\times AC = 40\times AB$

$\Rightarrow AC = \frac{40}{100}\times 2\cdot5 = 1$m $\therefore$ সবল লোকটি থেকে 1m দূরে পাথরটি তক্তার উপর স্থাপন করতে হবে।

1(h) 10 m দীর্ঘ এবং 50 kg ওজনের AB একটি তক্তা দুইটি খুঁটির উপর অনুভূমিকভাবে স্থাপিত। একটি খুঁটি A বিন্দুতে এবং অপরটি B থেকে 2 m ভিতরে। A থেকে 3 m দূরে 70 kg ওজনের একখন্ড পাথর তক্তাটির উপর স্থাপন করলে খুটিদ্বয়ের উপর চাপের পরিমাণ নির্ণয় কর।



সমাধানঃ মনে করি, AB = 10m তক্তাটি A ও C বিন্দুতে দুইটি খুঁটি উপর অনুভূমিকভাবে স্থাপন করে পাথর খন্ডটি D তে তক্তাটির উপর স্থাপন করা হলো।

তাহলে, AD = 3 m, BC = 2 m . $\therefore$ AC = 8 m.

তক্তাটির ওজন এর মধ্যবিন্দু O তে ক্রিয়াশীল এবং AO = BO = 5 m

$\therefore DO = AO - AD = (5-3)$ m = 2 m.

D এবং O তে যথাক্রমে 70 kg ও 50 kg ওজনের লব্ধি 120 kg-wt, যা E (ধরি) বিন্দুতে ক্রিয়া করে।

$\therefore 70\times DE = 50\times EO = 50\times(DO - DE) \Rightarrow (70+50)\times DE = 50\times DO$

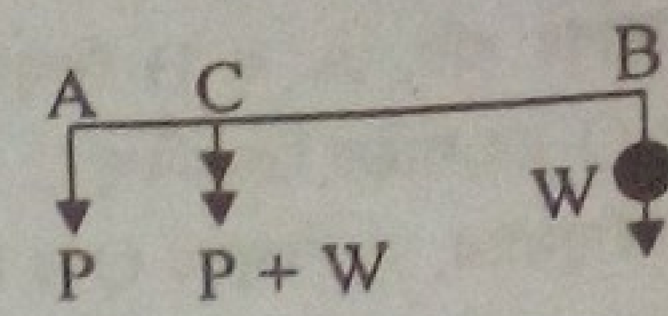
$\Rightarrow 120\times DE = 50\times DO \Rightarrow DE = \frac{50}{120}\times 2 = \frac{5}{6}$m $\therefore AE = AD + DE = 3 + \frac{5}{6} = \frac{23}{6}$m.

এখন, E তে ক্রিয়াশীল 120 kg ওজনের জন্য A ও C তে খুটিদ্বয়ের উপর চাপের পরিমাণ যথাক্রমে P kg-wt ও Q kg-wt হলে, P + Q = 120 এবং $P\times AE = Q\times(AC - AE) \Rightarrow (P+Q)\times AE = Q\times AC$

$\therefore Q = \frac{AE}{AC}(P+Q) = \frac{23/6}{8}\times 120 = 57\cdot5$ এবং $P = 120 - Q = 120 - 57\cdot5 = 62\cdot5$

$\therefore$ খুটিদ্বয়ের উপর চাপের পরিমাণ 62·5 kg-wt এবং 57·5 kg-wt .

1(i) একজন লোক 3 m একটি লাঠি কাঁধের উপর অনুভূমিক ভাবে স্থাপন করে এর এক প্রান্তে হাত রেখে অপর প্রান্তে একটি বস্তু বহন করছে। লোকটির হাত ও কাঁধের দূরত্ব কত হলে কাঁধের উপর চাপ ন্যূনতম হবে?



সমাধানঃ ধরি, লোকটি AB = 3 m লাঠিটি C বিন্দুতে কাঁধের উপর অনুভূমিক ভাবে স্থাপন করে A প্রান্তে হাত রেখে B প্রান্তে W ওজনের একটি বস্তু বহন করছে।

ধরি, A প্রান্তে হাতের চাপ P এবং $AC = x$ মি.। তাহলে A ও B বিন্দুতে ক্রিয়াশীল বলদ্বয়ের লব্ধি (P + W) এবং C বিন্দুতে কাঁধের উপর চাপ R (ধরি) সমান ও সমবিন্দু।

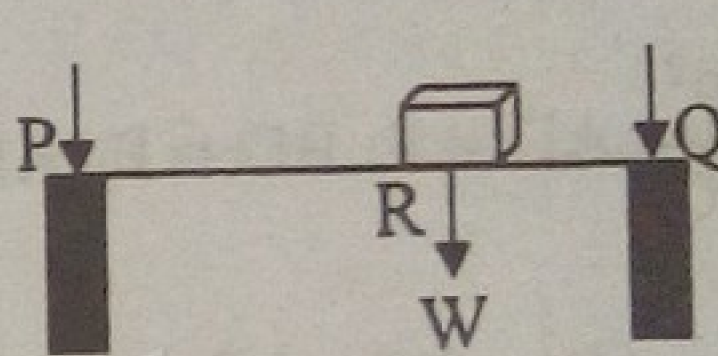
$\therefore P\times AC = W\times BC = W\times(AB - AC) \Rightarrow (P + W)\times AC = W\times AB$

$\Rightarrow R\times x = W\times 3 \Rightarrow R = \dfrac{3W}{x}$

$\therefore$ চাপ R ন্যূনতম হবে যদি x বৃহত্তম হয় অর্থাৎ $x = 3$ মিটার হয়, কেননা x এর সর্বোচ্চ মান = লাঠির দৈর্ঘ্য।

1(j) ভূমিতলের সমান্তরাল একই রেখাস্থ দু'টি মসৃণ পেরেক P ও Q এর উপর 8 মি. দীর্ঘ একটি বাঁশের প্রান্তদ্বয় অবস্থান করছে। বাঁশটির উপরস্থ R বিন্দুতে একটি ভারী বোঝা ঝুলানো হল, যদি PR = 3RQ হয় এবং Q বিন্দুতে চাপ P বিন্দুতে চাপ অপেক্ষা 325 গ্রাম-ওজন বেশী হয় তবে বোঝাটির ওজন নির্ণয় কর। **[বুয়েট'০৯-১০]**

সমাধান ঃ মনে করি, বোঝাটি w গ্রাম-ওজনের। এর জন্য P বিন্দুতে চাপ x গ্রাম-ওজন হলে, Q বিন্দুতে চাপ হবে $(x + 325)$ গ্রাম-ওজন।



$\therefore x + x + 325 = w \Rightarrow 2x = w - 325$ এবং

$x\times PR = (x + 325)\times RQ$

$\Rightarrow x\times 3RQ = (x + 325)\times RQ$, $[\because PR = 3RQ]$

$\Rightarrow 3x = x + 325 \Rightarrow 2x = 325 \Rightarrow w - 325 = 325 \Rightarrow w = 650$

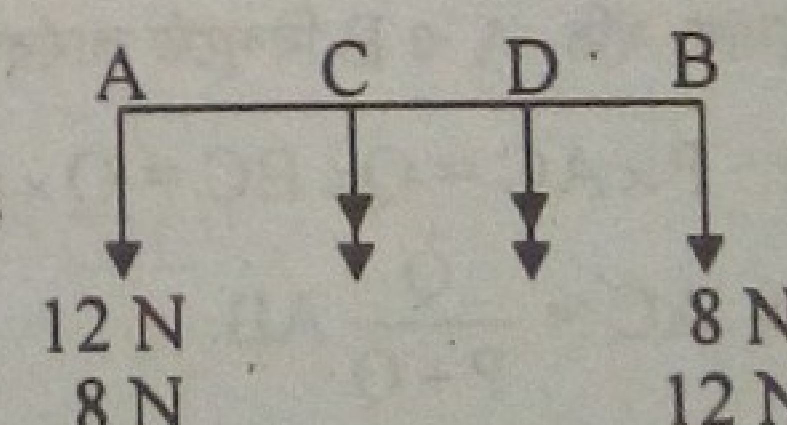
$\therefore$ বোঝাটির ওজন 650 গ্রাম-ওজন।

2(a) 12 N ও 8 N দুইটি সদৃশ সমান্তরাল বল কোন কঠিন বস্তুর উপর যথাক্রমে A ও B বিন্দুতে ক্রিয়ারত আছে। বল দুইটির অবস্থান বিনিময় করলে এদের লব্ধির ক্রিয়াবিন্দু AB বরাবর কত দূরে সরে যাবে? **[সি.'০৩]**

প্রমাণঃ A ও B বিন্দুতে কার্যরত যথাক্রমে দুইটি সদৃশ সমান্তরাল বল 12 N ও 8 N এর লব্ধির ক্রিয়াবিন্দু C হলে,

$12\times AC = 8\times BC = 8\times(AB - AC)$

$\Rightarrow (12 + 8)\times AC = 8\times AB \Rightarrow 20\times AC = 8\times AB \Rightarrow AC = \dfrac{2}{5}AB$



আবার, বল দুইটি পরস্পর স্থান বিনিময় করলে যদি এদের লব্ধির ক্রিয়াবিন্দু D হয়,

তবে $8\times AD = 12\times BD = 12\times(AB - AD) \Rightarrow 20\times AD = 12\times AB$

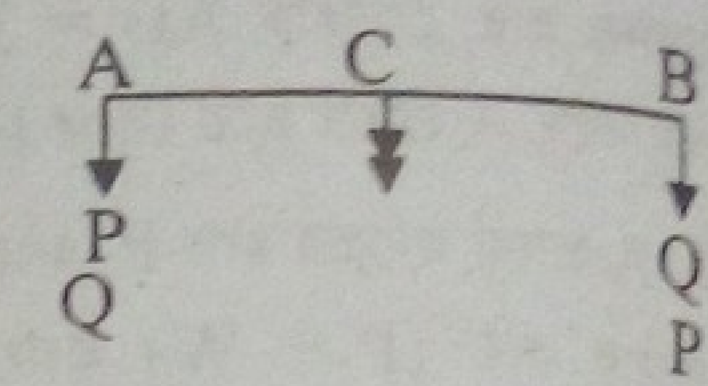
$\Rightarrow 5\times AD = 3\times AB \Rightarrow AD = \dfrac{3}{5}AB$

এখন, $CD = AD - AC = \left(\dfrac{3}{5} - \dfrac{2}{5}\right)AB = \dfrac{1}{5}AB$

$\therefore$ লব্ধির ক্রিয়াবিন্দু AB বরাবর $\dfrac{1}{5}AB$ দূরত্ব সরে যাবে।

2(b) P ও Q দুইটি সদৃশ সমান্তরাল বল কোন একটি বস্তুর উপর দুইটি বিন্দুতে ক্রিয়ারত আছে। এদের অবস্থান বিনিময় করলে যদি লব্ধির অবস্থান অপরিবর্তিত থাকে, তাহলে প্রমাণ কর যে, P = Q.

