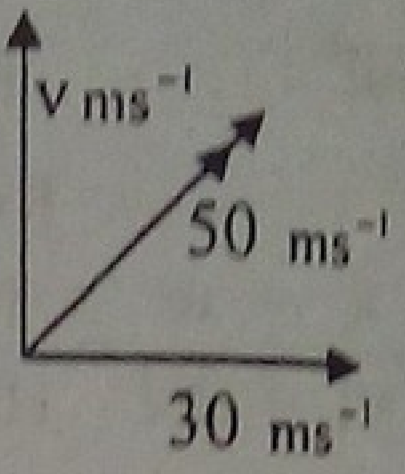
প্রশ্নমালা IX A

1(a) একটি ক্রিকেট বল ভূমির সাথে সমান্তরাল রেখায় $30\ ms^{-1}$ সমবেগে চলছে। কিছুক্ষণ পর হঠাৎ ব্যাট দ্বারা পূর্ববেগের সাথে সমকোণে আঘাত করায় বলটি $50\ ms^{-1}$ বেগে চলতে লাগল। ব্যাটের আঘাতের ফলে ক্রিয়াশীল বেগের মান নির্ণয় কর।



সমাধান ঃ মনে করি, আঘাতের ফলে ক্রিয়াশীল বেগের মান $v\ ms^{-1}$ ।

পরস্পর সমকোণে কার্যরত বলটির আদিবেগ $30\ ms^{-1}$ ও আঘাতজনিত বেগ $v\ ms^{-1}$ এর লব্ধি $50\ ms^{-1}$ বলে, $50^2 = 30^2 + v^2 \Rightarrow v^2 = 2500 - 900 = 1600 \Rightarrow v = 40$

$\therefore$ আঘাতের ফলে ক্রিয়াশীল বেগের মান $40\ ms^{-1}$ ।

1(b) একটি বস্তুর উপর $3\ ms^{-1}$, $7\ ms^{-1}$ এবং $8\ ms^{-1}$ বগে ক্রিয়া করে সাম্যাবস্থা রক্ষা করে। বৃহত্তর এবং ক্ষুদ্রতর বেগ দুইটির অন্তর্গত কোণ নির্ণয় কর।

সমাধানঃ ধরি, বৃহত্তম এবং ক্ষুদ্রতম বেগ দুইটির অন্তর্গত কোণ α. যেহেতু বেগত্রয় একটি বস্তুকণার উপর ক্রিয়া করে সম্যাবস্থা সৃষ্টি করে, সুতরাং $3\ ms^{-1}$ ও $8\ ms^{-1}$ বেগদ্বয়ের লব্ধির মান $7\ ms^{-1}$ ।

$\therefore\ 7^2 = 3^2 + 8^2 + 2 \times 3 \times 8 \cos\alpha \Rightarrow 49 = 9 + 64 + 48\cos\alpha \Rightarrow 48\cos\alpha = -24$

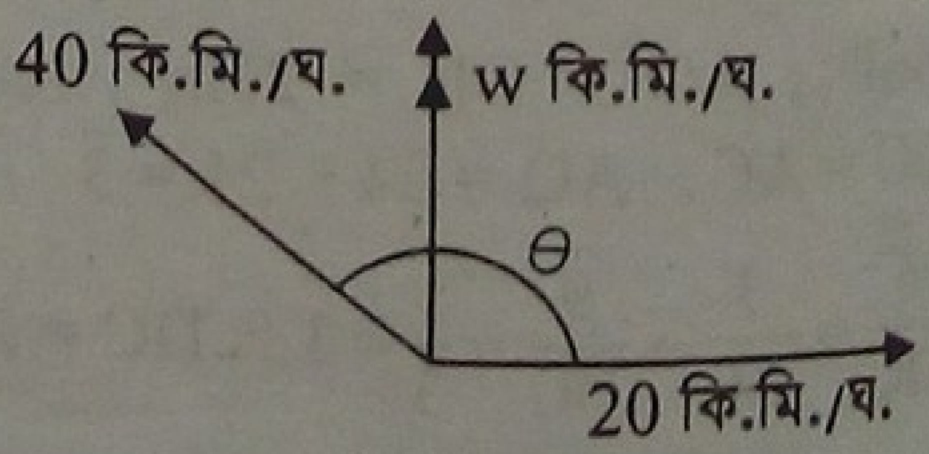
$\Rightarrow \cos\alpha = -\frac{1}{2} = \cos 120° \Rightarrow \alpha = 120°$ $\therefore$ বৃহত্তর এবং ক্ষুদ্রতর বেগ দুইটির অন্তর্গত কোণ $120°$

1(c) কোনো নির্দিষ্ট বেগের মান $10\ ms^{-1}$; তার দুই পার্শ্বে তার সাথে $30°$ ও $60°$ কোণে কার্যরত অংশকদ্বয় নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ ধরি, $u\ ms^{-1}$ এবং $v\ ms^{-1}$ অংশকদ্বয় $10\ ms^{-1}$ মানের বেগের সাথে যথাক্রমে $30°$ ও $60°$ কোণে কার্যরত। তাহলে, $u = \frac{10\sin 30^0}{\sin(30^0 + 60^0)} = \frac{10 \times \sin 30^0}{\sin 90^0} = 10 \times \frac{1}{2} = 5$ এবং $v = \frac{10\sin 60^0}{\sin 90^0} = 10 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 5\sqrt{3}$

$\therefore$ নির্ণেয় অংশকদ্বয় $5\ ms^{-1}$ এবং $5\sqrt{3}\ ms^{-1}$.

1(d) 20 কি.মি./ঘ. বেগে চলন্ত একটি বাস থেকে একটি বস্তুকণা 40 কি.মি./ঘ. বেগে কোন্ দিকে নিক্ষেপ করলে তা বাসের সাথে লম্বভাবে চলবে?



সমাধানঃ মনে করি, বাসের সাথে θ কোণে নিক্ষেপ করলে বস্তুকণাটি বাসের সাথে w কি.মি./ ঘ. বেগে লম্বভাবে চলবে।

বাসের দিক বরাবর লম্বাংশ নিয়ে পাই,

$20\cos 0° + 40\cos\theta = w\cos 90° \Rightarrow 20 + 40\cos\theta = 0$

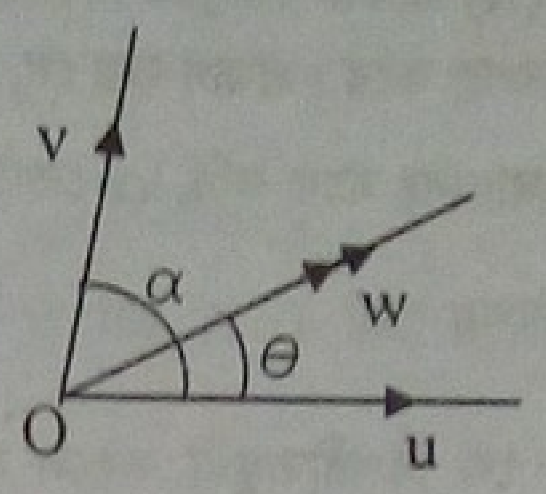
$\Rightarrow \cos\theta = -\frac{1}{2} = \cos 120° \Rightarrow \theta = 120°$ $\therefore$ বস্তুকণাটিকে $120°$ কোণে নিক্ষেপ করতে হবে।

1(e) কোনো বিন্দুতে ক্রিয়ারত **u** ও **v** বেগদ্বয়ের লব্ধি **w**; এবং **u** এর দিক বরাবর **w** এর লম্বাংশের পরিমাণ v হলে প্রমাণ কর যে, বেগ দুইটির অন্তর্গত কোণ $\cos^{-1}\frac{v-u}{v}$ এবং $w = \sqrt{v^2 - u^2 + 2uv}$ [চ.'০৮; দি.'১০]

প্রমাণ ঃ মনে করি, u বেগ লব্ধি w এর সাথে θ কোণ উৎপন্ন করে।

$\therefore$ u এর দিক বরাবর w এর লম্বাংশ $= w\cos\theta$.

