12(c) একটি পতনশীল কণা কিছুক্ষণ অবাধে পতনের পর দেখা গেল পরবর্তী 4 সেকেন্ডে 93·2 মিটার দূরত্ব অতিক্রম করে। পরবর্তী 4 সেকেন্ডে কত দূরত্ব অতিক্রম করবে?

সমাধান ঃ মনে করি, কণাটি t সেকেন্ড আবাধে পতনের পর পরবর্তী 4 সেকেন্ডে 93·2 মিটার দূরত্ব অতিক্রম করে। তাহলে, t সেকেন্ড পরে বেগ $= gt = 9{\cdot}8t$ মি./সে.।

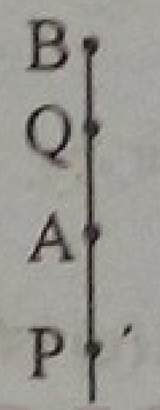
আবার, $93{\cdot}2 = 9{\cdot}8t \times 4 + \frac{1}{2} \times 9.8 \times 16 \Rightarrow 39{\cdot}2\,t = 93{\cdot}2 - 78{\cdot}4 \Rightarrow t = \frac{14.8}{39.2}$.

পরবর্তী 4 সেকেন্ডে অতিক্রান্ত দূরত্ব d মিটার হলে, $93{\cdot}2 + d = 9{\cdot}8t \times 8 + \frac{1}{2} \times 9.8 \times 8^2$

$\Rightarrow d = 9{\cdot}8 \times \frac{14.8}{39.2} \times 8 + \frac{1}{2} \times 9.8 \times 8^2 - 93{\cdot}2 = 29{\cdot}6 + 313{\cdot}6 - 93{\cdot}2 = 250$ মিটার।

13. f সমত্বরণে খাড়া উর্ধ্বগামী একটি এরোপ্লেন থেকে একটি বল ফেলে দেয়া হল। 4 সে. পর ইহা থেকে অপর একটি বল ফেলে দেয়া হল । দেখাও যে, ২য় বল ফেলার 2 সে. পর বল দুইটির মধ্যবর্তী দূরত্ব হবে $16(g + f)$ ।

প্রমাণ ঃ মনে করি, A বিন্দু হতে ১ম বলটি ফেলে দেয়া হল যখন এরোপ্লেন এর বেগ u । 4 সে. পর ইহা B বিন্দুতে পৌছা মাত্র ২য় বলটি ফেলে দেয়া হল। তাহলে, ২য় বলটির নিক্ষেপণ বেগ $= (u + 4f)$.



6 সেকেন্ড পর ১ম বলটির অবস্থান P এবং 2 সেকেন্ড পর ২য় বলটির অবস্থান Q হলে,

$-AP = u \times 6 - \frac{1}{2}g \times 6^2 = 6u - 18g$ এবং $-BQ = (u + 4f) \times 2 - \frac{1}{2} \times g \times 2^2 = 2u + 8f - 2g$

4 সেকেন্ডে এরোপ্লেন এর অতিক্রান্ত দূরত্ব $AB = u \times 4 + \frac{1}{2} \times f \times 4^2 = 4u + 8f$

$\therefore\ PQ = AP + AB - BQ = -6u + 18g + 4u + 8f + 2u + 8f - 2g = 16g + 16f = 16(g + f)$

14. একটি ক্রিকেট বল খাড়া উপরে নিক্ষেপ করা হল। সর্বাধিক উচ্চতায় পৌছার শেষ অর্ধ সেকেন্ডে বলটি কত দূরত্ব অতিক্রম করবে?

সমাধান ঃ সর্বাধিক উচ্চতায় পৌছার শেষ অর্ধ সেকেন্ডে বলটির উত্থানে অতিক্রান্ত দূরত্ব

= সর্বাধিক উচ্চতা থেকে প্রথম অর্ধ সেকেন্ডে বলটির পতনে অতিক্রান্ত দূরত্ব, [$\because$ উত্থানকাল = পতনকাল]

$= 0 \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times g \times (\frac{1}{2})^2 = \frac{1}{8} \times 32$ ফুট = 4 ফুট।

প্রশ্নমালা IX E

1(a) একটি বস্তু 98 ms^{-1} বেগে অনুভূমিক তলের সাথে $60°$ কোণে প্রক্ষিপ্ত হল। 320 m উচ্চতায় তার বেগের মান ও দিক নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ দেওয়া আছে, বস্তুটির নিক্ষেপণ বেগ $u = 98$ মি./সে., নিক্ষেপণ কোণ $\alpha = 60°$ ।

ধরি, 320 মি. উচ্চতায় বস্তুটির বেগ v মি./সে. এবং তা অনুভূমিকের সাথে θ কোণ উৎপন্ন করে। তাহলে,

$v^2 \sin^2\theta = (u \sin\alpha)^2 - 2gh = (98 \times \sin 60°)^2 - 2 \times 9{\cdot}8 \times 320 = 7203 - 6272 = 931$

$v \cos\theta = u \cos\alpha = 98 \times \cos 60° = 49 \Rightarrow v^2 \cos^2\theta = 49^2$

$\therefore\ v = \sqrt{49^2 + 931} = 57.72$ এবং $\theta = \tan^{-1}\sqrt{\frac{931}{49^2}} = 31.9°$

$\therefore$ নির্ণেয় বেগ 57.72 মিটার/ সেকেন্ড তা অনুভূমিকের সাথে $31.9°$ কোণ উৎপন্ন করে।

1(b) ভূমি হতে $\sin^{-1}\frac{3}{5}$ কোণে শূন্যে নিক্ষিপ্ত বস্তুর অনুভূমিক পাল্লা 120 মি. হলে, নিক্ষেপণ বেগের মান এবং এর বিচরণ পথের সর্বোচ্চ বিন্দুতে বস্তুর বেগ ও গমনকাল নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ দেওয়া আছে, বস্তুটির নিক্ষেপণ কোণ $\alpha = \sin^{-1}\frac{3}{5} \Rightarrow \sin\alpha = \frac{3}{5}$ এবং $\cos\alpha = \sqrt{1-\frac{9}{25}} = \frac{4}{5}$

নিক্ষেপণ বেগ u মি./সে. হলে, অনুভূমিক পাল্লা $\frac{2u^2\sin\alpha\cos\alpha}{g} = 120 \Rightarrow u^2 \times \frac{3}{5} \times \frac{4}{5} = 60 \times 9.8$

$$\Rightarrow u^2 = 5 \times 25 \times 9.8 = 49 \times 25 \Rightarrow u = 35$$

$\therefore$ নিক্ষেপণ বেগ $u = 35$ মি./সে., সর্বোচ্চ বিন্দুতে বস্তুর বেগ = বস্তুর অনুভূমিক বেগ $u\cos\alpha = 35 \times \frac{4}{5} = 28$ মি./সে. এবং সর্বোচ্চ বিন্দুতে গমনকাল $t = \frac{u\sin\alpha}{g} = \frac{35 \times \frac{3}{5}}{9.8} = 2.14$ সেকেন্ড (প্রায়)।