প্রমাণঃ ধরি, A ও B বিন্দুতে কার্যরত যথাক্রমে দুইটি সদৃশ সমান্তরাল বল P ও Q এর লব্ধির ক্রিয়াবিন্দু C । $\therefore$ $P.AC = Q.BC \cdots\cdots$(i)

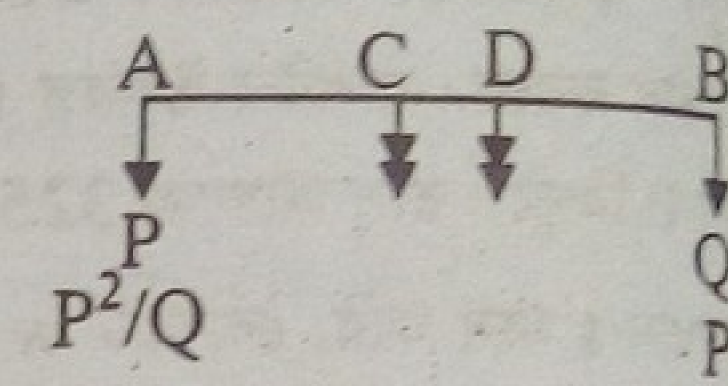


শর্তানুসারে, A বিন্দুতে Q ও B বিন্দুতে P কার্যরত হলে লব্ধির ক্রিয়াবিন্দু পুনরায় C হয়। $\therefore Q\,.\,AC = P.\,BC \cdots\cdots$ (ii)

$$(i) \div (ii) \Rightarrow \frac{P}{Q} = \frac{Q}{P} \Rightarrow P^2 = Q^2 \;\therefore P = Q \text{ (Proved).}$$

2(c) দেখাও যে, P ও Q দুইটি সদৃশ সমান্তরাল বলের Q কে $\dfrac{P^2}{Q}$ তে পরিবর্তন করে P এর সাথে স্থান পরিবর্তন করলে লব্ধির অবস্থান একই থাকে। [ঢা.'০২; চ.'০৫,'০৮; য.'১০]

প্রমাণঃ ধরি, A ও B বিন্দুতে কার্যরত যথাক্রমে দুইটি সদৃশ সমান্তরাল বল P ও Q এর লব্ধির ক্রিয়াবিন্দু C । $\therefore P.AC = Q.BC = Q.\,(AB - AC)$



$$\Rightarrow (P + Q).\,AC = Q.AB \Rightarrow AC = \frac{Q}{P+Q} AB \ldots\ldots \text{(i)}$$

আবার, Q কে P^2/Q তে পরিবর্তন করে P এর সাথে স্থান পরিবর্তন করলে যদি লব্ধির ক্রিয়াবিন্দু D হয়, তবে

$$\frac{P^2}{Q}.AD = P.\,BD = P\,(AB - AD) \Rightarrow (\frac{P^2}{Q} + P\,).AD = P.AB$$

$$\Rightarrow (P^2 + PQ).AD = PQ.AB \Rightarrow (P + Q).\,AD = Q.\,AB \Rightarrow AD = \frac{Q}{P+Q} AB = AC, \text{[(i) হতে।]}$$

$\therefore$ C ও D বিন্দুর অবস্থান একই। সুতরাং উভয় ক্ষেত্রে লব্ধির অবস্থান একই।

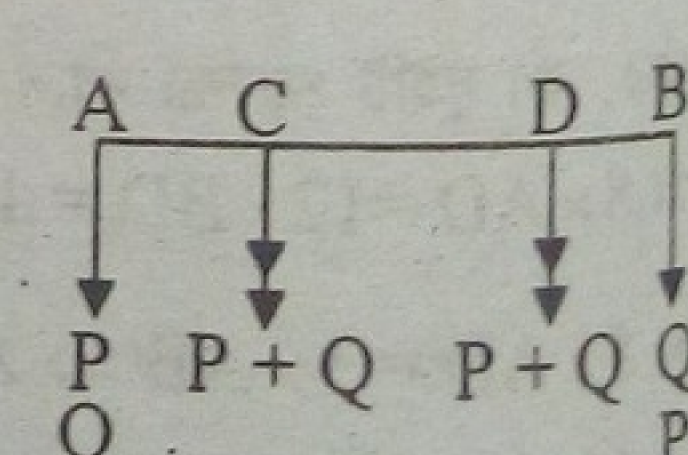
2(d) একটি বস্তুর উপর A ও B বিন্দুতে কার্যরত দুইটি সদৃশ সমান্তরাল বল P ও Q $(P > Q)$ পরস্পর স্থান বিনিময় করলে লব্ধির ক্রিয়াবিন্দু AB বরাবর d দূরত্বে সরে যায়। প্রমাণ কর যে, $d = \dfrac{P - Q}{P + Q} AB$

[সি.'০২,'১১; রা.'০৩,'১৩; য.'০৩; কু.'১২]

প্রমাণঃ ধরি, A ও B বিন্দুতে কার্যরত সদৃশ সমান্তরাল বল P ও Q এর লব্ধির ক্রিয়াবিন্দু C ।

$$\therefore\; P \times AC = Q \times BC = Q \times (AB - AC) \Rightarrow (\,P + Q) \times AC = Q \times AB$$

$$\Rightarrow AC = \frac{Q}{P+Q} AB$$



আবার, বল দুইটি পরস্পর স্থান বিনিময় করলে যদি এদের লব্ধির ক্রিয়াবিন্দু D হয়,

তবে $Q \times AD = P \times BD = P \times (AB - AD) \Rightarrow (P + Q) \times AD = P \times AB \Rightarrow AD = \dfrac{P}{P+Q} AB$

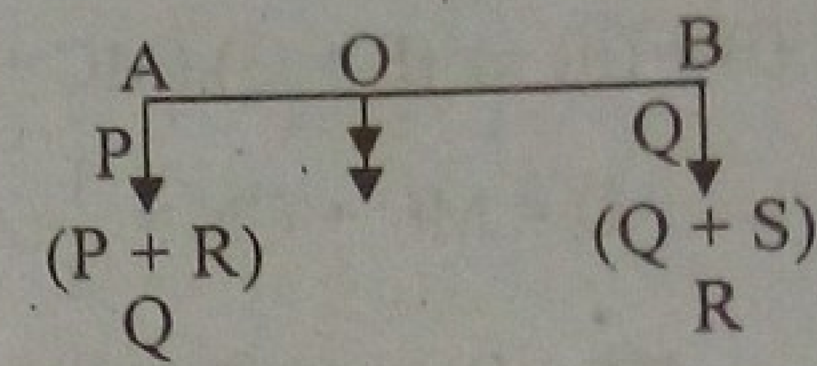
এখন, $d = CD = AD - AC = (\dfrac{P}{P+Q} - \dfrac{Q}{P+Q})AB \;\therefore\; d = \dfrac{P - Q}{P + Q} AB$

2(e) P ও Q মানের দুইটি সদৃশ সমান্তরাল বলের লব্ধি O বিন্দুতে ক্রিয়া করে। P কে R পরিমাণে এবং Q কে S পরিমাণে বৃদ্ধি করলেও লব্ধি O বিন্দুতে ক্রিয়া করে। আবার P, Q এর পরিবর্তে যথাক্রমে Q, R ক্রিয়া করলেও লব্ধি O

বিন্দুতে ক্রিয়া করে। প্রমাণ কর যে, $S = R - \dfrac{(Q-R)^2}{P-Q}$

[ব.'০১; সি.'০৪; ঢা.'০৬; রা.'০৩,'০৯; কু.'০৯,'১১; রুয়েট'০৩-০৪]

প্রমাণঃ মনে করি, A ও B বিন্দুতে কার্যরত সদৃশ সমান্তরাল বলদ্বয়ের লব্ধি O বিন্দুতে ক্রিয়া করে। তাহলে,



১ম ক্ষেত্রে, $P.\,AO = Q.\,BO \cdots \cdots$ (i)

২য় ক্ষেত্রে, $(P+R).\,AO = (Q+S).BO \cdots \cdots$ (ii)

৩য় ক্ষেত্রে, $Q.\,AO = R.\,BO \cdots \cdots$ (iii)

