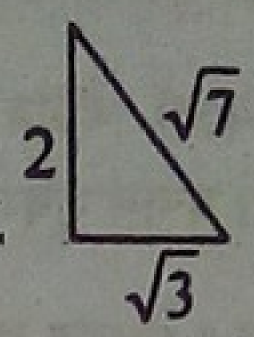
(i) ÷ (ii) $\Rightarrow \frac{3}{\cos\theta} \times \frac{\cos(30^0 - \theta)}{5} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow 6(\cos 30° \cos\theta + \sin 30° \sin\theta) = 5\sqrt{3}\cos\theta$

$\Rightarrow 6 \times \frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta + 6 \times \frac{1}{2}\sin\theta = 5\sqrt{3}\cos\theta \Rightarrow 3\sin\theta = 2\sqrt{3}\cos\theta$

$\Rightarrow \tan\theta = \frac{2}{\sqrt{3}} \therefore \cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}$, [পার্শ্বের ত্রিভুজ হতে।]



(i) হতে পাই, $V_R = 3 \times \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{3}} = \sqrt{21}$

$\therefore$ বৃষ্টির প্রকৃত বেগ $\sqrt{21}$ কি.মি./ঘ., যা অনুভূমিকের সাথে অর্থাৎ ব্যক্তির বেগের সাথে $\tan^{-1}\frac{2}{\sqrt{3}}$ কোণ উৎপন্ন করে।

প্রশ্নমালা IX C

1(a) একটি বিমান 50 কি.মি./ঘ. বেগে সরল রাণওয়ে স্পর্শ করে এবং 300 মি. দূরত্ব অতিক্রম করে থামে। মন্দন সুষম হলে বিমানটি থামতে প্রয়োজনীয় সময় নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ বিমানের আদিবেগ $u = 50$ কি.মি./ঘ. $= 50 \times \frac{1000}{3600}$ মি./ সে. $= \frac{125}{9}$ মি./ সে., দূরত্ব $s = 300$ মি.

এবং শেষবেগ $v = 0$। বিমানটি থামতে প্রয়োজনীয় সময় t সেকেন্ড এবং মন্দন f মি./ সে.^{2} হলে,

$v^2 = u^2 - 2fs$ সূত্র হতে পাই, $0 = (\frac{125}{9})^2 - 2f \times 300 \Rightarrow f = \frac{125 \times 125}{9 \times 9 \times 600} = \frac{5 \times 125}{81 \times 24}$

এবং $v = u - ft$ সূত্র হতে পাই, $0 = \frac{125}{9} - \frac{5 \times 125}{81 \times 24}t \Rightarrow t = \frac{125}{9} \times \frac{81 \times 24}{5 \times 125} = \frac{216}{5} = 43.2$

$\therefore$ নির্ণেয় সময় 43.2 সেকেন্ড।

1(b) একটি কণা নির্দিষ্ট বেগে যাত্রা করে সমত্বরণে চলে 3 সেকেন্ডে 81 ফুট দূরত্ব অতিক্রম করার সাথে সাথে ত্বরণ নিষ্ক্রিয় হয় এবং কণাটি পরবর্তী 3 সেকেন্ডে 72 ফুট দূরত্ব অতিক্রম করে। কণাটির আদিবেগ ও ত্বরণ নির্ণয় কর। [ব.'০৪]

সমাধান ঃ ধরি, কণাটির u ফুট/ সে. আদিবেগে এবং f ফুট/ সে.^{2} সমত্বরণে যাত্রা করে 3 সেকেন্ডে ৮১ ফুট অতিক্রম করে v ফুট/ সে. বেগ প্রাপ্ত হয়। তাহলে,

$v = u + ft$ সূত্র হতে পাই, $v = u + 3f \cdots\cdots$(i) এবং

$s = ut + \frac{1}{2}ft^2$ সূত্র হতে পাই, $81 = 3u + \frac{1}{2}f \times 9 \Rightarrow 27 = u + \frac{3}{2}f \cdots\cdots$(ii)

ত্বরণ নিষ্ক্রিয় হলে কণাটি পরবর্তী 3 সেকেন্ডে v সমবেগে 72 ফুট দূরত্ব অতিক্রম করে।

$\therefore$ $s = vt$ সূত্র হতে পাই, $72 = 3v \Rightarrow v = 24$

$\therefore$ (i) হতে পাই, $24 = u + 3f \cdots\cdots$(iii)

(ii) – (iii) $\Rightarrow 3 = (\frac{3}{2} - 3)f = -\frac{3}{2}f \Rightarrow f = -2$

$\therefore$ (iii) হতে পাই, $24 = u - 6 \Rightarrow u = 30$

$\therefore$ কণাটির আদিবেগ 30 ফুট/ সে. এবং ত্বরণ –2 ফুট/ সে.^{2} ।

1(c) 450 মিটার সরলপথ অতিক্রম করতে একটি ট্রেনের গতিবেগ হ্রাস পেয়ে ঘণ্টায় 40 কি.মি. হতে 10 কি.মি. দাঁড়ায়। মন্দন সুষম হলে, ট্রেনটি থামার আগে আর কত দূরত্ব অতিক্রম করবে?

সমাধান ঃ ট্রেনের আদিবেগ $u = 40$ কি.মি./ ঘ. $= 50 \times \frac{1000}{3600}$ মি./ সে. $= \frac{100}{9}$ মি./ সে. ,

$s = 450$ মিটার অতিক্রম করে বেগ $v = 10$ কি.মি./ ঘ. $= 10 \times \frac{1000}{3600}$ মি./ সে. $= \frac{25}{9}$ মি./ সে. ।

সৃষ্ট মন্দন f মি./সে.^{2} হলে, $v^2 = u^2 - 2fs$ সূত্র হতে পাই, $(\frac{25}{9})^2 = (\frac{100}{9})^2 - 2f \times 450$

$\Rightarrow 900f = \frac{10000 - 625}{81} = \frac{9375}{81} = \frac{3125}{27} \Rightarrow f = \frac{3125}{27} \times \frac{1}{900} = \frac{125}{972}$

এখন ট্রেনটি থামার আগে d মিটার অতিক্রম করলে,

$0^2 = (\frac{25}{9})^2 - 2 \times \frac{125}{972}d \Rightarrow d = \frac{25 \times 25}{81} \times \frac{972}{250} = 30$ $\therefore$ নির্ণেয় দূরত্ব 30 মিটার।

1(d) একটি বুলেট একটি তক্তা ভেদ করতে এর বেগের $\frac{1}{10}$ অংশ হারায় । মন্দন সুষম হলে, বুলেটি থামার পূর্বে পরপর স্থাপিত অনুরূপ কতগুলো তক্তা ভেদ করবে? **[বুয়েট.'০৯]**

সমাধান ঃ মনে করি, বুলেটের আদিবেগ u , ত্বরণ f এবং একটি তক্তার বেধ d ।

তাহলে, d দূরত্ব অতিক্রম করার পর এর গতিবেগ হয় $(u - \frac{u}{10}) = \frac{9u}{10}$.

$v^2 = u^2 - 2fs$ সূত্র হতে পাই, $(\frac{9u}{10})^2 = u^2 - 2f \times d \Rightarrow 2df = u^2 - \frac{81}{100}u^2 = \frac{19}{100}u^2$

ধরি, বুলেটটি অনুরূপ n সংখ্যক তক্তা ভেদ করতে পারে অর্থাৎ nd দূরত্ব অতিক্রম করে বেগ শূন্য হয়।

$\therefore$ $0^2 = u^2 - 2f \times nd \Rightarrow u^2 = \frac{19}{100}u^2 n \Rightarrow n = \frac{100}{19} = 5\frac{5}{19}$ $\therefore$ $5\frac{5}{19}$ গুলো তক্তা ভেদ করবে।

1(e) u আদিবেগে এবং f ত্বরণে সরলরেখায় চলমান কোন বস্তু t সময় অন্তে s দূরত্ব অতিক্রম করে। এর অন্তবেগ v হলে, দেখাও যে, $\frac{v + u}{v - u} = \frac{2s}{ft^2}$

প্রমাণ ঃ আমরা পাই, $v = u + ft \Rightarrow v - u = ft$ ⋯ ⋯ (i) এবং

$v^2 = u^2 + 2fs \Rightarrow v^2 - u^2 = 2fs \Rightarrow (v + u)(v - u) = 2fs \Rightarrow ft\,(v + u) = 2fs$, [(i) হতে]

$\Rightarrow v + u = \frac{2s}{t}$ ⋯ ⋯ (ii)

এখন, (ii) ÷ (i) $\Rightarrow \dfrac{v+u}{v-u} = \dfrac{2s/t}{ft}$ $\quad \therefore \dfrac{v+u}{v-u} = \dfrac{2s}{ft^2}$ (Showed)

1(f) একটি কণা f সুষম ত্বরণে চলে ধারাবাহিক t ও t′ সময়ে সমান দূরত্ব d অতিক্রম করে। প্রমাণ কর যে, $f = 2d(t-t')/tt'(t+t')$

প্রমাণ ঃ মনে করি, f সুষম ত্বরণে চলন্ত কণাটি কোন এক বিন্দুতে u বেগ অর্জন করে এবং এ বিন্দু থেকে ধারাবাহিক t ও t′ সময়ে সমান দূরত্ব d অতিক্রম করে। তাহলে, কণাটি t ও (t + t′) সময়ে যথাক্রমে d; ও 2d দূরত্ব অতিক্রম করে।

$\therefore\ d = ut + \dfrac{1}{2}ft^2 \Rightarrow 2ut = 2d - ft^2 \ldots\ldots$ (i) এবং

$2d = u\times(t+t') + \dfrac{1}{2}f\times(t+t')^2 \Rightarrow 2u(t+t') = 4d - f(t^2+2tt'+t'^2)\ldots\ldots$ (ii)

$(i)\div(ii) \Rightarrow \dfrac{t}{t+t'} = \dfrac{2d - ft^2}{4d - f(t^2+2tt'+t'^2)}$

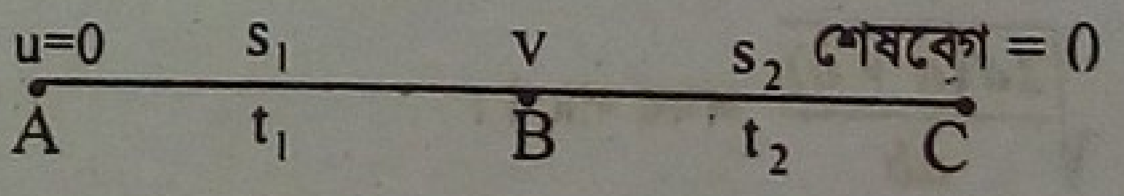
$\Rightarrow 2dt + 2dt' - ft^3 - ft^2t' = 4dt - ft^3 - 2ft^2t' - ftt'^2 \Rightarrow ft^2t' + ftt'^2 = 2dt - 2dt'$

$\Rightarrow ftt'(t+t') = 2d(t-t') \quad \therefore f = 2d(t-t')/tt'(t+t')$

2(a) একটি ট্রেন সরল রেলপথে 4 কি.মি. ব্যবধানে দুইটি স্টেশনে থামে। এক স্টেশন থেকে অন্য স্টেশনে পৌছাতে সময় লাগে 8 মিনিট । ট্রেনটি এর গতিপথের প্রথম অংশ x সমত্বরণে এবং দ্বিতীয় অংশ y সমমন্দনে চলে। প্রমাণ কর যে, $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = 8$

প্রমাণঃ মনে করি, ট্রেনটি A স্টেশন থেকে যাত্রা করে x সমত্বরণে t_1 মিনিটে s_1 কি.মি. অতিক্রম করে B তে v বেগ প্রাপ্ত হয় । অতপর B হতে v আদিবেগে y সমমন্দনে t_2 মিনিটে s_2 কি.মি. অতিক্রম করে C স্টেশনে থামে।

প্রশ্নমতে, $s_1 + s_2 = 4,\ t_1 + t_2 = 8.$



AB অংশে ঃ $v = 0 + xt_1 \Rightarrow t_1 = \dfrac{v}{x} \ldots\ldots$ (i) এবং

$s_1 = \dfrac{0+v}{2}\times t_1 = \dfrac{vt_1}{2} \ldots\ldots$ (ii)

BC অংশে ঃ $0 = v - yt_2 \Rightarrow t_2 = \dfrac{v}{y} \ldots\ldots$ (iii) এবং $s_2 = \dfrac{v+0}{2}\times t_2 = \dfrac{vt_2}{2} \ldots\ldots$ (iv)

$(ii)+(iv) \Rightarrow s_1 + s_2 = \dfrac{v}{2}(t_1+t_2) \Rightarrow 4 = \dfrac{v}{2}\times 8 \Rightarrow v = 1,$ $\quad [\because s_1+s_2 = 4,\ t_1+t_2 = 8]$

$(i)+(iii) \Rightarrow t_1 + t_2 = v\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}\right) \Rightarrow 8 = 1\times\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}\right) \quad \therefore \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y} = 8$ (Proved)