1(c) কোনো পাহাড়ের চূড়া হতে ভূমির সমান্তরালে 98 ms^{-1} বেগে নিক্ষিপ্ত একটি পাথর পাহাড়ের পাদদেশ হতে 245 মি. দূরে ভূমিতে পতিত হয়। পাহাড়ের উচ্চতা নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ মনে করি, পাহাড়ের উচ্চতা h মিটার এবং পাথরটি t সেকেন্ডে 245 মিটার দূরে ভূমিতে পতিত হয়।

$\therefore$ বস্তুটির অতিক্রান্ত অনুভূমিক সরণ $= 98\cos 0° \times t = 245 \Rightarrow t = 2.5$

এবং অতিক্রান্ত উল্লম্ব সরণ $= h = 98\sin 0° \times t + \frac{1}{2}gt^2 = 0 + \frac{1}{2} \times 9.8 \times (2.5)^2 = 30.625$

$\therefore$ পাহাড়ের উচ্চতা $h = 30.625$ মিটার।

বিকল্প পদ্ধতি ঃ মনে করি, পাহাড়ের উচ্চতা h মিটার। পাহাড়ের চূড়াকে মূলবিন্দু ধরলে পাথরটি (245, h) বিন্দুগামী হবে। তাহলে, $y = \frac{gx^2}{2u^2}$ সূত্র দ্বারা পাই, $h = \frac{9.8 \times 245^2}{2 \times 98^2} = 30.625$ $\therefore$ পাহাড়ের উচ্চতা 30.625 মিটার।

2. একটি বালক একটি ফুটবল খাড়া উপরের দিকে 80 মি. উঁচুতে নিক্ষেপ করতে পারে। সে বলটি সর্বাধিক কত অনুভূমিক দূরত্বে নিক্ষেপ করতে পারবে এবং এ ক্ষেত্রে বিচরণকাল নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ ধরি, বলটির নিক্ষেপণ বেগ u মি./ সে.। শর্তানুসারে, $80 = \frac{u^2}{2g} \Rightarrow u^2 = 2 \times 9.8 \times 80\ \therefore\ u = 39.6$

সে বলটি সর্বাধিক অনুভূমিক দূরত্বে নিক্ষেপ করতে পারবে $R_{max} = \frac{u^2}{g} = \frac{(39.6)^2}{9.8} = 160$ মিটার।

এবং এ ক্ষেত্রে বিচরণকাল $T = \frac{2u\sin 45^0}{g} = \frac{2 \times 39.6 \times 1/\sqrt{2}}{9.8} = 5.71$ সেকেন্ড।

3. একটি বুলেট 50 গজ দূরবর্তী এবং 75 ফুট উচ্চ একটি খাড়া দেওয়াল কোন রকমে ভূমির সমান্তরালে অতিক্রম করে। বুলেটটির প্রক্ষেপ বেগ ও দিক নির্ণয় কর। ($g = 32$ ft./sec^2.) [চ.'০৩; বুয়েট.'০২-০৩]

সমাধান ঃ মনে করি, বুলেটটির প্রক্ষেপ বেগ u মি./সে. এবং প্রক্ষেপ কোণ α.

যেহেতু বুলেটটি 50 গজ অর্থাৎ 3×50 ফুট দূরে অবস্থিত 75 ফুট উচ্চ একটি দেওয়ালের ঠিক উপর দিয়ে অনুভূমিকভাবে চলে যায়, সেহেতু বৃহত্তম উচ্চতা $H = 75$ এবং অর্ধ অনুভূমিক পাল্লা $\frac{R}{2} = 3 \times 50 \Rightarrow R = 300.$

H এবং R এর সম্পর্ক হতে পাই, $\tan\alpha = \frac{4H}{R} = \frac{4 \times 75}{300} = 1 \Rightarrow \alpha = 45°$

এখন, $H = \frac{u^2 \sin^2\alpha}{2g} \Rightarrow 75 = \frac{u^2 \sin^2 45^0}{2g} = \frac{u^2(1/\sqrt{2})^2}{2 \times 32} = \frac{u^2}{128} \Rightarrow u^2 = 9600 \Rightarrow u = 40\sqrt{6}$

$\therefore$ বুলেটটির প্রক্ষেপ বেগের মান $40\sqrt{6}$ ফুট / সে. এবং প্রক্ষেপ কোণ $45°$ ।

4(a) ভূমি থেকে নিক্ষিপ্ত একটি প্রক্ষেপক 4 সেকেন্ড পরে নিক্ষেপণ বিন্দু হতে 78·4 মি. দূরে ভূমিতে আঘাত করে। নিক্ষেপণ বেগের মান নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ মনে করি, প্রক্ষেপকটির নিক্ষেপণ বেগ u মি./সে. এবং নিক্ষেপণ কোণ α. তাহলে,

বিচরণকাল $\frac{2u\sin\alpha}{g} = 4 \Rightarrow u\sin\alpha = 2 \times 9{\cdot}8 = 19{\cdot}6 \ldots \ldots$ (i) এবং

প্রক্ষেপক দ্বারা 4 সেকেন্ডে অতিক্রান্ত অনুভূমিক দূরত্ব $= u\cos\alpha \times 4 = 78{\cdot}4 \Rightarrow u\cos\alpha = 19{\cdot}6 \ldots \ldots$(ii)

$(i)^2 + (ii)^2 \Rightarrow u^2(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha) = 384{\cdot}16 + 384{\cdot}16 \Rightarrow u^2 = 768{\cdot}32 \Rightarrow u = 27{\cdot}72$ (প্রায়)

4(b) একটি ক্রিকেট বলকে ভূমি থেকে নিক্ষেপ করা হলে এটি 100 গজ দূরে ভূমিতে ফিরে আসে । এর বিচরণ পথের সর্বাধিক উচ্চতা $56\frac{1}{4}$ ফুট হলে এর বিচরণকাল ও প্রক্ষেপণ কোণের মান নির্ণয় কর। [কু.'০৭; চ.'১০; য.'১১]

সমাধান ঃ মনে করি, ক্রিকেট বলের প্রক্ষেপণ বেগ u ফুট/সে. এবং প্রক্ষেপণ কোণ α. তাহলে,

অনুভূমিক পাল্লা $R = 3 \times 100$ ফুট এবং সর্বাধিক উচ্চতা $H = 56\frac{1}{4} = \frac{225}{4}$ ফুট।

H এবং R এর সম্পর্ক হতে পাই, $\tan\alpha = \frac{4H}{R} = \frac{4 \times (225/4)}{3 \times 100} = \frac{75}{100} = \frac{3}{4} \Rightarrow \alpha = \tan^{-1}\frac{3}{4}$