এখন, $(ii)-(i) \Rightarrow R.AO = S.BO \cdots \cdots$ (iv), $(i) \div (iii) \Rightarrow \dfrac{P}{Q} = \dfrac{Q}{R} = \dfrac{P-Q}{Q-R} \cdots \cdots$ (v) এবং

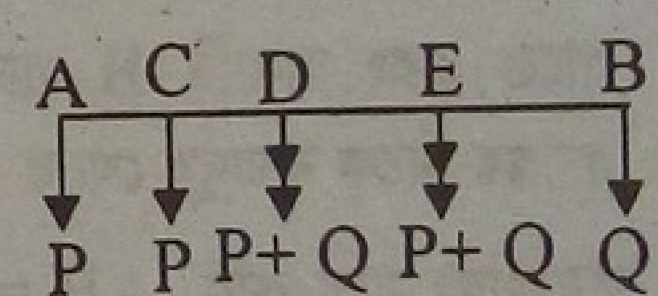
$(iii) \div (iv) \Rightarrow \dfrac{Q}{R} = \dfrac{R}{S} = \dfrac{Q-R}{R-S} \cdots \cdots$ (vi)

(v) ও (vi) থেকে পাই, $\dfrac{P-Q}{Q-R} = \dfrac{Q-R}{R-S} \Rightarrow R - S = \dfrac{(Q-R)^2}{P-Q}$ $\therefore S = R - \dfrac{(Q-R)^2}{P-Q}$ (Proved)

2(f) P ও Q দুইটি সদৃশ সমান্তরাল বল। P বলটির ক্রিয়ারেখা সমান্তরাল রেখে তার ক্রিয়া বিন্দুকে x দূরত্বে সরালে, দেখাও যে, এদের লব্ধি $\dfrac{Px}{P+Q}$ দূরত্বে সরে যাবে।

[ঢা.০৩,'০৭; ব.'০৩,'০৮; চ.'০৩,'১১; সি.'০৫,'০৭,'০৯; কু.'০৭; ব.'০৮; দি. '১০; য.'১০,'১২; টেক্সটাইল' ০৫-০৬]

প্রমাণঃ মনে করি, A ও B বিন্দুতে কার্যরত P ও Q সদৃশ সমান্তরাল বলদ্বয়ের লব্ধির ক্রিয়াবিন্দু D।



$\therefore\ P.AD = Q.\,BD \Rightarrow P.(AB - BD) = Q.BD$

$\Rightarrow P.AB = (P+Q).BD \cdots \cdots$ (i)

ধরি, P বলটির ক্রিয়ারেখা সমান্তরাল রেখে তার ক্রিয়া বিন্দুকে $AC = x$ দূরত্বে সরালে লব্ধির ক্রিয়াবিন্দু E হয়।

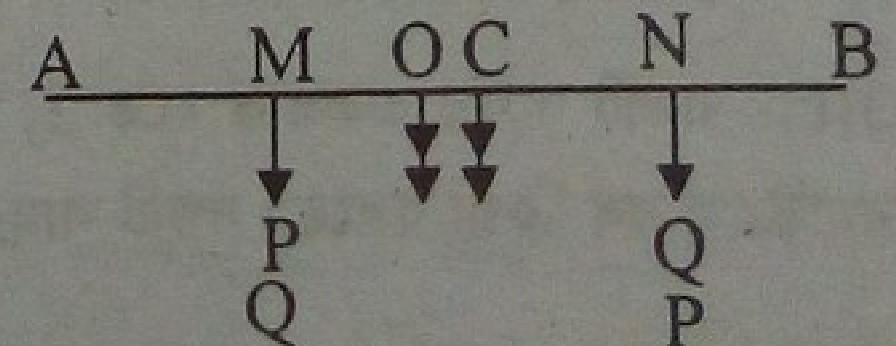
$\therefore\ P.CE = Q.\,BE \Rightarrow P.(BC - BE) = Q.BE \Rightarrow P.BC = (P+Q).BE \cdots$(ii)

$(i)-(ii) \Rightarrow P.(AB - BC) = (P+Q).(BD - BE) \Rightarrow P.AC = (P+Q).DE$

$\Rightarrow Px = (P+Q).DE$ $\therefore$ লব্ধি সরে যাবে, $DE = \dfrac{Px}{P+Q}$ দূরত্বে।

2(g) ACB একটি সরলরেখার AC ও BC অংশের মধ্যবিন্দুতে কার্যরত P ও Q দুইটি সদৃশ সমান্তরাল বলের লব্ধি C বিন্দুগামী। দেখাও যে, P ও Q বল দুইটি পরস্পর স্থান বিনিময় করলে লব্ধি AB এর মধ্যবিন্দুগামী হবে।

প্রমাণঃ মনে করি, AC ও BC অংশের মধ্যবিন্দু যথাক্রমে M ও N .তাহলে,



$AM = MC = \dfrac{1}{2}AC$ এবং $CN = BN = \dfrac{1}{2}BC.$

M ও N বিন্দুতে কার্যরত P ও Q সদৃশ সমান্তরাল বলদ্বয়ের লব্ধির ক্রিয়াবিন্দু C।

$\therefore \quad P.MC = Q.CN = Q.(MN - MC) \Rightarrow (P+Q).MC = Q.MN \cdots\cdots(i)$

ধরি, বল দুইটি পরস্পর স্থান বিনিময় করলে লব্ধির ক্রিয়াবিন্দু O ।

$\therefore \quad Q.MO = P.NO = P.(MN - MO) \Rightarrow (P+Q).MO = P.MN \cdots\cdots(ii)$

$(i)+(ii) \Rightarrow (P+Q).(MC+MO) = (P+Q).MN \Rightarrow AM + MO = MN, [\because MC = AM]$

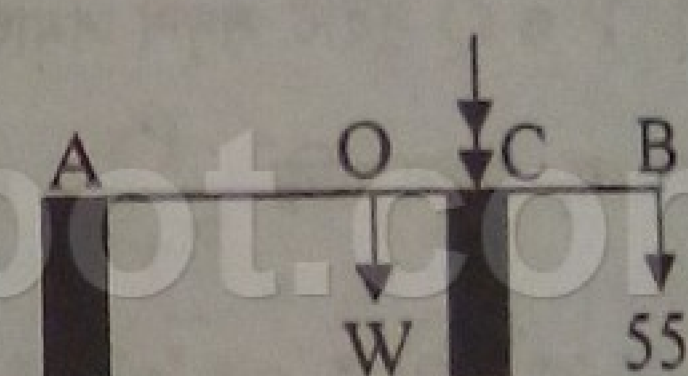
$\Rightarrow AO = MC + CN = \frac{1}{2}(AC+BC) \Rightarrow AO = \frac{1}{2}AB$

$\therefore$ লব্ধি AB এর মধ্যবিন্দুগামী হবে।

3(a) 12 m দীর্ঘ একটি ভারী সুষম বীম দুইটি খুঁটির উপর অনুভূমিকভাবে সুস্থিত আছে। একটি খুঁটি একপ্রান্তে এবং অন্যটি ঐ প্রান্ত হতে 8 m দূরে অবস্থিত। বীমটিকে না উল্টিয়ে 55 kg ওজনের একটি লোক কোন রকমে অপর প্রান্ত পর্যন্ত যেতে পারে। বীমটির ওজন নির্ণয় কর।

সমাধানঃ মনে করি, AB = 12 m সুষম বীমটি A ও C বিন্দুতে অবস্থিত দুইটি খুঁটির উপর অনুভূমিকভাবে সুস্থিত আছে এবং এর ওজন W কেজি, যা AB এর মধ্যবিন্দু O তে ক্রিয়া করে। তাহলে, AO = OB = 6 m, AC = 8 m.

বীমটিকে না উল্টিয়ে লোকটি B প্রান্তে কোন রকমে গেলে A প্রান্তে অবস্থিত খুঁটির সাথে বীমটির সংযোগ বিচ্ছিন্ন হয়ে যায় এবং একমাত্র C তে অবস্থিত খুঁটির উপর স্থির থাকে । সুতরাং O ও B বিন্দুতে ক্রিয়ারত ওজনদ্বয়ের লব্ধি C তে ক্রিয়া করবে।



$\therefore \quad W \times OC = 55 \times BC \Rightarrow W \times (AC - AO) = 55 \times (AB - AC)$

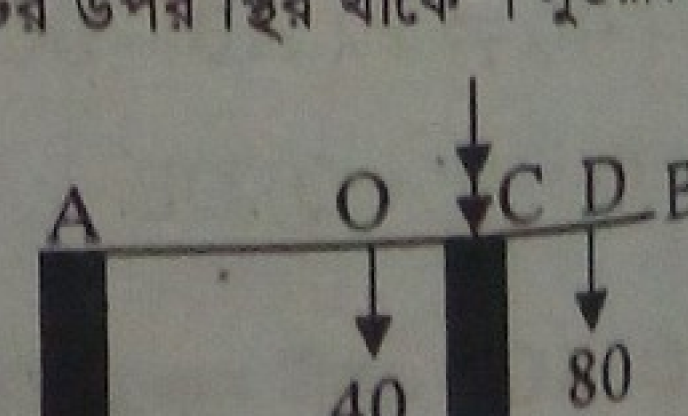
$\Rightarrow W \times (8-6) = 55 \times (12-8) \Rightarrow 2W = 55 \times 4 \Rightarrow W = 110$

$\therefore$ বীমটির ওজন 110 কেজি।

3(b) 6m দীর্ঘ এবং 40 kg ওজনের AB তক্তাটি দুইটি খুঁটির উপর অনুভূমিকভাবে স্থাপিত। খুঁটি দুইটির একটি A প্রান্তে এবং অন্যটি B প্রান্ত থেকে 2m ভিতরে অবস্থিত। তক্তাটি না উল্টিয়ে 80 kg ওজনের একটি লোক B প্রান্তের দিকে কতদূর যেতে পারবে?

