$$\sin 2\theta = 1 = \sin 90° \Rightarrow 2\theta = 90° \Rightarrow \theta = 45°$$

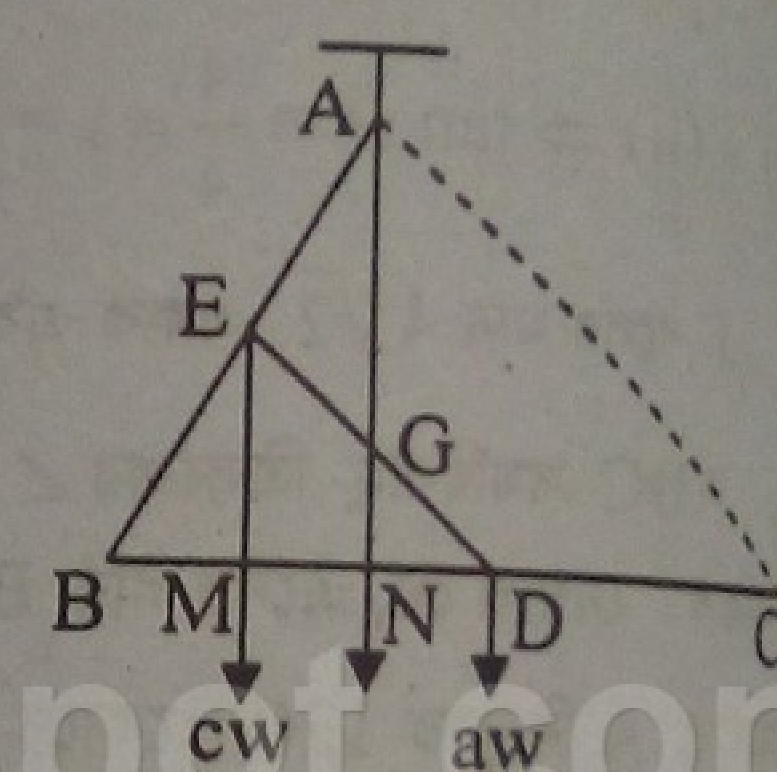
$\therefore$ $AC = OC \sin 45° = 40 \times \frac{1}{\sqrt{2}} m = 20\sqrt{2}$ m

$\therefore$ ভূমি থেকে $20\sqrt{2}$ m উপরে রশিটি বাঁধতে হবে।

7(b) একটি সুষম ধাতব দন্ড দ্বারা গঠিত ABC ত্রিভুজের CA বাহুকে অপসারণ করে A বিন্দুতে ঝুলান হলে স্থিরাবস্থায় BC বাহু ভূ-সমান্তরাল থাকে। প্রমাণ কর যে, $\sin C = \sqrt{2} \sin \frac{B}{2}$ [কুয়েট'০৩-০৪]

প্রমাণ ঃ মনে করি, AB ও BC বাহুর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে E ও D এবং $AN \perp BC$. AN ও DE পরস্পরকে G বিন্দুতে ছেদ করে। দন্ডের প্রতি একক দৈর্ঘ্যের ওজন w হলে D ও E তে কার্যরত aw ও cw ওজনদ্বয়ের লব্ধি $(a + c)w$, যা G বিন্দুতে AN বরাবর ক্রিয়াশীল হবে।

এখন B বিন্দুর চতুর্দিকে মোমেন্ট নিয়ে পাই,



$$-cw \times BM - aw \times BD = -(a + c)w \times BN$$

$$\Rightarrow c \times BE \cos B + a \times \frac{a}{2} = (a + c) \times AB \cos B$$

$$\Rightarrow c \times \frac{c}{2} \cos B + \frac{a^2}{2} = (a + c) \times c \cos B$$

$$\Rightarrow c^2 \cos B + a^2 = 2ac \cos B + 2c^2 \cos B$$

$$\Rightarrow a^2 = 2ac \cos B + c^2 \cos B = a^2 + c^2 - b^2 + c^2 \cos B \Rightarrow b^2 = c^2(1 + \cos B) = c^2 \times 2\cos^2 \frac{B}{2}$$

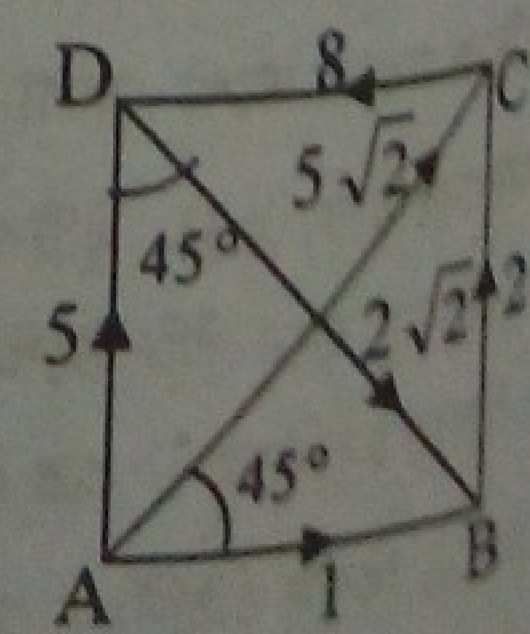
$\Rightarrow b = \sqrt{2}\, c \cos \frac{B}{2} \Rightarrow 2R \sin B = \sqrt{2} \times 2R \sin C \cos \frac{B}{2}$, যেখানে R , ABC ত্রিভুজের পরিব্যাসার্ধ।

$$\Rightarrow 2 \sin \frac{B}{2} \cos \frac{B}{2} = \sqrt{2} \sin C \cos \frac{B}{2} \Rightarrow \sin C = \sqrt{2} \sin \frac{B}{2} \text{ (Proved)}$$

প্রশ্নমালা VIII E

1(a) ABCD বর্গের প্রতি বাহুর দৈর্ঘ্য 10 cm । 1, 2, 8, 5, $5\sqrt{2}$ এবং $2\sqrt{2}$ এককের বলগুলো যথাক্রমে AB, BC, CD, DA, AC এবং DB বরাবর ক্রিয়া করে। এ বলগুলো দ্বারা গঠিত যুগলের মোমেন্ট নির্ণয় কর। [কু.'০৮]

সমাধান ঃ AC বরাবর কার্যরত $5\sqrt{2}$ একক বলটির AB বরাবর লম্বাংশ = $5\sqrt{2}$ cos 45° = 5 একক এবং AD বরাবর লম্বাংশ = $5\sqrt{2} \sin 45° = 5$ একক।



অনুরূপ, DB বরাবর কার্যরত $2\sqrt{2}$ একক বলটির DA বরাবর লম্বাংশ = $2\sqrt{2}$ cos 45° = 2 একক এবং DC বরাবর লম্বাংশ = $2\sqrt{2} \sin 45° = 2$ একক।