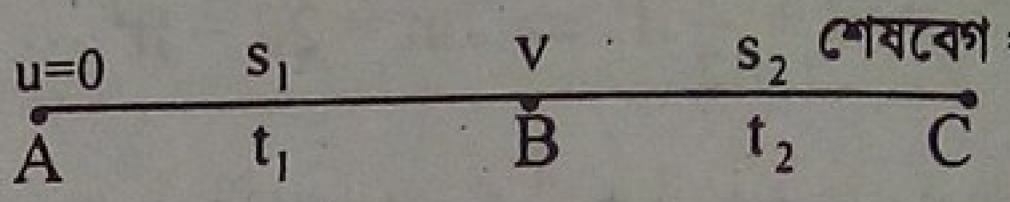
2(b) একটি বস্তুকণা স্থিরাবস্থা থেকে একটি সরলরেখা বরাবর যাত্রা করে প্রথমে f_1 সুষম ত্বরণে এবং পরে f_2 সুষম মন্দনে চলে। যদি তা t সময়ে যাত্রা বিন্দু থেকে s দূরত্বে গিয়ে থামে, তবে প্রমাণ কর যে,

(i) $t=\sqrt{\dfrac{2s(f_1+f_2)}{f_1f_2}}$ [য.'০২; চ.'০৫] (ii) $\dfrac{t^2}{2s}=\dfrac{1}{f_1}+\dfrac{1}{f_2}$ [সি.'০২,'১১; দি.'০৯; ঢা.'১১; চ.'১১]

প্রমাণঃ মনে করি, বস্তুকণাটি A স্টেশন থেকে যাত্রা করে f_1 সুষম ত্বরণে t_1 সময়ে s_1 দূরত্ব অতিক্রম করে B তে v বেগ প্রাপ্ত হয়। অতপর B হতে v আদিবেগে f_2 সুষম মন্দনে t_2 সময়ে s_2 দূরত্ব অতিক্রম করে C বিন্দুতে থামে।

প্রশ্নমতে, $s_1+s_2=s$, মোট সময় $t=t_1+t_2$

AB অংশে : $v=0+f_1t_1 \Rightarrow t_1=\dfrac{v}{f_1}\cdots\cdots$ (i) এবং



$s_1=\dfrac{0+v}{2}\times t_1=\dfrac{vt_1}{2}\cdots\cdots$ (ii)

BC অংশে : $0=v-f_2t_2 \Rightarrow t_2=\dfrac{v}{f_2}\cdots\cdots$ (iii) এবং $s_2=\dfrac{v+0}{2}\times t_2=\dfrac{vt_2}{2}\cdots\cdots$ (iv)

(ii) + (iv) $\Rightarrow s_1+s_2=\dfrac{v}{2}(t_1+t_2) \Rightarrow s=\dfrac{v}{2}\times t \Rightarrow v=\dfrac{2s}{t}$, $[\because s_1+s_2=s,\ t_1+t_2=t]$

(i) + (iii) $\Rightarrow t_1+t_2=v\left(\dfrac{1}{f_1}+\dfrac{1}{f_2}\right) \Rightarrow t=\dfrac{2s}{t}\left(\dfrac{1}{f_1}+\dfrac{1}{f_2}\right)\cdots\cdots$ (v)

(v) হতে পাই, $t^2=\dfrac{2s(f_1+f_2)}{f_1f_2}\quad \therefore t=\sqrt{\dfrac{2s(f_1+f_2)}{f_1f_2}}$ (Proved)

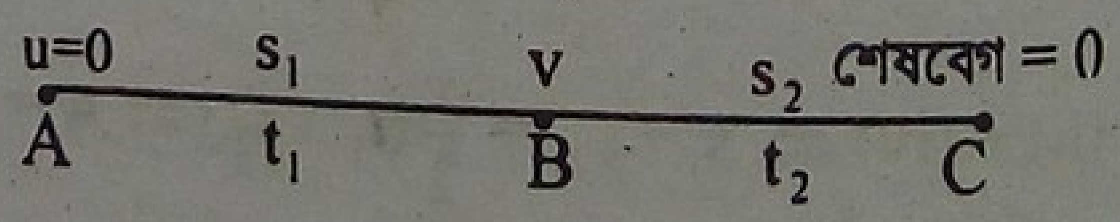
আবার, (v) হতে পাই, $t^2=2s\left(\dfrac{1}{f_1}+\dfrac{1}{f_2}\right)\quad \therefore \dfrac{t^2}{2s}=\dfrac{1}{f_1}+\dfrac{1}{f_2}$ (Proved)

2(c) একটি রেলগাড়ি এক স্টেশন থেকে যাত্রা করে একই সরলরেখায় d দূরত্বে অবস্থিত অপর এক স্টেশনে থামে। গাড়িটির গতিপথের প্রথম অংশ a সমত্বরণে এবং শেষ অংশ b সমমন্দনে চলে। দেখাও যে, সমগ্র দূরত্ব অতিক্রম করতে $\sqrt{\dfrac{2d(a+b)}{ab}}$ সময় লাগে। [কু.'০০; য.'০৫]

প্রমাণঃ মনে করি, ট্রেনটি A স্টেশন থেকে যাত্রা করে a সমত্বরণে t_1 সময়ে s_1 দূরত্ব অতিক্রম করে B তে v বেগ প্রাপ্ত হয়। অতপর B হতে v আদিবেগে b সমমন্দনে t_2 সময়ে s_2 দূরত্ব অতিক্রম করে C স্টেশনে থামে।

প্রশ্নমতে, $s_1+s_2=d$, মোট সময় $t=t_1+t_2$

AB অংশে : $v=0+at_1 \Rightarrow t_1=\dfrac{v}{a}\cdots\cdots$ (i)



এবং $s_1=\dfrac{0+v}{2}\times t_1=\dfrac{vt_1}{2}\cdots\cdots$ (ii)

BC অংশে : $0=v-bt_2 \Rightarrow t_2=\dfrac{v}{b}\cdots\cdots$ (iii) এবং $s_2=\dfrac{v+0}{2}\times t_2=\dfrac{vt_2}{2}\cdots\cdots$ (iv)

(ii) + (iv) $\Rightarrow s_1+s_2=\dfrac{v}{2}(t_1+t_2) \Rightarrow d=\dfrac{v}{2}\times t \Rightarrow v=\dfrac{2d}{t}$, $[\because s_1+s_2=d,\ t_1+t_2=t]$

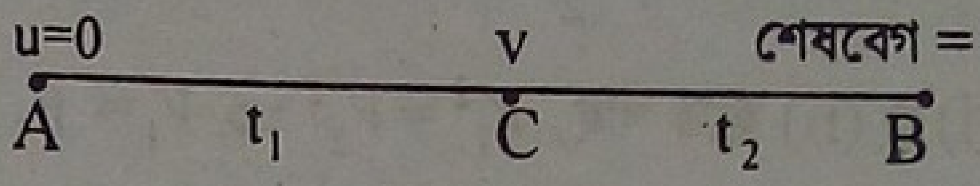
$(i)+(iii) \Rightarrow t_1+t_2 = v(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}) \Rightarrow t = \frac{2s}{t} \times \frac{a+b}{ab} \Rightarrow t^2 = \frac{2s(a+b)}{ab} \Rightarrow t = \sqrt{\frac{2s(a+b)}{ab}}$

$\therefore$ সমগ্র দূরত্ব অতিক্রম করতে $\sqrt{\frac{2d(a+b)}{ab}}$ সময় লাগে। (প্রমাণিত)

2(d) একটি রেলগাড়ি স্টেশন A থেকে সরল রেলপথে যাত্রা করে এটি 10 মিনিট পরে স্টেশন B তে থামে। স্টেশন দুইটির মধ্যবর্তী কোন C বিন্দুতে সর্বোচ্চ বেগ 60 কি.মি./ঘ. হয়। গাড়িটি যদি A থেকে C পর্যন্ত সমত্বরণে এবং C থেকে B পর্যন্ত সমমন্দনে গমন করে, তাহলে , A হতে B এর দূরত্ব নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ মনে করি, রেলগাড়িটি A স্টেশন থেকে যাত্রা করে সমত্বরণে t_1 মিনিটে C তে সর্বোচ্চ বেগ v হয় । অতপর B হতে v আদিবেগে সমমন্দনে t_2 মিনিটে C স্টেশনে থামে।

প্রশ্নমতে, v = 60 কি.মি./ঘ. =1 কি.মি./মিনিট , $t_1+t_2=10$



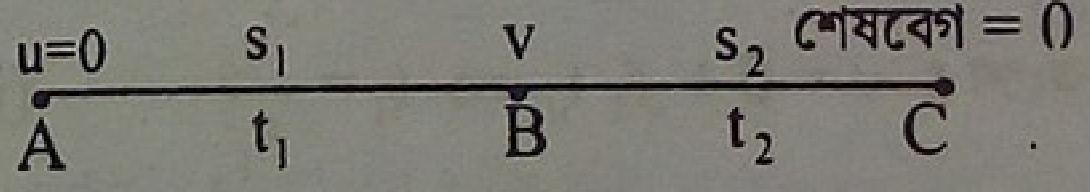
এখন $AC = \frac{0+v}{2} \times t_1 = \frac{vt_1}{2}$ ……(i), $CB = \frac{v+0}{2} \times t_2 = \frac{vt_2}{2}$ …… (ii)

$\therefore AB = AC + CB = \frac{v}{2}(t_1+t_2) = \frac{1}{2} \times 10 = 5$ $\therefore$ A ও B এর দূরত্ব 5 কি.মি.।

2(e) একটি কণা স্থিরাবস্থা হতে যাত্রা করে সরলপথে চলে 192 মিটার পথ যায়। যাত্রাপথের প্রথম অংশ 25 ms^{-2} সমত্বরণে এবং শেষ অংশ 5 ms^{-2} সমমন্দনে চলে কোনরকমে সম্পূর্ণ পথ অতিক্রম করে। কণাটির সর্বোচ্চ গতিবেগ নির্ণয় কর। [বুয়েট.'০২]

প্রমাণঃ মনে করি, কণাটি A থেকে যাত্রা করে 25 ms^{-2} সমত্বরণে s_1 মিটার অতিক্রম করে B তে v ms^{-1} বেগ হয়। অতপর B হতে v ms^{-1} আদিবেগে 5 ms^{-2} সমমন্দনে s_2 মিটার অতিক্রম করে C তে থামে।

প্রশ্নমতে, $s_1+s_2=192$



AB অংশে ঃ $v^2 = 0^2 + 2\times 25 s_1 \Rightarrow s_1 = \frac{v^2}{50}$ … (i)

BC অংশে ঃ $0^2 = v^2 - 2\times 5 s_2 \Rightarrow s_2 = \frac{v^2}{10}$ ……(ii)

$(i)+(ii) \Rightarrow s_1+s_2 = (\frac{1}{50}+\frac{1}{10})v^2 \Rightarrow 192 = \frac{6}{50}v^2 \Rightarrow v^2 = 1600 \Rightarrow v = 40$

$\therefore$ কণাটির সর্বোচ্চ গতিবেগ 40 ms^{-1} ।

2(f) একটি বস্তুকণা u আদিবেগে সরলরেখায় যাত্রা করে একটি নির্দিষ্ট দূরত্বের দুই অর্ধাংশ যথাক্রমে f_1 এবং f_2 ত্বরণে অতিক্রম করে। দেখাও যে, বস্তুটির অন্তবেগ একই হবে যদি একই আদিবেগে এবং $\frac{1}{2}(f_1+f_2)$ সমত্বরণে কণাটি সম্পূর্ণ পথ অতিক্রম করে। [চ.'০১; ব.'০৫]

প্রমাণঃ মনে করি, সম্পূর্ণ পথের দূরত্ব = s .

u আদিবেগে এবং f_1 ত্বরণে যাত্রা করে প্রথম অর্ধাংশ অর্থাৎ $\frac{s}{2}$ দূরত্ব অতিক্রম করে কণাটির বেগ v হলে,

$v^2 = u^2 + 2f_1 \times \frac{s}{2} \Rightarrow v^2 = u^2 + f_1 s$

v আদিবেগে এবং f_2 ত্বরণে শেষ অর্ধাংশ অর্থাৎ $\frac{s}{2}$ দূরত্ব অতিক্রম করে কণাটির অন্তবেগ V_1 হলে,

$V_1^2 = v^2 + 2f_2 \times \frac{s}{2} = u^2 + f_1 s + f_2 s \Rightarrow V_1^2 = u^2 + (f_1 + f_2)s \cdots\cdots$ (i)

আবার, u আদিবেগে এবং $\frac{1}{2}(f_1 + f_2)$ ত্বরণে s দূরত্ব অতিক্রম করে কণাটির অন্তবেগ V_2 হলে,