প্রশ্নমতে, $w\cos\theta = v \cdots\cdots$ (i)



u এর দিক বরাবর u ও v বেগদ্বয় এবং এদের লব্ধি w এর লম্বাংশ নিয়ে পাই,

$u\cos 0^\circ + v\cos\alpha = w\cos\theta = v$ [(i) দ্বারা।]

$\Rightarrow u + v\cos\alpha = v \Rightarrow \cos\alpha = \dfrac{v-u}{v} \Rightarrow \alpha = \cos^{-1}\dfrac{v-u}{v}$

$\therefore$ বেগ দুইটির অন্তর্গত কোণ $\cos^{-1}\dfrac{v-u}{v}$

এখন বেগের সামান্তরিক সূত্র হতে পাই, $w^2 = u^2 + v^2 + 2uv\cos\alpha = u^2 + v^2 + 2u(v-u)$

$\Rightarrow w^2 = u^2 + v^2 + 2uv - 2u^2 \quad \therefore w = \sqrt{v^2 - u^2 + 2uv}$

1(f) দেখাও যে, দুইটি সমমানের সমবিন্দু বেগের লব্ধি তাদের অন্তর্গত কোণকে সমদ্বিখণ্ডিত করে। [য.'০২; সি.'০৩]

প্রমাণ ঃ আমরা জানি, α কোণে কার্যরত u ও v সমবিন্দু বেগের লব্ধিবেগ v বেগের সাথে θ কোণ উৎপন্ন করলে,

$\tan\theta = \dfrac{u\sin\alpha}{v + u\cos\alpha}$, যখন $v + u\cos\alpha \neq 0$.

বেগদ্বয় পরস্পর সমান হলে অর্থাৎ $v = u$ হলে, $\tan\theta = \dfrac{u\sin\alpha}{u + u\cos\alpha} = \dfrac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha} = \dfrac{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{2\cos^2\frac{\alpha}{2}}$

$\Rightarrow \tan\theta = \tan\dfrac{\alpha}{2} \Rightarrow \theta = \dfrac{\alpha}{2}$

$\therefore$ দুইটি সমমানের সমবিন্দু বেগের লব্ধি তাদের অন্তর্গত কোণকে সমদ্বিখণ্ডিত করে।

1(g) কোনো কণার উপর একই সময়ে ক্রিয়াশীল দুটি বেগের লব্ধি একটি বেগের সাথে 60° কোণ উৎপন্ন করে। সেই বেগটি দ্বিগুণ করলে উক্ত কোণ 30° হয়। বেগ দুটির অন্তর্গত কোণ নির্ণয় কর।

সমাধানঃ মনে করি, α কোণে ক্রিয়ারত u ও v বেগ দুইটির লব্ধি w, যা u বেগের সাথে 60° কোণ উৎপন্ন করে।

তাহলে, $\tan 60^\circ = \dfrac{v\sin\alpha}{u + v\cos\alpha} \cdots$ (i). আবার বেগদ্বয় 2u ও v হলে, $\tan 30^\circ = \dfrac{v\sin\alpha}{2u + v\cos\alpha} \cdots\cdots$ (ii)

$(i) \div (ii) \Rightarrow \dfrac{\tan 60^0}{\tan 30^0} = \dfrac{2u + v\cos\alpha}{u + v\cos\alpha} \Rightarrow \dfrac{1/\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \dfrac{u + v\cos\alpha}{2u + v\cos\alpha}$

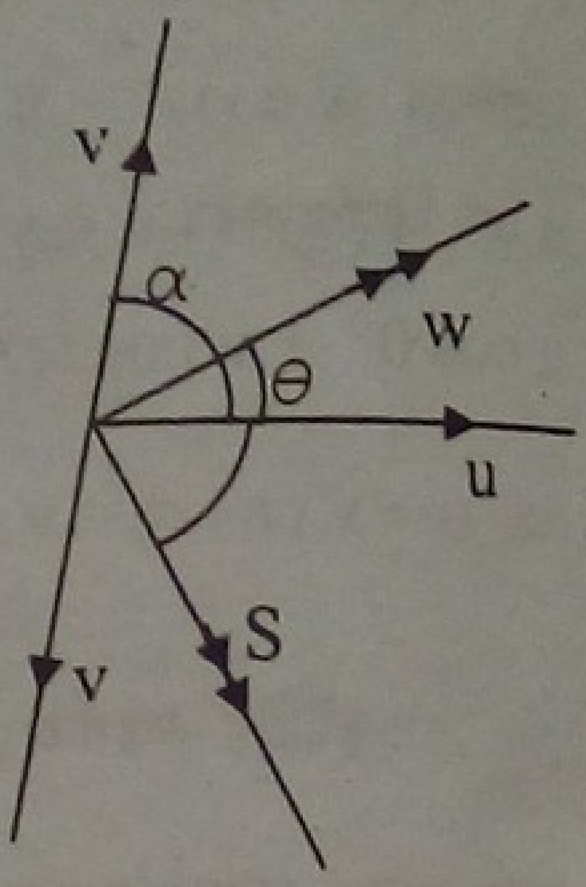
$\Rightarrow 2u + v\cos\alpha = 3u + 3v\cos\alpha \Rightarrow u = -2v\cos\alpha$

(i) হতে পাই, $\tan 60^\circ = \dfrac{v\sin\alpha}{-2v\cos\alpha + v\cos\alpha} = \dfrac{v\sin\alpha}{-v\cos\alpha} = -\tan\alpha$

$\Rightarrow \tan\alpha = -\tan 60^\circ = \tan(180^\circ - 60^\circ) = \tan 120^\circ \Rightarrow \alpha = 120^\circ$

$\therefore$ বেগ দুইটির অন্তর্গত কোণ $= 120^\circ$

1(h) একটি বিন্দুতে কার্যরত দুইটি বেগের একটির দিক বিপরীত করলে নতুন লব্ধি পূর্বের লব্ধির সাথে 90° কোণ উৎপন্ন করে। প্রমাণ কর যে, বেগ দুইটির মান সমান।



সমাধানঃ মনে করি, α কোণে কার্যরত u ও v বেগের লব্ধি w, যা u এর সাথে θ কোণ উৎপন্ন করে। $\therefore \tan\theta = \dfrac{v\sin\alpha}{u + v\cos\alpha} \cdots\cdots(i)$

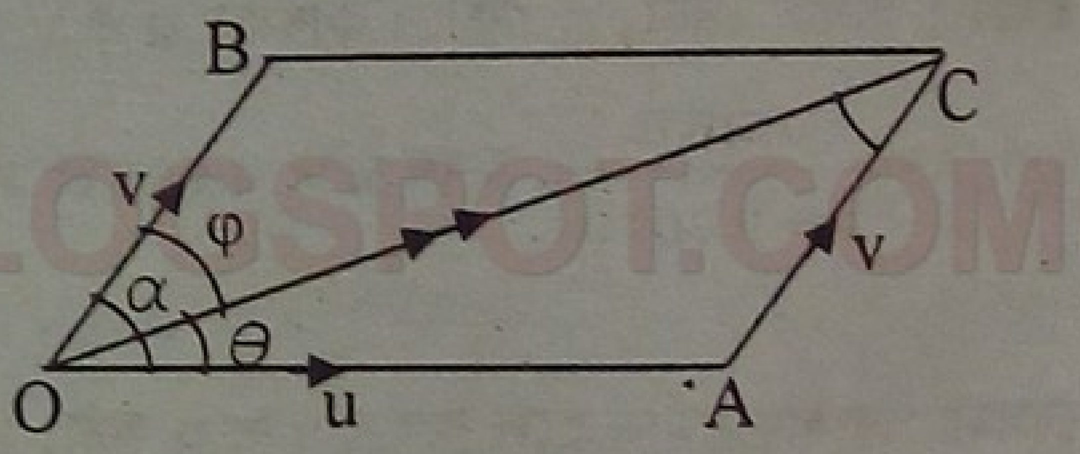
v কে বিপরীতমুখী করলে বেগদ্বয়ের মধ্যবর্তী কোণ হবে $(180^\circ - \alpha)$ এবং প্রশ্নমতে এদের লব্ধি S (ধরি) u এর সাথে $(90^\circ - \theta)$ কোণ উৎপন্ন করবে।

$$\therefore \tan(90^\circ - \theta) = \frac{v\sin(180^0 - \alpha)}{u + v\cos(180^0 - \alpha)} \Rightarrow \cot\theta = \frac{v\sin\alpha}{u - v\cos\alpha} \cdots(ii)$$

$$(i) \times (ii) \Rightarrow 1 = \frac{v\sin\alpha}{u + v\cos\alpha} \times \frac{v\sin\alpha}{u - v\cos\alpha} \Rightarrow u^2 - v^2\cos^2\alpha = v^2\sin^2\alpha$$

$\Rightarrow u^2 = v^2(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha) \Rightarrow u^2 = v^2 \Rightarrow u = v$ $\therefore$ বেগ দুইটির মান সমান।

1(i) দেখাও যে, কোনো বিন্দুতে ক্রিয়ারত দুইটি অসমান বেগের লব্ধি বৃহত্তর বেগের দিকে অধিকত হেলানো থাকবে।



