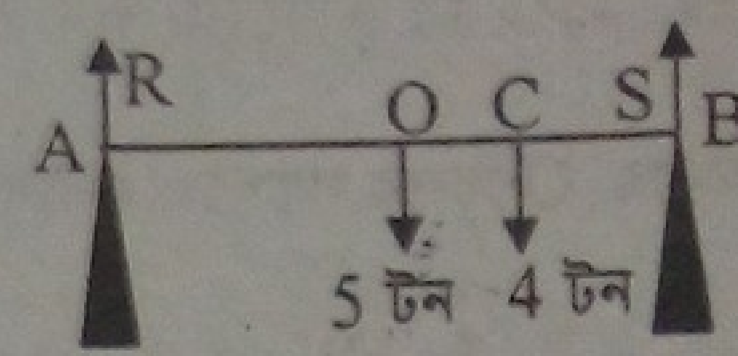
1(a) 30 m দীর্ঘ এবং 5 টন ওজনের একটি সেতু দুই প্রান্তে দুইটি থামের উপর অবস্থিত। যদি 4 টন ওজনের একটি লরী সেতুটির একপ্রান্ত থেকে দুই তৃতীয়াংশ দূরত্বে এর উপর দাঁড়ায়, তবে থাম দুইটির উপর চাপ কত হবে?

সমাধানঃ মনে করি, $AB = 30$ m সেতুর মধ্যবিন্দু O তে এর ওজন ক্রিয়াশীল এবং 4 টন ওজনের লরীটি C বিন্দুতে সেতুর উপর দাঁড়ান, যেখানে $AC = \frac{2}{3} \times 30 \text{ m} = 20 \text{ m}$. $\therefore BC = 10$ m



প্রতিটি থামের উপর চাপ তাদের প্রতিক্রিয়া বলের সমান ও বিপরীতমুখী। ধরি, A ও B প্রান্তের থামের প্রতিক্রিয়া বল যথাক্রমে R টন-ওজন ও S টন-ওজন।

A বিন্দুর সাপেক্ষে মোমেন্ট নিয়ে পাই,

$R \times 0 - 5 \times AO - 4 \times AC + S \times AB = 0$ [$\because$ সেতুটি সাম্যাবস্থায় আছে।]

$\Rightarrow -5 \times 15 - 4 \times 20 + S \times 30 \Rightarrow S \times 30 = 75 + 80 = 155 \Rightarrow S = \frac{155}{30} = 5\frac{1}{6}$

আবার, B বিন্দুর সাপেক্ষে মোমেন্ট নিয়ে পাই, $R \times AB - 5 \times BO - 4 \times BC + S \times 0 = 0$

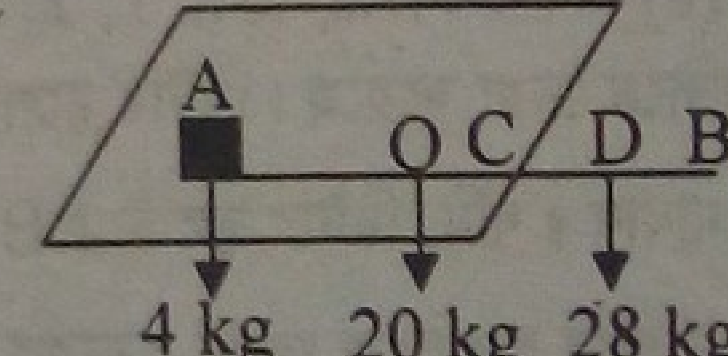
$\Rightarrow R \times 30 - 5 \times 15 - 4 \times 10 = 0 \Rightarrow R \times 30 = 75 + 40 = 115 \Rightarrow R = \frac{115}{30} = 3\frac{5}{6}$

$\therefore$ থাম দুইটির উপর চাপ $3\frac{5}{6}$ টন-ওজন ও $5\frac{1}{6}$ টন-ওজন।

1(b) 20 kg ওজনের 18 m লম্বা একখানা সুষম তক্তা একটি অনুভূমিক টেবিলের উপর স্থাপিত। টেবিলের বাইরে তক্তার অতিরিক্ত 7 m। টেবিলের অপর প্রান্তে 4 kg ওজন স্থাপন করা আছে। 28 kg ওজনের একটি বালক টেবিলের কিনারা থেকে কতদূর পর্যন্ত নিরাপদে এর উপর দিয়ে হেঁটে যেতে পারবে?

সমাধানঃ মনে করি, $AB = 18$ m তক্তাটির ওজন 20 kg এর মধ্যবিন্দু ঙ তে কার্যরত এবং টেবিলের বাইরে তক্তার অতিরিক্ত $BC = 7$ m। তাহলে, $AO = BO = 9$ m, $OC = BO - BC = (9 - 7) \text{ m} = 2$ m.

টেবিলের A প্রান্তে 4 kg ওজন স্থাপন করে 28 kg ওজনের বালকটি টেবিলের কিনারা C থেকে D পর্যন্ত $CD = x$ মি. নিরাপদে হেঁটে যেতে পারলে, ওজনগুলোর লব্ধি C বিন্দুতে ক্রিয়া করবে।

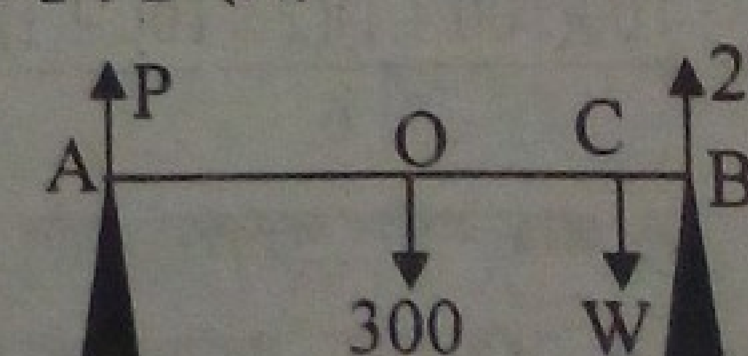


$\therefore$ C বিন্দুর সাপেক্ষে মোমেন্ট নিয়ে পাই, $4 \times AC + 20 \times CO - 28 \times CD = 0$

$\Rightarrow 28 \times CD = 4 \times 11 + 20 \times 2 = 44 + 40 \Rightarrow CD = \frac{88}{28} = 3$

$\therefore$ বালকটি টেবিলের কিনারা থেকে 3 মিটার পর্যন্ত নিরাপদে হেঁটে যেতে পারবে।

1(c) 12 m দীর্ঘ এবং 300 kg ওজনের AB সুষম তক্তার A ও B প্রান্তে দুইটি খুঁটির উপর অনুভূমিকভাবে সুস্থিত রয়েছে। B প্রান্ত থেকে 1 m দূরে কত ওজন ঝুলালে খুঁটি দুইটির উপর চাপের অনুপাত 1 : 2 হবে?



সমাধানঃ মনে করি, তক্তার ওজন এর মধ্যবিন্দু O তে কার্যরত এবং B প্রান্ত থেকে $BC = 1$ m দূরে C বিন্দুতে W kg ওজন ঝুলালে, A ও B বিন্দুতে অবস্থিত খুঁটির উপর চাপ যথাক্রমে P kg-wt ও 2P kg-wt.

তাহলে, $AO = BO = 6\text{ m}$, $OC = (6-1)\text{ m} = 5\text{ m}$.

C বিন্দুর সাপেক্ষে মোমেন্ট নিয়ে পাই, $-P \times AC + 300 \times CO + W \times 0 + 2P \times BC = 0$

$$\Rightarrow -P \times 11 + 300 \times 5 + 2P \times 1 = 0 \Rightarrow 9 \times P = 300 \times 5 \Rightarrow P = \frac{500}{3}$$

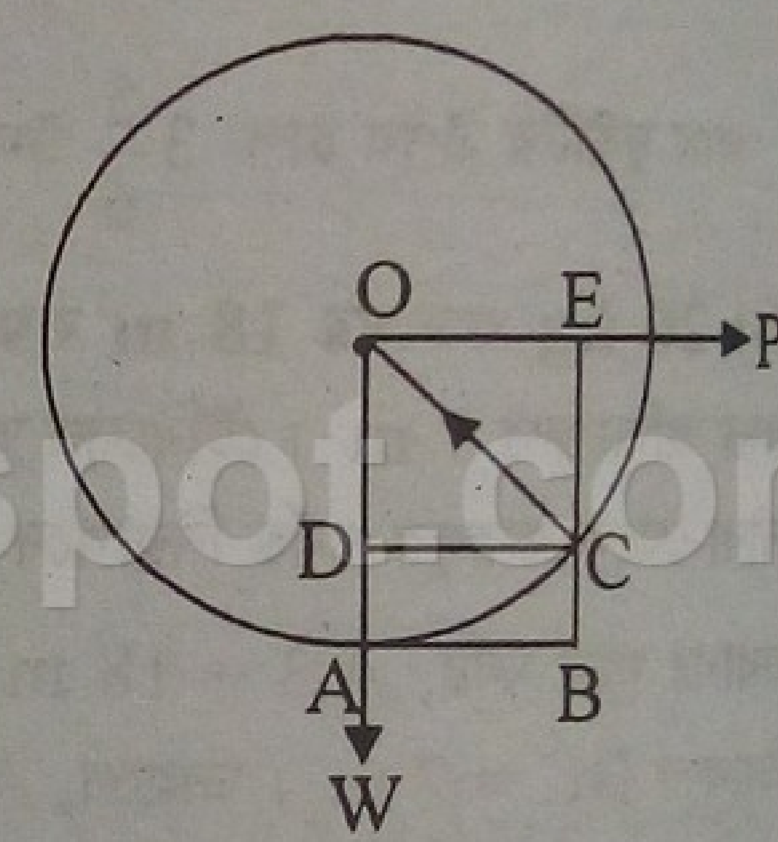
আবার, O বিন্দুর সাপেক্ষে মোমেন্ট নিয়ে পাই, $-P \times AO - W \times CO + 2P \times BO = 0$

$$\Rightarrow -P \times 6 - W \times 5 + 2P \times 6 = 0 \Rightarrow 5 \times W = 6 \times P = 6 \times \frac{500}{3} \Rightarrow W = 200$$