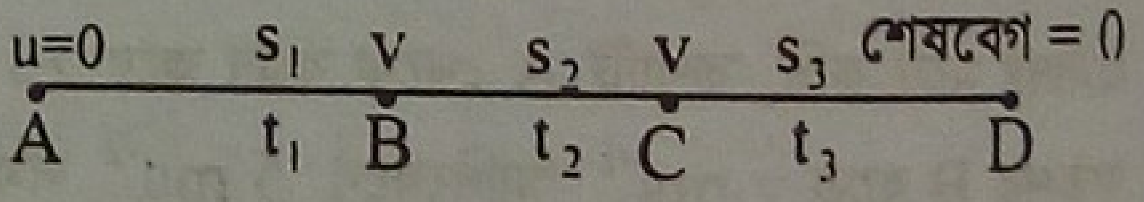
$V_2^2 = u^2 + 2 \times \frac{1}{2}(f_1 + f_2)s = u^2 + (f_1 + f_2)s \cdots\cdots$ (ii)

(i) ও (ii) হতে পাই, $V_1^2 = V_2^2 \Rightarrow V_1 = V_2$ অর্থাৎ উভয় ক্ষেত্রে অন্তবেগ সমান হবে।

3(a) একটি ট্রেন একটি স্টেশন হতে সরলপথে যাত্রা করে f_1 সমত্বরণে চলে v বেগ প্রাপ্ত হয় এবং কিছুক্ষণ v সমবেগে চলে। অতঃপর f_2 সমমন্দনে চলে অন্য একটি স্টেশনে থামে। মোট দূরত্ব x এবং ভ্রমণকাল t হলে, প্রমাণ কর যে,

$$2x = v\left[2t - v\left(\frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2}\right)\right]$$

প্রমাণঃ মনে করি, ট্রেনটি A স্টেশন থেকে যাত্রা করে f_1 সমত্বরণে t_1 সময়ে s_1 দূরত্ব অতিক্রম করে B তে v বেগ প্রাপ্ত হয়। v সমবেগে t_2 সময়ে B হতে s_2 দূরত্বে C তে যায়। অতপর C হতে v আদিবেগে f_2 সমমন্দনে t_3 সময়ে s_3 দূরত্ব অতিক্রম করে D স্টেশনে থামে।



প্রশ্নমতে, $s_1 + s_2 + s_3 = x$, মোট সময় $t = t_1 + t_2 + t_3$

AB অংশে ঃ $v = 0 + f_1 t_1 \Rightarrow t_1 = \frac{v}{f_1} \cdots\cdots$ (i) এবং $s_1 = \frac{0+v}{2} \times t_1 = \frac{vt_1}{2} \cdots\cdots$ (ii)

BC অংশে ঃ $s_2 = vt_2 \cdots\cdots$ (iii)

CD অংশে ঃ $0 = v - f_2 t_3 \Rightarrow t_3 = \frac{v}{f_2} \cdots\cdots$ (iv) এবং $s_3 = \frac{v+0}{2} \times t_3 = \frac{vt_3}{2} \cdots\cdots$ (v)

(i) + (iv) $\Rightarrow t_1 + t_3 = v\left(\frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2}\right) \cdots$ (vi)

(ii) + (iii) + (v) $\Rightarrow s_1 + s_2 + s_3 = \frac{v}{2}(t_1 + 2t_2 + t_3) = \frac{v}{2}\{2(t_1 + t_2 + t_3) - (t_1 + t_3)\}$

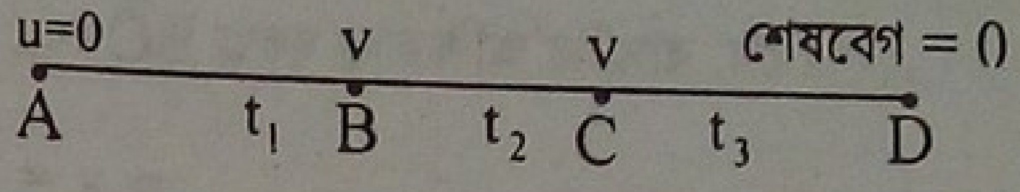
$\Rightarrow x = \frac{v}{2}\left\{2t - v\left(\frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2}\right)\right\}$ [$\because s_1 + s_2 + s_3 = x$, $t_1 + t_2 + t_3 = t$ এবং $t_1 + t_3 = v\left(\frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2}\right)$]

$\therefore 2x = v\left[2t - v\left(\frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2}\right)\right]$ (Proved)

3(b) একটি রেলগাড়ি একটি স্টেশন থেকে সরল রেলপথে যাত্রা করে অপর স্টেশনে গিয়ে থামে। যদি এর ভ্রমণ পথের প্রথম চতুর্থাংশ সমত্বরণে, শেষ চতুর্থাংশ সমমন্দনে এবং বাকি অংশ সমবেগে যায়, তবে প্রমাণ কর যে, গাড়িখানার গড়বেগ এবং সর্বোচ্চ বেগের অনুপাত 2 : 3 হবে।

প্রমাণঃ মনে করি, স্টেশন দুইটি A ও D এবং AD = d । রেলগাড়িটি A স্টেশন থেকে যাত্রা করে সমত্বরণে t_1 সময়ে B তে v সর্বোচ্চ বেগ প্রাপ্ত হয় । B হতে v সমবেগে t_2 সময়ে C তে যায়। অতপর C হতে v আদিবেগে সমমন্দনে t_3 সময়ে D স্টেশনে থামে। তাহলে, মোট সময় $t = t_1 + t_2 + t_3$ এবং গড়বেগ w হলে, $w = \frac{d}{t}$

প্রশ্নমতে, $AB = \frac{d}{4}$, $CD = \frac{d}{4}$ এবং $BC = d - \frac{d}{4} - \frac{d}{4} = \frac{d}{2}$



এখন $AB = \frac{d}{4} = \frac{0+v}{2} \times t_1 \Rightarrow \frac{d}{2} = vt_1 \cdots \cdots$ (i),

$BC = \frac{d}{2} = vt_2 \cdots \cdots$ (ii) এবং $CD = \frac{d}{4} = \frac{v+0}{2} \times t_3 \Rightarrow \frac{d}{2} = vt_3 \cdots \cdots$ (v)

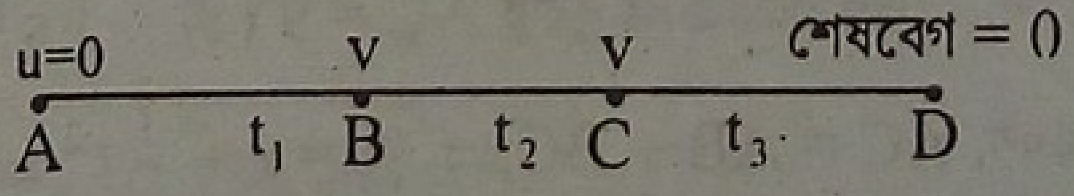
$(i) + (ii) + (iii) \Rightarrow 3 \times \frac{d}{2} = v(t_1 + t_2 + t_3) = vt \Rightarrow 3\frac{d}{t} = 2v \Rightarrow 3w = 2v \Rightarrow w : v = 2 : 3$

$\therefore$ গাড়িখানার গড়বেগ এবং সর্বোচ্চ বেগের অনুপাত 2 : 3

3(c) একটি রেলগাড়ি একটি স্টেশন থেকে সরল রেলপথে যাত্রা করে অপর স্টেশনে গিয়ে থামে। গাড়িটি যদি মোট দূরত্বের প্রথম $\frac{1}{m}$ অংশ সমত্বরণে, শেষ $\frac{1}{n}$ অংশ সমমন্দনে এবং বাকি অংশ সমবেগে যায়, তবে প্রমাণ কর যে, এর সর্বোচ্চ বেগ এবং গড়বেগের অনুপাত $(1 + \frac{1}{m} + \frac{1}{n}) : 1$. [চ.'০০; সি.'০৫]

প্রমাণঃ মনে করি, স্টেশন দুইটি A ও D এবং AD = d । রেলগাড়িটি A স্টেশন থেকে যাত্রা করে সমত্বরণে t_1 সময়ে B তে v সর্বোচ্চ বেগ প্রাপ্ত হয় । B হতে v সমবেগে t_2 সময়ে C তে যায়। অতপর C হতে v আদিবেগে সমমন্দনে t_3 সময়ে D স্টেশনে থামে। তাহলে, মোট সময় $t = t_1 + t_2 + t_3$ এবং গড়বেগ w হলে, $w = \frac{d}{t}$.

প্রশ্নমতে, $AB = \frac{d}{m}$, $CD = \frac{d}{n}$ এবং $BC = d - \frac{d}{m} - \frac{d}{n}$



এখন $AB = \frac{d}{m} = \frac{0+v}{2} \times t_1 \Rightarrow \frac{2d}{m} = vt_1 \cdots \cdots$ (i),

$BC = (1 - \frac{1}{m} - \frac{1}{n})d = vt_2 \cdots \cdots$ (ii) এবং $CD = \frac{d}{n} = \frac{v+0}{2} \times t_3 \Rightarrow \frac{2d}{n} = vt_3 \cdots \cdots$ (v)

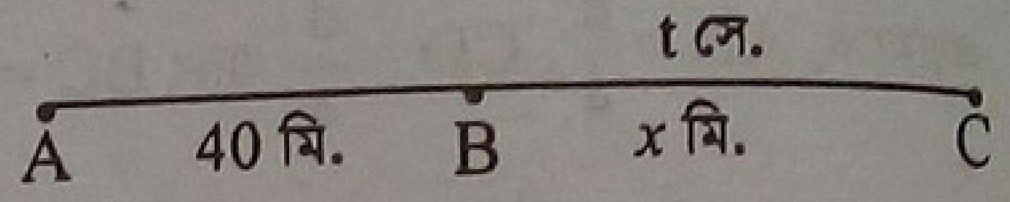
$(i) + (ii) + (iii) \Rightarrow (\frac{2}{m} + 1 - \frac{1}{m} - \frac{1}{n} + \frac{2}{n})d = v(t_1 + t_2 + t_3) \Rightarrow (1 + \frac{1}{m} + \frac{1}{n})d = vt$

$\Rightarrow (1 + \frac{1}{m} + \frac{1}{n}) \times \frac{d}{t} = v \Rightarrow (1 + \frac{1}{m} + \frac{1}{n}) \times w = v \Rightarrow \frac{v}{w} = 1 + \frac{1}{m} + \frac{1}{n}$

$\therefore$ গাড়িখানার গড়বেগ এবং সর্বোচ্চ বেগের অনুপাত $(1+\frac{1}{m}+\frac{1}{n}):1$

4(a) একটি বাস স্থিরাবস্থা থেকে $6\,ms^{-2}$ সুষম ত্বরণে সরলপথে যাত্রা শুরু করার সাথে সাথে এর 40 m পিছন থেকে $23\,ms^{-1}$ সমবেগে একজন সাইকেল চালক বাসটির দিকে চলতে শুরু করল। কখন এরা মিলিত হবে? দুইটি উত্তরের কারণ ব্যাখ্যা কর।

সমাধান ঃ মনে করি, B বিন্দু থেকে স্থিরাবস্থায় বাসটি সুষম ত্বরণে এবং A বিন্দু থেকে সাইকেল চালক সমবেগে একই সাথে যাত্রা করে t সে. পরে C বিন্দুতে মিলেত হয়, যেখানে AB = 40 মি. এবং $BC = x$ মি. (ধরি)।



$\therefore$ t সে. বাসটির অতিক্রান্ত দূরত্ব $BC = x = 0.t + \frac{1}{2}.6.t^2$

$$\Rightarrow x = 3t^2 \cdots\cdots(i)$$

t সে. সাইকেল চালকের অতিক্রান্ত দূরত্ব $AC = 40 + x = 23\times t$, [s = vt সূত্র দ্বারা]

$\Rightarrow 40+3t^2 = 23t \Rightarrow 3t^2-23t+40=0 \Rightarrow 3t^2-15t-8t+40=0$

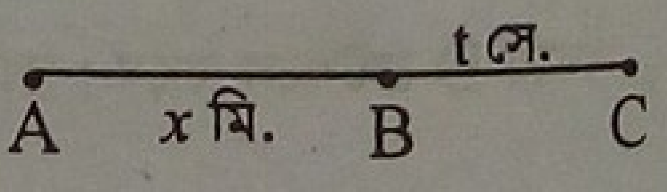
$\Rightarrow (t-5)(3t-8)=0 \Rightarrow t=\frac{8}{3}, 5$

$\therefore$ সাইকেল চালক $\frac{8}{3}$ ও 5 সেকেন্ডে বাসটির সাথে দুইবার মিলিত হবে। $\frac{8}{3}$ সে. পরে বাসের বেগ $= 0 + 6\times\frac{8}{3}$ অর্থাৎ $16\,ms^{-1}$, যা সাইকেল চালকের চেয়ে কম থাকায় সে বাসটিকে পিছনে ফেলবে।

দ্বিতীয়বার 5 সে. পরে বাসের বেগ $= 6\times5$ অর্থাৎ $30\,ms^{-1}$, যা সাইকেল চালকের বেগ অপেক্ষা বেশি । সুতরাং বাসটি তাকে পিছনে ফেলে চলে যাবে।

4(b) একটি বাস স্থির অবস্থান হতে $1\,ms^{-2}$ ত্বরণে সরলপথে যাত্রা করল। দেখাও যে, 40·5 মিটারের অধিক পশ্চাত হতে কোনো যাত্রী $9\,ms^{-1}$ সমবেগে দৌড়ে বাসটি ধরতে পারবে না।