মনে করি, পরস্পর α কোণে O বিন্দুতে একই সময়ে কার্যরত u ও v বেগ দুইটি যথাক্রমে OA ও OB দ্বারা মানে ও দিকে সূচিত। OACB সামান্তরিকটি অঙ্কন করি এবং O, C যোগ করি। তাহলে OC কর্ণটি বেগদ্বয়ের লব্ধির মান ও দিক সূচিত করবে। ধরি, বেগদ্বয়ের লব্ধি OA এর সাথে θ কোণ এবং OB এর সাথে φ কোণ উৎপন্ন করে।

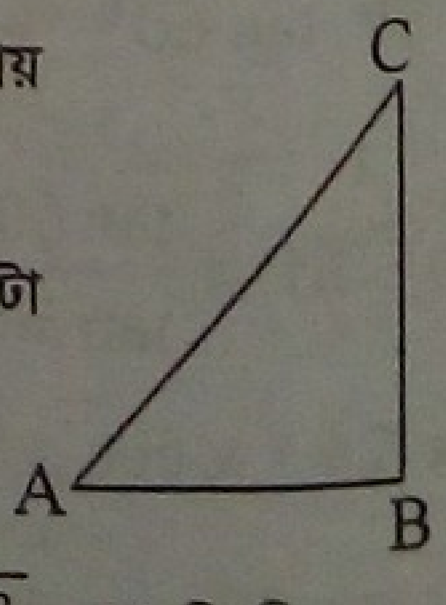
OB এর সমান ও সমান্তরাল বলে, AC একই বেগ v সূচিত করবে এবং $\angle OCA = \angle COB = \varphi$.

ধরি, $u > v$। তাহলে $OA > AC$.

এখন, OAC ত্রিভুজে, $OA > AC$.

$\therefore \angle OCA > \angle AOC \Rightarrow \varphi > \theta$ অর্থাৎ দুইটি অসমান বেগের লব্ধি বৃহত্তর বেগের দিকে অধিকত হেলানো থাকবে।

1(j) একজন সাইকেল চালক সোজাপথে 3 ঘণ্টায় 30 কি.মি. যাওয়ার পর প্রথম রাস্তার সাথে লম্বভাবে অপর একটি পথে 8 কি.মি. / ঘ. বেগে 5 ঘণ্টা চলল। তার গড়বেগ ও গড়দ্রুতি নির্ণয় কর।



সমাধান ঃ মনে করি, সাইকেল চালক 3 ঘণ্টায় AB = 30 কি.মি. এবং পরবর্তী 5 ঘণ্টায় $BC = 8 \times 5$ অর্থাৎ 40 কি.মি. যায়।

$\therefore$ মোট দূরত্ব = (30 + 40) কি.মি. = 70 কি.মি. এবং মোট সময় = (3 + 5) ঘণ্টা = 8 ঘণ্টা

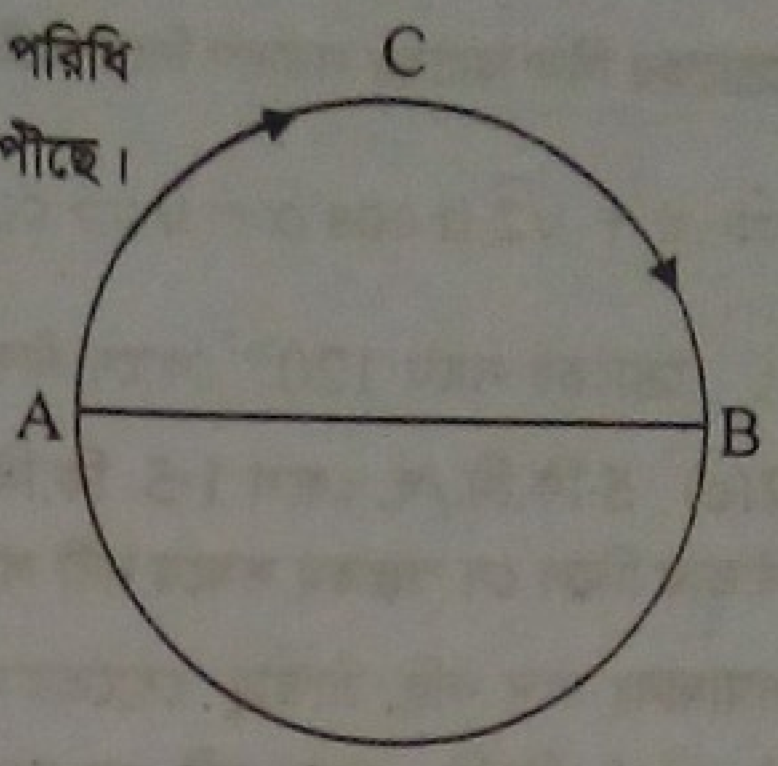
এবং গড়দ্রুতি $= \dfrac{70}{8}$ কি.মি./ঘ. $= 8\dfrac{3}{4}$ কি.মি./ঘ.

আবার নির্দিষ্ট দিকে সরলরেখা বরাবর অতিক্রান্ত দূরত্ব $= AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{30^2 + 40^2} = 50$ কি.মি.

গড়বেগ $= \dfrac{50}{8}$ কি.মি./ঘ. $= 6\dfrac{1}{4}$ কি.মি./ঘ.

1(k) একটি বস্তুকণা 35 সে.মি. ব্যাসার্ধবিশিষ্ট বৃত্তের পরিধি বরাবর 10 সেকেন্ডে একটি ব্যাসের এক প্রান্ত থেকে অপর প্রান্তে যায়। তার গড়বেগ ও গড়দ্রুতি নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ মনে করি, একটি বস্তুকণা $r = 35$ সে.মি. ব্যাসার্ধের ABC বৃত্তের পরিধি বরাবর AB ব্যাসের A প্রান্ত হতে যাত্রা করে 10 সেকেন্ডে অপর প্রান্ত B তে পৌছে। তাহলে, $AB = 2r = 2 \times 35$ সে.মি. $= 70$ সে.মি. এবং



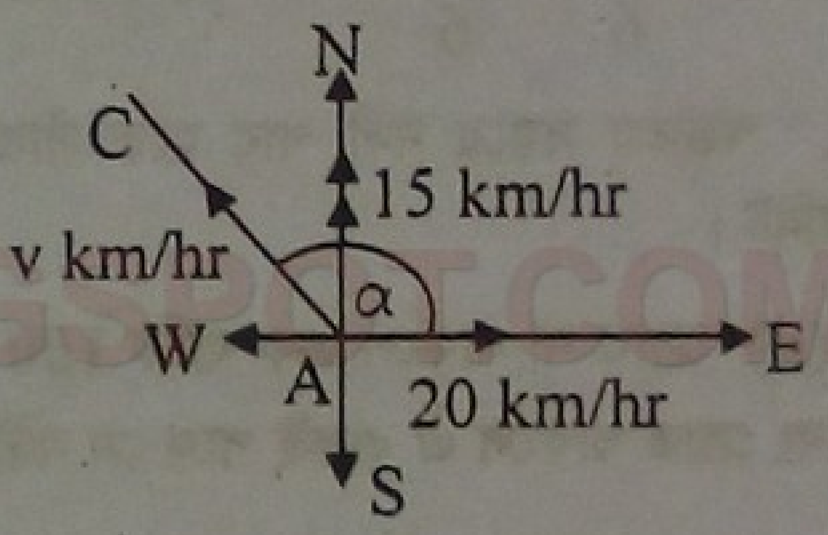
চাপ $ACB = \frac{1}{2}(2\pi r) = \pi \times 35$ সে.মি. $= 109.96$ সে.মি. (প্রায়)

$\therefore$ গড়বেগ $= \frac{70}{10}$ সে.মি./ সে. $= 7$ সে.মি./ সে.।

গড়দ্রুতি $= \frac{109.96}{10}$ সে.মি./ সে.$=10.96$ সে.মি./ সে.$=11$ সে.মি./ সে. (প্রায়)

1(*l*) পূর্বদিকে 20 কি.মি./ঘ. বেগে চলমান একটি বস্তুকণায় কী বেগ সংযুক্ত হলে কণাটি 15 কি.মি./ঘ. বেগে উত্তর দিকে চলতে থাকবে?