$\therefore \sin\alpha = \frac{3}{\sqrt{9+16}} = \frac{3}{5}, \cos\alpha = \frac{4}{\sqrt{9+16}} = \frac{4}{5}$

এখন, $H = \frac{u^2\sin^2\alpha}{2g} \Rightarrow \frac{225}{4} = \frac{u^2\sin^2\alpha}{2g} = \frac{u^2 \times (9/25)}{2 \times 32} \Rightarrow u^2 = 10000 \Rightarrow u = 100$

$\therefore$ বিচরণকাল $T = \frac{2u\sin\alpha}{g} = 2 \times \frac{100}{32} \times \frac{3}{5} = 3{\cdot}75$ সেকেন্ড এবং প্রক্ষেপণ কোণ $\tan^{-1}\frac{3}{4}$ ।

4(c) একটি রাইফেলের পাল্লা 1000 মিটার। চন্দ্রের মাধ্যাকর্ষণ শক্তি পৃথিবীর মাধ্যাকর্ষণ শক্তির $\frac{1}{6}$ গুণ হলে একইরূপ অবস্থায় চন্দ্রপৃষ্ঠে রাইফেলের পাল্লা কত হবে? [কু.'০২]

সমাধান ঃ মনে করি, প্রক্ষেপণ বেগ u , প্রক্ষেপণ কোণ α এবং পৃথিবীর মাধ্যাকর্ষণ শক্তি g । তাহলে, চন্দ্রের মাধ্যাকর্ষণ শক্তি $\frac{g}{6}$ ।

$\therefore$ পৃথিবীপৃষ্ঠে রাইফেলের অনুভূমিক পাল্লা $R = 1000 = \frac{u^2 \sin 2\alpha}{g}$

$\therefore$ চন্দ্রপৃষ্ঠে রাইফেলের অনুভূমিক পাল্লা $R_1 = \frac{u^2 \sin 2\alpha}{g/6} = 6 \times \frac{u^2 \sin 2\alpha}{g} = 6 \times 1000 = 6000$ মিটার।

4(d) প্রমাণ কর যে, নিক্ষেপণ কোণ $\frac{\pi}{4}$ হলে অনুভূমিক পাল-ার মান বৃহত্তম হবে এবং এক্ষেত্রে পাল্লা R = 4H, যেখানে বৃহত্তম উচ্চতা = H

প্রমাণ ঃ u গতিবেগে এবং α কোণে শূন্যে নিক্ষিপ্ত কোন বস্তুর অনুভূমিক পাল্লা $R = \frac{u^2 \sin 2\alpha}{g}$; এখানে u ও g ধ্রুবক। সুতরাং R এর মান $\sin 2\alpha$ এর উপর নির্ভর করে এবং $\sin 2\alpha = 1$ i.e., $2\alpha = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{4}$ হলে R বৃহত্তম হবে । এক্ষেত্রে পাল্লা $R = \frac{u^2}{g}$ এবং $H = \frac{u^2 \sin^2 \alpha}{2g} = \frac{u^2 \sin^2(\pi/4)}{2g} = \frac{u^2(1/\sqrt{2})^2}{2g} = \frac{1}{4} \times \frac{u^2}{g} = \frac{1}{4}R$

$\therefore \quad R = 4H$

4(e) u গতিবেগে এবং α কোণে শূন্যে নিক্ষিপ্ত কোন বস্তুর অনুভূমিক পাল্লা ও বৃহত্তম পাল্লার মান যথাক্রমে R ও D হলে, প্রমাণ কর যে, R = D sin 2α , এবং দুইটি বিচরণ পথের সর্বাধিক উচ্চতা h_1 ও h_2 হলে, দেখাও যে, $D = 2(h_1 + h_2)$ [য.'০২]

প্রমাণ ঃ u গতিবেগে এবং α কোণে শূন্যে নিক্ষিপ্ত কোনো বস্তুর অনুভূমিক পাল্লা $R = \frac{u^2 \sin 2\alpha}{g}$ এবং বৃহত্তম পাল্লার মান $D = \frac{u^2}{g}$. $\therefore R = \frac{u^2}{g} \sin 2\alpha = D \sin 2\alpha$

আমরা জানি, একটি প্রক্ষেপকের নির্দিষ্ট পাল্লা R এর জন্য দুইটি নিক্ষেপণ কোণ থাকে। এদের একটি α হলে অপরটি $(90° - \alpha)$ হবে। ধরি, নিক্ষেপণ বেগ u এবং নিক্ষেপণ কোণ α এর জন্য বিচরণ পথের সর্বাধিক উচ্চতা = h_1 ও নিক্ষেপণ কোণ $(90° - \alpha)$ এর জন্য বিচরণ পথের সর্বাধিক উচ্চতা = h_2 । তাহলে,

$h_1 = \frac{u^2 \sin^2 \alpha}{2g}$ এবং $h_2 = \frac{u^2 \sin^2(90^0 - \alpha)}{2g} = \frac{u^2 \cos^2 \alpha}{2g}$

$\therefore \quad h_1 + h_2 = \frac{u^2}{2g}(\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha) = \frac{1}{2} D.1 \Rightarrow D = 2(h_1 + h_2)$

4(f) t সময় অন্তে একটি প্রক্ষেপক এর বিচরণ পথের P বিন্দুতে পৌছে। আরও t' সময় শেষে তা P বিন্দু হতে

নিক্ষেপণ বিন্দুর অনুভূমিক সমতলে ফিরে আসে। দেখাও যে, P বিন্দুর উচ্চতা $h = \frac{1}{2}gtt'$. [চ. '০৫; ঢা,'০৪,'০৯]

প্রমাণ ঃ মনে করি, প্রক্ষেপকটির প্রক্ষেপ বেগ u এবং প্রক্ষেপ কোণ α. তাহলে, বিচরণকাল $T = t + t' = \frac{2u\sin\alpha}{g}$

$\Rightarrow u\sin\alpha = Tg/2.$

এখন, P বিন্দুর উচ্চতা $h = u\sin\alpha \times t - \frac{1}{2}gt^2 = \frac{1}{2}gT\times t - \frac{1}{2}gt^2 = \frac{1}{2}g(t+t')\times t - \frac{1}{2}gt^2$

$\Rightarrow h = \frac{1}{2}gt^2 + \frac{1}{2}gt\ t' - \frac{1}{2}gt^2 = \frac{1}{2}gt\ t'$ (Showed)

4(g) একটি বস্তু u বেগে এবং অনুভূমির সাথে α কোণে নিক্ষেপ করা হল। অনুভূমিক পাল্লা R, সর্বাধিক উচ্চতা H এবং বিচরণকাল T হলে, দেখাও যে, (i) $16gH^2 - 8u^2H + gR^2 = 0$ [য.'০৩; ঢা.'১০]