প্রমাণ ঃ মনে করি, B বিন্দু থেকে বাসটি ছাড়তে দেখে A বিন্দু থেকে একজন যাত্রী একে ধরার জন্য $9\ ms^{-1}$ সমবেগে দৌড় শুরু করল এবং t সে. পরে C বিন্দুতে ধরতে পারল। ধরি, $AB = x$ মি.।



$\therefore$ t সে. বাসটির অতিক্রান্ত দূরত্ব $BC = (0.t+\frac{1}{2}.1.t^2)$ মি. $=\frac{1}{2}t^2$ মি.

t সে. যাত্রীর অতিক্রান্ত দূরত্ব $AC = 9\,t$ মি., [s = vt সূত্র দ্বারা]

এখন, $AC = AB + BC \Rightarrow 9t = x + \frac{1}{2}t^2 \Rightarrow t^2 - 18t + 2x = 0$, যা t এর একটি দ্বিঘাত সমীকরণ।

$\therefore$ t এর বস্তব মানের জন্য বাসটি ধরা সম্ভব এবং t এর বাস্তব মান থাকবে যদি উক্ত সমীকরণের নিশ্চায়ক ≥ 0 হয়।

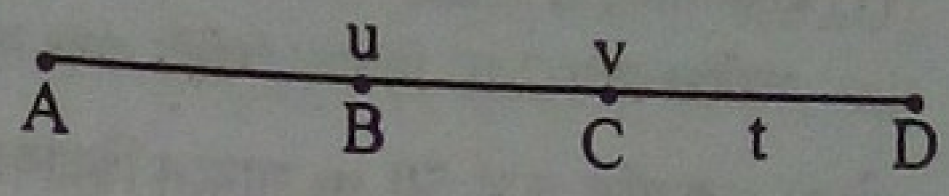
অর্থাৎ $(-18)^2 - 4.1.2x \geq 0 \Rightarrow 324 - 8x \geq 0 \Rightarrow 8x \leq 324 \Rightarrow x \leq 40.5$

$\therefore$ যাত্রা মুহূর্তে বাস থেকে যাত্রীর দূরত্ব 40.5 মি. বা 40·5 মি. অপেক্ষা কম হলে বাসটি ধরতে পারবে। সুতরাং 40.5 মিটারের অধিক পশ্চাত হতে কোন যাত্রী $10\ ms^{-1}$ সমবেগে দৌড়ে বাসটি ধরতে পারবে না।

4(c) একটি সরলরেখায় দুইটি কণা a ও b সমত্বরণে চলছে। কোন নির্দিষ্ট বিন্দু থেকে যখন এরা x ও y দূরত্বে অবস্থান করে তখন এদের বেগ যথাক্রমে u ও v হয়। প্রমাণ কর যে, এরা দুইবারের বেশি মিলিত হতে পারে না এবং মিলিত

হবার সময়ের ব্যবধান $= \frac{2}{a-b}\sqrt{(u-v)^2 - 2(x-y)(a-b)}$ [ঢা.'০৩]

প্রমাণঃ মনে করি, a ও b সমত্বরণে চলমান কণা দুইটি B ও C থেকে যথাক্রমে u ও v বেগে যাত্রা করার t সময় পর D তে মিলিত হয়, যেখানে নির্দিষ্ট বিন্দু A , $AB = x$ এবং $AC = y$. তাহলে,



$BD = ut + \frac{1}{2}at^2 \;\therefore\; AD = AB + BD = x + ut + \frac{1}{2}at^2 \cdots\cdots$ (i)

$CD = vt + \frac{1}{2}bt^2 \;\therefore\; AD = AC + CD = y + vt + \frac{1}{2}bt^2 \cdots\cdots$ (ii)

$(i) - (ii) \Rightarrow 0 = (x-y) + (u-v)\,t + \frac{1}{2}(a-b)t^2$

$\Rightarrow (a-b)t^2 + 2(u-v)\,t + 2(x-y) = 0 \cdots\cdots$ (iii),যা t এর একটি দ্বিঘাত সমীকরণ বিধায় t এর দুইটির বেশী মান থাকতে পারে না। সুতরাং কণা দুইটিও দুই বারের বেশী মিলিত হতে পারে না।

ধরি, t এর মান দুইটি t_1 ও $t_2\,(t_1 > t_2)$ ।

তাহলে, কণা দুইটি t_1 ও t_2 সময়ে মিলিত হয়, যেখানে $t_1 + t_2 = -\frac{2(u-v)}{a-b}$ এবং $t_1 t_2 = \frac{2(x-y)}{a-b}$

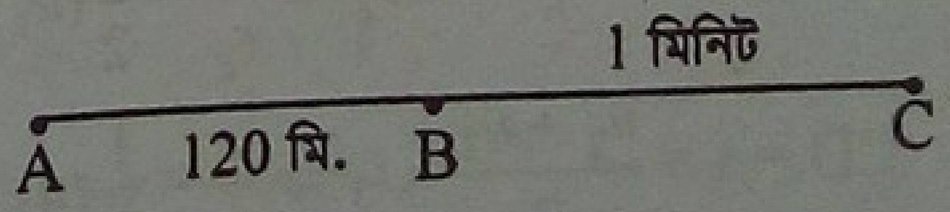
$\therefore$ তাদের মিলিত হবার সময়ের পার্থক্য $= t_1 - t_2 = \sqrt{(t_1+t_2)^2 - 4t_1t_2} = \sqrt{\frac{4(u-v)^2}{(a-b)^2} - 8\frac{x-y}{a-b}}$

$= \frac{2}{a-b}\sqrt{(u-v)^2 - 2(x-y)(a-b)}$ (Proved)

4(d) একজন যাত্রী তার 120 মিটার সামনে স্থির অবস্থান হতে সুষম ত্বরণে সরলপথে একটি বাসকে ছাড়তে দেখে একে ধরার জন্য সমবেগে দৌড় শুরু করল। যদি সে এক মিনিটে কোন রকমে বাসটি ধরতে সক্ষম হয়, তবে যাত্রীর বেগ ও বাসের ত্বরণ নির্ণয় কর। [সি.'০১]

সমাধান ঃ ধরি, B বিন্দু থেকে f মিটার/মি.^{2} সুষম ত্বরণে বাসটি ছাড়তে দেখে A বিন্দু থেকে একজন যাত্রী একে ধরবার জন্য u মিটার/ মি. সমবেগে দৌড় শুরু করল এবং ১ মি. পরে C বিন্দুতে কোন রকমে ধরে ফেলল, যেখানে $AB = 120$ মি.।

$\therefore$ 1 মিনিটে যাত্রীর অতিক্রান্ত দূরত্ব $AC = u \times 1 = u$ মিটার, [$s = vt$ সূত্র দ্বারা]



বাসের অতিক্রান্ত দূরত্ব $BC = \{0 \times 1 + \frac{1}{2}.f.(1)^2\}$মি. $= \frac{1}{2}f$ মি.

এবং C তে অর্জিত বেগ $v = (0 + f \times 1\ )$ মিটার/ মি. $= f$ মিটার/ মি.

এখন, $AC = AB + BC \Rightarrow u = 120 + \frac{1}{2}f \Rightarrow f = 2u - 240 \cdots\cdots$ (i)

যেহেতু 1 মিনিটে কোন রকমে বাসটি ধরতে সক্ষম , সুতরাং বাস ধরার মুহূর্তে বাসের অর্জিত বেগ যাত্রীর বেগের সমান হবে। $\therefore\ u = f$

(i) হতে পাই, $u = 2u - 240 \Rightarrow u = 240$ এবং $f = 240$

$\therefore$ যাত্রীর বেগ 240 মিটার/ মিনিট এবং বাসের ত্বরণ 240 মিটার/ মি.^{2} ।

4(e) একব্যক্তি তার 50 m সামনে স্থিরাবস্থ হতে সুষম ত্বরণে সরলপথে একটি বাসকে ছাড়তে দেখে সমবেগে দৌড়াতে লাগল। সে এক মিনিটে বাসটি কোন রকরম ধরতে পারল। লোকটির বেগ ও বাসটির ত্বরণ নির্ণয় কর। [সি.'০৩]

সমাধান ঃ ধরি, যাত্রীর বেগ u মিটার/ মি. এবং বাসের ত্বরণ f মিটার/মি.^{2} ।

$\therefore$ 1 মিনিটে যাত্রীর অতিক্রান্ড় দূরত্ব $= u\times 1$ মিটার $= u$ মিটার, [$s = vt$ সূত্র দ্বারা ।]

1 মিনিটে বাসের অতিক্রান্ড় দূরত্ব $=\{0\times 1+\frac{1}{2}.f.(1)^2\}=\frac{1}{2}f$ মি., [$s = ut+\frac{1}{2}ft^2$ সূত্র দ্বারা ।]

এবং 1 মিনিট পর বাসের অর্জিত বেগ $v = (0+f\times 1)$ মিটার/ মি. $= f$ মিটার/ মি., [$s = u + ft$ সূত্র দ্বারা ।]

তাহলে, 1 মিনিটে যাত্রীর অতিক্রান্ত দূরত্ব $-$ 1 মিনিটে বাসের অতিক্রান্ত দূরত্ব $= 50$ মি.

$$\Rightarrow u-\frac{1}{2}f = 50 \Rightarrow 2u - f = 50 \Rightarrow f = 2u - 100 \cdots\cdots(i)$$

যেহেতু 1 মিনিটে কোন রকমে বাসটি ধরতে সক্ষম , সুতরাং বাস ধরার মুহূর্তে বাসের অর্জিত বেগ যাত্রীর বেগের সমান হবে। $\therefore\ u = f$

(i) হতে পাই, $u = 2u - 100 \Rightarrow u = 100$ এবং $f = 100$

$\therefore$ যাত্রীর বেগ 100 মিটার/ মিনিট এবং বাসের ত্বরণ 100 মিটার/ মি.^{2} ।

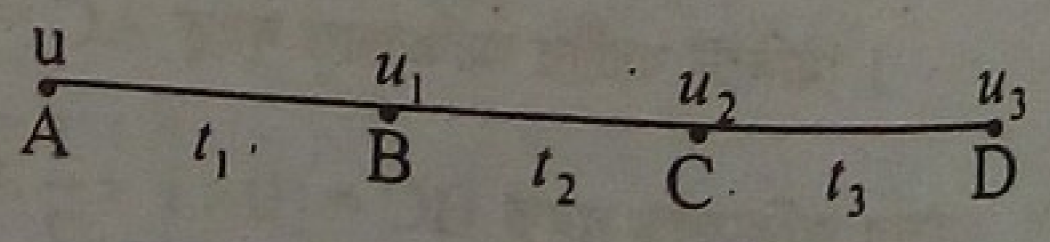
5(a) সুষম ত্বরণে সরলরেখা বরাবর চলন্ত একটি বিন্দুকণা t_1, t_2, t_3 সময়ে যথাক্রমে সমান তিনটি ক্রমিক দূরত্ব অতিক্রম করলে, প্রমাণ কর , $\frac{1}{t_1}-\frac{1}{t_2}+\frac{1}{t_3}=\frac{3}{t_1+t_2+t_3}$

[কু.'০৩,'১০; ঢা.'০৪; য.'০৭,'১১; চ.'০৭,'১০,'১২; রা.'০৮; সি.'০৯; ব.'১০; দি.'১২]

প্রমাণঃ মনে করি, সমত্বরণে চলন্ত বিন্দুকণাটি A বিন্দু থেকে u বেগে যাত্রা করে t_1, t_2, t_3 সময় শেষে যথাক্রমে B, C, D তে পোঁছে এবং u_1 , u_2 , u_3 বেগ প্রাপ্ত হয়, যেখানে $AB = BC = CD = s$ (ধরি)।

$\therefore\ AB = s = \frac{u+u_1}{2}\times t_1 \Rightarrow \frac{s}{t_1}=\frac{1}{2}(u+u_1)\cdots\cdots$ (i) , [$s=\frac{u+v}{2}\times t$ সূত্র দ্বারা]

$BC = s = \frac{u_1+u_2}{2}\times t_2 \Rightarrow \frac{s}{t_2}=\frac{1}{2}(u_1+u_2)\cdots\cdots$ (ii)



$CD = s = \frac{u_2+u_3}{2}\times t_3 \Rightarrow \frac{s}{t_3}=\frac{1}{2}(u_2+u_3)\cdots\cdots$ (ii)

এবং $AD = 3s = \frac{u+u_3}{2}\times(t_1+t_2+t_3) \Rightarrow \frac{3s}{t_1+t_2+t_3}=\frac{1}{2}(u+u_3)\cdots$ (iv)

এখন , (i) – (ii) + (iii)$\Rightarrow (\frac{1}{t_1}-\frac{1}{t_2}+\frac{1}{t_3})s = \frac{1}{2}(u+u_1-u_1-u_2+u_2+u_3)=\frac{1}{2}(u+u_3)\cdots$(v)

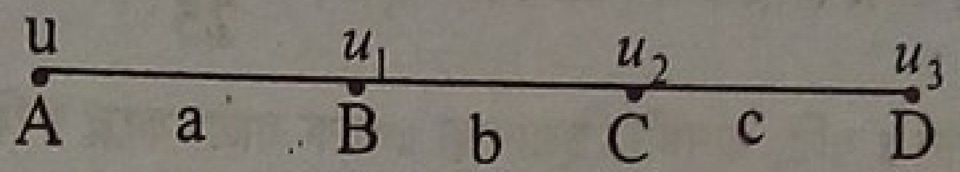
(iv) ও (v) হতে পাই, $\left(\frac{1}{t_1}-\frac{1}{t_2}+\frac{1}{t_3}\right)s=\frac{3s}{t_1+t_2+t_3}$ $\therefore \frac{1}{t_1}-\frac{1}{t_2}+\frac{1}{t_3}=\frac{3}{t_1+t_2+t_3}$ (Proved)

5(b) সুষম ত্বরণে সরলরেখা বরাবর চলন্ত একটি বিন্দুকণা সমান সময়ে তিনটি ক্রমিক দূরত্ব a, b, c অতিক্রম করে। প্রমাণ কর যে, $b=\frac{c+a}{2}$.