$\therefore$ 200 kg ওজন ঝুলাতে হবে।

1(d) একটি যানবাহনের চাকার ওজন W এবং ব্যাসার্ধ 20 ইঞ্চি ; এর কেন্দ্রে অনুভূমিক ভাবে কমপক্ষে কি পরিমাণ বল প্রয়োগ করলে যানবাহনটি 10 ইঞ্চি উচ্চতা বিশিষ্ট একটি বাধা অতিক্রম করতে সক্ষম হবে? [বুয়েট'০৫-০৬]

সমাধানঃ মনে করি, প্রযুক্ত বলের পরিমাণ P এবং 20 ইঞ্চি ব্যাসার্ধ এবং O কেন্দ্র বিশিষ্ট চাকাটি A বিন্দুতে ভূমি এবং C বিন্দুতে $BC = 10$ ইঞ্চি বাধা স্পর্শ করে। C বিন্দু দিয়ে অঙ্কিত লম্ব চাকার ওজনের ক্রিয়ারেখা OA কে D বিন্দুতে এবং P বলের ক্রিয়ারেখাকে E বিন্দুতে ছেদ করে।



তাহলে, $OA = OC = 20$ ইঞ্চি, $CE = BE - BC = AO - BC$

$= (20-10)$ ইঞ্চি $= 10$ ইঞ্চি।

এবং $CD = \sqrt{CO^2 - DO^2} = \sqrt{20^2 - 10^2}$ ইঞ্চি $= 10\sqrt{3}$ ইঞ্চি

বাধা অতিক্রম করার জন্য C বিন্দুর সাপেক্ষে P এর মোমেন্ট W এর মোমেন্ট অপেক্ষা বৃহত্তর হবে (পরিমাণে)।

$\therefore$ $P \times CE > W \times CD \Rightarrow P \times 10 > W \times 10\sqrt{3} \Rightarrow P > \sqrt{3}\,W$

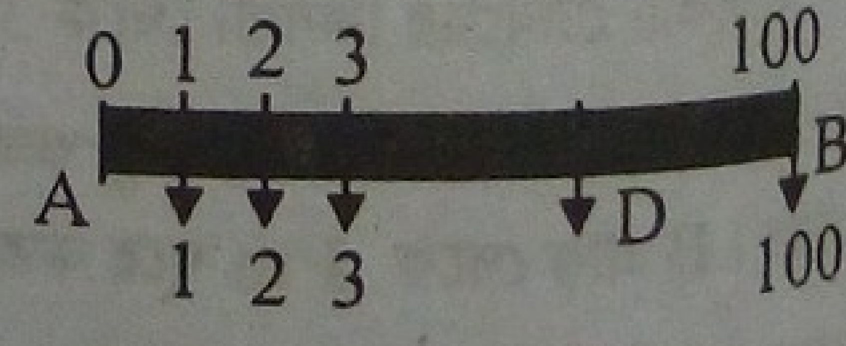
$\therefore$ কমপক্ষে $\sqrt{3}\,W$ বল প্রয়োগ করতে হবে।

1(e) একটি মিটার রুলের 1, 2, 3, ⋯ ⋯, 100 cm. মার্কে যথাক্রমে 1, 2, 3, ⋯ ⋯, 100 একক ওজন খাড়াভাবে ঝুলিয়ে দেয়া হয়েছে। মিটার রুলের ওজন অবজ্ঞা করা হলে কোন্ বিন্দুতে সেটা সুস্থিত থাকবে?

সমাধান ঃ ধরি, মিটার রুলটি AB এবং A প্রান্ত হতে x cm. দূরে D বিন্দুতে মিটার রুলটি সুস্থিত থাকে।

A বিন্দুর চারদিকে ওজন সমূহের মোমেন্ট নিয়ে পাই,

$$1 \times 1 + 2 \times 2 + 3 \times 3 + \cdots \cdots + 100 \times 100 = (1 + 2 + 3 + \cdots \cdots + 100)x$$



$$\Rightarrow 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots \cdots + 100^2 = \frac{100(100+1)}{2}x$$

$$\Rightarrow \frac{100(100+1)(2 \times 100 + 1)}{6} = \frac{100(100+1)}{2}x \Rightarrow x = \frac{201}{3} = 67$$

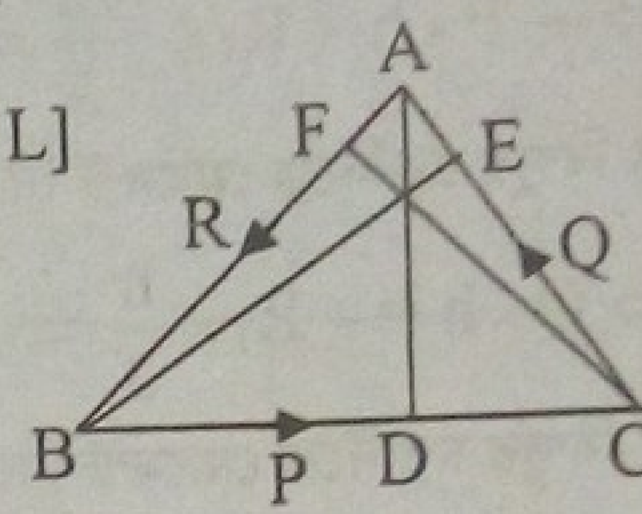
$\therefore$ A প্রান্ত অর্থাৎ ক্ষুদ্রতম ওজন ঝুলানো দিক হতে 67 cm. দূরে মিটার রুলটি সুস্থিত থাকে।

2(a) P , Q , R বলত্রয় যথাক্রমে ABC ত্রিভুজের BC , CA, AB বাহু বরাবর ক্রিয়া করে। যদি A, B, C বিন্দুগুলোর সাপেক্ষে বলগুলোর লব্ধির মোমেন্ট যথাক্রমে L, M, N হয় তবে দেখাও যে,

$P : Q : R = aL : bM : cN$ [চ.'০১,'১৩; রা.'০৪; সি.'০৮; য.'০৯,'১২; দি.'১১; কু.'১২; ব.'১৩]

প্রমাণ ঃ $AD \perp BC$, $BE \perp CA$ এবং $CF \perp AB$ অঙ্কন করি । ABC ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল Δ দ্বারা সূচিত করি।

তাহলে, $\Delta = \frac{1}{2} BC \times AD = \frac{1}{2} a \times AD \Rightarrow AD = \frac{2\Delta}{a}$. অনুরূপ, $BE = \frac{2\Delta}{b}$ এবং $CF = \frac{2\Delta}{c}$



A বিন্দুর চতুর্দিকে মোমেন্ট নিয়ে পাই,

$P \times AD + Q \times 0 + R \times 0 = L$, [$\because$ A বিন্দুর সাপেক্ষে বলগুলোর লব্ধির মোমেন্ট = L]

$\Rightarrow P \times \frac{2\Delta}{a} = L \Rightarrow P = \frac{aL}{2\Delta}$

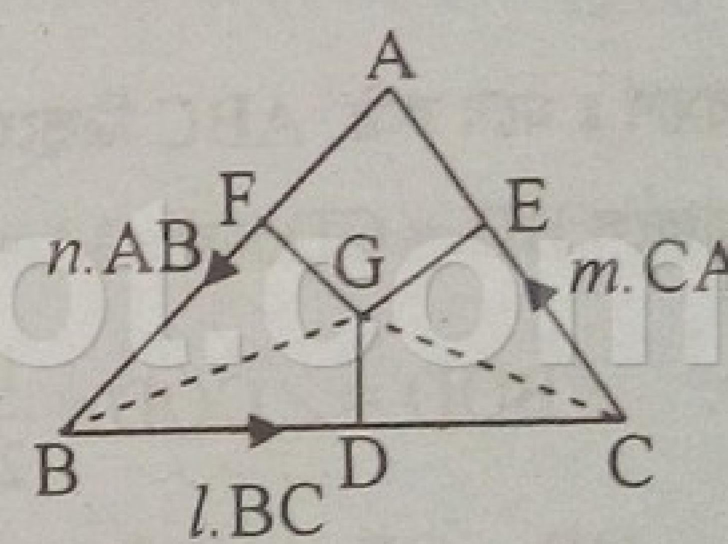
B ও C বিন্দুর সাপেক্ষে মোমেন্ট নিয়ে অনুরূপভাবে পাই, $Q = \frac{bM}{2\Delta}$ এবং $R = \frac{cN}{2\Delta}$