(ii) $g^2T^4 - 4T^2u^2 + 4R^2 = 0$

প্রমাণ ঃ (i) আমরা জানি, নিক্ষেপণ বেগ u এবং নিক্ষেপণ কোণ α হলে, $H = \frac{u^2\sin^2\alpha}{2g} \Rightarrow \sin^2\alpha = \frac{2gH}{u^2}$ ...(1)

এবং $R = \frac{u^2\sin 2\alpha}{g} = \frac{2u^2}{g}\sin\alpha\cos\alpha \Rightarrow R^2 = \frac{4u^4}{g^2}\sin^2\alpha\cos^2\alpha = \frac{4u^4}{g^2}\sin^2\alpha(1-\sin^2\alpha)$

$\Rightarrow R^2 = \frac{4u^4}{g^2}\times\frac{2gH}{u^2}(1-\frac{2gH}{u^2})$, [(1) দ্বারা।]

$\Rightarrow R^2 = \frac{8u^2H}{g}(\frac{u^2-2gH}{u^2}) = \frac{8H}{g}(u^2-2gH) \Rightarrow gR^2 = 8Hu^2 - 16gH^2$

$\therefore\ 16gH^2 - 8u^2H + gR^2 = 0$ (Showed)

(ii) আমরা জানি, নিক্ষেপণ বেগ u এবং নিক্ষেপণ কোণ α হলে, $T = \frac{2u\sin\alpha}{g} \Rightarrow \sin\alpha = \frac{gT}{2u}$ ......(2) এবং

$R = \frac{u^2\sin 2\alpha}{g} = \frac{2u^2}{g}\sin\alpha\cos\alpha \Rightarrow R^2 = \frac{4u^4}{g^2}\sin^2\alpha\cos^2\alpha = \frac{4u^4}{g^2}\sin^2\alpha(1-\sin^2\alpha)$

$\Rightarrow R^2 = \frac{4u^4}{g^2}\times\frac{g^2T^2}{4u^2}(1-\frac{g^2T^2}{4u^2})$, [(1) দ্বারা।]

$\Rightarrow R^2 = T^2u^2(\frac{4u^2-g^2T^2}{4u^2}) = T^2(\frac{4u^2-g^2T^2}{4}) \Rightarrow 4R^2 = 4u^2T^2 - g^2T^4$

$\therefore\ g^2T^4 - 4T^2u^2 + 4R^2 = 0$ (Showed)

4(h) একটি কণা v বেগে নিক্ষিপ্ত হলে যদি তার অনুভূমিক পাল্লা লব্ধ বৃহত্তম উচ্চতার দ্বিগুণ হয়, তবে দেখাও যে, তার অনুভূমিক পাল্লা $\frac{4v^2}{5g}$.

প্রমাণঃ ধরি, নিক্ষেপণ কোণ α, তাহলে, অনুভূমিক পাল্লা $R=\dfrac{2v^2\sin\alpha\cos\alpha}{g}$ এবং বৃহত্তম উচ্চতা $H=\dfrac{v^2\sin^2\alpha}{2g}$

প্রশ্নমতে, $R=2H \Rightarrow \dfrac{2v^2\sin\alpha\cos\alpha}{g}=2\times\dfrac{v^2\sin^2\alpha}{2g} \Rightarrow 2\cos\alpha=\sin\alpha \Rightarrow \tan\alpha=2$

$\therefore \sin\alpha=\dfrac{2}{\sqrt{1^2+2^2}}=\dfrac{2}{\sqrt{5}}$, $\cos\alpha=\dfrac{1}{\sqrt{1^2+2^2}}=\dfrac{1}{\sqrt{5}}$

$\therefore$ অনুভূমিক পাল্লা $R=\dfrac{2v^2}{g}\times\dfrac{2}{\sqrt{5}}\times\dfrac{1}{\sqrt{5}}=\dfrac{4v^2}{5g}$

4(i) u ও v আদিবেগে এবং α, β ($\alpha > \beta$) কোণে দুইটি বস্তু নিক্ষিপ্ত হল। এরা যথাক্রমে t_1 ও t_2 সময়ে একই অনুভূমিক দূরত্ব অতিক্রম করলে, প্রমাণ কর যে, $\dfrac{t_1^2-t_2^2}{t_1^2+t_2^2}=\dfrac{\sin(\alpha-\beta)}{\sin(\alpha+\beta)}$.

প্রমাণ ঃ ধরি, বস্তু দুটি একই অনুভূমিক দূরত্ব d অতিক্রম করে। তাহলে, $d=u\cos\alpha\times t_1=v\cos\beta\times t_2$

$$\Rightarrow \frac{t_1}{t_2}=\frac{v\cos\beta}{u\cos\alpha} \;\ldots\ldots\; (i)$$

আবার, বিচরণকাল $t_1=\dfrac{2u\sin\alpha}{g}$, $t_2=\dfrac{2v\sin\beta}{g}$ এবং. $\dfrac{t_1}{t_2}=\dfrac{u\sin\alpha}{v\sin\beta} \;\ldots\ldots\; (ii)$

$$(i)\times(ii) \Rightarrow \frac{t_1}{t_2}\times\frac{t_1}{t_2}=\frac{v\cos\beta}{u\cos\alpha}\times\frac{u\sin\alpha}{v\sin\beta} \Rightarrow \frac{t_1^2}{t_2^2}=\frac{\sin\alpha\cos\beta}{\sin\beta\cos\alpha}$$

$$\Rightarrow \frac{t_1^2-t_2^2}{t_1^2+t_2^2}=\frac{\sin\alpha\cos\beta-\sin\beta\cos\alpha}{\sin\alpha\cos\beta+\sin\beta\cos\alpha} \quad \therefore \frac{t_1^2-t_2^2}{t_1^2+t_2^2}=\frac{\sin(\alpha-\beta)}{\sin(\alpha+\beta)}$$

4(j) কোনো নিক্ষিপ্ত বস্তুর অনুভূমিক পাল্লা বৃহত্তম পাল্লার অর্ধেক হলে নিক্ষেপণ কোণ নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ আমরা জানি, নিক্ষেপণ বেগ u এবং নিক্ষেপণ কোণ α হলে, অনুভূমিক পাল্লা $R=\dfrac{u^2\sin2\alpha}{g}$ এবং

বৃহত্তম অনুভূমিক পাল্লার $R_{max}=\dfrac{u^2}{g}$. প্রশ্নমতে, $R=\dfrac{1}{2}R_{max} \Rightarrow \dfrac{u^2\sin2\alpha}{g}=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{u^2}{g}$

$$\Rightarrow \sin2\alpha=\frac{1}{2}=\sin30^\circ \Rightarrow 2\alpha=30^\circ \Rightarrow \alpha=15^\circ$$