প্রমাণঃ মনে করি, সমত্বরণে চলন্ত বিন্দুকণাটি A বিন্দু থেকে u বেগে যাত্রা করে সমান t সময় শেষে যথাক্রমে B, C, D তে পৌঁছে এবং u_1, u_2, u_3 বেগ প্রাপ্ত হয়, যেখানে AB = a, BC = b এবং CD = c ।

$\therefore\ AB=a=\frac{u+u_1}{2}\times t \Rightarrow \frac{a}{t}=\frac{1}{2}(u+u_1)\cdots\cdots$ (i), [$s=\frac{u+v}{2}\times t$ সূত্র দ্বারা]

$BC=b=\frac{u_1+u_2}{2}\times t \Rightarrow \frac{b}{t}=\frac{1}{2}(u_1+u_2)\cdots\cdots$ (ii)



$CD=c=\frac{u_2+u_3}{2}\times t \Rightarrow \frac{c}{t}=\frac{1}{2}(u_2+u_3)\cdots\cdots$ (ii)

এবং $AD=a+b+c=\frac{u+u_3}{2}\times 3t \Rightarrow \frac{a+b+c}{3t}=\frac{1}{2}(u+u_3)\cdots$ (iv)

এখন , (i) – (ii) + (iii)$\Rightarrow$ $\frac{a}{t}-\frac{b}{t}+\frac{c}{t}=\frac{1}{2}(u+u_1-u_1-u_2+u_2+u_3)=\frac{1}{2}(u+u_3)\cdots$(v)

(iv) ও (v) হতে পাই, $\frac{a}{t}-\frac{b}{t}+\frac{c}{t}=\frac{a+b+c}{3t} \Rightarrow 3a-3b+3c=a+b+c \Rightarrow 2(a+c)=4b$

$\therefore\ b=\frac{c+a}{2}$

বিকল্প পদ্ধতি ঃ মনে করি, f সুষম ত্বরণে সরলরেখা বরাবর চলন্ত বিন্দুকণাটি u বেগে যাত্রা করে সমান t সময়ে তিনটি ক্রমিক দূরত্ব a,b, c অতিক্রম করে। তাহলে, বিন্দুকণাটি t, 2t ও 3t সময়ে যথাক্রমে a, (a + b) ও (a + b + c) দূরত্ব অতিক্রম করে।

$\therefore\ a=ut+\frac{1}{2}ft^2\cdots\cdots$ (i), $a+b=u\times(2t)+\frac{1}{2}f\times(2t)^2=2ut+2ft^2\cdots\cdots$ (ii) এবং

$a+b+c=u\times(3t)+\frac{1}{2}f\times(3t)^2=3ut+\frac{9}{2}ft^2\cdots\cdots$ (iii)

$4\times$(i) – (ii) $\Rightarrow 4a-a-b=4ut-2ut \Rightarrow 3a-b=2ut\cdots\cdots$ (iv)

$9\times$(i) – (iii) $\Rightarrow 9a-a-b-c=9ut-3ut \Rightarrow 8a-b-c=6ut\cdots\cdots$ (v)

(iv) ÷ (v) $\Rightarrow \frac{3a-b}{8a-b-c}=\frac{1}{3} \Rightarrow 9a-3b=8a-b-c \Rightarrow a+b=2b\ \therefore b=\frac{c+a}{2}$

5(c) একটি দৌড় প্রতিযোগিতায় একস্থান থেকে দুইজন সাইকেল আরোহী দুইটি সমান্তরাল সরলপথে যথাক্রমে u_1 ও u_2 বেগে চলে একই সময়ে গন্তব্য স্থলে পৌছিল। যদি এদের ত্বরণ যথাক্রমে f_1 ও f_2 হয় তবে দেখাও যে, তারা $2(u_1-u_2)(u_1f_2-u_2f_1)/(f_1-f_2)^2$ দূরত্ব অতিক্রম করেছে।

প্রমাণঃ মনে করি, সাইকেল আরোহী দুইজন t সময়ে s দূরত্বে গন্তব্য স্থলে পৌছে। তাহলে,

১ম জনের ক্ষেত্রে, $s = u_1 t + \frac{1}{2} f_1 t^2$ ……(i) এবং ২য় জনের ক্ষেত্রে, $s = u_2 t + \frac{1}{2} f_2 t^2$ …… (ii)

$(i) - (ii) \Rightarrow 0 = (u_1 - u_2)t + \frac{1}{2}(f_1 - f_2)t^2 \Rightarrow t = -\frac{2(u_1 - u_2)}{f_1 - f_2}$

$\therefore$ (i) হতে পাই, $s = -\frac{2u_1(u_1 - u_2)}{f_1 - f_2} + \frac{1}{2} f_1 \frac{4(u_1 - u_2)^2}{(f_1 - f_2)^2} = \frac{2(u_1 - u_2)}{(f_1 - f_2)^2}\{-u_1(f_1 - f_2) + f_1(u_1 - u_2)\}$

$\therefore$ তারা $s = 2(u_1 - u_2)(u_1 f_2 - u_2 f_1)/(f_1 - f_2)^2$ দূরত্ব অতিক্রম করেছে।

6(a) একটি কণা স্থিরাবস্থা থেকে সমত্বরণে সরলপথে চলে নির্দিষ্ট দূরত্ব অতিক্রম করল। যদি এটা প্রথম সেকেন্ডে 16 মিটার এবং শেষ সেকেন্ডে মোট দূরত্বের $\frac{9}{25}$ অংশ অতিক্রম করে, তাহলে ত্বরণ, মোট দূরত্ব এবং ভ্রমণকাল নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ ধরি, কণাটি স্থিরাবস্থা থেকে যাত্রা করে f মি./সে.^{2} সমত্বরণে t সেকেন্ডে s মি. দূরত্ব অতিক্রম করে।

$\therefore \ s = 0 \times t + \frac{1}{2} f t^2 \Rightarrow s = \frac{1}{2} f t^2$ …… (i)

প্রশ্নমতে, ১ম সেকেন্ডে অতিক্রান্ত দূরত্ব $s_1 = 0 + \frac{1}{2} f(2.1 - 1) = 16 \Rightarrow f = 32$

শেষ সেকেন্ডে অর্থাৎ t-তম সেকেন্ডে অতিক্রান্ত দূরত্ব $s_1 = 0 + \frac{1}{2} f(2t - 1) = \frac{9s}{25} = \frac{9}{25} \times \frac{1}{2} f t^2$, [(i) দ্বারা]

$\Rightarrow \ 50t - 25 = 9t^2 \Rightarrow 9t^2 - 50t + 25 = 0 \Rightarrow 9t^2 - 45t - 5t + 25 = 0$

$\Rightarrow \ (t - 5)(9t - 5) = 0 \Rightarrow t = 5, 5/9.$

যেহেতু কণাটি প্রথম সেকেন্ডে 16 মিটার যায়, সুতরাং $t > 1$ । অতএব, $t = 5$

(i) হতে পাই, $s = \frac{1}{2} \times 32 \times (5)^2 = 400.$

$\therefore$ ত্বরণ 32 মি./সে.^{2}, ভ্রমণকাল 5 সেকেন্ড এবং মোট দূরত্ব 400 মিটার।

6(b) কোনো সরলরেখা বরাবর চলমান একটি বস্তুকণা ৫ সেকেন্ড পরের অর্ধ সেকেন্ড সময়ে $16\frac{1}{2}$ মিটার দূরত্ব এবং 10 তম সেকেন্ডে 50 মিটার দূরত্ব অতিক্রম করলে বস্তুকণাটির আদিবেগ ও ত্বরণ নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ মনে করি, বস্তুকণাটির আদিবেগ u মি./সে. এবং ত্বরণ f মি./সে.^{2} ।

$\therefore$ 5 সেকেন্ড পরে কণাটির গতিবেগ (ধরি) $v = u + 5f$

শর্তানুসারে কণাটি v গতিবেগে $\frac{1}{2}$ সেকেন্ডে $16\frac{1}{2}$ অর্থাৎ $\frac{33}{2}$ মিটার দূরত্ব অতিক্রম করে।

$\therefore \ \frac{33}{2} = v \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} f(\frac{1}{2})^2 \Rightarrow 33 = u + 5f + \frac{1}{4} f \Rightarrow u + \frac{21}{4} f = 33$…… (i)

আবার, 10 তম সেকেন্ডে কণাটি 50 মিটার দূরত্ব অতিক্রম করে ।

$\therefore \ u + \frac{1}{2} f(2 \times 10 - 1) = 50 \Rightarrow u + \frac{19}{2} f = 50$ …… (ii)

(ii) − (i) ⇒ $\left(\frac{19}{2}-\frac{21}{4}\right)f = 17 \Rightarrow \frac{38-21}{4}f = 17 \Rightarrow f = 17\times\frac{4}{17} = 4$

(ii) হতে পাই, $u = 50 - \frac{19}{2}\times 4 = 50 - 38 = 12$

∴ কণাটির আদি বেগ 12 মি./সে. এবং ত্বরণ 4 মি.সে.^{2} ।

6(c) একটি কণা একটি সরলরেখা বরাবর সমমন্দনে চলে পঞ্চম সেকেন্ডে 7 মিটার দূরত্ব অতিক্রম করে এবং কিছুক্ষণ পরে থেমে যায়। কণাটি এর ভ্রমণকালের শেষতম সেকেন্ডে মোট অতিক্রান্ত পথের $\frac{1}{64}$ অংশ যায়। এর ভ্রমণকাল ও আদিবেগ নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ ধরি, কণাটির ভ্রমণকাল t সেকেন্ড, আদিবেগ u মি./সে., সমমন্দন f মি./সে.^{2} এবং মোট দূরত্ব s মি.।

প্রশ্নমতে, $7 = u - \frac{1}{2}f(2\times 5 - 1) \Rightarrow 2u - 9f = 14 \cdots\cdots$ (i)

t সে. শেষে বেগ শূন্য। ∴ $0 = u - ft \Rightarrow u = ft \cdots$(ii) এবং $s = ut - \frac{1}{2}ft^2 = ft^2 - \frac{1}{2}ft^2 = \frac{1}{2}ft^2$

আবার, $\frac{s}{64} = u - \frac{1}{2}f(2t-1) = ft - ft + \frac{1}{2}f = \frac{1}{2}f \Rightarrow s = 32f \Rightarrow \frac{1}{2}ft^2 = 32f \Rightarrow t^2 = 64 \Rightarrow t = 8$

(ii) হতে পাই, $u = 8f \Rightarrow f = \frac{u}{8}$ ∴ (i) হতে পাই, $2u - \frac{9}{8}u = 14 \Rightarrow \frac{7}{8}u = 14 \Rightarrow u = 16$

∴ কণাটির ভ্রমণকাল ৮ সেকেন্ড ও আদিবেগ 16 মি./সে.।

6(d) একটি কণা সুষম ত্বরণে সরলরেখায় চলছে। কণাটি একাদশ ও পঞ্চদশ সেকেন্ডে যথাক্রমে 720 সে.মি. ও 960 সে.মি. পথ অতিক্রম করে। তাহলে কণাটি 20 সেকেন্ডে কত পথ অতিক্রম করবে?