সমাধান ঃ মনে করি, v কি.মি./ঘ. বেগ সংযুক্ত করতে হবে, যা পূর্বদিকের সাথে α কোণ উৎপন্ন করে। পূর্ব দিক ও উত্তর দিক বরাবর 20 কি.মি./ঘ. ও v কি.মি./ঘ. বেগদ্বয় এবং এদের লব্ধি 15 কি.মি./ঘ. এর লম্বাংশ নিয়ে পাই,



$20 \cos 0 + v \cos \alpha = 15 \cos 90° \Rightarrow 20 + v \cos \alpha = 0$

$\Rightarrow v \cos \alpha = -20 \quad \cdots$ (i) এবং

$20 \sin 0 + v \sin \alpha = 15 \sin 90° \Rightarrow v \sin \alpha = 15 \cdots$ (ii)

$(i)^2 + (ii)^2 \Rightarrow v^2 = 400 + 225 = 625 \Rightarrow v = 25$

(i) হতে পাই, $25 \cos \alpha = -20 \Rightarrow \cos \alpha = -4/5$

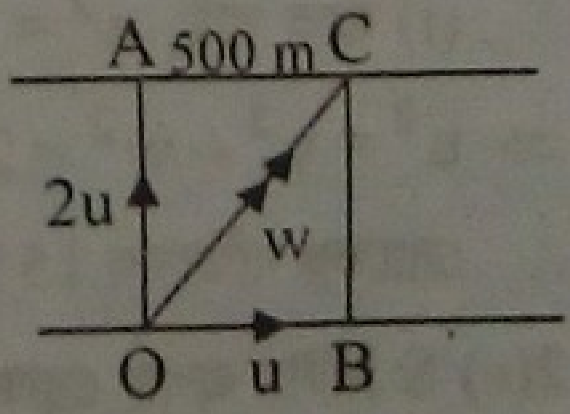
$\Rightarrow \alpha = \cos^{-1}(-4/5)$

$\therefore$ 25 কি.মি./ঘ. পরিমাণ বেগ সংযুক্ত করতে হবে, যা পূর্বদিকের সাথে $\cos^{-1}(-4/5)$ কোণ উৎপন্ন করে।

2.(a) এক ব্যক্তি নদীর স্রোতের সাথে সমকোণে যাত্রা করে অপর পাড়ে যাত্রাস্থানের বিপরীত বিন্দু হতে নদীর তীর বরাবর 500 মি. দূরে পৌছিল। সাঁতারুর বেগ স্রোতের বেগের দ্বিগুণ হলে, নদীর প্রস্থ নির্ণয় কর।

সমাধানঃ মনে করি, নদীর প্রস্থ OA এবং স্রোতের বেগ u ও সাঁতারুর বেগ 2u। u ও 2u যথাক্রমে OB ও OA দ্বারা মানে ও দিকে সূচিত হলে, এদের লব্ধি w (ধরি) AOBC সামান্তরিকের কর্ণ OC দ্বারা মানে ও দিকে সূচিত হবে,

যেখানে $OB = AC = 500$ মি.। তাহলে, $\frac{OB}{u} = \frac{OA}{2u} = \frac{w}{OC}$.

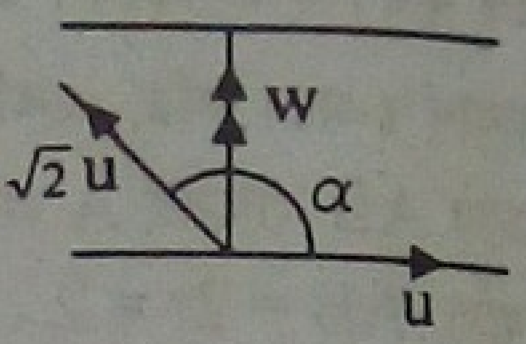


$\therefore \quad \frac{OB}{u} = \frac{OA}{2u} \Rightarrow OB = \frac{OA}{2} \Rightarrow OA = 2 \times OB = 2 \times 500$ মি. $= 1000$ মি.

$\therefore$ নদীর প্রস্থ 1000 মিটার অর্থাৎ 1 কি.মি.।

2(b) একজন সাঁতারু স্রোতের বেগের $\sqrt{2}$ গুণ বেগে সাঁতরিয়ে একটি নদী সোজাসুজি পার হতে চাই। স্রোতের সাথে কোন্ দিকে সাঁতার দিলে সে সফল হতে পারবে?

সমাধান ঃ মনে করি, স্রোতের গতিবেগ u এবং সাঁতারু স্রোতের সাথে α কোণে $\sqrt{2}\,u$ বেগে সাঁতার দিয়ে সোজাসোজি w বেগে নদী পার হতে পারে।



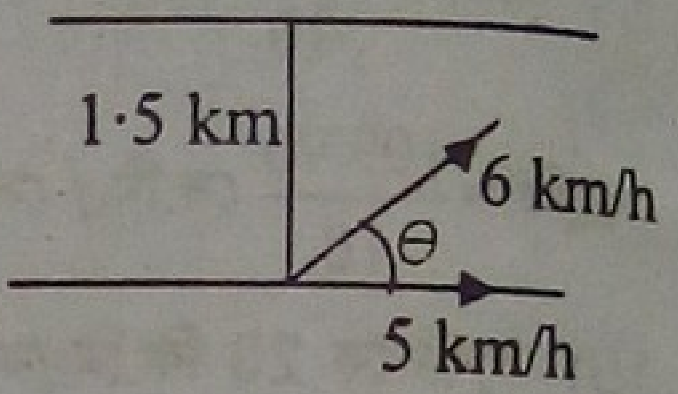
স্রোতের দিক বরাবর লম্বাংশ নিয়ে পাই, $u\cos 0^\circ + \sqrt{2}\,u\cos\alpha = w\cos 90^\circ$

$$\Rightarrow u + \sqrt{2}\,u\cos\alpha = 0 \Rightarrow \cos\alpha = -\frac{1}{2} = \cos 120^\circ \Rightarrow \alpha = 120^\circ$$

$\therefore$ স্রোতের সাথে 120° কোণে সাঁতার দিতে হবে।

2(c) 5 কি.মি./ঘ. বেগে 1·5 কি.মি. প্রশস্ত একটি নদী প্রবাহিত হচ্ছে। একজন সাঁতারু 6 কি.মি./ঘ. বেগে কোন্ দিকে সাঁতার দিলে সে স্বল্পতম সময়ে নদী পার হতে পারবে? স্বল্পতম সময় নির্ণয় কর।

সমাধানঃ মনে করি, সাঁতারু স্রোতের সাথে θ কোণে 6 কি.মি./ঘ. বেগে t ঘণ্টায় $d = 1{\cdot}5$ কি.মি. প্রশস্ত নদী পার হয়।



নদীর প্রস্থ বরাবর স্রোতের বেগ এবং সাঁতারুর বেগের অংশকের সমষ্টি $= \{5\cos 90^\circ + 6\cos(90^\circ - \theta)\} = 6\sin\theta$ কি.মি./ঘ.

$\therefore\ t = \dfrac{d}{6\sin\theta}$. t ক্ষুদ্রতম হবে যদি $\sin\theta$ বৃহত্তম হয় অর্থাৎ $\sin\theta = 1 = \sin 90^\circ \Rightarrow \theta = 90^\circ$ হয়।

$\therefore\ t = \dfrac{d}{6} = \dfrac{1.5}{6}$ ঘণ্টা $=15$ মিনিট।

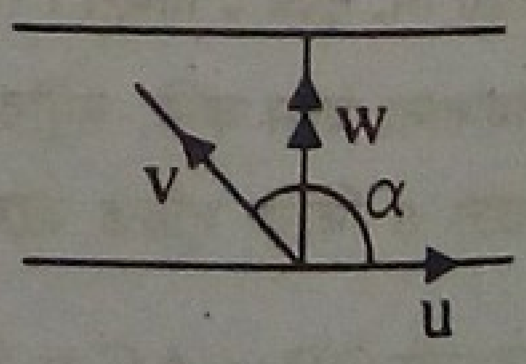
$\therefore$ স্বল্পতম সময়ে নদী পার হতে সাঁতারুকে স্রোতের সাথে 90° কোণে সাঁতার দিতে হবে এবং স্বল্পতম সময় 15 মিনিট।

2(d) স্রোত না থাকলে এক ব্যক্তি 100 মিটার চাওড়া একটি নদী সাঁতার দিয়ে ঠিক সোজাসোজিভাবে ৪ মিনিটে পার হয় এবং স্রোত থাকলে ঐ একই পথে সে নদীটি 5 মিনিটে পার হতে পারে। স্রোতের গতিবেগ নির্ণয় কর।

[কু.'০০; ব.'০২; রা.'০৪; ঢা.'১০; য.'১২; সি.'১২]