$\therefore$ AB বরাবর ক্রিয়ারত মোট বলের পরিমাণ = $(1 + 5) = 6$ একক।

DA বরাবর ক্রিয়ারত মোট বলের পরিমাণ = $(-5 + 5 + 2) = 2$ একক।

CD বরাবর ক্রিয়ারত মোট বলের পরিমাণ = $(8 - 2) = 6$ একক।

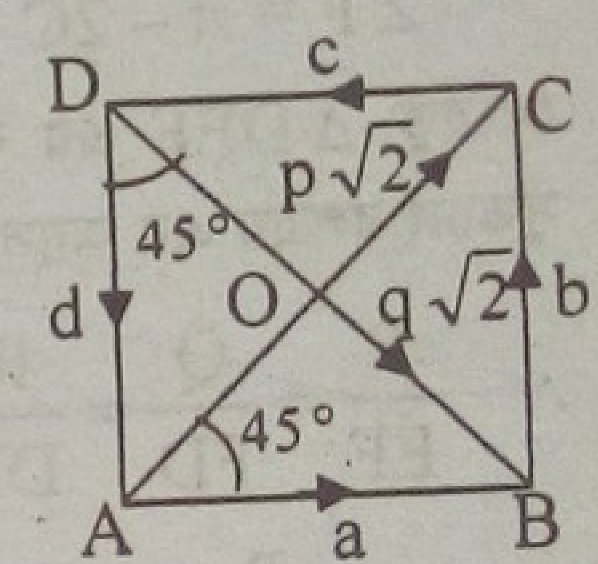
এখন AB ও CD বরাবর ক্রিয়ারত 6, 6 এককের বল দুইটি যুগল গঠন করে, যার মোমেন্ট $G_1 = 6\times 10$ অর্থাৎ 60 একক। আবার, DA ও BC বরাবর ক্রিয়ারত 2, 2 এককের বল দুইটি যুগল গঠন করে, যার মোমেন্ট $G_2 = 2\times 10$ অর্থাৎ 20 একক।

এ যুগল দুইটি একত্রে একটি লব্ধি যুগল গঠন করে, যার মোমেন্ট $= G_1 + G_2 = (60+20) = 80$ একক।

1(b) ABCD বর্গের প্রতিটি বাহুর দৈর্ঘ্য 2 একক। a, b, c, d বলগুলো একইক্রমে AB, BC, CD, DA বাহু বরাবর এবং $p\sqrt{2}$, $q\sqrt{2}$ বল দুইটি যথাক্রমে AC ও DB কর্ণ দুইটি বরাবর ক্রিয়া করছে। $p+q=c-a$ এবং $p-q=d-b$ হলে দেখাও যে, বলগুলো $(a+b+c+d)$ মোমেন্ট বিশিষ্ট যুগলের সমতুল্য। [সি.'০২; ঢা.'০৭]

প্রমাণ ঃ দেওয়া আছে, $AB = BC = CD = DA = 2$ একক, $p+q=c-a$ এবং $p-q=d-b$

$\therefore\ 2p = c-a+d-b$ এবং $2q = c-a-d+b$



ধরি, কর্ণদ্বয় পরস্পরকে O বিন্দুতে ছেদ করে।

তাহলে $AO = BO = CO = DO = AB\sin 45° = 2\times 1/\sqrt{2} = \sqrt{2}$ একক।

A বিন্দুর চতুর্দিকে বলগুলোর মোমেন্টের বীজগণিতীয় সমষ্টি

$$= a\times 0 + d\times 0 + p\sqrt{2}\times 0 + b\times AB + c\times AD - q\sqrt{2}\times AO$$
$$= 2b + 2c - 2q = 2b + 2c - c + a + d - b = a + b + c + d$$

B বিন্দুর চতুর্দিকে বলগুলোর মোমেন্টের বীজগণিতীয় সমষ্টি

$$= a\times 0 + b\times 0 + q\sqrt{2}\times 0 - p\sqrt{2}\times BO + c\times BC + d\times AB$$
$$= -2p + 2c + 2d = -c + a - d + b + 2c + 2d = a + b + c + d$$

তদ্রূপ C বিন্দুর চতুর্দিকে বলগুলোর মোমেন্টের বীজগণিতীয় সমষ্টি

$$= b\times 0 + c\times 0 + p\sqrt{2}\times 0 + q\sqrt{2}\times\sqrt{2} + 2a + 2d$$
$$= 2q + 2a + 2d = c - a - d + b + 2a + 2d = a + b + c + d$$

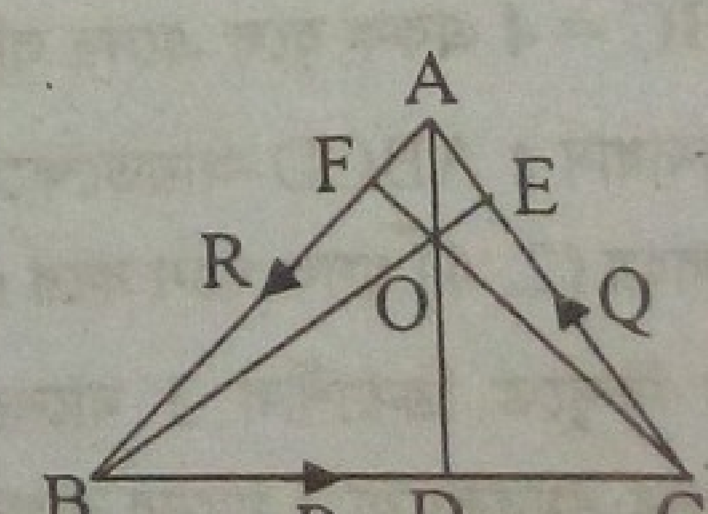
যেহেতু A, B, C তিনটি অসমরেখ বিন্দুর চতুর্দিকে বলগুলোর মোমেন্টের বীজগণিতীয় সমষ্টি সমান (ধ্রুবক), সুতরাং বলগুলো একটি যুগল গঠন করে। অতএব, বলগুলো $(a+b+c+d)$ মোমেন্ট বিশিষ্ট যুগলের সমতুল্য।

2(a) ABC ত্রিভুজের BC, CA, AB বাহু দ্বারা যথাক্রমে P, Q, R মানের বল ক্রিয়া করে। এরা একটি যুগলের সমতুল্য হলে, দেখাও যে, $P : Q : R = a : b : c$.

প্রমাণঃ $AD\perp BC$, $BE\perp CA$, $CF\perp AB$ অঙ্কন করি। ABC ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল Δ দ্বারা সূচিত করি। তাহলে,

$BC\times AD = CA\times BE = AB\times CF = 2\Delta$

এখন A বিন্দুর চতুর্দিকে বলত্রয়ের মোমেন্টের বীজগণিতীয় সমষ্টি $= P\times AD + Q\times 0 + R\times 0 = P\times AD$



তদ্রূপ, B এবং C বিন্দুর চতুর্দিকে বলত্রয়ের মোমেন্টের বীজগণিতীয় সমষ্টি যথাক্রমে $Q\times BE$ এবং $R\times CF$.