$\therefore P : Q : R = \frac{aL}{2\Delta} : \frac{bM}{2\Delta} : \frac{cN}{2\Delta} = aL : bM : cL$ (Showed)

2(b) ABC ত্রিভুজের BC , CA, AB বাহু বরাবর যথাক্রমে l.BC, m.CA, n. AB বল তিনটি ক্রিয়া করে। $l + m + n = 0$ হলে, প্রমাণ কর যে, এদের লব্ধি ত্রিভুজটির ভরকেন্দ্র দিয়ে যাবে।

[সি.'০৪,'১১; রা.'০২; য.'০৩,'১৩; কু.'০৪; চ.'১১]

প্রমাণ ঃ মনে করি, প্রদত্ত বলগুলোর লব্ধি R এবং ABC ত্রিভুজের ভরকেন্দ্র G । $GD \perp BC$, $GE \perp CA$ এবং $GF \perp AB$ অঙ্কন করি । ABC ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল Δ দ্বারা সূচিত করি। তাহলে,



$\Delta = 3 \Delta GBC = 3 \frac{1}{2} BC \times GD \Rightarrow GD = \frac{2\Delta}{3BC}$.

অনুরূপ, $GE = \frac{2\Delta}{3CA}$ এবং $GF = \frac{2\Delta}{3AB}$

ধরি, G বিন্দু থেকে লব্ধির ক্রিয়ারেখার দূরত্ব = d. তাহলে, G বিন্দুর চতুর্দিকে মোমেন্ট নিয়ে পাই,

$l.BC \times GD + m.CA \times GE + n.AB \times GF = R \times d$

$\Rightarrow l.BC \times \frac{2\Delta}{3BC} + m.CA \times \frac{2\Delta}{3CA} + n.AB \times \frac{2\Delta}{3AB} = R \times d$

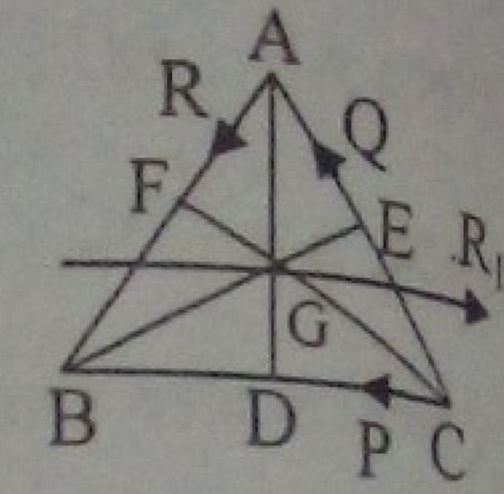
$\Rightarrow R \times d = \frac{2\Delta}{3}(l + m + n) = \frac{2\Delta}{3} \times 0 = 0$, [$\because l + m + n = 0$]

$\Rightarrow R \times d = 0$; কিন্তু বলগুলো ভারসাম্য সৃষ্টি করে না বলে $R \neq 0$ । $\therefore d = 0$ অর্থাৎ লব্ধি ভরকেন্দ্র দিয়ে যায়।

2(c) ABC সমবাহু ত্রিভুজের CB, CA, AB বাহু বরাবর যথাক্রমে P, Q, R বলত্রয় ক্রিয়াশীল । এদের লব্ধি ত্রিভুজটির ভরকেন্দ্রগামী এবং BC বাহুর সমান্তরাল। প্রমাণ কর যে, $\frac{1}{2} P = Q = R$ [ঢা.'০২; চ.'০৯]

প্রমাণ ঃ মনে করি, ABC সমবাহু ত্রিভুজের AD, BE, CF মধ্যমা তিনটি G বিন্দুতে ছেদ করে। তাহলে, $AD \perp BC$, $BE \perp AC$, $CF \perp AB$ এবং $AD = BE = CF = h$ (ধরি)।

$\therefore \quad GD = \frac{1}{3}AD = \frac{h}{3}, AG = \frac{2}{3}AD = \frac{2h}{3}$



ধরি প্রদত্ত বলত্রয়ের লব্ধি R_1, যা BC বাহুর সমান্তরাল।

এখন A বিন্দুর চতুর্দিকে মোমেন্ট নিয়ে পাই, $-P \times AD + Q \times 0 + R \times 0 = R_1 \times AG$

$\Rightarrow -P \times h = R_1 \times \frac{2h}{3} \Rightarrow \frac{P}{2} = -\frac{1}{3}R_1 \cdots\cdots (i)$

B বিন্দুর চতুর্দিকে মোমেন্ট নিয়ে পাই, $P \times 0 + Q \times BE + R \times 0 = -R_1 \times DG$

$\Rightarrow Q \times h = -R_1 \times \frac{h}{3} \Rightarrow Q = -\frac{1}{3}R_1 \cdots\cdots (ii)$

C বিন্দুর চতুর্দিকে মোমেন্ট নিয়ে পাই, $P \times 0 + Q \times 0 + R \times CF = -R_1 \times DG$

$\Rightarrow R \times h = -R_1 \times \frac{h}{3} \Rightarrow R = -\frac{1}{3}R_1 \cdots\cdots (iii)$

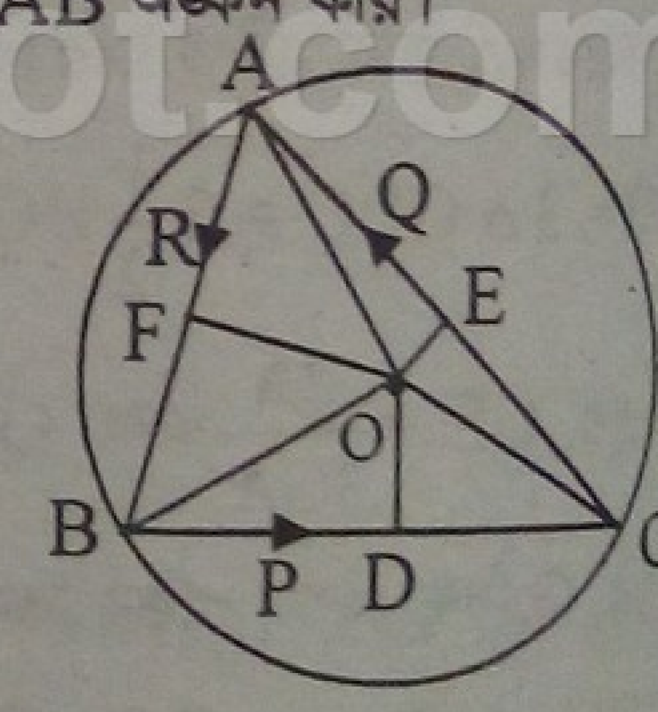
(i), (ii) ও (iii) হতে পাই, $\frac{P}{2} = Q = R$

2(d) P, Q, R বলত্রয় যথাক্রমে ABC ত্রিভুজের BC, CA, AB বাহু বরাবর ক্রিয়া করে। এদের লব্ধি ত্রিভুজটির পরিকেন্দ্র দিয়ে গেলে, প্রমাণ কর যে, P cos A + Q cos B + R cos C = 0

[ঢা.'০০,'১০; কু.'০০; রা.'০৫; ব.'১২]

প্রমাণ : মনে করি, ABC ত্রিভুজের পরিকেন্দ্র O। $OD \perp BC$, $OE \perp AC$ এবং $OF \perp AB$ অঙ্কন করি।

তাহলে $BD = CD$ এবং $OA = OB = OC = r$ (পরিব্যাসার্ধ)



$\therefore \quad \angle BOD = \angle COD = \frac{1}{2}\angle BOC = \frac{1}{2}(2A) = A$

$\therefore \quad OD = OB \cos BOD = r \cos A$. তদ্রূপ, $OE = r \cos B$, $OF = r \cos C$

যেহেতু P, Q, R বলত্রয়ের লব্ধি পরিকেন্দ্রগামী, সুতরাং O এর সাপেক্ষে তাদের মোমেন্টের বীজগণিতীয় সমষ্টি শূন্য।