সমাধান ঃ মনে করি, স্রোতের গতিবেগ u মিটার/ মিনিট এবং লোকটি স্রোতের সাথে α কোণে v মিটার/মিনিট বেগে সাঁতার দিয়ে সোজাসোজি w মিটার/ মিনিট বেগে নদী পার হয়। তাহলে, $v = \dfrac{100}{4} = 25,\ w = \dfrac{100}{5} = 20$ এবং

$$w^2 = u^2 + v^2 + 2uv\cos\alpha \cdots\cdots \text{(i)}$$



স্রোতের দিক বরাবর লম্বাংশ নিয়ে পাই, $u\cos 0^\circ + v\cos\alpha = w\cos 90^\circ$

$$\Rightarrow u + v\cos\alpha = 0 \Rightarrow v\cos\alpha = -u$$

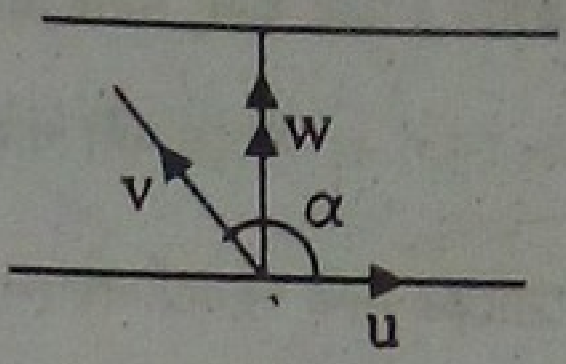
$\therefore$ (i) হতে পাই, $w^2 = u^2 + v^2 + 2u(-u) = u^2 + v^2 - 2u^2 = v^2 - u^2$

$$\Rightarrow u^2 = v^2 - w^2 = 25^2 - 20^2 = 225 \Rightarrow u = 15$$

$\therefore$ স্রোতের গতিবেগ 15 মিটার/ মিনিট।

2(e) S মিটার প্রশস্ত স্রোতহীন একটি নদী সাঁতার দিয়ে পার হতে একজন লোকের t মিনিট সময় লাগে। স্রোত থাকলে t_1 মিনিটে সে এটা সোজাসুজি পার হয়। প্রমাণ কর যে, স্রোতের গতিবেগ $S\sqrt{\dfrac{1}{t^2} - \dfrac{1}{t_1^{\,2}}}$ মি./মিনিট। [বুয়েট '০০-০১]

প্রমাণ ঃ মনে করি, স্রোতের গতিবেগ u মি./ মিনিট এবং লোকটি স্রোতের সাথে α কোণে v মি./মিনিট বেগে সাঁতার দিয়ে সোজাসোজি f মিটার/ মিনিট বেগে নদী পার হয়। তাহলে, $v=\frac{s}{t}$, $w=\frac{s}{t_1}$ এবং $w^2=u^2+v^2+2uv\cos\alpha \cdots\cdots$ (i)



স্রোতের দিক বরাবর লম্বাংশ নিয়ে পাই, $u\cos 0^\circ + v\cos\alpha = w\cos 90^\circ$

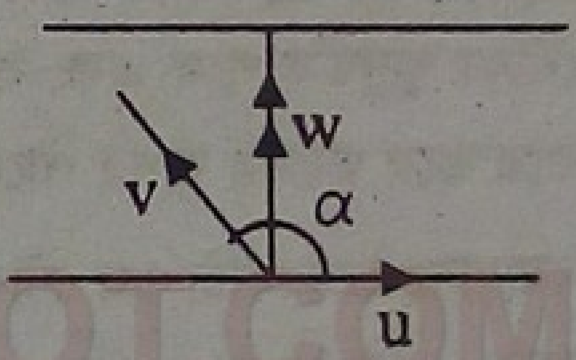
$\Rightarrow u+v\cos\alpha=0 \Rightarrow v\cos\alpha=-u$

$\therefore$ (i) হতে পাই, $w^2=u^2+v^2+2u(-u)=u^2+v^2-2u^2=v^2-u^2$

$\Rightarrow u^2=v^2-w^2 \Rightarrow u=\sqrt{\frac{S^2}{t^2}-\frac{S^2}{t_1^2}}$ $\therefore$ স্রোতের গতিবেগ $S\sqrt{\frac{1}{t^2}-\frac{1}{t_1^2}}$ মি./মিনিট ।

2(f) এক ব্যক্তি সোজাসুজি t_1 সময়ে একটি নদী পারাপার হতে পারে। তীর বরাবর নদীর প্রস্থের সমান দূরত্ব গিয়ে ফিরে আসতে তার t_2 সময় লাগে। সাঁতারুর বেগ u এবং স্রোতের বেগ v ($u>v$) হলে, প্রমাণ কর যে, $\sqrt{u^2-v^2}:u=t_1:t_2$

প্রমাণ : মরে করি, নদীর প্রস্থ d এবং সাঁতারু স্রোতের সাথে α কোণে সাঁতার দিয়ে সোজাসোজি w বেগে নদী পার হয়। তীর বরাবর স্রোতের অনুকূলে যেতে t সময় এবং স্রোতের প্রতিকূলে ফিরে আসতে t' সময় লাগলে,



$d=(u+v)t \Rightarrow t=\frac{d}{u+v}$ এবং $d=(u-v)t' \Rightarrow t'=\frac{d}{u-v}$

[$\because$ স্রোতের অনুকূলে ও প্রতিকূলে সাঁতারুর বেগ যথাক্রমে $=u+v$ ও $=u-v$]

$\therefore\ t_2=t+t'=\frac{d}{u+v}+\frac{d}{u-v}=\frac{2du}{u^2-v^2} \Rightarrow 2du=(u^2-v^2)t_2 \cdots\cdots$ (i)

আবার, w বেগে নদী পারাপার হতে তাকে t_1 সময়ে 2d দূরত্ব অতিক্রম করতে হয় । $\therefore\ 2d=wt_1 \cdots$(ii)

(i) ও (ii) হতে পাই, $uwt_1=(u^2-v^2)t_2 \Rightarrow t_1:t_2=(u^2-v^2):uw \cdots\cdots$ (iii)

এখন, স্রোতের দিক বরাবর লম্বাংশ নিয়ে পাই, $v\cos 0^\circ + u\cos\alpha = w\cos 90^\circ$

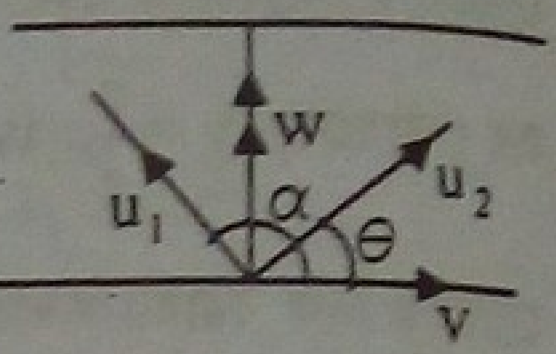
$\Rightarrow v+u\cos\alpha=0 \Rightarrow u\cos\alpha=-u$

লব্ধি বেগ $w=\sqrt{u^2+v^2+2uv\cos\alpha}=\sqrt{u^2+v^2+2v(-v)}=\sqrt{u^2-v^2}$

(iii) হতে পাই, $t_1:t_2=(u^2-v^2):u\sqrt{u^2-v^2}$ $\therefore \sqrt{u^2-v^2}:u=t_1:t_2$ (Proved)

2(g) দুইজন সাঁতারু একজন u_1 গতিবেগে সাঁতরিয়ে ক্ষুদ্রতম পথে এবং অপরজন u_2 গতিবেগে সাঁতরিয়ে ক্ষুদ্রতম সময়ে v বেগে প্রবাহিত একটি নদী পার হওয়ার জন্য এক সঙ্গে যাত্রা করে এবং উভয়ে নদীর অপর তীরে একত্রে পৌঁছিল। প্রমাণ কর যে, $u_1^2-u_2^2=v^2$,যেখানে $u_1>v$.