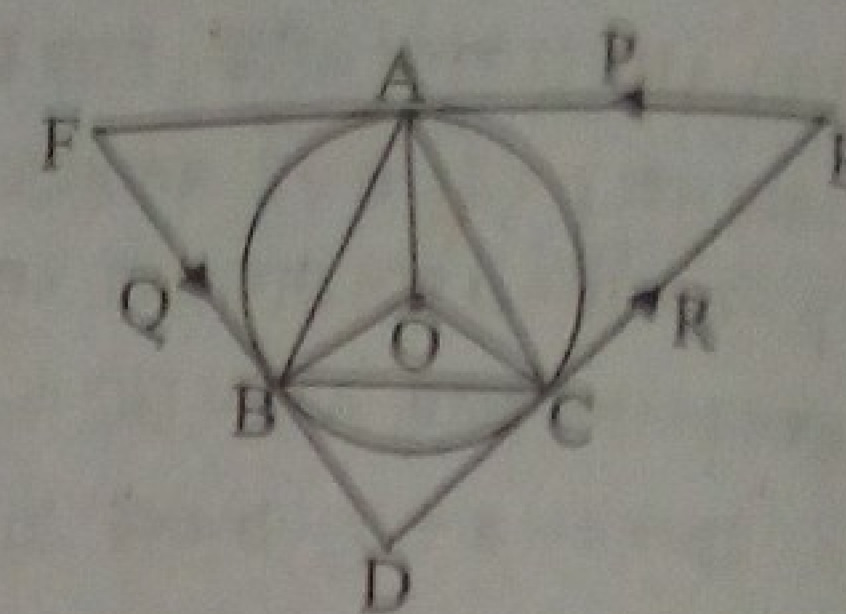
যেহেতু বলত্রয় একটি যুগলের সমতুল্য, সুতরাং বলগুলোর সমতলে যেকোনো বিন্দুর চতুর্দিকে এদের মোমেন্টের বীজগণিতীয় সমষ্টি ধ্রুবক।

$\therefore\ P\times AD = Q\times BE = R\times CF$

$\Rightarrow P\times\dfrac{2\Delta}{BC}=Q\times\dfrac{2\Delta}{CA}=R\times\dfrac{2\Delta}{AB}\Rightarrow\dfrac{P}{a}=\dfrac{Q}{b}=\dfrac{R}{c}\quad\therefore P:Q:R=a:b:c.$

2(b) ABC ত্রিভুজের শীর্ষত্রয়ে ত্রিভুজটির পরিবৃত্তের স্পর্শক বরাবর ক্রিয়ারত P, Q, R বল তিনটি একটি যুগলের সমতুল্য হলে, দেখাও যে, $P:Q:R=\sin 2A:\sin 2B:\sin 2C$. [ব.'০১,'০৫; রা.'১১]

প্রমাণঃ মনে করি, ΔABC এর পরিকেন্দ্র O এবং P, Q, R বলত্রয় যথাক্রমে A, B, C শীর্ষবিন্দুতে অঙ্কিত স্পর্শক EF, FD, DE বরাবর ক্রিয়াশীল। তাহলে, $OA\perp EF, OB\perp FD, OC\perp DE$.



$\therefore\ \angle D=\pi-\angle BOC=\pi-2A$. তদ্রূপ, $\angle E=\pi-2B$ এবং $\angle F=\pi-2C$

যেহেতু ΔDEF এর বাহু বরাবর ক্রিয়ারত বলত্রয় একটি যুগলের সমতুল্য, সুতরাং বলত্রয় এর অনুসঙ্গী বাহুর দৈর্ঘ্যের সমানুপাতিক।

$\therefore\ \dfrac{P}{EF}=\dfrac{Q}{FD}=\dfrac{R}{DE}\Rightarrow\dfrac{P}{2r\sin D}=\dfrac{Q}{2r\sin E}=\dfrac{R}{2r\sin F}$, যেখানে r, ΔDEF এর পরিব্যাসার্ধ।

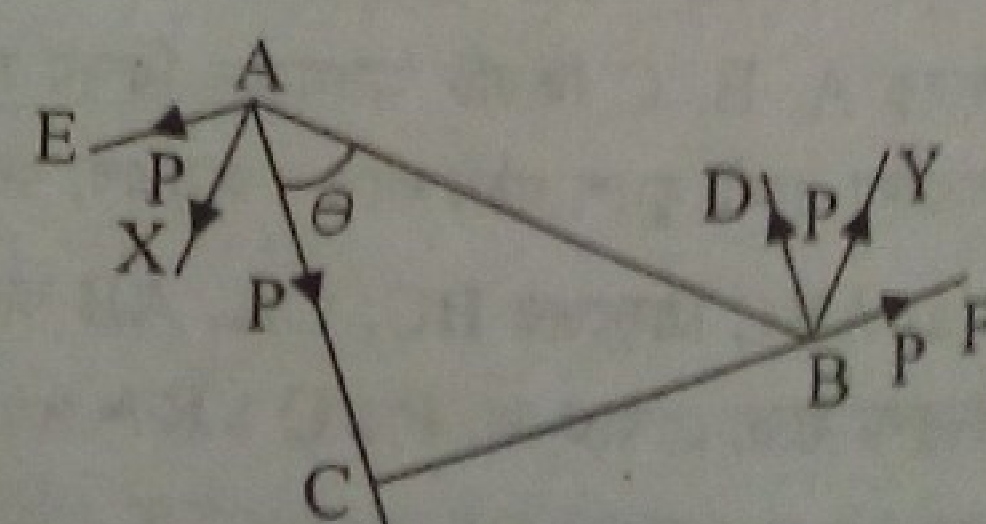
$\Rightarrow\dfrac{P}{\sin(\pi-2A)}=\dfrac{Q}{\sin(\pi-2B)}=\dfrac{R}{\sin(\pi-2C)}\Rightarrow\dfrac{P}{\sin 2A}=\dfrac{Q}{\sin 2B}=\dfrac{R}{\sin 2C}$

$\therefore\ P:Q:R=\sin 2A:\sin 2B:\sin 2C.$

3. G মোমেন্ট বিশিষ্ট একটি যুগল গঠনকারী বলদ্বয় A ও B বিন্দুতে ক্রিয়া করে। বলের ক্রিয়ারেখা দুইটিকে এক সমকোণে ঘুরালে H মোমেন্ট বিশিষ্ট একটি যুগল গঠন করে। প্রমাণ কর যে, বল দুইটি AB এর উপর লম্বভাবে ক্রিয়া করলে তারা $\sqrt{G^2+H^2}$ মোমেন্ট বিশিষ্ট একটি যুগল গঠন করবে।

প্রমাণ ঃ মনে করি, AC ও BD বরাবর ক্রিয়ারত যুগল গঠনকারী বলদ্বয় P ও P। $BC\perp AC$ অঙ্কন করি। ধরি, $\angle BAC=\theta$। তাহলে, যুগলের মোমেন্ট $G=P\times BC=P\times AB\sin\theta\cdots\cdots$ (i)

বলের ক্রিয়ারেখা দুইটি এক সমকোণে ঘুরে AE ও BF বরাবর ক্রিয়ারত হলে যুগলের মোমেন্ট $H=P\times AC=P\times AB\cos\theta\cdots$ (ii)