সমাধানঃ মনে করি, AB = 6 m সুষম তক্তা A ও C বিন্দুতে অবস্থিত দুইটি খুঁটির উপর অনুভূমিকভাবে স্থাপিত এবং এর ওজন AB এর মধ্যবিন্দু O তে ক্রিয়া করে। তাহলে, AO = OB = 3 m, BC = 2 m, OC = 1 m.

ধরি, তক্তাটি না উল্টিয়ে লোকটি B প্রান্তের দিকে সর্বাধিক D বিন্দু পর্যন্ত যেতে পারে। D তে পৌঁছামাত্র A প্রান্তে অবস্থিত খুঁটির সাথে তক্তাটির সংযোগ বিচ্ছিন্ন হয়ে যায় এবং একমাত্র C তে অবস্থিত খুঁটির উপর স্থির থাকে । সুতরাং O ও D বিন্দুতে ক্রিয়ারত ওজনদ্বয়ের লব্ধি C তে ক্রিয়া করে ।



$\therefore \quad 40 \times OC = 80 \times CD \Rightarrow CD = \frac{1}{2}OC = \frac{1}{2} \times 1\ m = 0 \cdot 5\ m$

$\therefore \quad OD = OC + CD = (1 + 0 \cdot 5)\ m = 1 \cdot 5\ m$

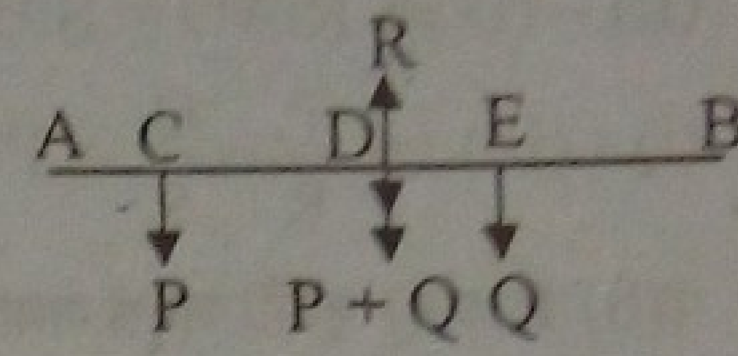
$\therefore$ তক্তাটি না উল্টিয়ে লোকটি তক্তার মধ্যবিন্দু থেকে $1 \cdot 5$ m যেতে পারবে।

3(c) একটি দণ্ডের একপ্রান্ত হতে 2, 8, 6 মিটার দূরত্বে অবস্থিত তিনটি বিন্দুতে যথাক্রমে P, Q ও R মানের তিনটি সমান্তরাল বল ক্রিয়া করছে। দণ্ডটি সাম্যাবস্থায় থাকলে দেখাও যে, P : Q : R = 1 : 2 : 3

[ঢা.'০২; য.'০৫,'০৯; সি.'০৬,'১১; ব.'০৯]

প্রমাণঃ মনে করি, AB দন্ডের C, D, E বিন্দুতে যথাক্রমে P, Q, R মানের বলত্রয় ক্রিয়া করে যেখানে $AC = 2$ m, $AD = 6$ m এবং $AE = 8$ m.

যেহেতু দন্ডটি সাম্যাবস্থায় আছে, সুতরাং P, Q বল দুইটি সদৃশ ধরলে এদের লব্ধি $(P + Q)$ বলটি R এর সমান ও বিপরীতমূখী ক্রিয়াশীল হবে।



$\therefore\ R = P + Q \cdots\cdots$(i) এবং $P.CD = Q.DE$

$\Rightarrow \dfrac{P}{DE} = \dfrac{Q}{CD} = \dfrac{P+Q}{CD+DE} = \dfrac{R}{CE}$, [(i) দ্বারা]

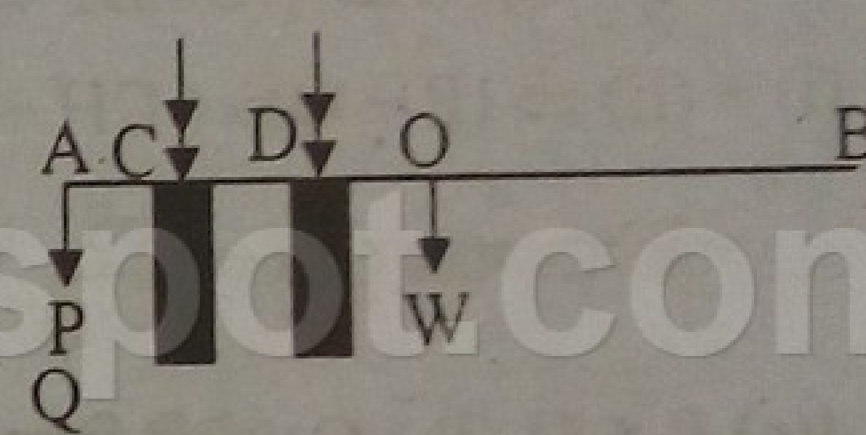
$\Rightarrow \dfrac{P}{AE-AD} = \dfrac{Q}{AD-AC} = \dfrac{R}{AE-AC} \Rightarrow \dfrac{P}{8-6} = \dfrac{Q}{6-2} = \dfrac{R}{8-2} \Rightarrow \dfrac{P}{2} = \dfrac{Q}{4} = \dfrac{R}{6}$

$\therefore\ P : Q : R = 1 : 2 : 3$

3(d) একটি ভারী সমরূপ দন্ডের একপ্রান্তে P ওজন স্থাপন করলে ঐ প্রান্ত হতে *a* দূরত্বে একটি অবলম্বনের উপর দন্ডটি অনুভূমিকভাবে সুস্থিত থাকে। একই বিন্দুতে Q ওজন স্থাপন করলে সুস্থিতির জন্য অবলম্বনকে *b* দূরত্বে স্থাপন করতে হয়। দেখাও যে, দন্ডের ওজন $= \dfrac{Pa - Qb}{b - a}$ এবং দন্ডের দৈর্ঘ্য $= \dfrac{2ab(P-Q)}{Pa-Qb}$.

প্রমাণঃ মনে করি, AB সমরূপ দন্ডের ওজন W, যা AB এর মধ্যবিন্দু O তে ক্রিয়া করে।

ধরি, A প্রান্তে P ওজন স্থাপন করলে ঐ প্রান্ত হতে $AC = a$ দূরত্বে একটি অবলম্বনের উপর দণ্ডটি অনুভূমিকভাবে সুস্থিত থাকে। তাহলে, A ও O বিন্দুতে ক্রিয়ারত ওজনদ্বয়ের লব্ধি C তে ক্রিয়া করবে।



$\therefore\ P \times AC = W \times OC = W \times (AO - AC) \Rightarrow Pa = W(AO - a)$

$\Rightarrow Pa - Wa = W \times AO \cdots$(i)

আবার, A প্রান্তে Q ওজন স্থাপন করলে দন্ডটির সুস্থিতির জন্য, $AD = b$ দূরত্বে অবলম্বনটিকে স্থাপন করতে হয়। তাহলে, A ও O বিন্দুতে ক্রিয়ারত ওজনদ্বয়ের লব্ধি D তে ক্রিয়া করবে।

$\therefore\ P \times AD = W \times OD = W \times (AO - AD) \Rightarrow Qb = W(AO - b) \Rightarrow Qb - Wb = W \times AO \cdots$(ii)

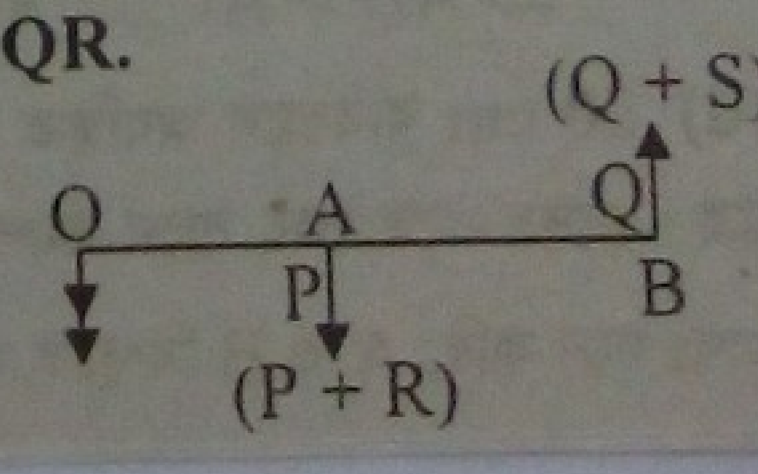
(i) ও (ii) থেকে, $Pa - Wa = Qb - Wb \Rightarrow (b - a)W = Qb - Pa \Rightarrow W = \dfrac{Qb - Pa}{b - a}$

(i) থেকে পাই, $AO = \dfrac{Pa}{W} - a = Pa \times \dfrac{b-a}{Qb-Pa} - a = \dfrac{Pab - Pa^2 - Qab + Pa^2}{Qb - Pa} = \dfrac{(P-Q)ab}{Qb-Pa}$

$\therefore$ দন্ডটির দৈর্ঘ্য $= 2 \times AO = \dfrac{2ab(P-Q)}{Qb-Pa}$ এবং ওজন $= \dfrac{Qb-Pa}{b-a}$ (Proved)

4(a) P ও Q দুইটি বিসদৃশ সমান্তরাল বল দুইটি বিন্দুতে ক্রিয়ারত আছে। একই বিন্দুতে যথাক্রমে $(P + R)$ ও $(Q + S)$ বল দুইটি ক্রিয়া করলে, লব্ধি একই বিন্দুগামী হয়। প্রমাণ কর যে, $PS = QR$.