প্রমাণ ঃ মনে করি, নদীর প্রস্থ d এবং ১ম সাঁতারু স্রোতের সাথে α কোণে সাঁতার দিয়ে ক্ষুদ্রতম পথে অর্থাৎ সোজাসোজি w বেগে t_1 সময়ে নদী পার হয়। তাহলে, $d = wt_1 \Rightarrow t_1 = \frac{d}{w}$



স্রোতের দিক বরাবর লম্বাংশ নিয়ে পাই, $v\cos 0° + u_1 \cos\alpha = w\cos 90°$

$\Rightarrow v + u_1\cos\alpha = 0 \Rightarrow u_1 \cos\alpha = -v$

$\therefore \ w = \sqrt{u_1^2 + v^2 + 2u_1 v\cos\alpha} = \sqrt{u_1^2 + v^2 + 2v(-v)} = \sqrt{u_1^2 - v^2}$

ধরি, ২য় সাঁতারু স্রোতের সাথে θ কোণে u_2 বেগে সাঁতার দিয়ে ক্ষুদ্রতম t_2 সময়ে নদী পার হয়। নদীর প্রস্থ বরাবর স্রোতের বেগ v এবং সাঁতারুর বেগ u_2 এর অংশকের সমষ্টি $= v\cos 90° + u_2\cos(90° - \theta) = u_2 \sin\theta$

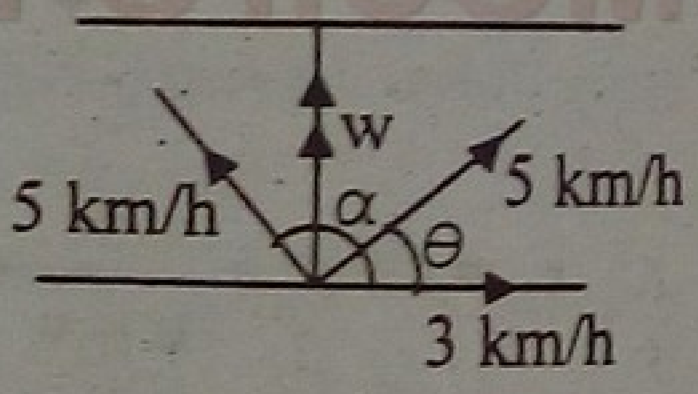
$\therefore \ t_2 = \frac{d}{u_2 \sin\theta}$. t_2 ক্ষুদ্রতম হবে যদি $\sin\theta$ বৃহত্তম হয় অর্থাৎ $\sin\theta = 1$ হয়। $\therefore t_2 = \frac{d}{u_2}$

প্রশ্নমতে, $t_1 = t_2 \Rightarrow \frac{d}{w} = \frac{d}{u_2} \Rightarrow w = u_2 \Rightarrow \sqrt{u_1^2 - v^2} = u_2 \ \therefore \ u_1^2 - u_2^2 = v^2$

2(h) 550 m প্রশস্ত একটি নদীর স্রোত 3 km/hr বেগে প্রবাহিত। দুইটি নৌকার প্রত্যেকটি 5 km/ hr বেগে একটি নৌকা ক্ষুদ্রতম পথে এবং অপরটি ক্ষুদ্রতম সময়ে নদীটি অতিক্রম করতে চেষ্টা করছে। যদি তারা একই সময়ে যাত্রা শুরু করে তবে তাদের অপর পাড়ে পৌঁছাবার সময়ের পার্থক্য নির্ণয় কর। [চ.'০৪]

সমাধানঃ মনে করি, ১ম নৌকা স্রোতের সাথে α কোণে ক্ষুদ্রতম পথে অর্থাৎ সোজাসোজি d = 550 মি. = 0·55 কি.মি. দূরত্ব w কি.মি./ঘ. বেগে t_1 ঘন্টায় নদী পার হয়।

তাহলে, $d = wt_1 \Rightarrow t_1 = \frac{d}{w} \cdots\cdots$ (i)



স্রোতের দিক বরাবর লম্বাংশ নিয়ে পাই, $3\cos 0° + 5\cos\alpha = w\cos 90°$

$\Rightarrow 3 + 5\cos\alpha = 0 \Rightarrow 5\cos\alpha = -3$

$\therefore \ w = \sqrt{3^2 + 5^2 + 2\times 3\times 5\cos\alpha} = \sqrt{9 + 25 + 6\times -3} = \sqrt{35 - 18} = 4 \ \therefore \ t_1 = \frac{d}{4}$

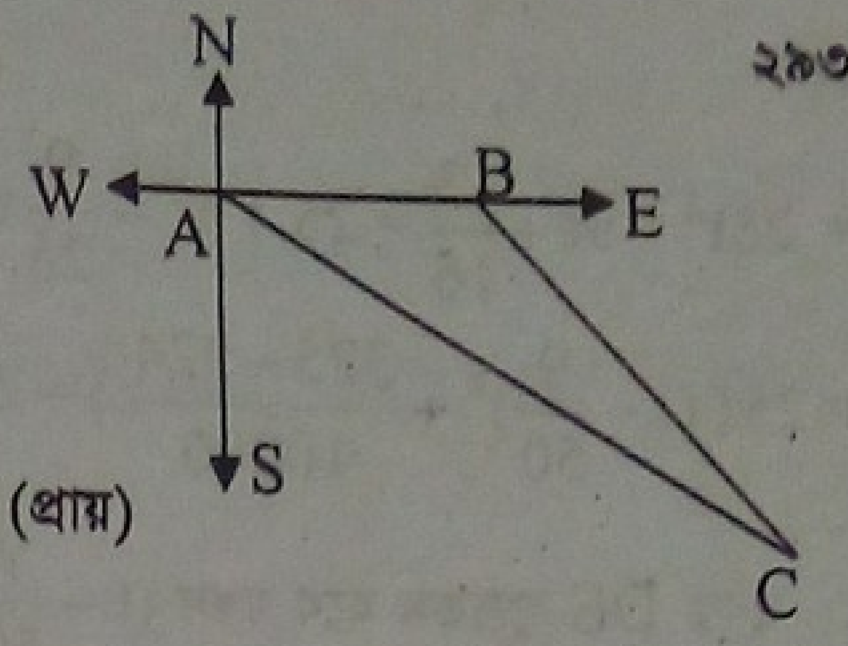
ধরি, ২য় নৌকা স্রোতের সাথে θ কোণে 5 কি.মি./ঘ. বেগে ক্ষুদ্রতম t_2 ঘন্টায় নদী পার হয়। নদীর প্রস্থ বরাবর স্রোতের বেগ এবং নৌকার বেগের অংশকের সমষ্টি $= 3\cos 90° + 5\cos(90° - \theta) = 5\sin\theta$ কি.মি./ঘ.

$\therefore \ t_2 = \frac{d}{5\sin\theta}$. t_2 ক্ষুদ্রতম হবে যদি $\sin\theta$ বৃহত্তম হয় অর্থাৎ $\sin\theta = 1$ হয়। $\therefore t_2 = \frac{d}{5}$

$\therefore$ সময়ের পার্থক্য $= (t_1 - t_2)$ ঘন্টা $= \left(\frac{d}{4} - \frac{d}{5}\right)$ ঘন্টা $= \frac{d}{20}$ ঘন্টা $= \frac{60\times 0.55}{20}$ মিনিট = 1·65 মিনিট।

3(a) কোন বস্তুকণা 2 সেকেন্ডে 3 মি./সে. বেগে পূর্ব দিকে A হতে B পর্যন্ত যায়। অতপর তা 3 সেকেন্ডে 4 মি./সে. বেগে B হতে C পর্যন্ত দক্ষিণ-পূর্ব দিকে যায়। A ও B এর দূরত্ব নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ প্রশ্নমতে, AB = 2 × 3 মি. = 6 মি. , BC = 3 × 4 মি. = 12 মি. এবং $\angle ABC = 90° + 45°$



ΔABC এ কোসাইন সূত্র প্রয়োগ করে পাই,

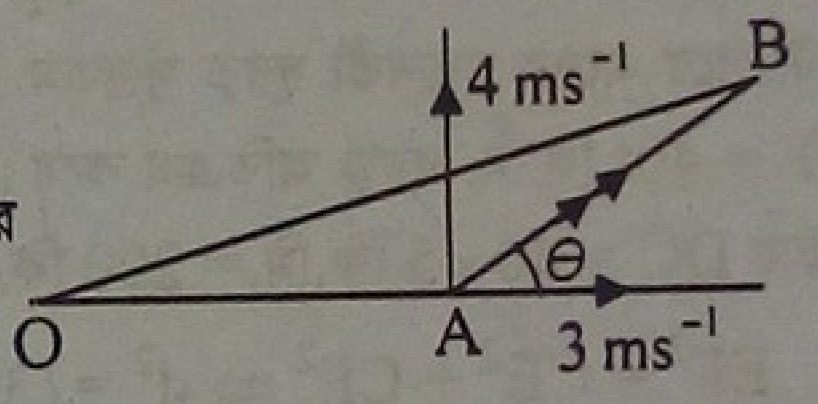
$$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2.AB.BC\cos(90° + 45°)$$
$$= 6^2 + 12^2 + 2\times6\times12\sin45°$$
$$= 36 + 144 + 144\times\frac{1}{\sqrt{2}} = 281.82 \text{ (প্রায়)} \Rightarrow AC = 16.79 \text{ (প্রায়)}$$