$\therefore \quad P \times OD + Q \times OE + R \times OF = 0$

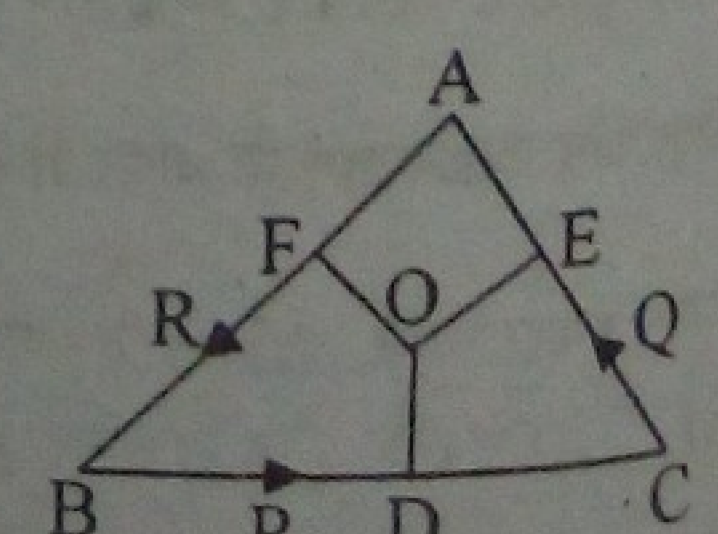
$\Rightarrow P \times r \cos A + Q \times r \cos B + R \times r \cos C = 0$

$\therefore \quad P \cos A + Q \cos B + R \cos C = 0$

2(e) P, Q, R বলত্রয় যথাক্রমে ABC ত্রিভুজের BC, CA, AB বাহু বরাবর ক্রিয়া করে। এদের লব্ধি ত্রিভুজটির অন্তঃকেন্দ্র দিয়ে গেলে, দেখাও যে, P + Q + R = 0

[দি.'১০]

প্রমাণ : মনে করি, ABC ত্রিভুজের অন্তঃকেন্দ্র O. $OD \perp BC$, $OE \perp AC$ এবং $OF \perp AB$ অঙ্কন করি। তাহলে, $OD = OE = OF = r$ (অন্তঃব্যাসার্ধ)

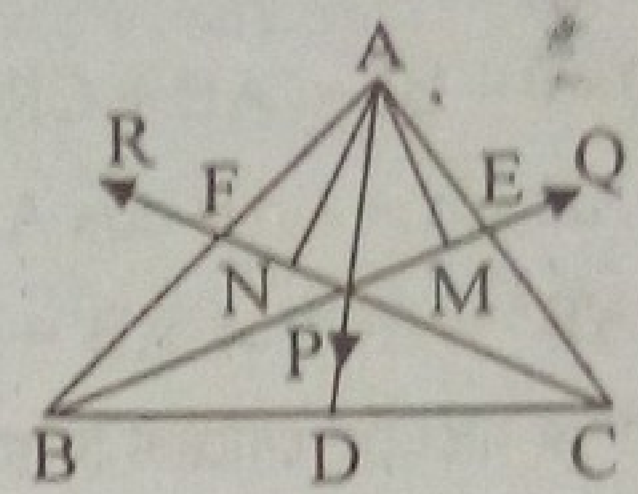


যেহেতু বলত্রয়ের লব্ধি অন্তঃকেন্দ্রগামী, সুতরাং O এর চতুর্দিকে মোমেন্টের বীজগণিতীয় সমষ্টি শূন্য।

$\therefore \quad P \times OD + Q \times OE + R \times OF = 0 \Rightarrow P \times r + Q \times r + R \times r = 0$

$\Rightarrow r\times(P+Q+R)=0$. কিন্তু $r\neq 0$, $\therefore P+Q+R=0$

3(a) কোনো ত্রিভুজের শীর্ষ বিন্দুত্রয় থেকে অঙ্কিত মধ্যমা বরাবর ক্রিয়ারত তিনটি বল সাম্যবস্থা রক্ষা করলে প্রমাণ কর যে, বলগুলোর মান অনুসঙ্গী মধ্যমার দৈর্ঘ্যের সমানুপাতিক। [য.'০২]



প্রমাণ ঃ মনে করি, ABC ত্রিভুজের AD, BE, CF মধ্যমা বরাবর ক্রিয়াশীল যথাক্রমে P, Q, R বল তিনটি সাম্যবস্থা রক্ষা করে অর্থাৎ বলত্রয়ের লব্ধি শূন্য। $AM\perp BE$ এবং $AN\perp CF$ অঙ্কন করি।

A বিন্দুর চতুর্দিকে মোমেন্ট নিয়ে পাই, $P\times 0+Q\times AM-R\times AN=0$

$\Rightarrow Q\times AM=R\times AN\cdots$(i)

যেহেতু প্রত্যেক মধ্যমা ত্রিভুজকে দুইটি সমান ত্রিভুজ-ক্ষেত্রে বিভক্ত করে,

$$\therefore\ \Delta ABE=\frac{1}{2}\Delta ABC=\Delta ACF\Rightarrow \Delta ABE=\Delta ACF$$

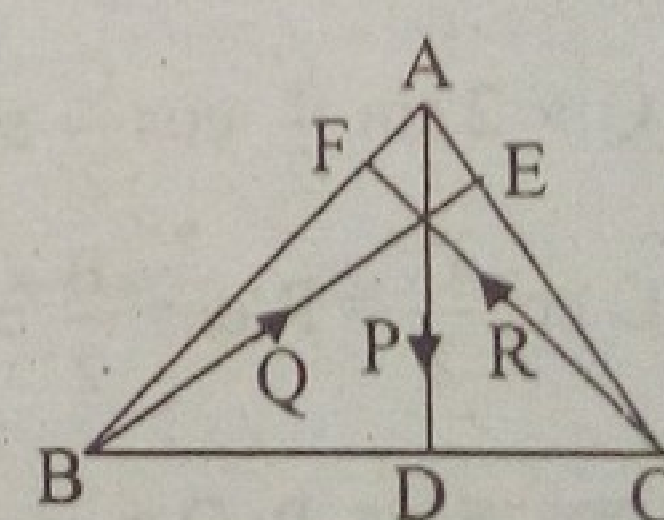
$$\Rightarrow \frac{1}{2}BE\times AM=\frac{1}{2}CF\times AN\Rightarrow BE\times AM=CF\times AN\cdots \text{(ii)}$$

$$\text{(i)}\div\text{(ii)}\Rightarrow \frac{Q}{BE}=\frac{R}{CF}$$

B বিন্দুর সাপেক্ষে মোমেন্ট নিয়ে অনুরূপভাবে পাই, $\frac{P}{AD}=\frac{R}{CF}$ $\therefore \frac{P}{AD}=\frac{Q}{BE}=\frac{R}{CF}$ অর্থাৎ বলগুলোর মান অনুসঙ্গী মধ্যমার দৈর্ঘ্যের সমানুপাতিক।

3(b) ABC ত্রিভুজের A, B, C কৌণিক বিন্দু হতে যথাক্রমে বিপরীত বাহুর উপর লম্ব বরাবর ক্রিয়ারত P, Q, R বলত্রয় সাম্যাবস্থায় থাকলে, প্রমাণ কর যে, $P:Q:R=a:b:c$ [ঢা.'০০; রা.'০১; ব.'০৮]

$$P:Q:R=\sin A:\sin B:\sin C$$



প্রমাণ ঃ মনে করি, ABC ত্রিভুজের A, B, C কৌণিক বিন্দু হতে যথাক্রমে বিপরীত বাহুর উপর অঙ্কিত লম্ব AD, BE , CF বরাবর ক্রিয়ারত P, Q, R বলত্রয় সাম্যাবস্থা সৃষ্টি করে। তাহলে বলগুলোর সমতলস্থ যেকোনো বিন্দুর চতুর্দিকে বলত্রয়ের মোমেন্টের বীজগণিতীয় সমষ্টি শূন্য হবে।

এখন A বিন্দুর সাপেক্ষে মোমেন্ট নিয়ে পাই,

$P\times 0-Q\times AE+R\times AF=0\Rightarrow Q\times AE=R\times AF$

$\Rightarrow Q\times AB\cos A=R\times AC\cos A\Rightarrow Q\times c=R\times b\Rightarrow Q:R=b:c\cdots$ (i)

B বিন্দুর সাপেক্ষে মোমেন্ট নিয়ে অনুরূপভাবে পাই, $P:R=a:c\cdots\cdots$ (ii)

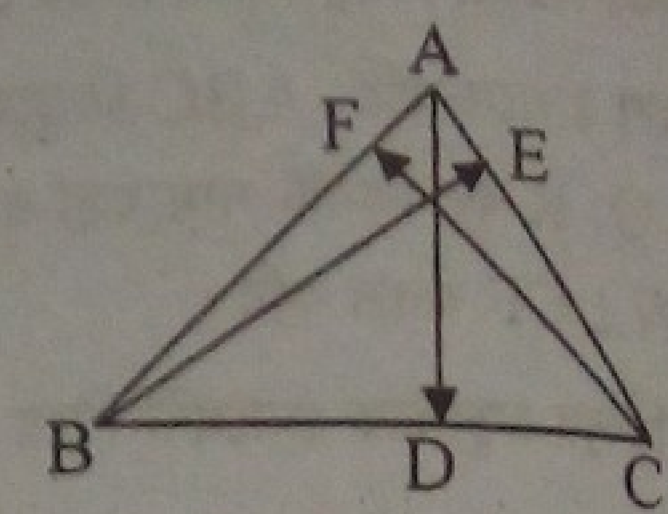
$\therefore$ (i) ও (ii) হতে পাই, $P:Q:R=a:b:c\cdots\cdots$(iii) (Proved)