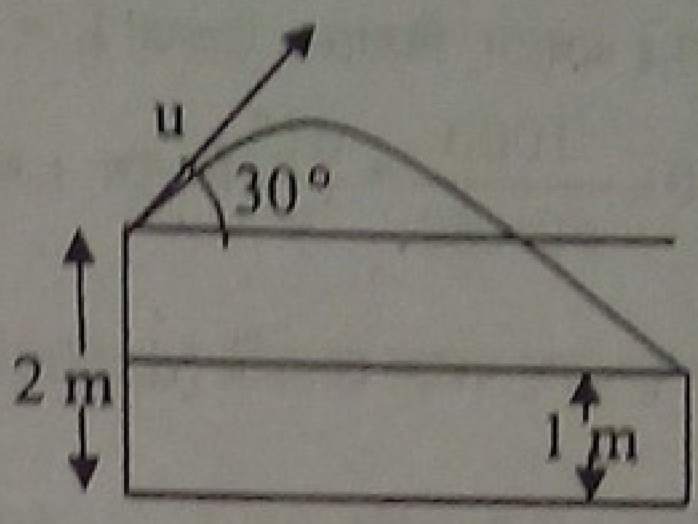
আমরা জানি, একটি প্রক্ষেপকের নির্দিষ্ট পাল্লার জন্য দুইটি নিক্ষেপণ কোণ থাকে। এদের একটি α হলে অপরটি $(90^\circ-\alpha)$ হবে।

$\therefore$ নিক্ষেপণ কোণ $=15^\circ$ অথবা, $(90^\circ-15^\circ)=75^\circ$

5(a) একজন খেলোয়াড় 2 মি. উচ্চতায় ভূমির সাথে 30° কোণে 20 মি./সে. বেগে একটি ক্রিকেট বল ছুঁড়ে মারলে অপর একজন খেলোয়াড় 1 মি. উঁচুতে একে ধরে ফেলে। খেলোয়াড় দুইজন কত দূরে ছিল? [কু.'০৪]

সমাধান ঃ এখানে বলটির প্রক্ষেপ বেগ $u = 20\ ms^{-1}$, প্রক্ষেপ কোণ $\alpha = 30°$ এবং উল্লম্ব সরণ $h = 2 - 1 = 1$ মি.। বলটি ধরার সময় t সেকেন্ড হলে,

$h = -u \sin 30° \times t + \frac{1}{2} g t^2 \Rightarrow 1 = -20 \times \frac{1}{2} \times t + \frac{1}{2} \times 9{\cdot}8 \times t^2$



$\Rightarrow 4{\cdot}9 t^2 - 10t - 1 = 0$

$\Rightarrow t = \frac{10 \pm \sqrt{100 - 4 \times 4{\cdot}9 \times -1}}{2 \times 4{\cdot}9} = \frac{10 \pm \sqrt{100 + 19{\cdot}6}}{9{\cdot}8}$

$\Rightarrow t = \frac{10 + \sqrt{119{\cdot}6}}{98}, [\because t > 0]$

$\therefore$ বলটি ধরার সময় $t = 2{\cdot}14$ সে. (প্রায়)

$\therefore$ খেলোয়াড়দ্বয়ের দূরত্ব = t সেকেন্ডে বলটির অনুভূমিক সরণ $= u \cos 30° \times t = 20 \times \frac{\sqrt{3}}{2} \times 2{\cdot}14 = 37$ মি.

5(b) $196\ ms^{-1}$ বেগে ভূ-সমান্তরাল চলমান একটি বেলুন হতে একখন্ড পাথর নিচে ফেলা হলে তা 5 সেকেন্ড পরে ভূমিতে পড়ে। বেলুনের উচ্চতা এবং পাথরটি যে বেগে ভূমিতে পড়ে তা নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ ধরি, বেলুনের উচ্চতা h মিটার। প্রশ্নমতে, প্রক্ষেপ কোণ $\alpha = 0°$। এখানে u=196 মি./সে., t =5 সে.।

$\therefore\ h = -u \sin 0° \times t - \frac{1}{2} gt^2 = 0 + \frac{1}{2} \times 9{\cdot}8 \times 25 = 122{\cdot}5$ মিটার।

পাথরটি v মি./সে. বেগে ভূমির সাথে θ কোণে ভূমিতে পড়লে, $v \cos \theta = u \cos 0° = 196$

এবং $v \sin \theta = u \sin 0° + gt = 0 + 9{\cdot}8 \times 5 = 49$

$\therefore$ নির্ণেয় বেগ $v = \sqrt{196^2 + 49^2} = 202$ মি. / সে. (প্রায়)।

5(c) 750 মি. উঁচু একটি টাওয়ারের শীর্ষদেশ হতে একটি বস্তু কি গতিবেগে অনুভূমিকভাবে নিক্ষেপ করলে তা টাওয়ারের পাদদেশ থেকে 250 মি. দূরে ভূ-পৃষ্ঠে পড়বে?

সমাধান ঃ এখানে, টাওয়ারের উচ্চতা $h = 750$ মিটার, বস্তুটির অতিক্রান্ত অনুভূমিক সরণ $d = 250$ মি. এবং নিক্ষেপণ কোণ $\alpha = 0°$। ধরি, বস্তুটির নিক্ষেপণ বেগ u মি./সে.। বস্তুটি t সেকেন্ডে ভূ-পৃষ্ঠে পড়লে,

$\therefore\ h = u \sin 0° \times t + \frac{1}{2} gt^2 \Rightarrow 750 = \frac{1}{2} \times 9{\cdot}8\ t^2 = 4{\cdot}9\ t^2 \Rightarrow t^2 = \frac{750}{4{\cdot}9} \Rightarrow t = \sqrt{\frac{7500}{49}} = \frac{50\sqrt{3}}{7}$

এবং $d = u \cos 0° \times t \Rightarrow 250 = u \times \frac{50\sqrt{3}}{7}$. $\therefore$ নির্ণেয় বেগ $u = \frac{35}{\sqrt{3}} = 20{\cdot}21$ মি./সে. (প্রায়)।

বিকল্প পদ্ধতি ঃ মনে করি, বস্তুটির নিক্ষেপণ বেগ u মি./সে.। টাওয়ারের শীর্ষদেশকে মূলবিন্দু ধরলে বস্তুটি (250, 750) বিন্দুগামী হবে। তাহলে, $y = \frac{gx^2}{2u^2}$ সূত্র দ্বারা পাই, $750 = \frac{9.8 \times 250^2}{2 \times u^2} \Rightarrow u^2 = \frac{9.8 \times 250^2}{2 \times 750}$

$\therefore$ নির্ণেয় বেগ $u = 20{\cdot}21$ মি./সে. (প্রায়)।

5(d) একজন বৈমানিক 5000 মি. উপর দিয়ে 250 কি.মি./ঘ. বেগে উড়ে যাওয়ার সময় একটি বোমা ফেলে দিল। সে যে স্থানে আঘাত করতে চায় সেই স্থান হতে তার অনুভূমিক দূরত্ব কত হওয়া প্রয়োজন? [ঢা.'০২]