$\therefore$ নির্ণেয় দূরত্ব $= 16.79$ মি. (প্রায়)।

3(b) একটি কণা একটি সরলরেখা বরাবর 3 ms^{-1} গতিতে চলছে। 3 সে. পর কণাটির গতির সাথে লম্ব বরাবর 4 ms^{-1} গতি সংযোজন করা হল। এর 2 সেকেন্ড পর কণাটি যে বিন্দু হতে প্রথম যাত্রা শুরু করেছিল তা হতে কত দূরে থাকবে? [কু.'০২]

সমাধানঃ মনে করি, কণাটি O বিন্দু হতে যাত্রা করে 3 সে. পর $OA = 3\times3$ m $= 9$ m দূরত্বে A তে পৌছে।

ধরি, A বিন্দুতে কণাটির গতির সাথে OA এর উপর লম্ব বরাবর 4 ms^{-1} গতি সংযোজন করা হলে 2 সেকেন্ড পর তা B তে পৌছে।



$\therefore$ তাদের লব্ধিবেগ $= \sqrt{3^2 + 4^2}\ ms^{-1} = 5\ ms^{-1}$, যা OA এর বর্ধিতাংশের সাথে $\theta = \tan^{-1}\frac{4}{3}$ কোণ উৎপন্ন করে এবং $AB = 5\times2$ m $= 10$ m

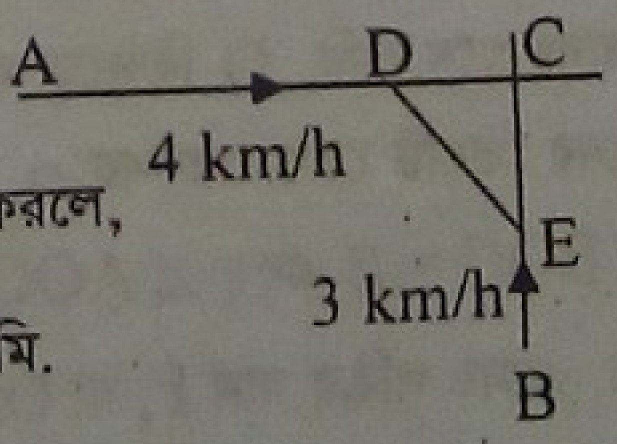
$\therefore$ নির্ণেয় দূরত্ব $OB = \sqrt{OA^2 + AB^2 - 2.OA.AB\cos(\pi-\theta)} = \sqrt{9^2 + 10^2 + 2.9.10\cos\theta}$ m

$$= \sqrt{81 + 100 + 2.9.10\times\frac{3}{5}} \text{ m} \quad [\because \tan\theta = \frac{4}{3}, \therefore \cos\theta = \frac{2}{5}]$$

$$= \sqrt{81 + 100 + 2.9.10\times\frac{3}{5}} \text{ m} = \sqrt{289} \text{ m} = 17 \text{ m}$$

3(c) লম্বভাবে মিলিত হয় এরূপ দুইটি সোজা রাস্তার একটি বরাবর 4 km/hr বেগে একটি ভ্যান গাড়ি চলছে। অন্য রাস্তা দিয়ে এক ব্যক্তি 3 km/hr বেগে হেঁটে ভ্যানে উঠার চেষ্টা করছে। যদি কোন এক সময় ভ্যান গাড়িটি চৌমাথা থেকে 750 মিটার পিছনে এবং লোকটি 500 মিটার দূরে থাকে, তাহলে দেখাও যে, ঐ ব্যক্তি কখনও ভ্যান গাড়ির 50 মিটারের অধিক নিকটে আসতে পারবে না।

সমাধান ঃ মনে করি, AC রাস্তা বরাবর ভ্যান গাড়ি এবং ও BC রাস্তা বরাবর ব্যক্তিটি চলছে।



ধরি, $AC = 750$ মি. $= \frac{3}{4}$ কি.মি., $BC = 500$ মি. $= \frac{1}{2}$ কি.মি.।

t ঘন্টা পর ভ্যান গাড়িটি $AD = 4t$ কি.মি. ও ঐ ব্যক্তি $BE = 3t$ কি.মি. পথ অতিক্রম করলে,

$DC = AC - AD = (\frac{3}{4} - 4t)$ কি.মি. এবং $CE = BC - BE = (\frac{1}{2} - 3t)$ কি.মি.

$\therefore$ DEC সমকোণী ত্রিভুজ হতে পাই,

$$DE^2 = DC^2 + EC^2 = (\frac{3}{4} - 4t)^2 + (\frac{1}{2} - 3t)^2 = \frac{9}{16} - 6t + 16t^2 + \frac{1}{4} - 3t + 9t^2$$

$= 25t^2 - 9t + \frac{13}{16} = 25 \{ t^2 - \frac{9}{25}t + \frac{13}{400}) = 25\{ (t - \frac{9}{50})^2 + \frac{13}{400} - \frac{81}{2500} \}$

$= 25\{ (t - \frac{9}{50})^2 + \frac{325-324}{10000} \} = 25\{ (t - \frac{9}{50})^2 + \frac{1}{10000} \}$

$\therefore$ দূরত্ব DE ক্ষুদ্রতম হবে যখন $(t - \frac{9}{50})^2 = 0$ হবে এবং কাজেই ভ্যানগাড়ি ও ব্যক্তির দূরত্ব $DE = \frac{5}{100}$ কি.মি. $= 50$ মি. । সুতরাং, ঐ ব্যক্তি কখনও ভ্যান গাড়ির 50 মিটারের অধিক নিকটে আসতে পারবে না।

3(d) পরস্পর লম্বভাবে মিলিত দুইটি রেলপথের একটির উপর দিয়ে ঘন্টায় 30 কি.মি. বেগে চলমান একটি ট্রেন সকাল 10 টায় জংশন অতিক্রম করে। অন্য একটি ট্রেন দ্বিতীয় রেলপথে ঘন্টায় 40 কি.মি. বেগে চলে বিকেল 3 টায় জংশনে পৌছে। কখন এদের মধ্যে দূরত্ব ক্ষুদ্রতম ছিল। ক্ষুদ্রতম দূরত্ব নির্ণয় কর। [কু.'০৪]

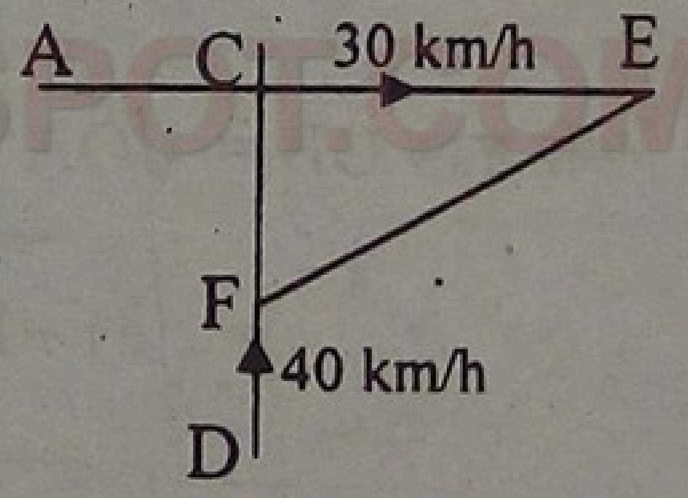
সমাধান : মনে করি, AC ও DC দুইটি রেলপথ এবং C তাদের লম্বভাবে মিলিত জংশন । 30 km/h বেগে চলমান ট্রেনটি সকাল 10 টায় C অতিক্রম করে এবং 40 km/h বেগে চলমান ট্রেনটি D তে অবস্থান করে। 10 টা বাজার t ঘন্টা পরে এদের মধ্যবর্তী দূরত্ব ক্ষুদ্রতম EF = d কি.মি. হয় যেখানে ১ম ট্রেনটি CE = 30t কি.মি. এবং ২য় ট্রেনটি DF = 40t কি.মি. দূরত্ব অতিক্রম করে। আবার ২য় ট্রেনটি D হতে যাত্রা করে সকাল 10 টা হতে বিকেল 3 টা মোট 5 ঘন্টায় $DC = 40 \times 5$ কি.মি.= 200 কি.মি. পথ অতিক্রম করে। সুতরাং $FC = DC - DF = (200 - 40t)$ কি.মি.