(iii) হতে পাই, $P:Q:R=2r\sin A:2r\sin B:2r\sin C$, যেখানে ABC ত্রিভুজের পরিব্যাসার্ধ r ।

$\therefore P:Q:R=\sin A:\sin B:\sin C$ (Proved)

3(c) তিনটি বল ABC ত্রিভুজের কৌণিক বিন্দু হতে বিপরীত বাহুর উপর অঙ্কিত লম্ব দ্বারা সূচিত এবং প্রত্যেক কৌণিক বিন্দুর চতুর্দিকে বলত্রয়ের মোমেন্টের সমষ্টি পৃথকভাবে শূন্য । দেখাও যে, ত্রিভুজটি সমবাহু। [কু.'০১]

প্রমাণ ঃ মনে করি, ABC ত্রিভুজের A, B, C কৌণিক বিন্দু হতে যথাক্রমে বিপরীত বাহুর উপর অঙ্কিত লম্ব AD, BE, CF দ্বারা সূচিত তিনটি বল। তাহলে A, B, C প্রত্যেক বিন্দুর সাপেক্ষে বলত্রয়ের মোমেন্টের বীজগণিতীয় সমষ্টি পৃথকভাবে শূন্য।



$\therefore$ A বিন্দুর সাপেক্ষে মোমেন্ট নিয়ে পাই,

$AD \times 0 - BE \times AE + CR \times AF = 0 \Rightarrow BE \times AE = CF \times AF$

$\Rightarrow AB \sin A \times AB \cos A = AC \sin A \times AC \cos A$

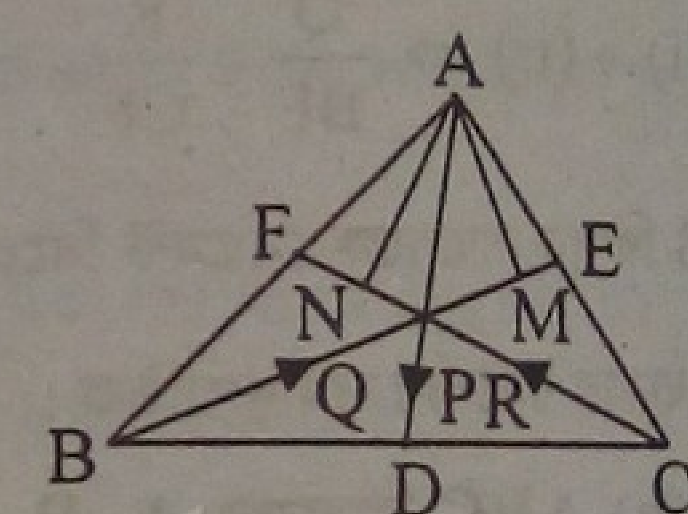
$\Rightarrow AB^2 = AC^2 \Rightarrow AB = AC$

B বিন্দুর সাপেক্ষে মোমেন্ট নিয়ে অনুরূপভাবে পাই, $AB = BC$

$\therefore AB = BC = CA$ অর্থাৎ ΔABC সমবাহু।

3(d) ABC ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দুগুলোতে কোণের সমদ্বিখণ্ডক বরাবর কার্যরত যথাক্রমে P, Q, R সাম্যাবস্থা সৃষ্টি করে। প্রমাণ কর যে, $P : Q : R = \cos\frac{A}{2} : \cos\frac{B}{2} : \cos\frac{C}{2}$

প্রমাণ ঃ মনে করি, A, B, C কোণের সমদ্বিখণ্ডক AD, BE, CF বরাবর ক্রিয়ারত যথাক্রমে P, Q, R বলত্রয় সাম্যাবস্থা সৃষ্টি করে। তাহলে বলগুলোর সমতলস্থ যেকোন বিন্দুর সাপেক্ষে বলত্রয়ের মোমেন্টের বীজগণিতীয় সমষ্টি শূন্য হবে। A বিন্দুর সাপেক্ষে মোমেন্ট নিয়ে পাই,



$P \times 0 + Q \times AM - R \times AN = 0$, যখন $AM \perp BE$, $AN \perp CF$.

$\Rightarrow Q \times AB \sin\frac{B}{2} = R \times AC \sin\frac{C}{2}$

$\Rightarrow Q \times 2r \sin C \sin\frac{B}{2} = R \times 2r \sin B \sin\frac{C}{2}$, যেখানে ABC ত্রিভুজের পরিব্যাসার্ধ r।

$\Rightarrow Q \times 2 \sin\frac{C}{2} \cos\frac{C}{2} \sin\frac{B}{2} = R \times 2 \sin\frac{B}{2} \cos\frac{B}{2} \sin\frac{C}{2}$

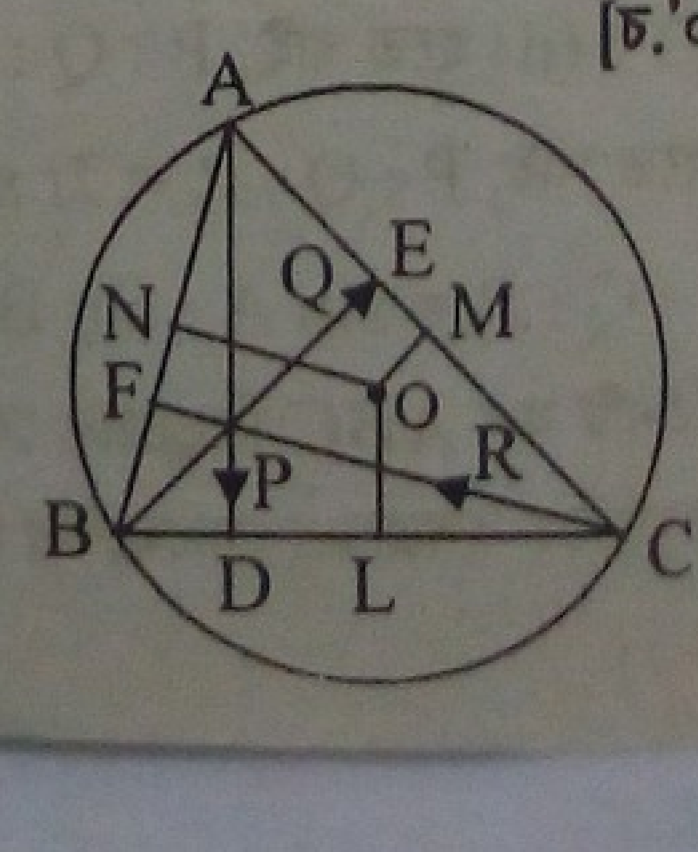
$\Rightarrow Q \cos\frac{C}{2} = R \cos\frac{B}{2} \Rightarrow Q : R = \cos\frac{B}{2} : \cos\frac{C}{2}$

তদ্রূপ দেখানো যায়, $P : Q = \cos\frac{A}{2} : \cos\frac{B}{2}$ $\therefore P : Q : R = \cos\frac{A}{2} : \cos\frac{B}{2} : \cos\frac{C}{2}$

3(e) ABC ত্রিভুজের A, B, C কৌণিক বিন্দু হতে যথাক্রমে বিপরীত বাহুর উপর লম্ব বরাবর P, Q, R ক্রিয়ারত। এদের লব্ধি ত্রিভুজের পরিকেন্দ্রগামী হলে দেখাও যে, $P(b\cos C - c\cos B) + Q(c\cos A - A\cos C) + R(a\cos B - b\cos A) = 0$

[চ.'০২]

প্রমাণ ঃ মনে করি, ABC ত্রিভুজের পরিকেন্দ্র O। $AD \perp BC$, $BE \perp AC$, $CF \perp AB$, $OL \perp BC$, $OM \perp AC$, এবং $ON \perp AB$ অঙ্কন করি। তাহলে, P, Q, R বলত্রয় যথাক্রমে AD, BE, CF বরাবর ক্রিয়াশীল।



এখন $2DL = DL + DL = BL - BD + CD - CL$

$= CD - BD$, [এখানে, $BL = CL$]

$\Rightarrow 2DL = AC \cos C - AB \cos B = b \cos C - c \cos B$

অদ্রূপ, $2ME = CE - AE = a \cos C - c \cos A$, $2\,FN = AF - BF = b \cos A - a \cos B$

যেহেতু বলত্রয়ের লব্ধি পরিকেন্দ্রগামী, সুতরাং O এর সাপেক্ষে তাদের মোমেন্টের বীজগণিতীয় সমষ্টি শূন্য।

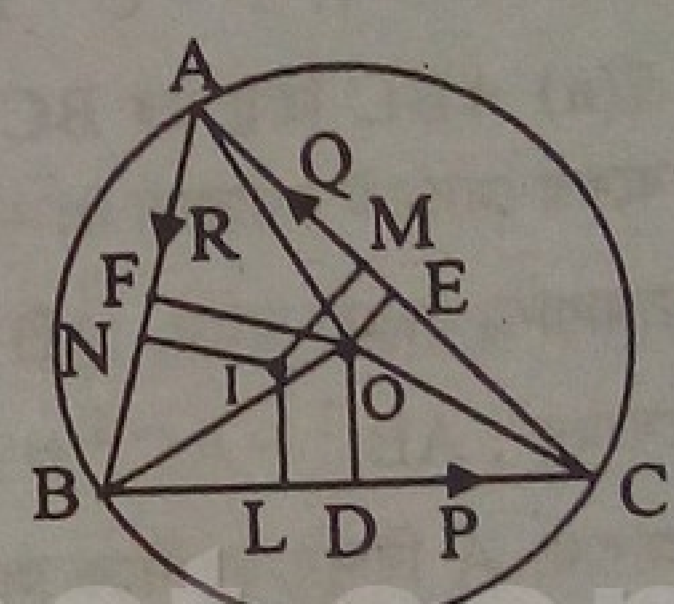
$\therefore\ P \times DL - Q \times ME - R \times FN = 0$