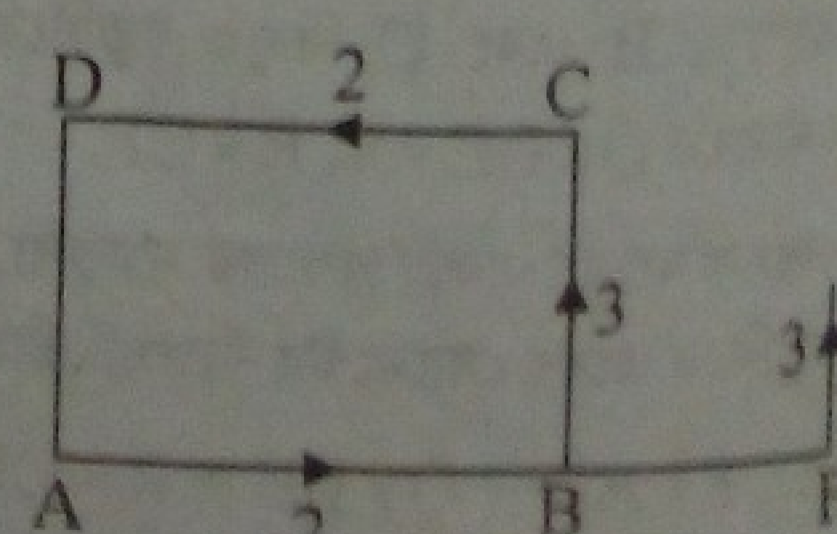
বল দুইটি AB এর উপর লম্ব AX ও BY বরাবর ক্রিয়া করলে যুগলের মোমেন্ট $=P\times AB$

$(i)^2+(ii)^2\Rightarrow G^2+H^2=P^2\times AB^2(\sin^2\theta+\cos^2\theta)$

$\therefore\ \sqrt{G^2+H^2}=P\times AB$; যা AB এর উপর ক্রিয়াশীল বল দুইটি দ্বারা গঠিত যুগলের মোমেন্টের সমান।

4(a) ABCD আয়তক্ষেত্রের AB, BC, CD বাহু বরাবর 2, 3, 2 মানের বলত্রয় ক্রিয়া করে। AB = 5 একক, BC = 4 একক হলে এদের লব্ধির মান ও ক্রিয়া রেখা নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ ABCD আয়তক্ষেত্রের AB ও CD বরাবর ক্রিয়াশীল 2, 2 মানের বলদ্বয় (2, 4) যুগল গঠন করে।



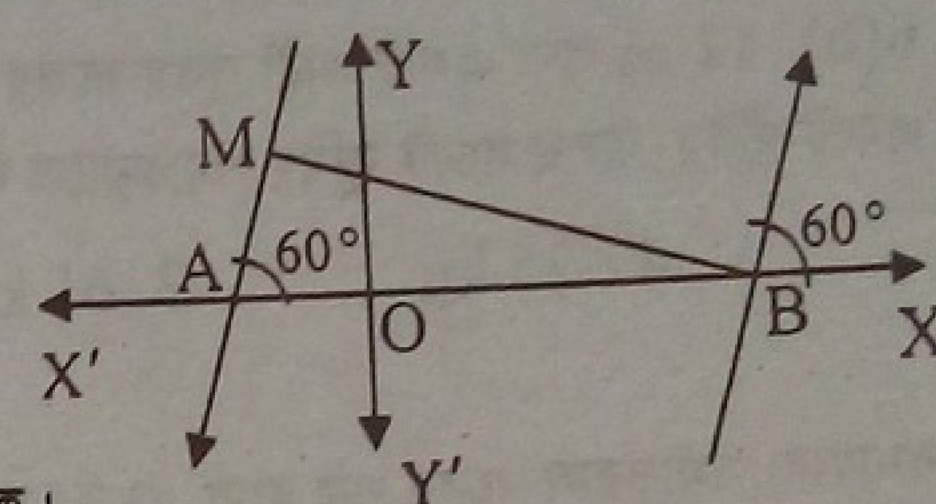
B বিন্দুতে ক্রিয়াশীল 3 মানের বল ও (2, 4) যুগল একত্রে একটি একক বলের সমতুল্য যা 3 মানের বলের সমান ও সমান্তরাল এবং B বিন্দু হতে BF

$=\frac{2\times4}{3}=\frac{8}{3}$ একক দূরত্বে F বিন্দুতে ক্রিয়াশীল। তাহলে, $AF = AB + BF = (5+\frac{8}{3})$ একক $=\frac{23}{3}$ একক

এবং $AF : BF = \frac{23}{3} : \frac{8}{3} = 23 : 8$

$\therefore$ প্রদত্ত বলত্রয়ের লব্ধি 3 একক যা BC বাহুর সমান্তরাল বরাবর ক্রিয়াশীল এবং AB বাহুকে 23 : 8 অনুপাতে বহির্বিভক্ত করে।

4(b) $20\sqrt{3}$ একক মানের দুইটি বিসদৃশ সমান্তরাল বল একটি অনড় বস্তুর উপর ক্রিয়া করে ঘড়ির কাঁটার বিপরীত ঘূর্ণন সৃষ্টিকারী যুগল গঠন করে। xy-সমতলে অবস্থিত এবং x-অক্ষের সাথে 60° কোণে আনত বল দুইটি যদি A (–1, 0) ও B (3, 0) বিন্দুতে কার্যরত হয়, তবে যুগলটির মোমেন্ট নির্ণয় কর।

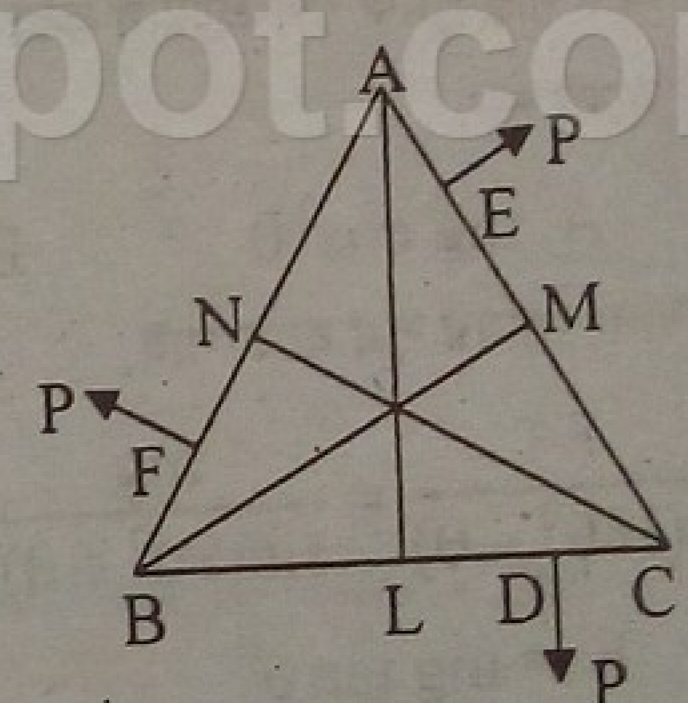


সমাধান ঃ B বিন্দু হতে A বিন্দুগামী বলের ক্রিয়ারেখার উপর BM লম্ব অঙ্কন করি। তাহলে, $AB = |3-(-1)| = 4$ একক,

$BM = AB\sin 60° = 4\times\frac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}$ একক।

$\therefore$ যুগলটির মোমেন্ট $= 20\sqrt{3}\times BM = 20\sqrt{3}\times 2\sqrt{3} = 120$ একক।