সমাধান : এখানে, বিমানের উচ্চতা h = 5000 মিটার, বিমানের বেগ তথা বোমার নিক্ষেপণ বেগ u = 250 কি.মি./ঘ. $= 250 \times \frac{1000}{60 \times 60} = \frac{625}{9}$ মি./সে.। ধরি, বোমাটি d মিটার অনুভূমিক দূরত্ব হতে ফেলতে হবে। বোমার নিক্ষেপণ বিন্দুকে মূলবিন্দু ধরলে বোমাটি (d, 5000) বিন্দুগামী হবে। তাহলে, $y = \frac{gx^2}{2u^2}$ সূত্র দ্বারা পাই,

$$5000 = \frac{9.8 \times d^2}{2 \times (625/9)^2} \Rightarrow d^2 = \frac{5000 \times 2 \times 625^2}{9 \cdot 8 \times 9^2}$$ ∴ নির্ণেয় দূরত্ব $d = 2218 \cdot 32$ মিটার (প্রায়)।

5(e) কোনো পাহাড়ের শীর্ষদেশ হতে ভূমির সমান্তরালে 50 ms^{-1} বেগে নিক্ষিপ্ত একটি পাথর এর পাদদেশ হতে 350 m দূরে ভূমিতে পতিত হয়। পাহাড়ের উচ্চতা নির্ণয় কর।

সমাধান : এখানে, পাথরের নিক্ষেপণ বেগ u = 50 মি./সে.। ধরি, পাহাড়ের উচ্চতা h মিটার। পাহাড়ের শীর্ষদেশকে মূলবিন্দু ধরলে পাথরটি (350, h) বিন্দুগামী হবে। তাহলে,

$y = \frac{gx^2}{2u^2}$ সূত্র দ্বারা পাই, $h = \frac{9.8 \times 350^2}{2 \times 50^2} = 240 \cdot 1$ ∴ পাহাড়ের উচ্চতা $h = 240 \cdot 1$ মিটার।

5(f) 60 m উঁচু একটি মিনারের চূড়া হতে একখন্ড পাথর 40 ms^{-1} বেগে এবং অনুভূমিক তলের সাথে 30° কোণে নিক্ষিপ্ত হল। এটি পাহাড়ের পাদদেশ হতে কত দূরত্বে ভূমিতে পড়বে? [সি.'০১]

সমাধান : এখানে, মিনারের উচ্চতা h = 60 মিটার, নিক্ষেপণ বেগ u = 40 মি./সে. এবং নিক্ষেপণ কোণ $\alpha = 30°$। ধরি, পাথরটি পাহাড়ের পাদদেশ হতে ঃ সেকেন্ডে d মিটার দূরে ভূমিতে পড়বে।

$$\therefore\ h = -u \sin 30° \times t + \frac{1}{2} gt^2 \Rightarrow 60 = -40 \times \frac{1}{2} \times t + \frac{1}{2} \times 9 \cdot 8 \times t^2 = -20t + 4 \cdot 9\, t^2$$

$$\Rightarrow 4 \cdot 9t^2 - 20t - 60 = 0 \Rightarrow t = \frac{20 \pm \sqrt{400 - 4 \times 4 \cdot 9 \times -60}}{2 \times 4 \cdot 9} = \frac{20 \pm \sqrt{400 + 1176}}{9 \cdot 8} = \frac{20 \pm 39 \cdot 69}{9 \cdot 8}$$

যেহেতু $t > 0$, কাজেই $t = \frac{20 + 39 \cdot 69}{9 \cdot 8} = 6 \cdot 09$ (প্রায়)।

∴ নির্ণেয় দূরত্ব $d = u \cos 30° \times t = 40 \times \frac{\sqrt{3}}{2} \times 6 \cdot 09 = 210 \cdot 96$ মিটার (প্রায়)।

5(g) 80 m উঁচু একটি মিনারের চূড়া হতে একখন্ড পাথর 128 ms^{-1} বেগে এবং অনুভূমিক তলের সাথে 30° কোণে নিক্ষিপ্ত করা হল। উহা মিনারের পাদদেশ হতে কত দূরে ভূমিতে পড়বে? [ঢা.'০৬; কু.'০৮]

সমাধান : এখানে, মিনারের উচ্চতা h = 80 মিটার, নিক্ষেপণ বেগ u = 128 মি./সে. এবং নিক্ষেপণ কোণ $\alpha = 30°$। ধরি, পাথরটি পাহাড়ের পাদদেশ হতে t সেকেন্ডে d মিটার দূরে ভূমিতে পড়বে।

$$\therefore\ h = -u \sin 30° \times t + \frac{1}{2} gt^2 \Rightarrow 80 = -128 \times \frac{1}{2} \times t + \frac{1}{2} \times 9 \cdot 8 \times t^2 = -64t + 4 \cdot 9\, t^2$$

$\Rightarrow 4{\cdot}9t^2 - 64t - 40 = 0$

$\Rightarrow t = \dfrac{64 \pm \sqrt{4096 - 4 \times 4{\cdot}9 \times -80}}{2 \times 4{\cdot}9} = \dfrac{64 \pm \sqrt{4096 + 1568}}{9{\cdot}8} = \dfrac{64 \pm 75{\cdot}26}{9{\cdot}8}$

যেহেতু $t > 0$, কাজেই $t = \dfrac{64 + 75{\cdot}26}{9{\cdot}8} = 14{\cdot}21$ (প্রায়)।

$\therefore$ নির্ণেয় দূরত্ব $d = u \cos 30° \times t = 124 \times \dfrac{\sqrt{3}}{2} \times 14{\cdot}21 = 1575{\cdot}2$ মিটার (প্রায়)।

5(h) h একক উচ্চতা বিশিষ্ট একটি পাহাড়ের চূড়া হতে ভূমির সমান্তরালে v বেগে নিক্ষিপ্ত একটি গুলি এর পাদদেশ হতে R একক দূরে ভূমিকে আঘাত করে। দেখাও যে, $R = v\sqrt{2h/g}$

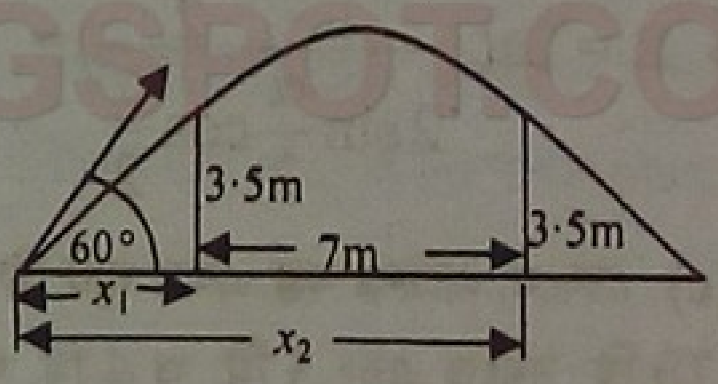
প্রমাণ : এখানে, পাহাড়ের উচ্চতা h একক, গুলির অতিক্রান্ত অনুভূমিক সরণ R একক, নিক্ষেপণ বেগ v এবং নিক্ষেপণ কোণ $\alpha = 0°$। গুলিটি t সেকেন্ডে ভূমিকে আঘাত করলে,