সমাধান ঃ মনে করি, বিন্দুটির আদিবেগ u সে.মি./সে. এবং ত্বরণ f সে.মি./সে.^{2} ।

বিন্দুটি একাদশ ও পঞ্চদশ সেকেন্ডে যথাক্রমে 720 সে.মি. ও 960 সে.মি. দূরত্ব অতিক্রম করে।

∴ $u + \frac{1}{2}f(2\times 11 - 1) = 720 \Rightarrow 2u + 21f = 1440 \cdots\cdots$ (i) এবং

$u + \frac{1}{2}f(2\times 15 - 1) = 960 \Rightarrow 2u + 29f = 1920 \cdots\cdots$ (ii)

(ii) − (i) ⇒ $8f = 480 \Rightarrow f = 60$ এবং (i) হতে, $2u + 21\times 60 = 1440 \Rightarrow 2u = 180 \Rightarrow u = 90$

∴ 20 সেকেন্ডে অতিক্রান্ত দূরত্ব $= \{90\times 20 + \frac{1}{2}\times 60\times(20)^2\} = 13800$ সে.মি.।

6(e) সরলরেখায় ধ্রুব ত্বরণে চলমান একটি কণা পরপর দুই সেকেন্ডে যথাক্রমে 10 মিটার ও 15 মিটার পথ অতিক্রম করে। কণাটির ত্বরণ নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ মনে করি, u মি./সে. আদিবেগে এবং f মি./সে.^{2} ধ্রুব ত্বরণে চলমান কণাটি t ও (t + 1) তম সেকেন্ডে যথাক্রমে 10 মিটার ও 15 মিটার পথ অতিক্রম করে।

∴ $10 = u + \frac{1}{2}f(2t-1) \cdots\cdots$ (i) এবং $15 = u + \frac{1}{2}f\{2(t+1)-1\} = u + \frac{1}{2}f(2t+1) \cdots\cdots$ (ii)

এখন, (ii) − (i) $\Rightarrow 5 = \frac{1}{2} f(2t+1-2t+1) \Rightarrow f = 5$ $\therefore$ কণাটির ত্বরণ 5 মি./সে.^{২} ।

6(f) f সমত্বরণে সরলরেখায় চলমান একটি বস্তুকণা t তম এবং (t + n) তম সেকেন্ডে যথাক্রমে x এবং y মিটার দূরত্ব অতিক্রম করে। প্রমাণ কর যে, $f = \frac{y-x}{n}$ মি./সে.^{2} ।

প্রমাণঃ মনে করি, কণাটির আদিবেগ u মি./সে. ।

প্রশ্নমতে, $x = u + \frac{1}{2} f(2t-1) \cdots\cdots$ (i) এবং $y = u + \frac{1}{2} f\{2(t+n)-1\} \cdots\cdots$ (ii)

এখন, (ii) − (i) $\Rightarrow y - x = \frac{1}{2} f(2t+2n-1-2t+1) = nf$ $\therefore$ ত্বরণ $f = \frac{y-x}{n}$ মি./সে.^{2}।

6(g) একটি বস্তুকণা স্থিরাবস্থা হতে যাত্রা করে সরলপথে সুষম ত্বরণে চলে চতুর্থ সেকেন্ডে 14 cm দূরত্ব অতিক্রম করে। অষ্টম সেকেন্ডে কণাটি কত দূরত্ব অতিক্রম করবে তা নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ মনে করি, বস্তুকণাটির স্থিরাবস্থা হতে f সে.মি./সে.^{2} ত্বরণে যাত্রা করে।

প্রশ্নমতে, $14 = 0 + \frac{1}{2} f(2\times 4 - 1) \Rightarrow 7f = 28 \Rightarrow f = 4$

$\therefore$ অষ্টম সেকেন্ডে কণাটির অতিক্রান্ত দূরত্ব $= \{0 + \frac{1}{2} f(2\times 8 - 1)\}$ cm $= \frac{15}{2} \times 4$ m $= 30$ m

7. একটি রেলগাড়ী A থেকে B পর্যন্ত $\frac{1}{2}$ কি.মি. পথ 50 সেকেন্ডে এবং B থেকে C পর্যন্ত $\frac{3}{4}$ কি.মি. পথ একই সময়ে অতিক্রম করে। ত্বরণ সুষম হলে A এবং C বিন্দুতে গাড়ির বেগ নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ মনে করি, রেলগাড়ীটির ত্বরণ f কি.মি./ মি.^{2} এবং A ও C বিন্দুতে বেগ যথাক্রমে u ও v কি.মি./ মি. ।

50 সেকেন্ড $= \frac{50}{60}$ মি. $= \frac{5}{6}$ মি. $\therefore$ 100 সেকেন্ড $= 2 \times \frac{5}{6}$ মি. $= \frac{5}{3}$ মি.

$\therefore$ $AB = \frac{1}{2} = u \times \frac{5}{6} + \frac{1}{2} f \times (\frac{5}{6})^2 \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{5}{6} u + \frac{25}{72} f \Rightarrow 1 = \frac{5}{3} u + \frac{25}{36} f \cdots\cdots$(i) এবং

$AC = \frac{1}{2} + \frac{3}{4} = u \times \frac{5}{3} + \frac{1}{2} f (\frac{5}{3})^2 \Rightarrow \frac{5}{4} = \frac{5}{3} u + \frac{25}{18} f \cdots\cdots$(ii)

এখন, (ii) − (i) $\Rightarrow (\frac{25}{18} - \frac{25}{36}) f = \frac{5}{4} - 1 \Rightarrow \frac{25}{36} f = \frac{1}{4} \Rightarrow f = \frac{36}{25 \times 4} = \frac{9}{25}$

(i) হতে পাই, $1 = \frac{5}{3} u + \frac{25}{36} \times \frac{9}{25} \Rightarrow \frac{5}{3} u = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4} \Rightarrow u = \frac{9}{20}$

আবার, $v = u + ft = \frac{9}{20} + \frac{9}{25} \times \frac{5}{3} = \frac{9}{20} + \frac{3}{5} = \frac{9+12}{20} = \frac{21}{20}$

$\therefore$ A এবং C বিন্দুতে গাড়ির বেগ যথাক্রমে $\frac{9}{20}$ কি.মি./ মি.= 27 কি.মি./ঘ. ও $\frac{21}{20}$ কি.মি./ মি.= 63 কি.মি./ঘ. ।

8(a) দুইটি রেলগাড়ি একই সরল রেলপথে u_1 ও u_2 গতিবেগে পরস্পরের দিকে অগ্রসর হচ্ছে। এদের মধ্যবর্তী দূরত্ব যখন x তখন পরস্পরকে দেখতে পায়। ব্রেক প্রয়োগ করে রেলগাড়ি দুইটি যদি যথাক্রমে সর্বোচ্চ f_1 এবং f_2 মন্দন সৃষ্টি করে, তবে প্রমাণ কর যে, (i) সংঘর্ষ এড়ানো সম্ভব যদি $u_1^2 f_2 + u_2^2 f_1 \le 2f_1 f_2 x$ হয়।
(ii) কোনো রকমে সংঘর্ষ এড়ানো সম্ভব যদি $u_1^2 f_2 + u_2^2 f_1 = 2f_1 f_2 x$ হয়। [রা.'০৩,'১৩; ব. '০৫; সি.'০৬]

প্রমাণঃ মনে করি, ব্রেক প্রয়োগ করে f_1 ও f_2 মন্দনে গাড়ী দুইটি যথাক্রমে x_1 ও x_2 দূরত্ব অতিক্রম করে থেমে যায়।

তাহলে, $0^2 = u_1^2 - 2f_1 x_1 \Rightarrow x_1 = \dfrac{u_1^2}{2f_1}$ এবং $0^2 = u_2^2 - 2f_2 x_2 \Rightarrow x_2 = \dfrac{u_2^2}{2f_2}$

(i) সংঘর্ষ এড়ানো সম্ভব যদি $x_1 + x_2 \le x$ অর্থাৎ $\dfrac{u_1^2}{f_1} + \dfrac{u_2^2}{f_2} \le 2x$ অর্থাৎ $u_1^2 f_2 + u_2^2 f_1 \le 2f_1 f_2 x$ হয়।

(ii) কোনো রকমে সংঘর্ষ এড়ানো সম্ভব যদি $x_1 + x_2 = x$ বা, $\dfrac{u_1^2}{f_1} + \dfrac{u_2^2}{f_2} = 2x$ বা, $u_1^2 f_2 + u_2^2 f_1 = 2f_1 f_2 x$ হয়।

8(b) দুইটি রেলগাড়ি একই সরল রেলপথে u_1 ও u_2 $(u_1 > u_2)$ গতিবেগে একই দিকে অগ্রসর হচ্ছে। এদের মধ্যবর্তী দূরত্ব যখন x তখন এরা পরস্পরকে দেখতে পায়। রেলগাড়ি দুইটির সর্বোচ্চ মন্দন ও সর্বোচ্চ ত্বরণ যথাক্রমে f_1 এবং f_2 হলে দেখাও যে, কোন রকমে সংঘর্ষ এড়ানো সম্ভব যদি $(u_1 - u_2)^2 = 2(f_1 + f_2)x$ হয়। [ঢা.'০১; ব.'০২]

প্রমাণঃ মনে করি, u_1 ও u_2 বেগে গতিশীল রেলগাড়ি দুইটি t সময়ে যথাক্রমে x_1 ও x_2 দূরত্ব অতিক্রম করে এবং v_1 ও v_2 বেগ অর্জন করে।

কোন রকমে সংঘর্ষ এড়ানো সম্ভব যদি $v_1 = v_2$ …… (i) এবং $x_1 = x + x_2$ …… (ii) হয়।

(i) হতে পাই, $u_1 - f_1 t = u_2 + f_2 t \Rightarrow (f_1 + f_2)t = u_1 - u_2 \Rightarrow t = \dfrac{u_1 - u_2}{f_1 + f_2}$

(ii) হতে পাই, $u_1 t - \dfrac{1}{2} f_1 t^2 = u_2 t + \dfrac{1}{2} f_2 t^2 + x_2 \Rightarrow (u_1 - u_2)t = \dfrac{1}{2}(f_1 + f_2)t^2 + x$

$\Rightarrow (u_1 - u_2) \times \dfrac{u_1 - u_2}{f_1 + f_2} = \dfrac{1}{2}(f_1 + f_2) \times \dfrac{(u_1 - u_2)^2}{(f_1 + f_2)^2} + x \Rightarrow \dfrac{(u_1 - u_2)^2}{f_1 + f_2} = \dfrac{1}{2}\dfrac{(u_1 - u_2)^2}{f_1 + f_2} + x$

$\Rightarrow \dfrac{1}{2}\dfrac{(u_1 - u_2)^2}{f_1 + f_2} = x$ $\therefore$ কোন রকমে সংঘর্ষ এড়ানো সম্ভব যদি $(u_1 - u_2)^2 = 2(f_1 + f_2)x$ হয়।

9. একটি চলমান কণার উপর পরস্পর $90°$ কোণে নত সরলরেখা বরাবর $3\,ms^{-2}$ এবং $4\,ms^{-2}$ ত্বরণ কার্যরত আছে। 2 সেকেন্ডে এর ত্বরণ কত হবে?

সমাধান ঃ সমকোণে ক্রিয়াশীল $f_1 = 3\,\text{ms}^{-2}$ ও $f_2 = 4\,\text{ms}^{-2}$ ত্বরণ দুইটির লব্ধি ত্বরণ f হলে ত্বরণের সামান্তরিক সূত্র থেকে পাই,

$f = \sqrt{f_1^2 + f_2^2} = \sqrt{3^2 + 4^2}\ \text{ms}^{-2} = 5\ \text{ms}^{-2}$

$\therefore$ 2 সেকেন্ডে এর ত্বরণ $= 5 \times 2\ \text{ms}^{-2} = 10\ \text{ms}^{-2}$

10. কোনো সরলরেখায় একটি বিন্দু হতে একটি কণা u সমবেগে এবং অপর একটি কণা f সমত্বরণে একই সময়ে একই দিকে যাত্রা করল। দেখাও যে, মিলিত হওয়ার পূর্বে $\frac{u}{f}$ সময়ে তাদের বৃহত্তম দূরত্ব $\frac{u^2}{2f}$ হবে।

সমাধান **:** মনে করি, t সময় পরে তাদের মধ্যবর্তী দূরত্ব d. তাহলে,

t সময় পরে ১ম বস্তুর অতিক্রান্ত দূরত্ব $d_1 = ut$ এবং ২য় বস্তুর অতিক্রান্ড় দূরত্ব $d_2 = 0 \times t + \frac{1}{2}ft^2 = \frac{1}{2}ft^2$

$\therefore \quad d_1 - d_2 = d \Rightarrow ut - \frac{1}{2}ft^2 = d \Rightarrow ft^2 - 2ut + 2d = 0$

t অবশ্যই বাস্ড়ব হবে। $\therefore (-2u)^2 - 4 \times f \times 2d \geq 0 \Rightarrow 4u^2 - 8fd \geq 0 \Rightarrow d \leq \frac{u^2}{2f} \therefore d_{max.} = \frac{u^2}{2f}$

এক্ষেত্রে, t এর মানদ্বয় সমান হবে । $\therefore \; 2t = -\frac{-2u}{f} \Rightarrow t = \frac{u}{f}$

$\therefore$ বস্তু দুটির মধ্যবর্তী সর্বাধিক দূরত্ব $\frac{u^2}{2f}$ এবং $\frac{u}{f}$ সময় পরে তারা পুনরায় মিলিত হবে ।

11. সরলরেখায় চলমান একটি বস্তুকণার ত্বরণ $f = 2t - 7$ দ্বারা প্রকাশিত। $u = 6$ যখন $s = 0$ এবং $t = 0$, v ও s এর মান t এর মাধ্যমে নির্ণয় কর। বস্তুকণাটি কখন থেমে যায়?