5. ABC সমবাহু ত্রিভুজের বাহুর দৈর্ঘ্য a একক। D, E, F বিন্দু যথাক্রমে BC, CA, AB বাহুকে 5 : 1 অনুপাতে বিভক্ত করে। P এর সমান তিনটি বল D, E, F বিন্দুতে বাহুগুলোর উপর লম্বভাবে বহির্মুখে ক্রিয়া করে। প্রমাণ কর যে, তারা Pa মোমেন্ট বিশিষ্ট একটি যুগল গঠন করে।



সমাধান ঃ $AL\perp BC$, $BM\perp AC$ এবং $CN\perp AB$ অঙ্কন করি। ABC সমবাহু ত্রিভুজ বলে L, M, N যথাক্রমে BC, CA, AB এর মধ্যবিন্দু।

$\therefore BL = CL = CM = AM = AN = BN = a/2$

প্রশ্নমতে, $\frac{BD}{CD}=\frac{5}{1}\Rightarrow\frac{BD}{5}=\frac{CD}{1}=\frac{BD+CD}{5+1}=\frac{BC}{6}=\frac{a}{6}$

$\therefore BD=\frac{5a}{6}$, $CD=\frac{a}{6}$. তদ্রূপ, $CE = AF = \frac{5a}{6}$, $AE = BF = \frac{5a}{6}$.

এখন, $DL = ME = NE = CL - CD = \frac{a}{2}-\frac{a}{6}=\frac{a}{3}$

B বিন্দুর চতুর্দিকে প্রদত্ত বলত্রয়ের মোমেন্টের বীজগণিতীয় সমষ্টি $= -P\times BD - P\times ME + P\times BF$

$$= -P\left(\frac{5a}{6}+\frac{a}{3}-\frac{a}{6}\right) = -Pa$$

C বিন্দুর চতুর্দিকে প্রদত্ত বলত্রয়ের মোমেন্টের বীজগণিতীয় সমষ্টি $= P\times CD - P\times CE - P\times FN$

$$= P\left(\frac{a}{6}-\frac{5a}{6}-\frac{a}{3}\right) = -Pa$$

তদ্রূপ, A বিন্দুর চতুর্দিকে প্রদত্ত বলত্রয়ের মোমেন্টের বীজগণিতীয় সমষ্টি $= -Pa$

∴ তিনটি অসমরেখ বিন্দুর চতুর্দিকে বলত্রয়ের মোমেন্ট ধ্রুবক। সুতরাং তারা একটি যুগলের সমতুল্য যার মোমেন্টের মান = Pa একক।

6 (a) 3P এবং 2P বলদ্বয়ের লব্ধি R, প্রথম বল দ্বিগুণ করলে লব্ধির পরিমানও দ্বিগুণ হয়। বলদ্বয়ের অন্তর্গত কোণ হবে – [DU 12-13]

A. 110^0 B. 120^0 C. 135^0 D. 150^0

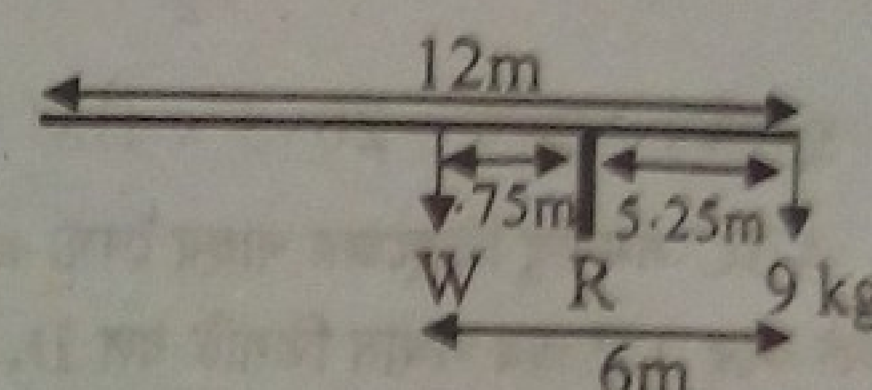
সমাধানঃ বলদ্বয়ের অন্তর্গত কোণ α হলে, $R^2 = 9P^2 + 4P^2 + 2.3P.2P\cos\alpha = 13P^2 + 12P^2\cos\alpha$

এবং $4R^2 = 36P^2 + 4P^2 + 2.6P.2P\cos\alpha \Rightarrow 4R^2 = 40P^2 + 24P^2\cos\alpha \Rightarrow R = 10P^2 + 6P^2\cos\alpha$

$\therefore\ 10P^2 + 6P^2\cos\alpha = 13P^2 + 12P^2\cos\alpha \Rightarrow 6\cos\alpha = -3 \Rightarrow \cos\alpha = -\frac{1}{2}\ \therefore \alpha = 120^0$

6(b) 12 m লম্বা একটি ভারী সুষম দন্ডের এক প্রান্তে 9 kg ওজন ঝুলানো আছে। উক্ত প্রান্ত থেকে 5·25 m দূরে যদি একটি খুঁটির উপর দন্ডটি ভূমির সমান্তরালে অবস্থান করে তবে দন্ডটির ওজন হবে – [BUET 12-13]

A. 47·25 kg B. 61 kg C. 63 kg D. 65 kg



সমাধানঃ সমান্তরাল বলের সূত্র হতে, $0.75W = 9\times5.25$

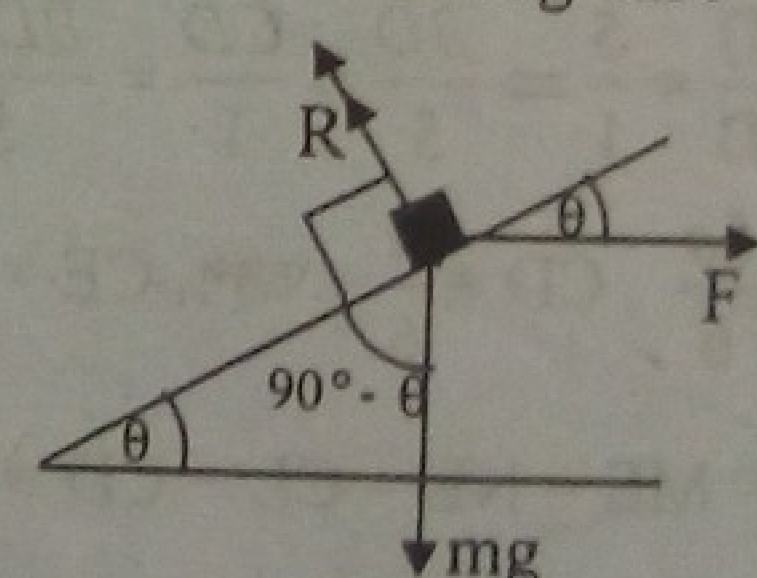
$\Rightarrow\ W = \frac{9\times5.25}{0.75} = 63$ kg

6(c) অনুভূমিকের সাথে θ কোণে হেলানো একটি মসৃণ তলে অবস্থিত m ভরের একটি ছোট বস্তু P এর উপর F পরিমান আনুভূমিক বল প্রয়োগ করা হলে F বলটি P বস্তুকে কেবলমাত্র সাম্যাবস্থায় রাখতে সমর্থ হয়। তাহলে F এর মান হলো –

[RUET 10-11]