$\therefore h = v \sin 0° \times t + \dfrac{1}{2}gt^2 \Rightarrow h = \dfrac{1}{2}gt^2 \Rightarrow t = \sqrt{\dfrac{2h}{g}}$ এবং $R = v\cos 0° \times t \quad \therefore R = v\sqrt{2h/g}$

6(a) একটি বস্তুকে অনুভূমিকের সাথে 60° কোণে এমনভাবে প্রক্ষেপ করা হল যেন তা 7 m ব্যবধানে অবস্থিত 3·5 m উঁচু দুইটি দেওয়ালের ঠিক উপর দিয়ে চলে যায়। বস্তুটির অনুভূমিক পাল্লা নির্ণয় কর। [ঢা.'০১; য.'০৫]

সমাধান : মনে করি, বস্তুটির অনুভূমিক পাল্লা = R মিটার। তাহলে,

$3{\cdot}5 = x \tan 60° \,(1 - \dfrac{x}{R})$ $\quad [y = x\tan\alpha\,(1 - \dfrac{x}{R})$ দ্বারা $]$



$\Rightarrow 3{\cdot}5 = \sqrt{3}\,x\,(1 - \dfrac{x}{R}) = \sqrt{3}\,x - \dfrac{\sqrt{3}}{R}x^2$

$\Rightarrow \dfrac{\sqrt{3}}{R}x^2 - \sqrt{3}\,x + 3{\cdot}5 = 0$, যা x এর একটি দ্বিঘাত সমীকরণ। ধরি, এর মূলদ্বয় x_1, x_2 $[x_2 > x_1]$.

$\therefore x_1 + x_2 = -\dfrac{-\sqrt{3}}{\sqrt{3}/R} = R$ এবং $x_1 x_2 = \dfrac{3{\cdot}5}{\sqrt{3}/R} = \dfrac{7R}{2\sqrt{3}}$

শর্তানুসারে, $x_2 - x_1 = 7 \Rightarrow (x_2 - x_1)^2 = 49 \Rightarrow (x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2 = 49$

$\Rightarrow R^2 - 4 \times \dfrac{7R}{2\sqrt{3}} = 49 \Rightarrow \sqrt{3}R^2 - 14R - 49\sqrt{3} = 0 \Rightarrow \sqrt{3}R^2 - 21R + 7R - 49\sqrt{3} = 0$

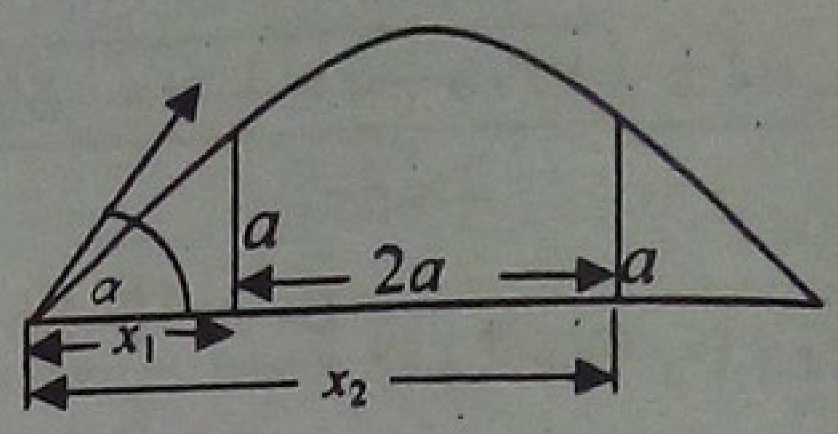
$\Rightarrow \sqrt{3}R(R - 7\sqrt{3}) + 7(R - 7\sqrt{3}) = 0 \Rightarrow (R - 7\sqrt{3})(\sqrt{3}R + 7) = 0$

$\therefore$ অনুভূমিক পাল্লা $R = 7\sqrt{3}$ মিটার, $[\because R > 0]$

6(b) একটি বস্তুকে ভূমি থেকে α কোণে এমনভাবে নিক্ষেপ করা হল যেন তা $2a$ ব্যবধানে অবস্থিত a পরিমাণ উঁচু দুইটি দেওয়ালের ঠিক উপর দিয়ে অতিক্রম করে। প্রমাণ কর বস্তুটির পাল্লা $2a\cot\dfrac{\alpha}{2}$ [সি.'০৩]

প্রমাণ ঃ মনে করি, বস্তুটির অনুভূমিক পাল্লা R। তাহলে,

$a = x\tan\alpha\,(1-\frac{x}{R})$, [$y = x\tan\alpha\,(1-\frac{x}{R})$ দ্বারা]



$\Rightarrow a\cot\alpha = x(1-\frac{x}{R}) = x - \frac{1}{R}x^2$

$\Rightarrow \frac{1}{R}x^2 - x + a\cot\alpha = 0$, যা x এর একটি দ্বিঘাত সমীকরণ । ধরি, এর মূলদ্বয় x_1 , x_2 [$x_2 > x_1$].

$\therefore\ x_1 + x_2 = -\frac{-1}{1/R} = R$ এবং $x_1 x_2 = \frac{a\cot\alpha}{1/R} = aR\cot\alpha$

শর্তানুসারে, $x_2 - x_1 = 2a \Rightarrow (x_2-x_1)^2 = 4a^2 \Rightarrow (x_1+x_2)^2 - 4x_1x_2 = 4a^2$

$\Rightarrow R^2 - 4aR\cot\alpha - 4a^2 = 0$

$$\therefore\ R = \frac{4a\cot\alpha \pm \sqrt{16a^2\cot^2\alpha - 4\times1\times-4a^2}}{2\times1} = \frac{4a\cot\alpha \pm \sqrt{16a^2(\cot^2\alpha+1)}}{2}$$

$$= 2a(\cot\alpha \pm \operatorname{cosec}\alpha)$$

'+' নিয়ে পাই, $R = 2a(\cot\alpha + \operatorname{cosec}\alpha) = 2a(\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} + \frac{1}{\sin\alpha}) = 2a(\frac{\cos\alpha+1}{\sin\alpha})$

$$\Rightarrow R = 2a\left(\frac{2\cos^2\frac{\alpha}{2}}{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}\right) = 2a\cot\frac{\alpha}{2}$$