$\Rightarrow P \times \frac{1}{2}(b \cos C - c \cos B) - Q \times \frac{1}{2}(a \cos C - c \cos A) - R \times \frac{1}{2}(b \cos A - a \cos B) = 0$

$\Rightarrow P(b \cos C - c \cos B) + Q(c \cos A - A \cos C) + R(a \cos B - b \cos A) = 0$

4(a) P , Q , R বলত্রয় যথাক্রমে ABC ত্রিভুজের BC , CA, AB বাহু বরাবর ক্রিয়া করে। যদি তাদের লব্ধির ক্রিয়ারেখা অন্তঃকেন্দ্র ও পরিকেন্দ্র দিয়ে যায়, তবে প্রমাণ কর যে,

$$\frac{P}{\cos B - \cos C} = \frac{Q}{\cos C - \cos A} = \frac{P}{\cos A - \cos B}$$ **[য.'০৯]**



প্রমাণ : মনে করি, ABC ত্রিভুজের অন্তঃকেন্দ্র ও পরিকেন্দ্র যথাক্রমে I ও O. $IL \perp BC$, $IM \perp AC$, $IN \perp AB$, $OD \perp BC$, $OE \perp AC$ ও $OF \perp AB$ অঙ্কন করি। তাহলে, $IL = IM = IN = r_1$ (অন্তঃব্যাসার্ধ), $BD = CD$ এবং $OA = OB = OC = r$ (পরিব্যাসার্ধ)

$\therefore\ \angle BOD = \angle COD = \frac{1}{2}\angle BOC = \frac{1}{2}(2A) = A$

$\therefore\ OD = OB \cos BOD = r \cos A$. অদ্রূপ, $OE = r \cos B$, $OF = r \cos C$

যেহেতু বলত্রয়ের লব্ধির ক্রিয়ারেখা অন্তঃকেন্দ্র দিয়ে যায়, সুতরাং I এর সাপেক্ষে বলগুলোর মোমেন্টের নিয়ে পাই,

$P \times OL + Q \times OM + R \times ON = 0 \Rightarrow P \times r_1 + Q \times r_1 + R \times r_1 = 0 \Rightarrow r_1 \times (P + Q + R) = 0$.

কিন্তু $r_1 \neq 0$. $\therefore\ P + Q + R = 0 \cdots\cdots$ (i)

যেহেতু বলত্রয়ের লব্ধির ক্রিয়ারেখা পরিকেন্দ্র দিয়ে যায়, সুতরাং O এর সাপেক্ষে বলগুলোর মোমেন্ট নিয়ে পাই,

$P \times OD + Q \times OE + R \times OF = 0 \Rightarrow P \times r \cos A + Q \times r \cos B + R \times r \cos C = 0$

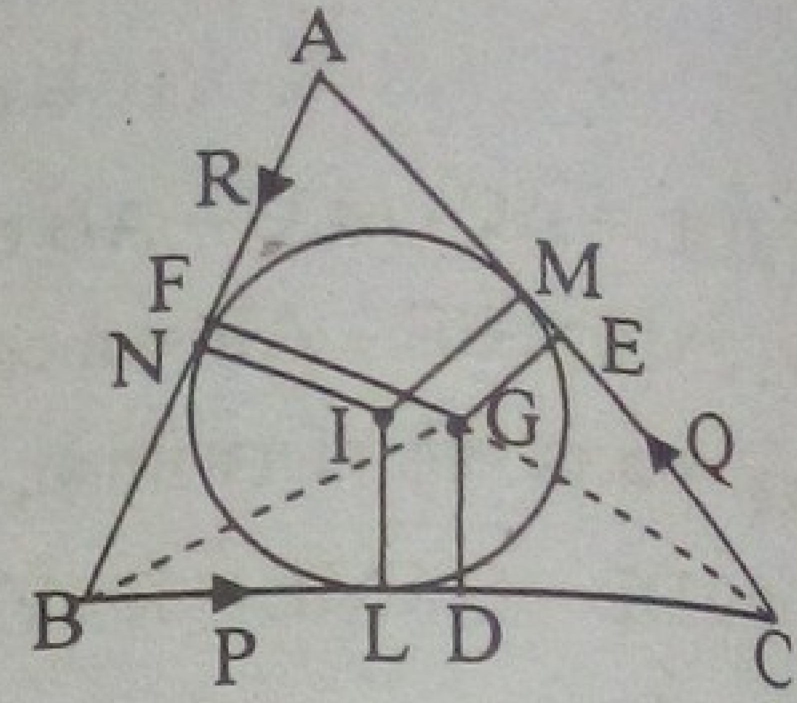
$\therefore\ P \cos A + Q \cos B + R \cos C = 0 \cdots\cdots$ (ii)

(i) ও (ii) বজ্রগুণন করে পাই, $\frac{P}{\cos B - \cos C} = \frac{Q}{\cos C - \cos A} = \frac{R}{\cos A - \cos B}$ (Proved)

4(b) P , Q , R বলত্রয় যথাক্রমে ABC ত্রিভুজের BC , CA, AB বাহু বরাবর ক্রিয়া করে। এদের লব্ধি ত্রিভুজটির ভরকেন্দ্র এবং অন্তঃকেন্দ্রগামী হলে, প্রমাণ কর যে, $\frac{P}{a(b-c)} = \frac{Q}{b(c-a)} = \frac{R}{c(a-b)}$ **[য.'০৪]**

প্রমাণ : মনে করি, ABC ত্রিভুজের ভরকেন্দ্র ও অন্তঃকেন্দ্র যথাক্রমে G ও I . $GD \perp BC$, $GE \perp AC$, $GF \perp AB$, $IL \perp BC$, $IM \perp AC$ ও $IN \perp AB$ অঙ্কন করি। তাহলে, $IL = IM = IN = r$ (অন্তঃব্যাসার্ধ)

ABC ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল Δ দ্বারা সূচিত করলে,



$$\Delta = 3\,\Delta GBC = 3\,\frac{1}{2} BC \times GD = \frac{3}{2} a \times GD \Rightarrow GD = \frac{2\Delta}{3a}.$$

অনুরূপ, $GE = \dfrac{2\Delta}{3b}$ এবং $GF = \dfrac{2\Delta}{3c}$

যেহেতু বলত্রয়ের লব্ধির ক্রিয়ারেখা ভরকেন্দ্র দিয়ে যায়, সুতরাং G বিন্দুর চতুর্দিকে বলগুলোর মোমেন্ট নিয়ে পাই,

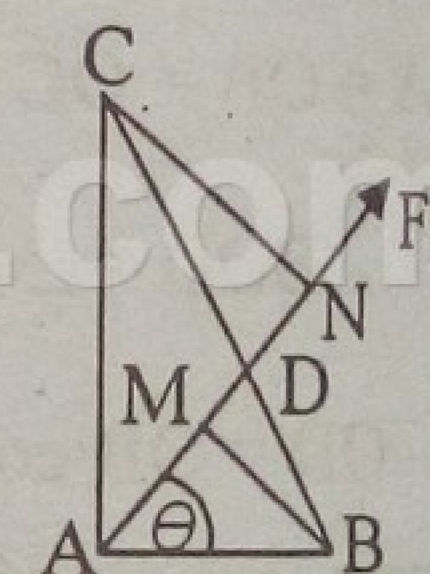
$$P \times GD + Q \times GE + R \times GF = 0 \Rightarrow P \times \frac{2\Delta}{3a} + Q \times \frac{2\Delta}{3b} + R \times \frac{2\Delta}{3c} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{P}{a} + \frac{Q}{b} + \frac{R}{c} = 0 \;\therefore\; bcP + caQ + abR = 0 \cdots (i)$$

আবার, যেহেতু বলত্রয়ের লব্ধির ক্রিয়ারেখা অন্তঃকেন্দ্র দিয়ে যায়, সুতরাং I এর সাপেক্ষে বলগুলোর মোমেন্ট নিয়ে পাই,
$P \times OL + Q \times OM + R \times ON = 0 \Rightarrow P \times r + Q \times r + R \times r = 0 \Rightarrow r \times (P + Q + R) = 0$.
কিন্তু $r \neq 0$. $\therefore\; P + Q + R = 0 \cdots \cdots (ii)$

5(a) ABC ত্রিভুজের BC , CA, AB বাহুর দৈর্ঘ্য যথাক্রমে 13, 12, 5 একক। A, B, C বিন্দুর সাপেক্ষে F বলের মোমেন্ট যথাক্রমে 0, –25, 144 একক হলে, F বলের মান ও দিক নির্ণয় কর। [কু.'০০,'১৩;চ.'০৪]

সমাধানঃ দেওয়া আছে, AB = 5 একক, BC = 13 একক এবং AC = 12 একক।



যেহেতু, $AB^2 + AC^2 = 5^2 + 12^2 = 13^2 = BC^2 \;\therefore\; \angle BAC = 90°$.