A. $mg\cos^2\theta$ B. $mg\sin^2\theta$ C. $mg\cos\theta$ D. $mg\tan\theta$

সমাধানঃ লামির সূত্র হতে পাই,



$$\frac{F}{\sin(180^0-\theta)} = \frac{mg}{\sin(90^0+\theta)} \Rightarrow \frac{F}{\sin\theta} = \frac{mg}{\cos\theta}$$

$\therefore\ F = mg\tan\theta$

7. P, Q , R তিনটি বল।

(a) P, Q এর ক্ষুদ্রতম লব্ধি R হলে, P, Q ও R এর মাধ্যে একটি সম্পর্ক প্রতিষ্ঠা কর এবং P, Q এর মধ্যবর্তী কোণ নির্ণয় কর।

(b) একটি কণার উপর কার্যরত P, Q , R বল তিনটি সাম্যাবস্থায় থাকলে এবং Q , R এর মধ্যবর্তী কোণ 135^0 হলে P, Q ও R এর মাধ্যে একটি সম্পর্ক প্রতিষ্ঠা কর।

(c) P, Q , R বল তিনটি সদৃশ সমান্তরাল যথাক্রমে ΔABC এর কৌণিক বিন্দু A, B, ,C তে ক্রিয়া করে। এদের লব্ধির ক্রিয়ারেখা যদি ত্রিভুজটির অন্তঃকেন্দ্রগামী হয়, তবে দেখাও যে, P : Q: R = sinA : sinB : sinC

সমাধানঃ (a) মনে করি, P, Q এর মধ্যবর্তী কোণ α.

$\therefore\ R^2 = P^2 + Q^2 + 2PQ\cos\alpha = (P-Q)^2 + 2PQ(1+\cos\alpha) = (P-Q)^2 + 4PQ\cos^2\frac{\alpha}{2}$

$4PQ\cos^2\frac{\alpha}{2} = 0$ হলে, R ক্ষুদ্রতম হবে এবং সেক্ষেত্রে $R^2 = (P-Q)^2 \Rightarrow R = |P-Q|$; ইহাই নির্ণেয় সম্পর্ক।

এখন, $4PQ\cos^2\frac{\alpha}{2} = 0 \Rightarrow \cos\frac{\alpha}{2} = 0 \Rightarrow \cos\frac{\alpha}{2} = \cos\frac{\pi}{2} \Rightarrow \alpha = \pi$

$\therefore$ R ক্ষুদ্রতম হলে প্রদত্ত বলদ্বয়ের মধ্যবর্তী কোণ π.

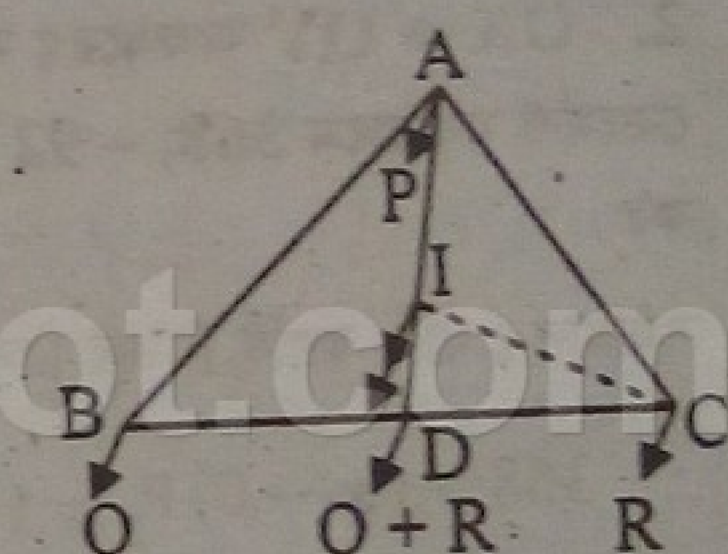
(b) আমরা জানি, একটি বিন্দুতে কার্যরত তিনটি বল সাম্যাবস্থায় থাকলে এদের যেকোনো দুইটি বলের লব্ধির মান তৃতীয়টির সমান ও বিপরীতমুখী ক্রিয়াশীল হবে। সুতরাং, 135^0 কোণে কার্যরত Q ও R বলের লব্ধির মান P এর সমান হবে।

$\therefore\ P^2 = Q^2 + R^2 + 2QR\cos 135^0 = R^2 + 2QR\cos(180^0 - 45^0)$

$\Rightarrow P^2 = R^2 + 2QR(-\cos 45^0) = R^2 - 2QR\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

$\therefore\ P^2 = R^2 - \sqrt{2}\,QR$; ইহাই নির্ণেয় সম্পর্ক।

(c) প্রমাণঃ মনে করি, ΔABC এর অন্তঃকেন্দ্র I এবং বর্ধিত AI, BC কে D বিন্দুতে ছেদ করে। তাহলে, $\angle BAC$ এর সমদ্বিখণ্ডক AD, BC কে D বিন্দুতে AB : AC অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত করে। $\therefore\ \frac{CD}{BD} = \frac{AC}{AB} = \frac{b}{c}$.



এখন B ও C তে ক্রিয়ারত সদৃশ সমান্তরাল বল Q ও R এর লব্ধি (Q + R) বলটি BC এর কোনো বিন্দুতে ক্রিয়া করবে। আবার প্রদত্ত বলত্রয়ের লব্ধি (P + Q + R) এর ক্রিয়াবিন্দু I এবং এর একটি অংশক বল P এর ক্রিয়াবিন্দু A বলে, অপর অংশক বল (Q + R) এর ক্রিয়াবিন্দু অবশ্যই BC ও AD এর ছেদবিন্দু D হবে।

$\therefore\ Q.BD = R.CD \Rightarrow \frac{Q}{R} = \frac{CD}{BD} = \frac{b}{c} \Rightarrow \frac{Q}{b} = \frac{R}{c}$. অনুরূপভাবে, প্রমাণ করা যায়, $\frac{P}{a} = \frac{Q}{c}$

$\therefore\ \frac{P}{a} = \frac{Q}{b} = \frac{R}{c} \Rightarrow \frac{P}{2r\sin A} = \frac{Q}{2r\sin B} = \frac{R}{2r\sin C}$, যেখানে ΔABC এর পরিব্যাসার্ধ r ।

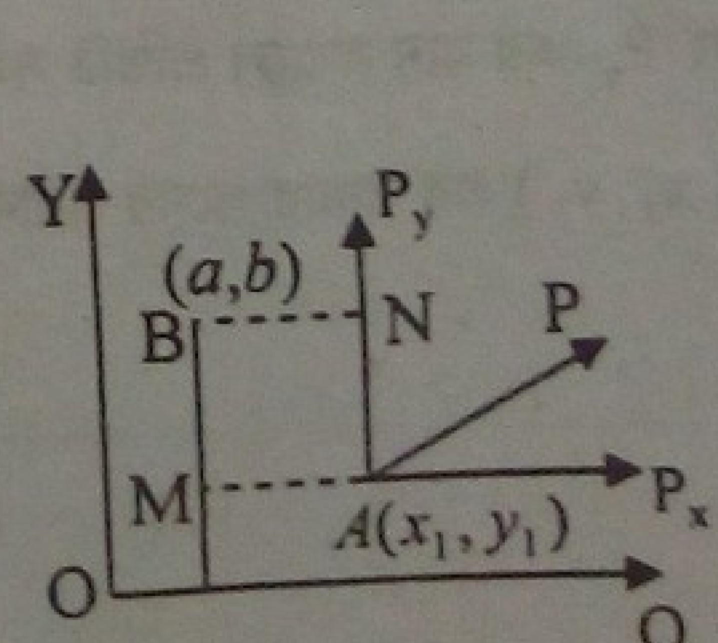
$\therefore\ P : Q : R = \sin A : \sin B : \sin C$ (Showed)