$\therefore \quad EF^2 = CE^2 + CF^2 \Rightarrow d^2 = (30t)^2 + (200 - 40t)^2$

$\Rightarrow d^2 = 900t^2 + 40000 - 16000t + 1600t^2$

$= 2500\,t^2 - 16000t + 40000 = 100\,(25t^2 - 160\,t + 400)$

$= 100\{(5t)^2 - 2.5t.16 + 16^2 + 144\} = 100\{(5t-16)^2 + 144\}$



যেহেতু $\{(5t-16)^2$ এর মান সর্বদাই ধনাত্মক, সুতরাং d ক্ষুদ্রতম হবে যখন

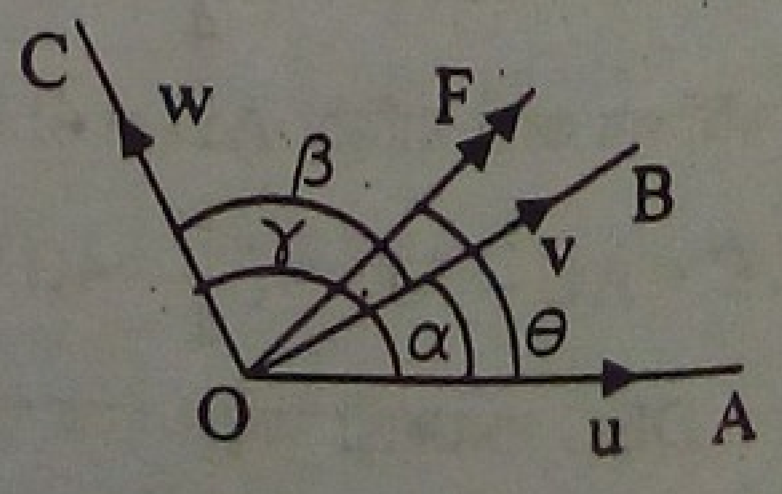
$(5t-16)^2 = 0 \Rightarrow t = \frac{16}{5}$

$\therefore$ সকাল 10 টার $\frac{16}{5} = 3\frac{1}{5}$ ঘন্টা পরে অর্থাৎ বেলা 1 টা 12 মিনিটে এদের মধ্যে দূরত্ব ক্ষুদ্রতম হবে এবং ক্ষুদ্রতম দূরত্ব $d = \sqrt{100 \times 144}$ কি.মি. = 120 কি.মি. ।

4(a) কোনো কণার উপর ক্রিয়াশীল u, v , w মানের তিনটি গতিবেগ পর্যায়ক্রমে পরস্পর α, β, γ কোণে আনত। দেখাও যে, এদের লব্ধির মান $= (u^2 + v^2 + w^2 + 2uv \cos\alpha + 2vw \cos\beta + 2wu \cos\gamma)^{1/2}$ [ঢা.'০২]

প্রমাণঃ মনে করি, O বিন্দুতে যথাক্রমে OA, OB, OC বরাবর u, v, w মানের তিনটি বেগ পরস্পর α, β, γ ক্রিয়া করে। অর্থাৎ $\angle AOB = \alpha$, $\angle BOC = \beta$ এবং $\angle AOC = \gamma = \alpha + \beta \Rightarrow \gamma - \alpha = \beta$

ধরি, এদের লব্ধির মান F, যা OA এর সাথে θ কোণ উৎপন্ন করে।



OA এবং এর উপর লম্ব রেখা বরাবর বেগগুলোর লম্বাংশ নিয়ে পাই,

$F\cos\theta = u\cos 0^\circ + v\cos\alpha + w\cos\gamma = u + v\cos\alpha + w\cos\gamma \cdots\cdots$ (i) এবং

$F\sin\theta = u\sin 0^\circ + v\sin\alpha + w\sin\gamma = v\sin\alpha + w\sin\gamma \cdots\cdots$ (ii)

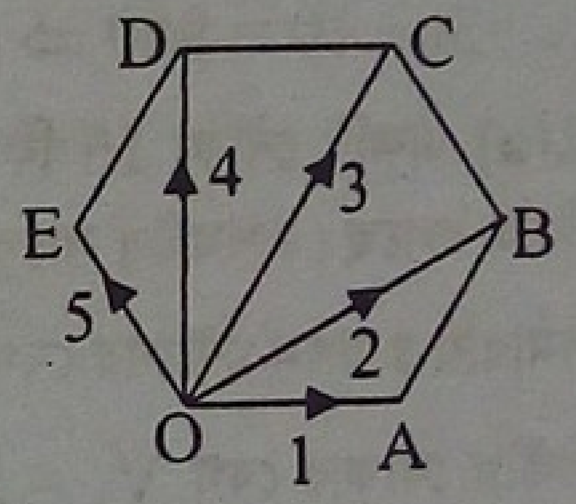
$\therefore$ (i) ^{2} + (ii)^2 $\Rightarrow F^2 = u^2 + v^2\cos^2\alpha + w^2\cos^2\gamma + 2uv\cos\alpha + 2\,vw\cos\alpha\cos\gamma$
$+ 2wu\cos\gamma + v^2\sin^2\alpha + w^2\sin^2\gamma + 2vw\sin\alpha\sin\gamma.$

$\Rightarrow F^2 = u^2 + v^2(\cos^2\alpha + \sin^2\alpha) + w^2(\cos^2\gamma + \sin^2\gamma) + 2uv\cos\alpha + 2wu\cos\gamma +$
$2\,vw(\cos\alpha\cos\gamma + \sin\alpha\sin\gamma)$
$= u^2 + v^2 + w^2 + 2uv\cos\alpha + 2wu\cos\gamma + 2QR\cos(\gamma - \alpha)$

$\therefore$ লব্ধির মান $F = (u^2 + v^2 + w^2 + 2uv\cos\alpha + 2vw\cos\beta + 2\,wu\cos\gamma)^{1/2}$ (প্রমাণিত)

4(b) 1, 2, 3, 4, 5 মানের বেগগুলো কোন সুষম ষড়ভুজের একটি কৌণিক বিন্দু থেকে যথাক্রমে অপর কৌণিক বিন্দুগুলোর দিকে ক্রিয়ারত আছে। এদের লব্ধির মান নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ মনে করি, OABCDE সুষম ষড়ভুজের OA, OB, OC, OD, OF বরাবর যথাক্রমে 1, 2, 3, 4, 5 মানের বেগগুলো ক্রিয়াশীল এবং এদের লব্ধির মান w কেজি ওজন, যা OA এর সাথে θ কোণ উৎপন্ন করে।



তাহলে, $\angle AOE = 180° - \dfrac{360^0}{6} = 120°$ এবং

$\angle AOB = \angle BOC = \angle COD = \angle DOE = \dfrac{120^0}{4} = 30°$

এখন OA এবং OD বরাবর লম্বাংশ নিয়ে পাই,

$w\cos\theta = 1\cos 0° + 2\cos 30° + 3\cos 60° + 4\cos 90° + 5\cos 120°$

$= 1 + 2\times\dfrac{\sqrt{3}}{2} + 3\times\dfrac{1}{2} + 4\times 0 + 5\times -\dfrac{1}{2} = \sqrt{3}$ …… (i) এবং

$w\sin\theta = 1\sin 0° + 2\sin 30° + 3\sin 60° + 4\sin 90° + 5\sin 120°$

$= 1\times 0 + 2\times\dfrac{1}{2} + 3\times\dfrac{\sqrt{3}}{2} + 4\times 1 + 5\times\dfrac{\sqrt{3}}{2} = 5 + 4\sqrt{3}$ …… (ii)

$(i)^2 + (ii)^2 \Rightarrow w^2 = (\sqrt{3})^2 + (5 + 4\sqrt{3})^2 = 3 + 25 + 48 + 40\sqrt{3} = 76 + 40\sqrt{3}$

$(ii) \div (i) \Rightarrow \tan\theta = (5 + 4\sqrt{3})/\sqrt{3} \Rightarrow \theta = \tan^{-1}(4 + 5/\sqrt{3})$

$\therefore$ বলগুলোর লব্ধির মান $= \sqrt{76 + 40\sqrt{3}} = 2\sqrt{19 + 10\sqrt{3}}$, যা 1 মানের বেগের ক্রিয়ারেখার সাথে $\tan^{-1}(4 + \dfrac{5}{\sqrt{3}})$ কোণ উৎপন্ন করে।

প্রশ্নমালা IX B

1(a) 200 মি. ও 300 মি. দৈর্ঘ্যের দুইটি ট্রেন একটি স্টেশন থেকে একই দিকে দুইটি সমান্তরাল রেলপথে যথাক্রমে 40 কি.মি./ ঘ. ও 30 কি.মি./ ঘ. বেগে যাত্রা করে। কত সময়ে এরা পরস্পরকে অতিক্রম করবে?

সমাধান ঃ 30 কি.মি./ ঘ. বেগে চলমান ট্রেনের সাপেক্ষে 40 কি.মি./ ঘ. বেগে চলমান ট্রেনের আপেক্ষিক গতিবেগ
w = (40 − 30) কি.মি./ ঘ. = 10 কি.মি./ ঘ.।