আবার, A বিন্দুর চতুর্দিকে অশূন্য F বলের মোমেন্ট 0 এবং B ও C বিন্দুর চতুর্দিকে বলটির মোমেন্ট বিপরীত চিহ্ন হওয়ায় F বলটি A বিন্দুগামী এবং তার ক্রিয়ারেখার বিপরীত দিকে B ও C বিন্দু থাকবে। ধরি, বলটির ক্রিয়ারেখা BC কে D বিন্দুতে ছেদ করে এবং $\angle BAD = \theta$
B ও C থেকে F বলের ক্রিয়ারেখার উপর BM ও CN লম্ব অঙ্কন করি।

তাহলে, $BM = AB \sin\theta = 5 \sin\theta$ এবং $CN = AC \sin(90° - \theta) = 12 \cos\theta$

এখন, B বিন্দুর চতুর্দিকে F বলের মোমেন্ট $= -F \times BM$ এবং C বিন্দুর চতুর্দিকে F বলের মোমেন্ট $= F \times CN$

প্রশ্নমতে, $-F \times BM = -25 \Rightarrow F \times 5 \sin\theta = 25 \Rightarrow F \sin\theta = 5 \cdots \cdots (i)$ এবং

$F \times CN = 144 \Rightarrow F \times 12 \cos\theta = 144 \Rightarrow F \cos\theta = 12 \cdots \cdots (ii)$

$(i)^2 + (ii)^2 \Rightarrow F^2 = 5^2 + 12^2 = 13^2 \Rightarrow F = 13$

$$(i) \div (ii) \Rightarrow \tan\theta = \frac{5}{12} = \frac{AB}{AC} = \tan ACB \Rightarrow \theta = \angle ACB = 90° - \angle ABC$$

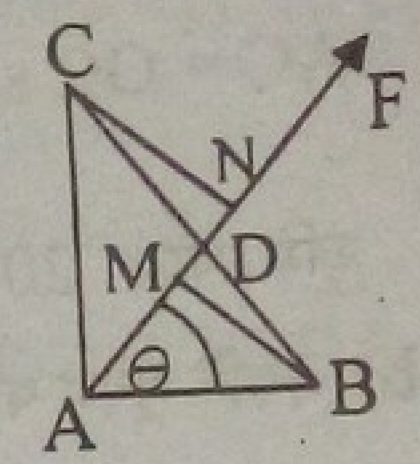
$\Rightarrow \angle BAD + \angle ABD = 90° \;\therefore\; \angle ADB = 90°$ অর্থাৎ $AD \perp BC$

$\therefore$ F বলের মান 13 একক এবং তার ক্রিয়ারেখা BC এর উপর লম্ব।

5(b) ABC ত্রিভুজের BC, CA, AB বাহুর দৈর্ঘ্য যথাক্রমে 5, 4, 3 একক। A, B, C বিন্দুর চতুর্দিকে কোন একটি বল F এর মোমেন্ট যথাক্রমে 0, – 12, 16 একক হলে, F এর মান, দিক ও ক্রিয়ারেখা নির্ণয় কর। [রা.'০৩,'০৫]

সমাধানঃ দেওয়া আছে, AB = 3 একক, BC = 5 একক এবং AC = 4 একক।

যেহেতু, $AB^2 + AC^2 = 3^2 + 4^2 = 5^2 = BC^2$ $\therefore \angle BAC = 90°$.



আবার, A বিন্দুর চতুর্দিকে অশূন্য F বলের মোমেন্ট 0 এবং B ও C বিন্দুর চতুর্দিকে বলটির মোমেন্ট বিপরীত চিহ্ন হওয়ায় F বলটি A বিন্দুগামী এবং তার ক্রিয়ারেখার বিপরীত দিকে B ও C বিন্দু থাকবে। ধরি, বলটির ক্রিয়ারেখা BC কে D বিন্দুতে ছেদ করে এবং $\angle BAD = \theta$ B ও C থেকে F বলের ক্রিয়ারেখার উপর BM ও CN লম্ব অঙ্কন করি।

তাহলে, $BM = AB \sin\theta = 3\sin\theta$ এবং $CN = AC\sin(90° - \theta) = 4\cos\theta$

এখন, B বিন্দুর চতুর্দিকে F বলের মোমেন্ট $= -F \times BM$ এবং C বিন্দুর চতুর্দিকে F বলের মোমেন্ট $= F \times CN$

প্রশ্নমতে, $-F \times BM = -12 \Rightarrow F \times 3\sin\theta = 12 \Rightarrow F\sin\theta = 4 \cdots\cdots$(i) এবং

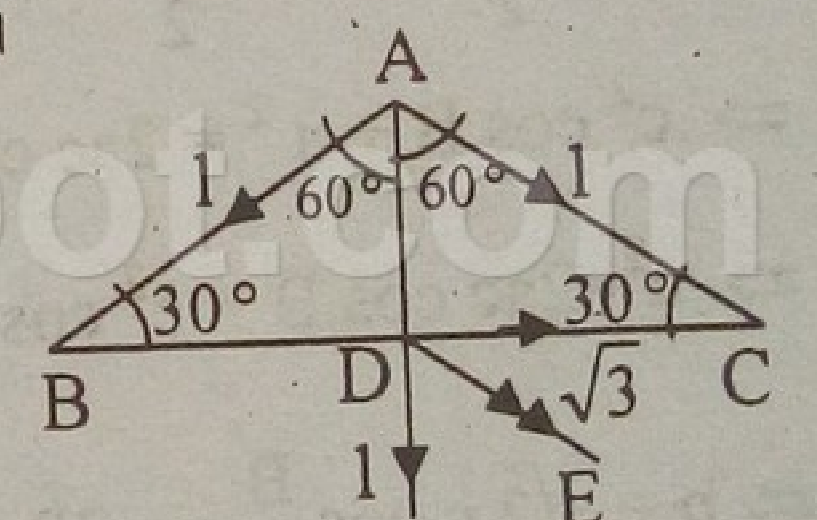
$F \times CN = 16 \Rightarrow F \times 4\cos\theta = 16 \Rightarrow F\cos\theta = 4 \cdots\cdots$ (ii)

$(i)^2 + (ii)^2 \Rightarrow F^2 = 4^2 + 4^2 = 32 \Rightarrow F = 4\sqrt{2}$

$$(i) \div (ii) \Rightarrow \tan\theta = \frac{4}{4} = 1 = \tan 45° \Rightarrow \theta = 45°$$

$\therefore$ F বলের মান $4\sqrt{2}$ একক এবং তার ক্রিয়ারেখা AB এর সাথে $45°$ কোণ উৎপন্ন করে।

6. ABC সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের $\angle A = 120°$ এবং AB, AC ও BC বরাবর $1, 1, \sqrt{3}$ kg ওজনের বলত্রয় কার্যরত। দেখাও যে, এদের লব্ধি BC কে সমদ্বিখন্ডিত করে এবং AC এর সমান্তরাল।



প্রমাণ : A বিন্দুতে $120°$ কোণে AB ও AC বরাবর ক্রিয়াশীল 1 ও 1 কেজি ওজনের সমান বলদ্বয়ের লব্ধি $= \sqrt{1^2 + 1^2 + 2 \times 1 \times 1 \cos 120^0} = \sqrt{1+1-1}$ $= 1$ kg-wt, যা $\angle A = 120°$ কোণেরসমদ্বিখন্ডক AD বরাবর ক্রিয়াশীল।

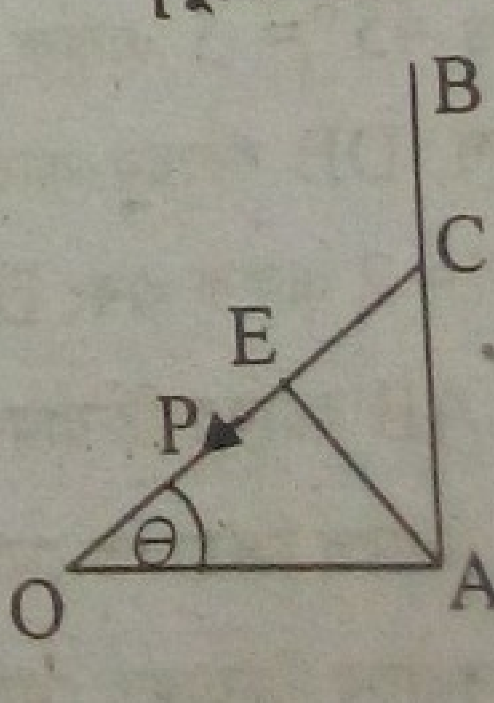
$\therefore \angle BAD = \angle CAD = 60°$.