অতিরিক্ত প্রশ্ন (সমাধানসহ)

একটি বিন্দুর সাপেক্ষে একটি বলের মোমেন্টের বৈশ্লেষিক বর্ণনাঃ

একটি বিন্দুর সাপেক্ষে একটি বলের মোমেন্টের বৈশ্লেষিক বর্ণনাঃ

মনে করি, xy সমতলে P বলের ক্রিয়াবিন্দু $A(x_1, y_1)$ এবং উক্ত সমতলে যেকোনো একটি বিন্দু $B(a, b)$। ধরি, P এর x উপাংশ P_x এবং y উপাংশ P_y ।

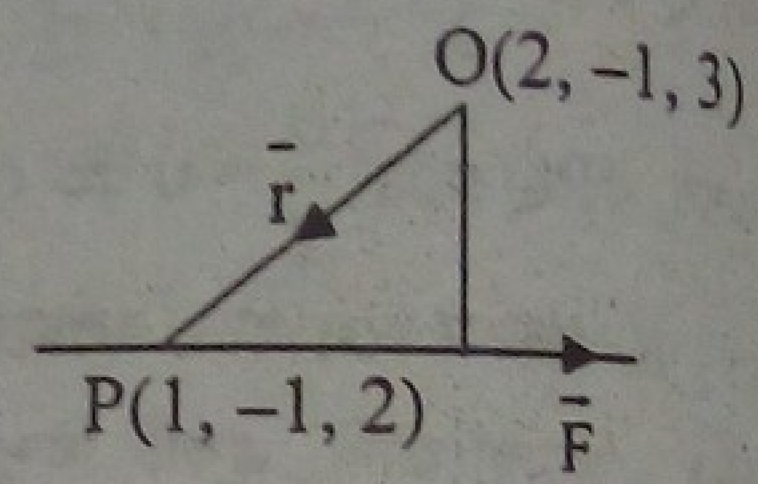


B(a, b) বিন্দুর চতুর্দিকে A বিন্দুতে ক্রিয়াশীল P বলের মোমেন্ট

= B এর সাপেক্ষে P_x এর মোমেন্ট + B এর সাপেক্ষে P_y এর মোমেন্ট

$= P_x \times BM + P_y \times BN = P_x(b - y_1) + P_y(x_1 - a) = (x_1 - a)P_y - (y_1 - b)P_x$

1. $\overline{F} = 3\hat{i} + 2\hat{j} - 4\hat{k}$ বলটি (1, −1, 2) বিন্দুতে প্রযুক্ত হল। (2, − 1, 3) বিন্দুর চতুর্দিকে $\overline{F}$ বলের মোমেন্ট ভেক্টর ও তার মান নির্ণয় কর।



সমাধান ঃ ধরি, প্রদত্ত বিন্দুদ্বয় O(2, − 1, 3) এবং P(1, − 1, 2)।

∴ O এর সাপেক্ষে P এর অবস্থান ভেক্টর $\bar{r} = \overline{OP}$

$= (1-2)\hat{i} + (-1+1)\hat{j} + (2-3)\hat{k} = -\hat{i} - \hat{k}$

∴ O এর চতুর্দিকে $\overline{F}$ বলের মোমেন্ট ভেক্টর $\overline{M} = \bar{r} \times \overline{F} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ -1 & 0 & -1 \\ 3 & 2 & -4 \end{vmatrix}$

$= (0+2)\hat{i} - (4+3)\hat{j} + (-2-0)\hat{k}$

$= 2\hat{i} - 7\hat{j} - 2\hat{k}$

∴ $\overline{F}$ বলের মোমেন্ট ভেক্টরের মান $= |\overline{M}| = \sqrt{4+49+4} = \sqrt{57}$

2. OX ও OY অক্ষদ্বয়ের সমতলে ক্রিয়াশীল একটি বলের মোমেন্ট (0, 0), (10,0) এবং (0,5) বিন্দুর চতুর্দিকে মোমেন্ট যথাক্রমে 368, − 92 এবং 438 একক। অক্ষদ্বয় বরাবর বলটির উপাংশ এবং এর ক্রিয়ারেখার সমীকরণ নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ ধরি, বলটি P এর ক্রিয়াবিন্দু $A(x_1, y_1)$ এবং P এর উপাংশদ্বয় P_x ও P_y।

∴ $368 = (x_1 - 0)P_y - (y_1 - 0)P_x \Rightarrow x_1 P_y - y_1 P_x = 368 \cdots \cdots$ (i)

$-92 = (x_1 - 10)P_y - (y_1 - 0)P_x = x_1 P_y - y_1 P_x - 10P_y \cdots \cdots$(ii)

$\Rightarrow -92 = 368 - 10P_y$ [(i) হতে]

$\Rightarrow 10P_y = 460 \Rightarrow P_y = 46$

আবার, $438 = (x_1 - 0)P_y - (y_1 - 5)P_x = x_1 P_y - y_1 P_x + 5P_x \cdots \cdots$(iii)

$\Rightarrow 438 = 368 + 5P_x \Rightarrow 5P_x = 70 \Rightarrow P_x = 14$

∴ P এর উপাংশদ্বয় 14 ও 46 একক।

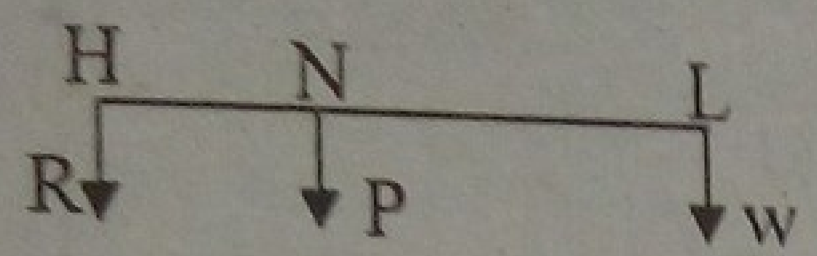
P_x এবং P_y এর মান বসালে প্রতিটি সমীকরণ $46x_1 - 14y_1 = 368$ অর্থাৎ $23x_1 - 7y_1 = 184$ রূপ ধারণ করে।

∴ $A(x_1, y_1)$ এর সঞ্চার পথের সমীকরণ অর্থাৎ P বলের ক্রিয়ারেখার সমীকরণ $23x - 7y = 184$

ভর্তি পরীক্ষার MCQ ঃ

1. একজন লোক লাঠির একপ্রান্তে বাঁধা একটি বোঝা কাঁধে বহন করছে, বোঝাটির ওজন w এবং লোকটির কাঁধ হতে বোঝাটির ও লোকটির হাতের দূরত্ব যথাক্রমে 1 মি. ও 0·5 মি.। লোকটির কাঁধের উপর চাপ– [BUET 07-08]