প্রমাণঃ মনে করি, A ও B বিন্দুতে কার্যরত বিসদৃশ সমান্তরাল বলদ্বয়ের লব্ধি O বিন্দুতে ক্রিয়া করে এবং $P > Q$।



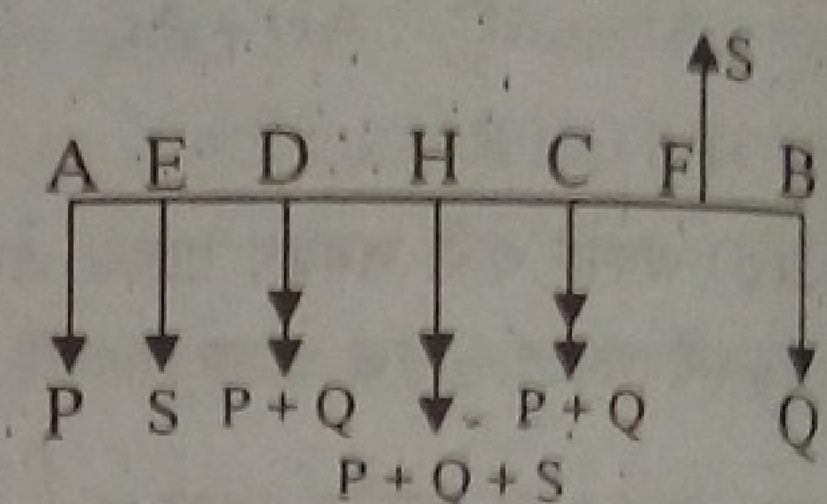
তাহলে, ১ম ক্ষেত্রে, $P.AO = Q.BO \cdots\cdots$ (i)

২য় ক্ষেত্রে, $(P+R).AO = (Q+S).BO \cdots$ (ii)

$(ii)-(i) \Rightarrow R.AO = S.BO \cdots\cdots$ (iii)

$(i)\div(iii) \Rightarrow \frac{P}{R}=\frac{Q}{S}$ $\therefore PS = QR$ (Proved)

4(b) P ও Q দুইটি সদৃশ সমান্তরাল বলের সাথে একই সমতলে b দূরত্বে S মানের দুইটি বিসদৃশ সমান্তরাল বল প্রয়োগ করা হল। প্রমাণ কর যে, এদের লব্ধি $\frac{bS}{P+Q}$ দূরত্বে সরে যাবে। [চ.'০১; কু.'০৩; ঢা.'১১; রা.'১১]



প্রমাণঃ মনে করি, A ও B বিন্দুতে কার্যরত যথাক্রমে দুইটি সদৃশ সমান্তরাল বল P ও Q এর লব্ধি (P + Q), যার ক্রিয়াবিন্দু C এবং E ও F বিন্দুতে S মানের দুইটি বিসদৃশ সমান্তরাল বল ক্রিয়া করে, যেখানে EF = b.

C ও E তে কার্যরত সদৃশ সমান্তরাল বলদ্বয়ের লব্ধি (P + Q + S) এর ক্রিয়াবিন্দু H হলে, $(P+Q)\times CH = S\times EH \cdots\cdots$(i)

আবার, H ও F তে কার্যরত বিসদৃশ সমান্তরাল বলদ্বয়ের লব্ধি $(P+Q+S-S) = P+Q$ এর ক্রিয়াবিন্দু D হলে,

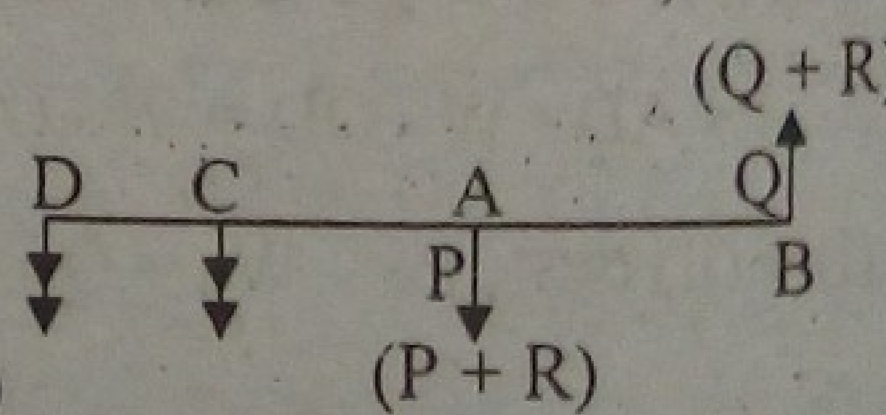
$(P+Q+S)\times HD = S\times DF \Rightarrow (P+Q)\times HD = (DF-HD)\times S = HF\times S \cdots\cdots$(ii)

$(i)+(ii) \Rightarrow (P+Q)\times(CH+DH) = (EH+HF)\times S \Rightarrow (P+Q)\times CD = EF\times S = bS$

$\therefore$ লব্ধি সরে যাবে $CD = \frac{bS}{P+Q}$ দূরত্বে।

4(c) P ও Q (P >Q) দুইটি বিসদৃশ সমান্তরাল বল দুইটি বিন্দুতে কার্যরত আছে। যদি এদেরকে একই পরিমাণে বৃদ্ধি করা হয়, তবে দেখাও যে, নতুন লব্ধির ক্রিয়াবিন্দু P হতে আরও দূরে সরে যাবে।

[চ.'০২,'০৭,'১৩; রা.'০৪,'০৮; ঢা.'০৮; কু.'০৯,'১৩; ব.'১১,'১৩; সি.'১৩]



প্রমাণঃ মনে করি, A ও B বিন্দুতে কার্যরত P ও Q বিসদৃশ সমান্তরাল বলদ্বয়ের লব্ধি C বিন্দুতে ক্রিয়া করে এবং P ও Q কে R পরিমাণে বৃদ্ধি করা হলে (P + R) ও (Q + R) এর লব্ধি D বিন্দুতে ক্রিয়া করে।

$\therefore P.AC = Q.BC = Q.(AC+AB) \Rightarrow (P-Q).AC = Q.AB \cdots$(i)

এবং $(P+R).AD = (Q+R).BD = (Q+R).(AD+AB)$

$\Rightarrow (P+R-Q-R).AD = (Q+R).AB \Rightarrow (P-Q).AD = (Q+R).AB \cdots\cdots$(ii)

$(ii)\div(i) \Rightarrow \frac{AD}{AC}=\frac{Q+R}{Q}=(1+\frac{R}{Q})>1, [\because Q>0, R>0]$

$\Rightarrow AD > AC.$ $\therefore$ নতুন লব্ধির ক্রিয়াবিন্দু P হতে আরও দূরে সরে যাবে।

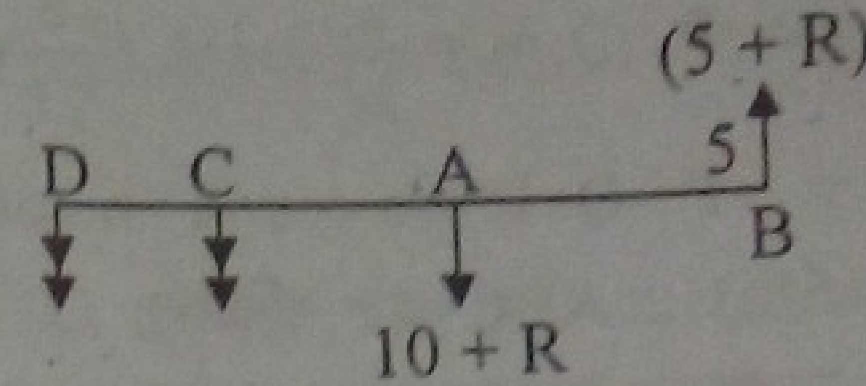
4(d) 20 cm ব্যবধানে অবস্থিত দুইটি বিন্দুতে যথাক্রমে 10 ডাইন ও 5 ডাইন দুইটি বিসদৃশ সমান্তরাল বল ক্রিয়ারত আছে। এদের প্রত্যেকের সাথে সমপরিমাণ কত বল যোগ করলে লব্ধি 10 cm দূরে সরে যাবে?

প্রমাণঃ মনে করি, A ও B বিন্দুতে কার্যরত 10 ডাইন ও 5 ডাইন বিসদৃশ সমান্তরাল বলদ্বয়ের লব্ধি C বিন্দুতে ক্রিয়া করে

যখন AB = 20 cm.

$\therefore\ 10.AC = 5.BC \Rightarrow 2\ AC = (AC + AB)$

$\Rightarrow AC = AB = 20$ cm



ধরি, উভয় বলের সাথে R ডাইন যোগ করলে (10 + R) ডাইন ও (5 + R) ডাইন বল দুইটির লব্ধি D বিন্দুতে ক্রিয়া করে যখন CD = 10 cm.