আবার, $\angle ABD = \angle ACD = 30°$. $\therefore \angle ADB = 90°$ অর্থাৎ $AD \perp BC$

এখন D বিন্দুতে সমকোণে AD ও DC বরাবর কার্যরত 1 ও $\sqrt{3}$ কেজি ওজনের বলদ্বয়ের লব্ধি BC এর সাথে θ কোণে DE বরাবর ক্রিয়াশীল হলে, $\tan\theta = \dfrac{1 \times \sin 90^0}{\sqrt{3} + 1 \times \cos 90^0} = \dfrac{1}{\sqrt{3}} = \tan 30° \Rightarrow \angle CDE = \theta = 30°$.

$\therefore DE \| AC$. সুতরাং বলত্রয়ের লব্ধি BC কে সমদ্বিখন্ডিত করে এবং AC এর সমান্তরাল।

7(a) 40 m দীর্ঘ একটি রশির এক প্রান্ত একটি উল্লম্ব খুঁটির কোন্ স্থানে বাঁধলে অপর প্রান্তে ন্যূনতম বল দ্বারা টেনে খুঁটিকে সহজে উল্টে ফেলা যাবে। [বুয়েট'০৬-০৭]



সমাধানঃ ধরি, AB খুঁটির C বিন্দুতে রশি বেঁধে এর অপর প্রান্ত O বিন্দুতে একটি লোক P বল প্রয়োগ করে খুঁটি উল্টে ফেলার চেষ্টা করছে। ধরি, $\angle AOC = \theta$ এবং $AE \perp OC$।

A বিন্দুর চতুর্দিকে P এর মোমেন্ট যত বেশি হবে খুঁটিও তত সহজে উল্টে পড়বে।

এখন A বিন্দুর চতুর্দিকে মোমেন্ট $= P \times AE = P \times OA \sin\theta = P \times OC\cos\theta\sin\theta$

$= \dfrac{1}{2} P \times OC \sin 2\theta$ এর মান বেশি হবে যখন

$$\sin 2\theta = 1 = \sin 90° \Rightarrow 2\theta = 90° \Rightarrow \theta = 45°$$

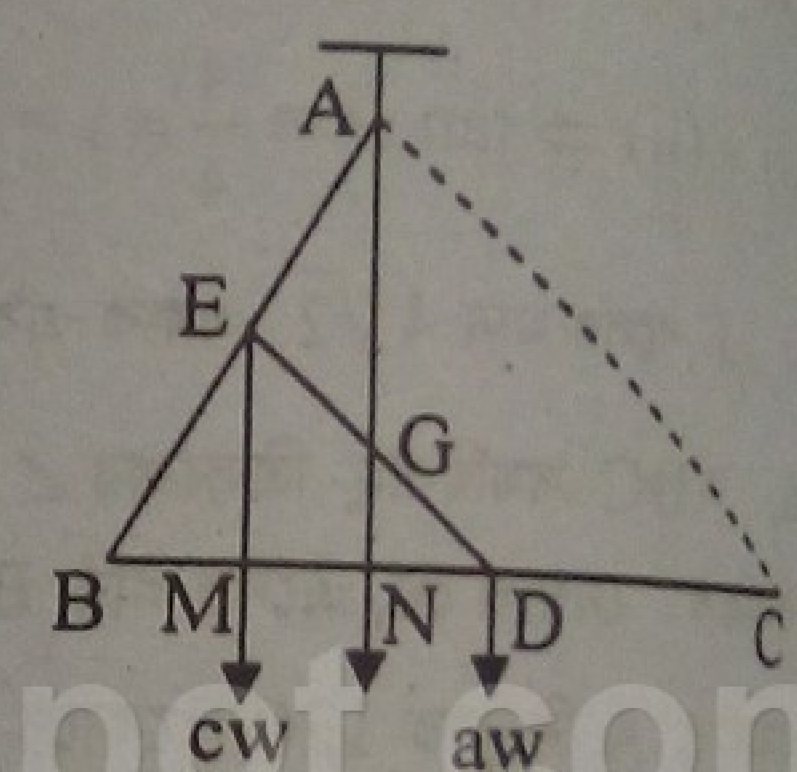
$\therefore$ $AC = OC \sin 45° = 40 \times \frac{1}{\sqrt{2}} m = 20\sqrt{2}$ m

$\therefore$ ভূমি থেকে $20\sqrt{2}$ m উপরে রশিটি বাঁধতে হবে।

7(b) একটি সুষম ধাতব দন্ড দ্বারা গঠিত ABC ত্রিভুজের CA বাহুকে অপসারণ করে A বিন্দুতে ঝুলান হলে স্থিরাবস্থায় BC বাহু ভূ-সমান্তরাল থাকে। প্রমাণ কর যে, $\sin C = \sqrt{2} \sin \frac{B}{2}$ [কুয়েট'০৩-০৪]

প্রমাণ ঃ মনে করি, AB ও BC বাহুর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে E ও D এবং $AN \perp BC$. AN ও DE পরস্পরকে G বিন্দুতে ছেদ করে। দন্ডের প্রতি একক দৈর্ঘ্যের ওজন w হলে D ও E তে কার্যরত aw ও cw ওজনদ্বয়ের লব্ধি $(a + c)w$, যা G বিন্দুতে AN বরাবর ক্রিয়াশীল হবে।

এখন B বিন্দুর চতুর্দিকে মোমেন্ট নিয়ে পাই,



$$-cw \times BM - aw \times BD = -(a + c)w \times BN$$

$$\Rightarrow c \times BE \cos B + a \times \frac{a}{2} = (a + c) \times AB \cos B$$

$$\Rightarrow c \times \frac{c}{2} \cos B + \frac{a^2}{2} = (a + c) \times c \cos B$$

$$\Rightarrow c^2 \cos B + a^2 = 2ac \cos B + 2c^2 \cos B$$

$$\Rightarrow a^2 = 2ac \cos B + c^2 \cos B = a^2 + c^2 - b^2 + c^2 \cos B \Rightarrow b^2 = c^2 (1 + \cos B) = c^2 \times 2 \cos^2 \frac{B}{2}$$

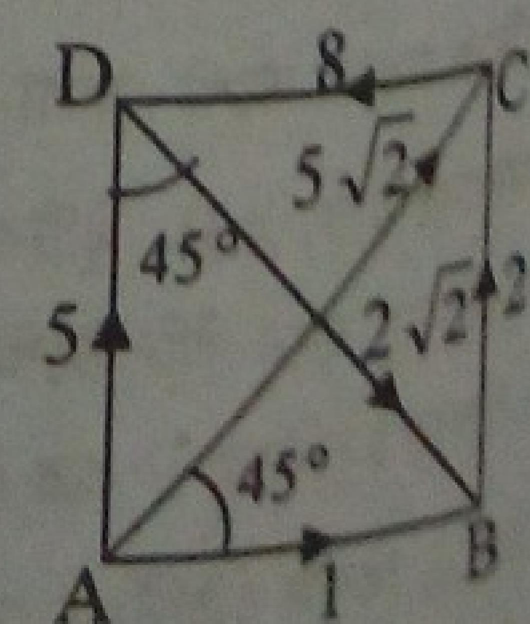
$\Rightarrow b = \sqrt{2}\, c \cos \frac{B}{2} \Rightarrow 2R \sin B = \sqrt{2} \times 2R \sin C \cos \frac{B}{2}$, যেখানে R , ABC ত্রিভুজের পরিব্যাসার্ধ।

$$\Rightarrow 2 \sin \frac{B}{2} \cos \frac{B}{2} = \sqrt{2} \sin C \cos \frac{B}{2} \Rightarrow \sin C = \sqrt{2} \sin \frac{B}{2} \text{ (Proved)}$$

প্রশ্নমালা VIII E

1(a) ABCD বর্গের প্রতি বাহুর দৈর্ঘ্য 10 cm। 1, 2, 8, 5, $5\sqrt{2}$ এবং $2\sqrt{2}$ এককের বলগুলো যথাক্রমে AB, BC, CD, DA, AC এবং DB বরাবর ক্রিয়া করে। এ বলগুলো দ্বারা গঠিত যুগলের মোমেন্ট নির্ণয় কর। [কু.'০৮]

সমাধান ঃ AC বরাবর কার্যরত $5\sqrt{2}$ একক বলটির AB বরাবর লম্বাংশ = $5\sqrt{2}$ $\cos 45° = 5$ একক এবং AD বরাবর লম্বাংশ = $5\sqrt{2} \sin 45° = 5$ একক।



অনুরূপ, DB বরাবর কার্যরত $2\sqrt{2}$ একক বলটির DA বরাবর লম্বাংশ = $2\sqrt{2}$ cos $45° = 2$ একক এবং DC বরাবর লম্বাংশ = $2\sqrt{2} \sin 45° = 2$ একক।

$\therefore$ AB বরাবর ক্রিয়ারত মোট বলের পরিমাণ = $(1 + 5) = 6$ একক।

DA বরাবর ক্রিয়ারত মোট বলের পরিমাণ = $(-5 + 5 + 2) = 2$ একক।

CD বরাবর ক্রিয়ারত মোট বলের পরিমাণ = $(8 - 2) = 6$ একক।