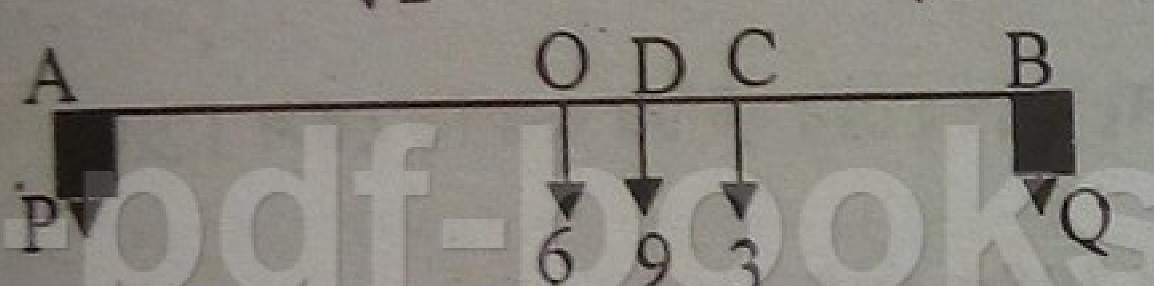
Sol^n :



$$\frac{R}{NL}=\frac{w}{HN}=\frac{P}{HL}\Rightarrow\frac{w}{0\cdot5}=\frac{P}{1\cdot5}\ \therefore P=3w$$

2. ভূমির উপর দন্ডায়মান একটি টেলিগ্রাফ থামের সাথে 20 মি. দীর্ঘ একটি শক্ত দড়ির একপ্রান্ত বাঁধা আছে এবং অপর প্রান্ত ধরে একটি লোক নির্দিষ্ট বল প্রয়োগে টানছে। থামটির কোন স্থানে দড়ি বাঁধলে লোকটির পক্ষে তা উল্টিয়ে ফেলা সহজ হবে? [KUET 07-08]

Sol^n : দূরত্ব $=\frac{1}{\sqrt{2}}$ (থামের দীর্ঘ) $=\frac{20}{\sqrt{2}}=10\sqrt{2}$



3. ভূমির সাথে সমান্তরাল একটি সেতুর দৈর্ঘ্য 42 মি. এবং ওজন 6 মেট্রিক টন। সেতুটি তার প্রান্তদ্বয়ে দুটি অনুরূপ থামের উপর অবস্থিত। যদি 3 মেট্রিক টন ওজনের একখানি গাড়ি সেতুটির একপ্রান্ত হতে 24 মি.দূরে অবস্থান করে ,থাম দুটির উপর কি পরিমাণ চাপ পড়বে? [SUST 08-09]

Sol^n : $AO = OB = 21m$, $AC = 24$ m, $OC = AC - AO = 24 - 21 = 3$, $P + Q = 9$

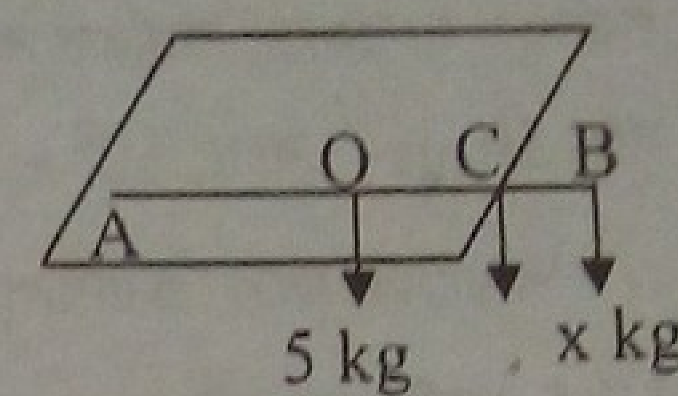
$$\frac{6}{DC}=\frac{3}{OD}=\frac{9}{OC}=\frac{9}{3}=3\ \therefore DC=2, OD=1$$

এখন, $\frac{P}{BD}=\frac{Q}{AD}=\frac{9}{AB}\Rightarrow\frac{P}{20}=\frac{Q}{22}=\frac{9}{42}=\frac{3}{14}$

$$\therefore\ P=20\times\frac{3}{14}=\frac{30}{7}MT,\ Q=\frac{33}{7}MT$$

4. 2 মি. দীর্ঘ ও 5 কেজি ওজনের একটি সুষম রডকে একটি টেবিলের উপর এমনভাবে রাখা হয়েছে যে, রডটির দীর্ঘের 16 সে.মি. ধারের বাইরে থাকে। রডটি পড়ে যাওয়ার পূর্বে ঐ প্রান্তে কত ওজন ঝুলানো যাবে? [BUET 10-11]

Sol^n : $BC = 0\cdot16$ m, $OC = 1 - 0\cdot16 = 0\cdot84$ m

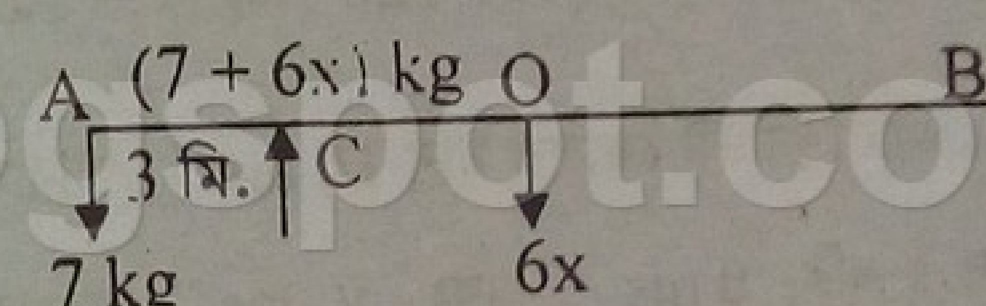


$$\therefore\ \frac{5}{BC}=\frac{x}{OC}$$

$$\Rightarrow\frac{5}{0\cdot16}=\frac{x}{0\cdot84}$$

$$\Rightarrow\ x=\frac{0\cdot84\times5}{0\cdot16}=\frac{0\cdot84\times5}{0\cdot16}=26\cdot25\text{ kg.}$$

5. মিটার প্রতি 6 কেজি ওজনের একটি লৌহদন্ডের একপ্রান্তে 7 কেজি ওজনের একটি বস্তু ঝুলালে তার উক্ত প্রান্ত হতে 3 মি. দূরে একটি বিন্দুতে ভারসাম্য হয়। দন্ডটি কত লম্বা? [KU 09-10]



Sol^n :ধরি,দন্ডটির দৈর্ঘ্য $AB = x$ মি., $AC = 3$ মি.

$\therefore\ CO=(\frac{x}{2}-3)$ মি.

এখন, $\frac{7}{CO}=\frac{6x}{AC}\Rightarrow\frac{7}{(x-6)/2}=\frac{6x}{3}$

$$\Rightarrow\ 7=x^2-6x\Rightarrow x^2-6x-7=0$$

$\Rightarrow\ (x-7)(x+1)=0\ \therefore x=7$ মিটার।