$\therefore\ AD = AC + CD = (20 + 10)$ cm = 30 cm, $BD = AB + AD = (20 + 30)$ cm = 50 cm

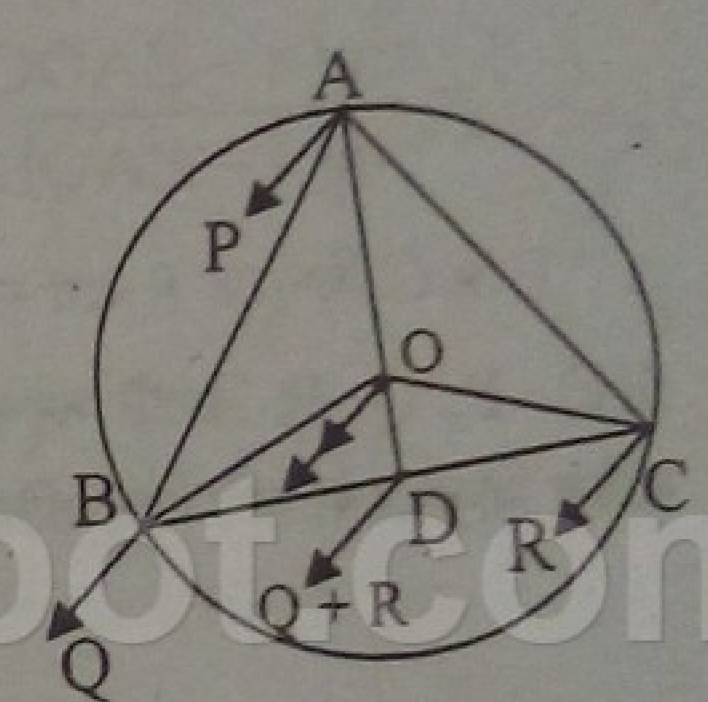
এবং $(10 + R).AD = (5 + R).\ BD \Rightarrow (10 + R).30 = (5 + R).\ 50 \Rightarrow 30 + 3R = 25 + 5R$

$\Rightarrow 2R = 5 \Rightarrow R = 2\cdot 5$ $\therefore$ $2\cdot 5$ ডাইন বল যোগ করতে হবে।

5(a) P, Q, R তিনটি সদৃশ সমান্তরাল বল যথাক্রমে Δ ABC এর কৌণিক বিন্দু A, B, C তে ক্রিয়া করে। এদের লব্ধির ক্রিয়ারেখা যদি ত্রিভুজটির পরিকেন্দ্র গামী হয়, তাহলে প্রমাণ কর যে,

(i) P : Q: R = sin 2A : sin 2B : sin 2C [ঢা.'০১; ব.'১৩; য.'১৩]

(ii) P : Q : R = a cos A : b cos B : c cos C [চ.'১০]



প্রমাণঃ মনে করি, Δ ABC এর পরিকেন্দ্র O এবং বর্ধিত AO, BC কে D বিন্দুতে ছেদ করে। B ও C তে ক্রিয়ারত সদৃশ সমান্তরাল বল Q ও R এর লব্ধি (Q + R) বলটি BC এর কোন বিন্দুতে ক্রিয়া করবে। আবার প্রদত্ত বলত্রয়ের লব্ধি (P + Q + R) এর ক্রিয়াবিন্দু O এবং এর একটি অংশক বল P এর ক্রিয়াবিন্দু A বলে, অপর অংশক বল (Q + R) এর ক্রিয়াবিন্দু অবশ্যই BC ও AD এর ছেদবিন্দু D হবে।

$$\therefore\ Q\times BD = R\times CD \Rightarrow \frac{Q}{R} = \frac{CD}{BD} = \frac{CD/OD}{BD/OD} = \frac{\sin COD/\sin OCD}{\sin BOD/\sin OBD}$$

$$\Rightarrow \frac{Q}{R} = \frac{\sin COD}{\sin BOD},\ [\because \Delta OBC \text{ এ}, OB = OC\ \therefore \angle OBD = \angle OCD\ ]$$

$$= \frac{\sin(\pi - \angle AOC)}{\sin(\pi - \angle AOB)} = \frac{\sin AOC}{\sin AOB} = \frac{\sin 2B}{\sin 2C},\ [\because \text{ কেন্দ্রঃস্থ কোণ বৃত্তঃস্থ কোণের দ্বিগুণ।}]$$

$\Rightarrow Q : R = \sin 2B : \sin 2C$. তদ্রূপ, $P : Q = \sin 2A : \sin 2B$

$\therefore\ P : Q: R = \sin 2A : \sin 2B : \sin 2C$ (Proved)

বিকল্প পদ্ধতি ঃ $\dfrac{Q}{R} = \dfrac{CD}{BD} = \dfrac{\Delta ADC}{\Delta ADB} = \dfrac{\Delta ODC}{\Delta ODB} = \dfrac{\Delta ADC - \Delta ODC}{\Delta ADB - \Delta ODB} = \dfrac{\Delta AOC}{\Delta AOB}$

[$\because$ Δ ADC ও Δ ADB এর উচ্চতা এবং Δ ODC ও Δ ODB এর উচ্চতা সমান।]

$$\Rightarrow \frac{Q}{R} = \frac{(OA\times OC\sin AOC)/2}{(OA\times OB\sin AOB)/2} = \frac{\sin 2B}{\sin 2C} \Rightarrow Q : R = \sin 2B : \sin 2C\ .$$

তদ্রূপ, $P : Q = \sin 2A : \sin 2B$ $\therefore$ $P : Q: R = \sin 2A : \sin 2B : \sin 2C \cdots$(i) (Proved)

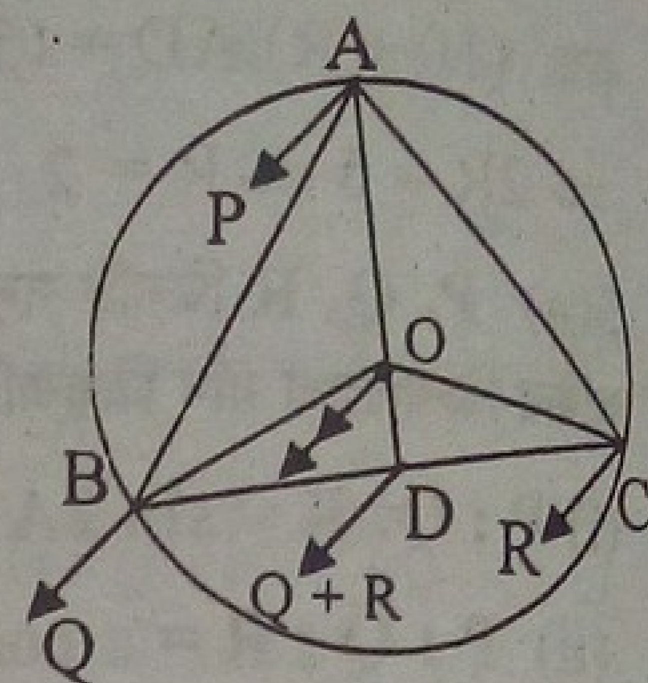
(i) $\Rightarrow$ $P : Q: R = 2\sin A\cos A : 2\sin B\cos B : 2\sin C\cos C$

$\Rightarrow P : Q : R = \frac{a}{2r}\cos A : \frac{b}{2r}\cos B : \frac{c}{2r}\cos C$, যেখানে ΔABC এর পরিব্যাসার্ধ r ।

$\therefore$ $P : Q : R = a\cos A : b\cos B : c\cos C$ (Proved)

5(b) ΔABC এর পরিকেন্দ্র O। একটি বল P, AO বরাবর ক্রিয়ারত। দেখাও যে, B ও C বিন্দুতে P এর সমান্তরাল উপাংশদ্বয়ের অনুপাত sin 2B : sin 2C. [য.'০২,'০৪,'০৬; সি.'০৩; ঢা.'০৯; রা.'১২; ব.'১২; দি.'১২]

প্রমাণঃ মনে করি, বর্ধিত AO, ΔABC এর BC বাহুকে D বিন্দুতে ছেদ করে। তাহলে, P বলটি AD বরাবর ক্রিয়া করবে এবং D বিন্দুকে P বলটির ক্রিয়াবিন্দু বিবেচনা করা যেতে পারে।



ধরি, B ও C তে P এর সমান্তরাল উপাংশ যথাক্রমে Q ও R অর্থাৎ B ও C তে ক্রিয়ারত Q ও R এর লব্ধি P যা D তে ক্রিয়া করে।

$$\therefore\ Q\times BD = R\times CD \Rightarrow \frac{Q}{R} = \frac{CD}{BD} = \frac{CD/OD}{BD/OD} = \frac{\sin COD/\sin OCD}{\sin BOD/\sin OBD}$$

$$\Rightarrow \frac{Q}{R} = \frac{\sin COD}{\sin BOD},\ [\because \Delta OBC \text{ এ}, OB = OC\ \therefore \angle OBD = \angle OCD]$$

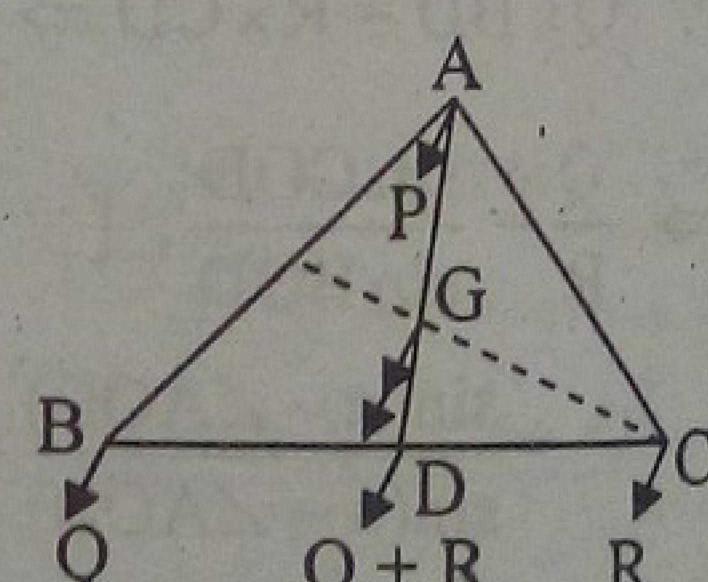
$$= \frac{\sin(\pi - \angle AOC)}{\sin(\pi - \angle AOB)} = \frac{\sin AOC}{\sin AOB} = \frac{\sin 2B}{\sin 2C} \Rightarrow Q : R = \sin 2B : \sin 2C$$