সমাধান **:** $\frac{dv}{dt} = f = 2t - 7 \Rightarrow dv = (2t - 7)\,dt$

v এর 6 থেকে v এবং t এর 0 থেকে t সীমাসহ সমাকলন করে পাই, $[v]_6^v = [t^2 - 7t]_0^t$

$\Rightarrow v - 6 = t^2 - 7t - 0 \Rightarrow v = t^2 - 7t + 6$ (Ans.)

আবার, $\frac{ds}{dt} = v = t^2 - 7t + 6 \Rightarrow ds = (t^2 - 7t + 6)\,dt$

s এর 0 থেকে s এবং t এর 0 থেকে t সীমাসহ সমাকলন করে পাই, $[s]_0^s = \left[\frac{1}{3}t^3 - \frac{7}{2}t^2 + 6t\right]_0^t$

$\Rightarrow s = \frac{1}{3}t^3 - \frac{7}{2}t^2 + 6t$ (Ans.)

বস্তুকণাটি যখন থেমে যায়, তখন $v = 0$. $\therefore t^2 - 7t + 6 = 0 \Rightarrow (t-1)(t-6) = 0 \Rightarrow t = 1, 6.$

$\therefore$ বস্তুকণাটি 1 ও 6 সে. পর থেমে যায়।

12. সরলরেখায় চলমান একটি বিন্দুর বেগ $v^2 = as^2 + 2bs + c$ দ্বারা প্রকাশিত। দেখাও যে এর ত্বরণ $f = a(s + b/a)$

প্রমাণ **:** দেওয়া আছে, $v^2 = as^2 + 2bs + c$.

$\therefore \quad \frac{d}{ds}(v^2) = a\frac{d}{ds}(s^2) + 2b\frac{d}{ds}(s) + \frac{d}{ds}(c) \Rightarrow 2v\frac{dv}{ds} = 2as + 2b \Rightarrow v\frac{dv}{ds} = a(s + b/a)$

$\therefore$ ত্বরণ $f = \frac{dv}{dt} = \frac{ds}{dt}.\frac{dv}{ds} = v\frac{dv}{ds} = a(s + b/a)$

13. একটি বস্তুকণা $s = \frac{1}{2} vt$ নিয়মে একটি সরলরেখায় চলমান । দেখাও যে, এর ত্বরণ ধ্রুবক।

প্রমাণ ঃ দেওয়া আছে, $s = \frac{1}{2} vt$ $\therefore v = \frac{ds}{dt} = \frac{1}{2} \frac{d}{dt}(vt) = \frac{1}{2}(t\frac{dv}{dt} + v) = \frac{1}{2} t \frac{dv}{dt} + \frac{1}{2} v$

$\Rightarrow v = t\frac{dv}{dt} \Rightarrow \frac{dv}{v} = \frac{dt}{t}$

সমাকলন করে পাই, $\ln v = \ln t + \ln k \Rightarrow \ln v = \ln(kt) \Rightarrow v = kt$

$\therefore$ ত্বরণ $f = \frac{dv}{dt} = k =$ ধ্রুবক (Showed)

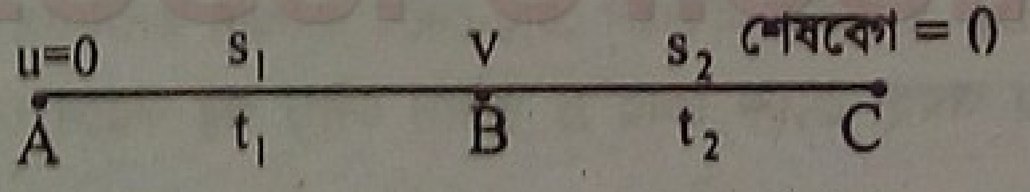
অতিরিক্ত প্রশ্ন (সমাধানসহ)

1(a) শহরতলীতে ট্রেনে যাতায়াতের জন্য প্রতি s দূরত্বে পর পর স্টেশন আছে। যাত্রীদের সুবিধার জন্য সর্বোচ্চ ত্বরণ a ও সর্বোচ্চ মন্দন r নির্ধারণ করা হল। দেখাও যে, সোজারেলপথে এক স্টেশন থেকে পরবর্তী স্টেশনে যাবার সময়, $t = \sqrt{\frac{2s(a+r)}{ar}}$.

প্রমাণঃ মনে করি, ট্রেনটি A স্টেশন থেকে যাত্রা করে a সমত্বরণে t_1 সময়ে s_1 দূরত্ব অতিক্রম করে B তে v বেগ প্রাপ্ত হয় । অতপর B হতে v আদিবেগে r সমমন্দনে t_2 সময়ে s_2 দূরত্ব অতিক্রম করে C স্টেশনে থামে।

প্রশ্নমতে, $s_1 + s_2 = s$, মোট সময় $t = t_1 + t_2$

AB অংশে ঃ $v = 0 + at_1 \Rightarrow t_1 = \frac{v}{a}$ …… (i)



এবং $s_1 = \frac{0+v}{2} \times t_1 = \frac{vt_1}{2}$ …… (ii)

BC অংশে ঃ $0 = v - rt_2 \Rightarrow t_2 = \frac{v}{r}$ …… (iii) এবং $s_2 = \frac{v+0}{2} \times t_2 = \frac{vt_2}{2}$ …… (iv)

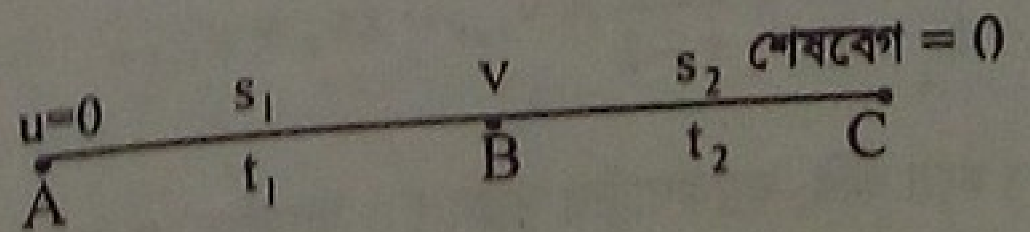
(ii) + (iv) $\Rightarrow s_1 + s_2 = \frac{v}{2}(t_1 + t_2) \Rightarrow s = \frac{v}{2} \times t \Rightarrow v = \frac{2s}{t}$, $[\because s_1 + s_2 = s,\ t_1 + t_2 = t]$

(i) + (iii) $\Rightarrow t_1 + t_2 = v(\frac{1}{a} + \frac{1}{r}) \Rightarrow t = \frac{2s}{t} \times \frac{a+r}{ar} \Rightarrow t^2 = \frac{2s(a+r)}{ar}$ $\therefore t = \sqrt{\frac{2s(a+r)}{ar}}$

1(b) ঢাকা থেকে সোজা রেলপথে ছেড়ে আন্তঃনগর ট্রেনটি নরসিংদীতে থামে এর বেগ সমত্বরণে ক্রমশ বেড়ে সর্বোচ্চ v হয় এবং পরে সমমন্দনে কমে যায়। স্টেশন দুইটির দূরত্ব x হলে, ঢাকা থেকে নরসিংদী যেতে ট্রেনটির কতক্ষণ লাগবে?

সমাধান ঃ মনে করি, ট্রেনটি ঢাকার A স্টেশন থেকে যাত্রা করে সমত্বরণে t_1 সময়ে s_1 দূরত্ব অতিক্রম করে B তে v বেগ প্রাপ্ত হয় । অতপর B হতে v আদিবেগে সমমন্দনে t_2 সময়ে s_2 দূরত্ব অতিক্রম করে নরসিংদীর C স্টেশনে থামে।

প্রশ্নমতে, $s_1 + s_2 = x$, মোট সময় $t = t_1 + t_2$



এখন $AB = s_1 = \frac{0+v}{2} \times t_1 = \frac{vt_1}{2}$ …… (i),

$$CB = s_2 = \frac{v+0}{2} \times t_2 = \frac{vt_2}{2} \quad \cdots\cdots \text{(ii)}$$

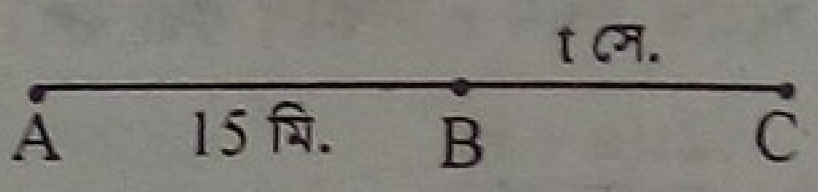
$$\text{(i)} + \text{(ii)} \Rightarrow s_1 + s_2 = \frac{v}{2}(t_1 + t_2) \Rightarrow x = \frac{v}{2}t \Rightarrow t = \frac{2x}{v}$$

$\therefore$ ঢাকা থেকে নরসিংদী যেতে ট্রেনটির $\frac{2x}{v}$ সময় লাগবে।

2(a) একটি বিড়াল এর সম্মুখে 15 মিটার দূরত্বে একটি ইঁদুর দেখতে পেয়ে তাকে ধরার জন্য $2\,ms^{-2}$ সমত্বরণে দৌড়াতে শুরু করল। ইঁদুরটি $14\,ms^{-1}$ সমবেগে সরলপথে চলতে থাকলে , কোথায় এবং কখন বিড়ালটি ইঁদুরটিকে ধরতে পারবে?.

সমাধান ঃ মনে করি, A বিন্দু থেকে স্থিরাবস্থায় বিড়ালটি সুষম ত্বরণে এবং B বিন্দু থেকে ইঁদুরটি সমবেগে একই সাথে দৌড়াতে লাগল এবং t সে. পরে C বিন্দুতে বিড়ালটি ইঁদুরটিকে ধরতে সক্ষম হয়, যেখানে AB = 15 মি.।

$\therefore$ t সে. বিড়ালের অতিক্রান্ত দূরত্ব $AC = (0.t + \frac{1}{2}.2.t^2) = t^2$ মি.



t সে. ইঁদুরের অতিক্রান্ত দূরত্ব $BC = 14t$ মি., [$s = vt$ সূত্র দ্বারা]

এখন, $AC = AB + BC \Rightarrow t^2 = 15 + 14t \Rightarrow t^2 - 14t - 15 = 0$

$\Rightarrow t^2 - 15t + t - 15 = 0 \Rightarrow (t-15)(t+1) = 0 \;\therefore t = 15$, যেহেতু সময় t ঋণাত্মক হতে পারে না।

$\therefore$ বিড়ালটি 15 সেকেন্ডে তার যাত্রাস্থান থেকে 15^2 অর্থাৎ 225 মিটার দূরে ইঁদুরটি ধরতে পারবে।

2(b) x দূরত্বে একজন চোর দেখে একজন কনস্টেবল u বেগে এবং α সুষম ত্বরণে তাকে ধরার জন্য দৌড় শুরু করল। স্থির অবস্থা থেকে চোর β ত্বরণে দৌড় শুরু করলে দেখাও যে, কনস্টেবল চোরকে ধরতে পারবে যদি $\alpha \geq \beta$ অথবা, $\alpha < \beta < \alpha + \frac{u^2}{2x}$ হয়।

প্রমাণ ঃ মনে করি, কনস্টেবল ও চোর যথাক্রমে C ও T অবস্থান হতে দৌড় শুরু করল এবং t সময়ে কনস্টেবল P বিন্দুতে ধরে ফেলল।

$$\therefore \quad CP = CT + TP \Rightarrow ut + \frac{1}{2}\alpha t^2 = x + \frac{1}{2}\beta t^2 \Rightarrow (\beta - \alpha)t^2 + 2ut + 2x = 0$$

t এর বাস্তব মানের জন্য, $(2u)^2 - 4 \times (\beta - \alpha) \times 2x \geq 0 \Rightarrow u^2 - 2x(\beta - \alpha) \geq 0$; ইহা সত্য হবে যদি $\alpha \geq \beta$ হয় অথবা যদি $\alpha < \beta$ হয় । পরবর্তী ক্ষেত্রে, $\beta < \alpha + \frac{u^2}{2x}$.

সুতরাং কনস্টেবল চোরকে ধরতে পারবে যদি $\alpha \geq \beta$ অথবা, $\alpha < \beta < \alpha + \frac{u^2}{2x}$ হয়।

3. একটি বস্তুকণা সুষম ত্বরণে যাত্রা করে t সময়ে 'a_t' দূরত্ব অতিক্রম করে এবং v_t বেগ অর্জন করে। প্রমাণ কর যে, $\frac{a_{t+1}}{t+1} - \frac{2a_t}{t} + \frac{a_{t-1}}{t-1} = v_{t+1} - 2v_t + v_{t-1}$.