$\therefore$ B ও C বিন্দুতে P এর সমান্তরাল উপাংশদ্বয়ের অনুপাত sin 2B : sin 2C

5(c) P, Q, R তিনটি সদৃশ সমান্তরাল বল যথাক্রমে ΔABC এর কৌণিক বিন্দু A, B, C তে ক্রিয়া করে। এদের লব্ধির ক্রিয়ারেখা যদি ত্রিভুজটির ভরকেন্দ্রে কার্যরত হলে, প্রমাণ কর যে, P = Q = R

[কু.'০৪,'১০; ব.'০৪,'১০; ঢা.'০৮; সি.'০৮]

প্রমাণঃ মনে করি, ΔABC এর ভরকেন্দ্রে G এবং বর্ধিত AG, BC কে D বিন্দুতে ছেদ করে। B ও C তে ক্রিয়ারত সদৃশ সমান্তরাল বল Q ও R এর লব্ধি (Q + R) বলটি BC এর কোন বিন্দুতে ক্রিয়া করবে। আবার প্রদত্ত বলত্রয়ের লব্ধি (P + Q + R) এর ক্রিয়াবিন্দু G এবং এর একটি অংশক বল P এর ক্রিয়াবিন্দু A বলে, অপর অংশক বল (Q + R) এর ক্রিয়াবিন্দু অবশ্যই BC ও AD এর ছেদবিন্দু D হবে।

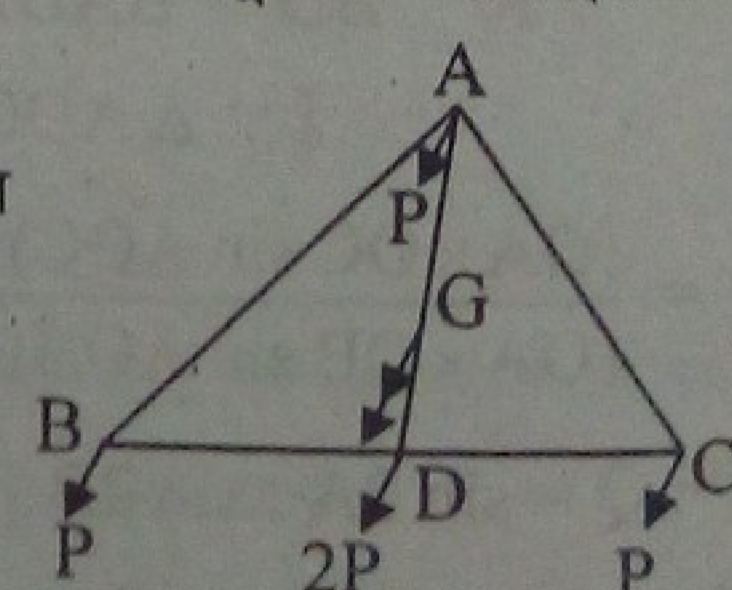


$\therefore$ Q . BD = R. CD $\Rightarrow$ Q = R, যেহেতু AD মধ্যমা অর্থাৎ BD = CD

অনুরূপভাবে দেখানো যায়, P = R. $\therefore$ P = Q = R (Proved)

5(d) দেখাও যে, ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দুতে তিনটি সমান সদৃশ সমান্তরাল বলের লব্ধি সর্বদা ত্রিভুজটির ভরকেন্দ্রগামী হবে।

প্রমাণঃ মনে করি, ΔABC এর শীর্ষবিন্দু A, B, C তে P মানের তিনটি সমান সদৃশ সমান্তরাল বল ক্রিয়া করে। এখন B ও C তে ক্রিয়ারত সদৃশ সমান্তরাল বল P ও P এর লব্ধি (P + P) = 2P বলটি BC বাহুস্থ D বিন্দুতে ক্রিয়া করলে,



P. BD = P. CD $\Rightarrow$ BD = CD. $\therefore$ D, BC এর মধ্যবিন্দু।

আবার, A ও D তে ক্রিয়ারত সদৃশ সমান্তরাল বল P ও 2P এর লব্ধি AD

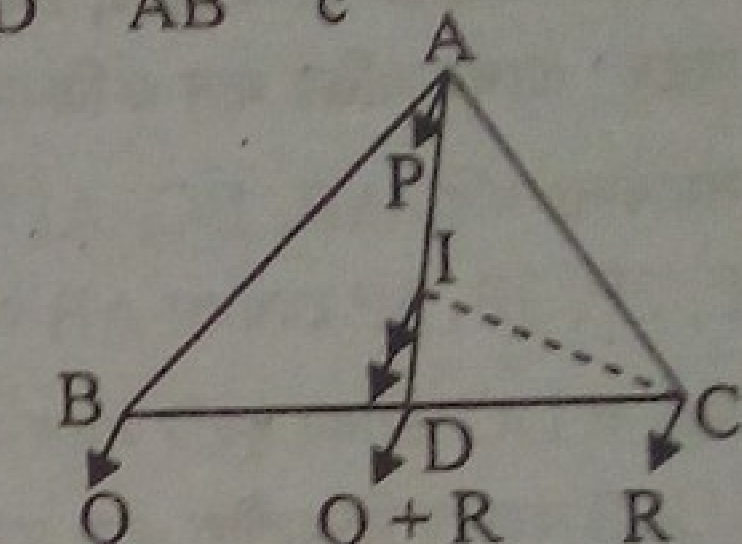
রেখাস্থ G বিন্দুতে ক্রিয়া করলে, $P.\,AG = 2P.GD \Rightarrow \frac{AG}{GD} = \frac{2}{1}$ অর্থাৎ G বিন্দুটি AD মধ্যমাকে $2:1$ অনুপাতে বিভক্ত করে। সুতরাং বলত্রয়ের লব্ধি G তে ক্রিয়া করে যা ত্রিভুজের ভরকেন্দ্র।

5(e) P, Q, R সদৃশ সমান্তরাল বল তিনটি যথাক্রমে ΔABC এর কৌণিক বিন্দু **A, B, C** তে ক্রিয়া করে। এদের লব্ধির ক্রিয়ারেখা যদি ত্রিভুজটির অন্তঃকেন্দ্রগামী হয়, তবে দেখাও যে,

(i) $\frac{P}{a} = \frac{Q}{b} = \frac{R}{c}$ [রা.'০৭; সি.'০৮,'১২; য.'১১]

(ii) $P : Q : R = \sin A : \sin B : \sin C$ [রা.'০০; সি.'০৫; সি.'১৩]

প্রমাণঃ মনে করি, ΔABC এর অন্তঃকেন্দ্র I এবং বর্ধিত AI, BC কে D বিন্দুতে ছেদ করে। তাহলে, $\angle BAC$ এর সমদ্বিখণ্ডক AD, BC কে D বিন্দুতে $AB : AC$ অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত করে। $\therefore \frac{CD}{BD} = \frac{AC}{AB} = \frac{b}{c}$.



এখন B ও C তে ক্রিয়ারত সদৃশ সমান্তরাল বল Q ও R এর লব্ধি $(Q + R)$ বলটি BC এর কোন বিন্দুতে ক্রিয়া করবে। আবার প্রদত্ত বলত্রয়ের লব্ধি $(P + Q + R)$ এর ক্রিয়াবিন্দু I এবং এর একটি অংশক বল P এর ক্রিয়াবিন্দু A হলে, অপর অংশক বল $(Q + R)$ এর ক্রিয়াবিন্দু অবশ্যই BC ও AD এর ছেদবিন্দু D হবে।

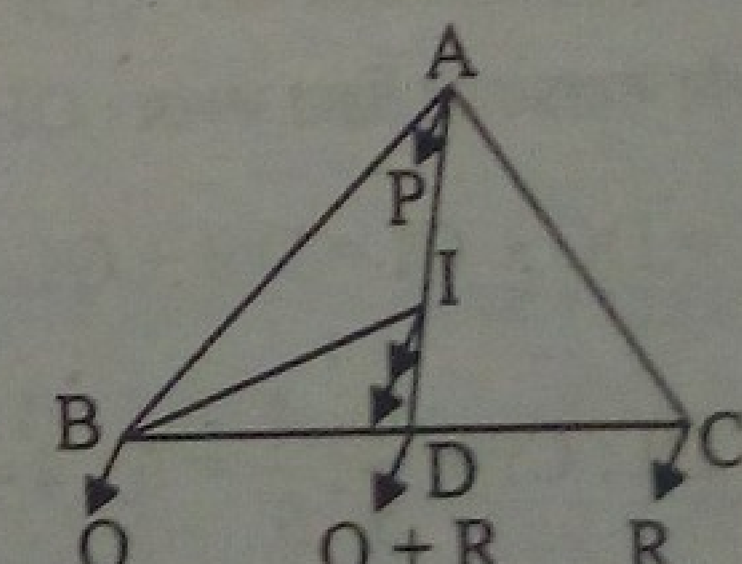
$\therefore Q.\,BD = R.\,CD \Rightarrow \frac{Q}{R} = \frac{CD}{BD} = \frac{b}{c} \Rightarrow \frac{Q}{b} = \frac{R}{c}$. অনুরূপভাবে, প্রমাণ করা যায়, $\frac{P}{a} = \frac{Q}{c}$

$\therefore \frac{P}{a} = \frac{Q}{b} = \frac{R}{c} \Rightarrow \frac{P}{2r\sin A} = \frac{Q}{2r\sin B} = \frac{R}{2r\sin C}$, যেখানে ΔABC এর পরিব্যাসার্ধ r।

$\therefore P : Q : R = \sin A : \sin B : \sin C$ (Showed)

5(f) P, Q, R সদৃশ সমান্তরাল বল তিনটি যথাক্রমে ΔABC এর শীর্ষ **A, B, C** তে ক্রিয়ারত এবং এদের মান **a, b, c** এর সমানুপাতিক। দেখাও যে, এদের লব্ধি ত্রিভুজের অন্তঃকেন্দ্রে ক্রিয়া করবে। [চ.'০২]

প্রমাণঃ মনে করি, $P = ak$, $Q = bk$ ও $R = ck$ সদৃশ সমান্তরাল বলত্রয় যথাক্রমে ΔABC এর শীর্ষ A, B ও C তে ক্রিয়ারত। B ও C তে ক্রিয়ারত সদৃশ সমান্তরাল বল Q ও R এর লব্ধি $(Q + R)$ বলটি BC বাহুস্থ D বিন্দুতে ক্রিয়ারত হলে,



$\frac{BD}{CD} = \frac{R}{Q} = \frac{kc}{kb} = \frac{c}{b} = \frac{AB}{AC} \cdots$ (i). $\therefore$ AD রেখা A কোণের সমদ্বিখণ্ডক।

আবার, A ও D তে ক্রিয়ারত P ও $(Q + R)$ সদৃশ সমান্তরাল বল দুইটির লব্ধি $(P + Q + R)$ বল AD রেখাস্থ I বিন্দুতে ক্রিয়ারত হলে,

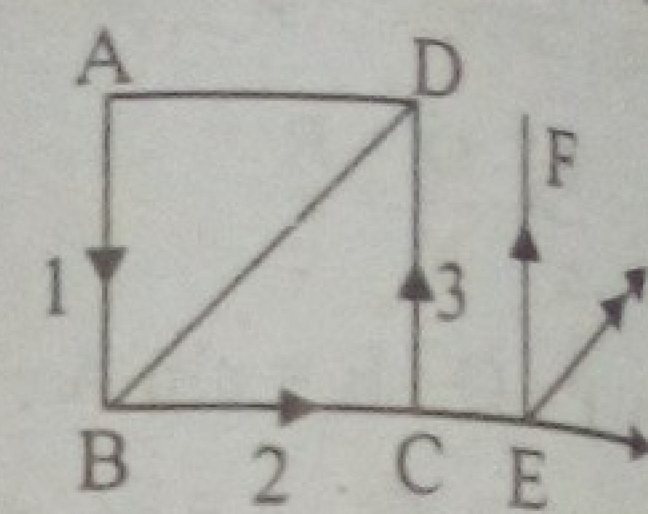
$\frac{AI}{DI} = \frac{Q+R}{P} = \frac{bk+ck}{ak} = \frac{b+c}{a} \cdots\cdots$ (ii)

(i) থেকে, $\frac{AB}{BD} = \frac{AC}{CD} = \frac{AB+AC}{BD+CD} = \frac{c+b}{BC} = \frac{b+c}{a} \Rightarrow \frac{AB}{BD} = \frac{AI}{DI}$ [(ii)) দ্বারা]

$\therefore$ BI রেখা B কোণের সমদ্বিখণ্ডক। সুতরাং I বিন্দুটি A ও B কোণের সমদ্বিখণ্ডকের ছেদবিন্দু অর্থাৎ ΔABC এর অন্তঃকেন্দ্র। অতএব, বলত্রয়ের লব্ধি ত্রিভুজের অন্তঃকেন্দ্রে ক্রিয়া করে।

6(a) ABCD বর্গের AB, BC, CD বরাবর কার্যরত যথাক্রমে 1, 2, 3 মানের তিনটি বলের লব্ধি নির্ণয় কর।

সমাধানঃ AB ও CD বরাবর দুইটি বিসদৃশ সমান্তরাল বলের লব্ধি $(3-1)=2$, যা EF || CD বরাবর ক্রিয়াশীল এবং তার ক্রিয়ারেখা বর্ধিত BC কে E বিন্দুতে ছেদ করে।

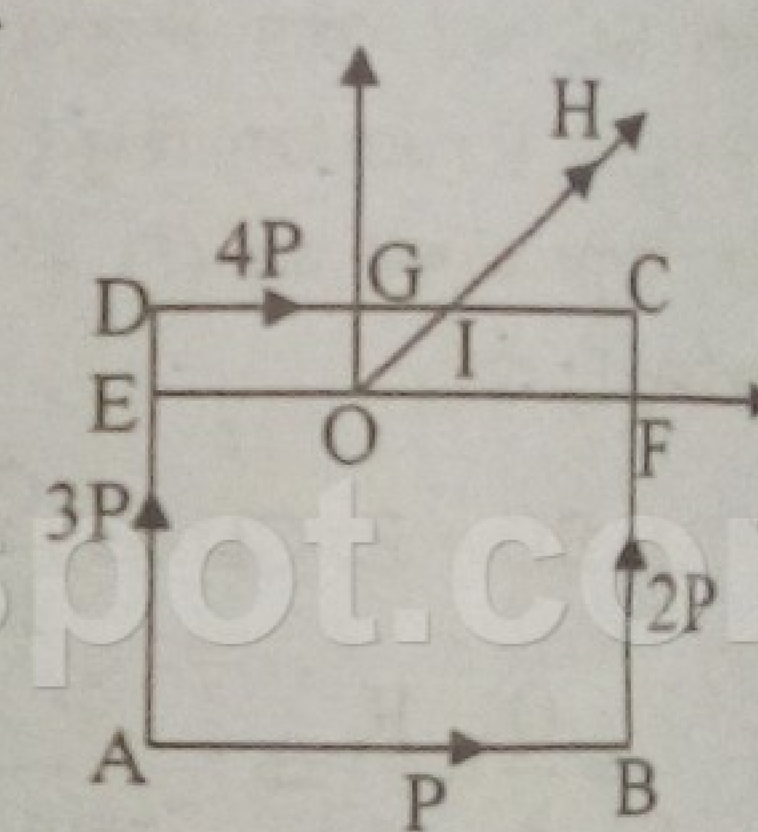


বলের স্থানান্তরবিধি অনুসারে BC বরাবর ক্রিয়ারত 2 মানের বলটির ক্রিয়াবিন্দু E ধরা যায়। তাহলে E বিন্দুতে সমকোণে ক্রিয়ারত 2, 2 সমান বলের লব্ধির মান $\sqrt{(2)^2+(2)^2}=2\sqrt{2}$

$\therefore$ প্রদত্ত বলত্রয়ের লব্ধির মান $2\sqrt{2}$ ।

6(b) ABCD বর্গের AB, BC. AD ও DC বাহু বরাবর যথাক্রমে 1, 2, 3 ও 4 এর সমানুপাতিক বলগুলো কার্যরত আছে। এদের লব্ধির মান ও ক্রিয়ারেখা নির্ণয় কর, যখন বর্গের বাহুর দৈর্ঘ্য 2 সে.মি.।

সমাধানঃ ধরি, AB, BC. AD ও DC বরাবর ক্রিয়াশীল বলগুলোর মান যথাক্রমে P, 2P, 3P, 4P যেখানে AB = BC = AD =DC = 2 cm ।



AB ও DC বরাবর দুইটি সদৃশ সমান্তরাল বলের লব্ধি $(P+4P)=5P$, যা EF || AB বরাবর ক্রিয়াশীল এবং তার ক্রিয়ারেখা AD কে E বিন্দুতে এমনভাবে ছেদ করে যে,

$P.AE = 4P.DE \Rightarrow AD - DE = 4DE \Rightarrow 5.DE = AD = 2\text{ cm}$

$\Rightarrow DE = \frac{2}{5}\text{ cm}$

আবার, BC ও AD বরাবর দুইটি সদৃশ সমান্তরাল বলের লব্ধি $(2P+3P)=5P$, যা OG || AD বরাবর ক্রিয়াশীল এবং তার ক্রিয়ারেখা DC কে G বিন্দুতে এমনভাবে ছেদ করে যে,

$$3P.\,DG = 2P.CG \Rightarrow 3.DG = 2(DC - DG) \Rightarrow 5.DG = 2\times 2\text{ cm} \Rightarrow DG = \frac{4}{5}\text{ cm}$$

ধরি, EF ও OG রেখাদ্বয় পরস্পর O বিন্দুতে ছেদ করে। তাহলে, OF ও OG বরাবর সমকোণে ক্রিয়ারত 5P, 5P মানের বলদ্বয়ের লব্ধির মান $\sqrt{(5P)^2+(5P)^2}=5\sqrt{2}\,P$, যা $\angle GOF$ কোণের সমদ্বিখণ্ডক OH বরাবর অর্থাৎ AC কর্ণের সমান্তরালে ক্রিয়া করবে। OH , DC কে I বিন্দুতে ছেদ করলে,

$$DI = DG + GI = DG + OG = DG + DE = \left(\frac{4}{5}+\frac{2}{5}\right)\text{ cm} = \frac{6}{5}\text{ cm},\ CI = \left(2-\frac{6}{5}\right)\text{ cm} = \frac{4}{5}\text{ cm}$$

$$\therefore\ DI : CI = \frac{6}{5} : \frac{4}{5} = 6 : 4 = 3 : 2$$

$\therefore$ প্রদত্ত বলগুলোর লব্ধির মান $5\sqrt{2}$ এর সমানুপাতিক , যার ক্রিয়ারেখা AC এর সমান্তরাল এবং DC কে 3 : 2 অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত করে।