প্রমাণ ঃ মনে করি, বস্তুকণাটির ত্বরণ f । তাহলে, $a_t = v_1 t + \frac{1}{2}ft^2 \Rightarrow \frac{a_t}{t} = v_1 + \frac{1}{2}ft$

$\therefore \frac{a_{t+1}}{t+1} = v_{t+1} + \frac{1}{2}f(t+1)$, $\frac{a_{t-1}}{t-1} = v_{t-1} + \frac{1}{2}f(t-1)$

$$\text{L.H.S.} = \frac{a_{t+1}}{t+1} - \frac{2a_t}{t} + \frac{a_{t-1}}{t-1} = v_{t+1} + \frac{1}{2}f(t+1) - 2(v_t + \frac{1}{2}ft) + v_{t-1} + \frac{1}{2}f(t-1)$$

$$= v_{t+1} - 2v_t + v_{t-1} + \frac{1}{2}f(t+1-2t+t-1) = v_{t+1} - 2v_t + v_{t-1} = \text{R.H.S.}$$

4. 's' দূরত্ব সমান n ভাগে বিভক্ত এবং স্থির অবস্থা থেকে f ত্বরণে একটি চলমান বস্তুকণা যাত্রা করে প্রতি অংশ অতিক্রম শেষে ত্বরণ $\frac{f}{n}$ বৃদ্ধি পায়। দেখাও যে, মোট 's' দূরত্ব অতিক্রম শেষে বস্তুকণাটির বেগ $\sqrt{fs(3-\frac{1}{n})}$ হবে।

প্রমাণ ঃ মনে করি, প্রতি $\frac{s}{n}$ অংশ অতিক্রম শেষে চলমাণ বস্তুকণাটির বেগ যথাক্রমে $v_1, v_2 \cdots \cdots, v_n$.

$\therefore v_1^2 = 0 + 2f.\frac{s}{n}$, $v_2^2 = v_1^2 + 2(f+\frac{f}{n}).\frac{s}{n} = 2f.\frac{s}{n} + 2(f+\frac{f}{n}).\frac{s}{n} = 2f.\frac{s}{n}\{1+(1+\frac{1}{n})\}$,

$v_3^2 = v_2^2 + 2(f+\frac{2f}{n}).\frac{s}{n} = 2f.\frac{s}{n}\{1+(1+\frac{1}{n})\} + 2(f+\frac{2f}{n}).\frac{s}{n} = 2f.\frac{s}{n}\{1+(1+\frac{1}{n})+(1+\frac{2}{n})\}$

তদ্রূপ, $v_n^2 = v_{n-1}^2 + 2\{f+\frac{(n-1)f}{n}\}.\frac{s}{n} = 2f.\frac{s}{n}\{1+(1+\frac{1}{n})+(1+\frac{2}{n})+\cdots+(1+\frac{n-1}{n})\}$

$\Rightarrow v_n^2 = 2f.\frac{s}{n}\{n+\frac{1}{n}(1+2+3+\cdots\cdots+(n-1)\} = 2f.\frac{s}{n}\{n+\frac{1}{n}\frac{(n-1)n}{2}\}$

$= 2f.\frac{s}{n}(n+\frac{n-1}{2}) = 2f.\frac{s}{n}.\frac{3n-1}{2} = fs(3-\frac{1}{n}) \quad \therefore v_n = \sqrt{fs(3-\frac{1}{n})}$

ভর্তি পরীক্ষার MCQ:

1. একটি গাড়ি ঘন্টায় 8 কি.মি. বেগে চলে। গাড়ি থেকে ঘন্টায় 16 কি.মি. বেগে একটি বস্তু কোণ দিকে নিক্ষেপ করলে বস্তুটি গাড়ির বেগের সাথে সমকোণে চলবে? [KUET 06-07; RU 06-07]

Sol^n : $\cos\alpha = -8/16 = -1/2 \Rightarrow \alpha = 120°$

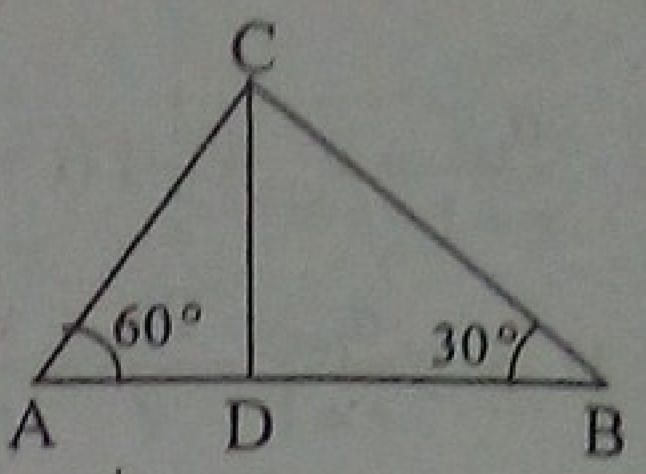
2. 36 মি./সে. বেগে চলন্ত একটি ট্রেনের যাত্রীর নিকট মনে হয় যে বৃষ্টির ধারা উল্লম্বের সাথে $\sin^{-1}(3/\sqrt{13})$ কোণ উৎপন্ন করে। বৃষ্টির গতিবেগ কত হবে? [RU 09-10]

Sol^n : গাড়ির বেগ = বৃষ্টির বেগ $\times \tan\theta \Rightarrow 36$ = বৃষ্টির বেগ $\times \tan\sin^{-1}\frac{3}{\sqrt{13}}$ $\therefore$ বৃষ্টির বেগ = 24 মি./ সে.।

3. AB সরলরেখার সাথে 60° কোণে A বিন্দু হতে একটি কণা যাত্রা করে। BA সরলরেখার সাথে 30° কোণে B বিন্দু হতে একই সময়ে অপর একটি কণা ঘন্টায় 10 কি.মি. সমবেগে যাত্রা করে এবং কছুক্ষণ পর প্রথম কণার সাথে মিলিত হয়। প্রথম কণার বেগ নির্ণয় কর? [BUET 10-11]

Sol^n : ধরি, প্রথম কণার বেগ x কি.মি./ঘ. এবং t ঘন্টা পর তারা C বিন্দুতে মিলিত হয়।

$\therefore AC = xt, BC = 10t$



এখন, $CD = AC\sin 60° = BC\sin 30°$

$\Rightarrow xt\times\frac{\sqrt{3}}{2} = 10t\times\frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{10}{\sqrt{3}}$

কৌশল ঃ নৌকার বেগ u , স্রোতের বেগ v , নদীর প্রস্থ s হলে,

(a) সর্বনিম্ন সময়ে নদী পরাপারের ক্ষেত্রে, লব্ধি বেগ, $w = u\sin\alpha$, সময় $t = \frac{s}{u\sin\alpha}$

(b) সর্বনিম্ন দূরত্বে/ সোজাসুজি নদী পারাপারের ক্ষেত্রে,লব্ধি বেগ, $w = \sqrt{u^2 - v^2}$, $t = s/\sqrt{u^2 - v^2}$ এবং w, v এর সাথে লম্ব হলে, $\cos\alpha = -v/u$

4. স্রোতহীন অবস্থায় 100 মি. প্রশস্ত একটি নদী সাঁতরাইয়া একজন লোক 4 মিনিটে সোজাসুজি একে অতিক্রম করতে পারে। কিন্তু স্রোত থাকলে সে একই পথে 5 মিনিটে একে অতিক্রম করে। স্রোতের গতিবেগ কত?

[BUET 09-10, 05-06; Kuet 08-09,06-07; HSTU 08-09]

Sol^n : সাঁতারুর বেগ, $u = 100/4 = 25$ মি./সে., সোজাসুজি নদী পারাপারের ক্ষেত্রে, $\sqrt{u^2 - v^2} = 100/5 = 20$

$\therefore\ 25^2 - v^2 = 20^2 \Rightarrow v^2 = 225 \Rightarrow v = 15$ মি./সে.

5. স্রোতের দ্বিগুণ গতিতে নৌকা চালিয়ে নদীর ঠিক অপর পাড়ে পৌছাতে হলে স্রোতের গতির দিকে কত কোণে চালাতে হবে?

[BAU 06-07]

Sol^n : সোজাসুজি নদী পারারের ক্ষেত্রে, $\cos\alpha = -v/u = -v/2v = -1/2 \Rightarrow \cos\alpha = 120°$

কৌশল ঃ কোন গুলি তার লক্ষ্যস্থলের s দূরত্ব অতিক্রম করতে বেগের $\frac{1}{n}$ অংশ হারালে থেমে যাবার পূর্বে এটি আর যে দূরত্ব অতিক্রম করবে তার মান , $x = \frac{s(n-1)^2}{2n-1}$

6. একটি বুলেট লক্ষ্য বস্তুর 2 ইঞ্চি ভিতরে প্রবেশ করতে তার অর্ধেক বেগ হারায়। লক্ষ্য বস্তুর প্রতিরোধ সুষম হলে আর কত দূর এটি প্রবেশ করবে? **[DU 09-10; BUET 09-10; RUET 10-11, 06-07; RU 09-10]**

Sol^n : দূরত্ব $= \frac{2(2-1)^2}{2.2-1} = \frac{2}{3}$ ইঞ্চি।

7. একটি গাড়ি সমত্বরণে 30 কি.মি./ঘ. আদিবেগে 100 কি.মি. পথ অতিক্রম করে 50 কি.মি./ঘ. চূড়ান্ত বেগ প্রাপ্ত হয়। গাড়িটির ত্বরণ কত?

[DU 10-11]

Sol^n : $v^2 = u^2 + 2fs \Rightarrow 50^2 = 30^2 + 2f.100 \Rightarrow f = 8$ কি.মি./ঘ.।

8. একটি গাড়ি স্থিতাবস্থা হতে সমত্বরণে চলা শুরু করে 5 সেকেন্ডে 180 মি./সে. গতিবেগ প্রাপ্ত হল। গাড়িটির ত্বরণ কত?

[DU 04-05, 06-07;HSTU 05-06]

Sol^n : ত্বরণ $f = \frac{v-u}{t} = \frac{180-0}{5} = 36$ মি./সে.^{2}

কৌশল ঃ কোন ব্যক্তির কোন স্থানে গমনের বেগ u, ফিরে আসার বেগ v হলে ঐ ব্যক্তির গড় বেগ $= \dfrac{2uv}{u+v}$

9. একজন ব্যক্তি কোন স্থানে যাওয়ার সময় ঘন্টায় 4 মাইল বেগে যায় এবং আসার সময় ঘন্টায় 5 মাইল বেগে ফেরত আসে। তার গড় গতিবেগ কত?

[RU 09-10; KU 09-10]

Sol^n : গড় বেগ $= \dfrac{2uv}{u+v} = \dfrac{2\times4\times5}{4+5} = \dfrac{40}{9}$

10. একটি কণা সরলরেখা বরাবর চলে কোন এক সেকেন্ডে 10 মি. পথ অতিক্রম করে এবং পরবর্তী 4 সেকেন্ডে 60 মি. পথ অতিক্রম করে। কণাটির সমত্বরণ কত?

[KUET 07-08; KU 08-09]

Sol^n : $S_t = u + \dfrac{1}{2}f(2t-1) \Rightarrow u + ft - \dfrac{1}{2}f = 10$ এবং $v = u + ft = 10 + \dfrac{1}{2}f$

এখন, $60 = v.4 + \dfrac{1}{2}f.4^2 \Rightarrow 15 = 10 + \dfrac{1}{2}f + 2f \Rightarrow \dfrac{5}{2}f = 5 \therefore f = 2$

11. একটি বস্তু স্থির অবস্থা হতে যাত্রা আরম্ভ করে ১ম সেকেন্ডে 1 মি. দূরত্ব অতিক্রম করে পরবর্তী 1 মি. দূরত্ব অতিক্রম করতে বস্তুটির কত সময় লাগবে?

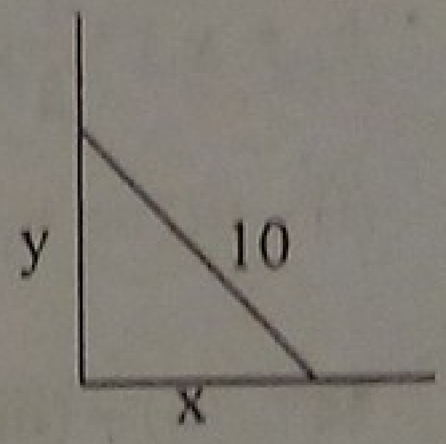
[RU 06-07]

Sol^n : $S_1 = 1 = \dfrac{1}{2}f\times 1^2 \Rightarrow f = 2$ মি./সে.^{2} । $\therefore S_2 = 1+1 = 0 + \dfrac{1}{2}f(t+1)^2 = \dfrac{1}{2}.2(t+1)^2$

$\Rightarrow (t+1)^2 = 2 \Rightarrow t = \sqrt{2} - 1 = 0{\cdot}414$ সে.।

12. 10 ফুট দৈর্ঘ্যেও একটি মই একটি খাড়া দেয়ালের (y বরাবর) সাথে হেলানো আছে। যদি মইটির মেঝে সংলগ্ন প্রান্ত v বেগে দেয়ালের x বরাবর দূরে সরতে থাকে তবে দেয়াল সংলগ্ন প্রান্তের বেগ কত?

[BUET 09-10]



Sol^n : $x^2 + y^2 = 10^2 \Rightarrow 2x\dfrac{dx}{dt} + 2y\dfrac{dy}{dt} = 0 \Rightarrow x\,v + 2y\dfrac{dy}{dt} = 0$

$\Rightarrow \dfrac{dy}{dt} = -\dfrac{xv}{y}$