6(c) কোনো প্রক্ষিপ্ত বস্তু এমন দুটি বিন্দু দিয়ে যায় যারা প্রক্ষেপ বিন্দুগামী অনুভূমিক ও উল্লম্ব তল হতে যথাক্রমে 10 মি. ও 20 মি. দূরত্বে এবং 3 মি. ও 4 মি. খাড়া দূরত্বে অবস্থিত। প্রক্ষেপ বেগের মান ও দিক নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ মনে করি, প্রক্ষিপ্ত বস্তুর প্রক্ষেপণ কোণ α এবং প্রক্ষেপণ বেগ u মি./সে. । নিক্ষেপণ বিন্দুকে মূলবিন্দু ধরলে বস্তুটি (10, 3) এবং (20, 4) বিন্দুগামী হবে। তাহলে, $y = x\tan\alpha - \frac{gx^2}{2u^2\cos^2\alpha}$ সূত্র দ্বারা পাই,

$3 = 10\tan\alpha - \frac{100g}{2u^2\cos^2\alpha}$ ……(i) , $4 = 20\tan\alpha - \frac{400g}{2u^2\cos^2\alpha}$ …… (ii)

$4\times$(i) − (ii) $\Rightarrow 12 - 4 = 40\tan\alpha - 20\tan\alpha \Rightarrow 20\tan\alpha = 8 \Rightarrow \tan\alpha = \frac{2}{5}\ \therefore \alpha = \tan^{-1}\frac{2}{5}$.

এখন, $\cos\alpha = \frac{5}{\sqrt{2^2+5^2}} = \frac{5}{\sqrt{29}}$

(i) হতে পাই, $3 = 10\times\frac{2}{5} - \frac{50\times9\cdot8\times29}{u^2\times25} \Rightarrow \frac{522}{u^2} = 4 - 1 \Rightarrow u^2 = 522$

$\therefore$ নির্ণেয় বেগ $u = 22\cdot85$ মিটার (প্রায়)।

7. একটি ক্রিকেটবলকে 28 ms^{-1} বেগে আঘাত করলে তা 35 m দূরে 19·6 m উঁচু একটি দেয়াল স্পর্শ করে যায়। নিক্ষেপণ কোণ নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ মনে করি, ক্রিকেটবলটির নিক্ষেপণ কোণ α. তাহলে, $y = x\tan\alpha - \frac{gx^2}{2u^2\cos^2\alpha}$ সূত্র দ্বারা পাই,

$$19\cdot6 = 35\tan\alpha - \frac{9\cdot8\times35^2}{2\times28^2}\sec^2\alpha \Rightarrow 19\cdot6 = 35\tan\alpha - 4\cdot9\times\frac{25}{16}\sec^2\alpha$$

$$\Rightarrow 16\times2\cdot8 = 16\times5\tan\alpha - 0\cdot7\times25\,(1+\tan\alpha) \Rightarrow 44\cdot8 = 80\tan\alpha - 17\cdot5 - 17\cdot5\tan^2\alpha$$

$$\Rightarrow 17\cdot5\tan^2\alpha - 80\tan\alpha + 62\cdot3 = 0$$

$$\Rightarrow \tan\alpha = \frac{80\pm\sqrt{6400-4\times17\cdot5\times62\cdot3}}{2\times17\cdot5} = \frac{80\pm45\cdot15}{35}$$

'+' নিয়ে, $\tan\alpha = 3\cdot575 \Rightarrow \alpha = 74\cdot37°$ (প্রায়)

'−' নিয়ে, $\tan\alpha = 0\cdot995 \Rightarrow \alpha = 44\cdot88°$ (প্রায়)

8. একই বেগে নিক্ষিপ্ত একটি প্রক্ষেপকের নির্দিষ্ট পাল্লা R এর জন্য বিচরণকাল t_1, t_2 হলে, প্রমাণ কর যে, $R = \frac{1}{2}g\,t_1 t_2$. [য.'০০; ঢা.'০৭]

প্রমাণ ঃ আমরা জানি, একটি প্রক্ষেপকের নির্দিষ্ট পাল্লা R এর জন্য দুইটি নিক্ষেপণ কোণ থাকে। এদের একটি α হলে অপরটি $(90°-\alpha)$ হবে। ধরি, নিক্ষেপণ বেগ u এবং নিক্ষেপণ কোণ α এর জন্য বিচরণকাল $= t_1$ ও নিক্ষেপণ কোণ $(90°-\alpha)$ এর জন্য বিচরণকাল $= t_2$ । তাহলে, $t_1 = \frac{2u\sin\alpha}{g}$ এবং $t_2 = \frac{2u\sin(90^0-\alpha)}{g} = \frac{2u\cos\alpha}{g}$

এখন, $t_1\times t_2 = \frac{2u\sin\alpha}{g}\times\frac{2u\cos\alpha}{g} = \frac{2}{g}\times\frac{u^2\sin2\alpha}{g} = \frac{2}{g}R \quad \therefore R = \frac{1}{2}g\,t_1 t_2$ (Proved).

9(a) কোনো প্রক্ষিপ্ত বস্তুর গতিপথের যেকোনো বিন্দুতে তার বেগ u এবং অনুভূমিক তলের সাথে নতি α হলে প্রমাণ কর যে, $\frac{u}{g\sin\alpha}$ সময় পরে বস্তুটি পর্বোক্ত দিকের সাথে লম্বভাবে অবস্থান করবে।

প্রমাণ ঃ মনে করি, প্রক্ষিপ্ত বস্তুর গতিপথের যেকোন বিন্দু A হতে t সময় পরে B বিন্দুতে ইহা পূর্বোক্ত দিকের সাথে লম্বভাবে অবস্থান করে।

$\therefore$ A বিন্দুতে বস্তুটির দিকের ঢাল $m_1 = \frac{\text{আদি অবস্থায় খাড়া বেগ}}{\text{আদি অবস্থায় অনুভূমিক বেগ}} = \frac{u\sin\alpha}{u\cos\alpha} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$

B বিন্দুতে বস্তুটির দিকের ঢাল $m_2 = \frac{\text{t সময়ে খাড়া বেগ}}{\text{t সময়ে অনুভূমিক বেগ}} = \frac{u\sin\alpha - gt}{u\cos\alpha}$

প্রশ্নমতে, $m_1\times m_2 = -1 \Rightarrow \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\times\frac{u\sin\alpha-gt}{u\cos\alpha} = -1 \Rightarrow u\sin^2\alpha - gt\sin\alpha = u\cos^2\alpha$

$\Rightarrow gt\sin\alpha = u(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha) = u \quad \therefore t = \frac{u}{g\sin\alpha}$

বিকল্প পদ্ধতি : মনে করি, প্রক্ষিপ্ত বস্তুর গতিপথের যেকোন বিন্দু A হতে t সময় পরে B বিন্দুতে ইহা পূর্বোক্ত দিকের সাথে লম্বভাবে অবস্থান করে।

আমরা জানি, $y = x\tan\alpha - \frac{gx^2}{2u^2\cos^2\alpha} = bx + ax^2$, যেখানে $b = \tan\alpha$, $a = -\frac{g}{2u^2\cos^2\alpha}$

$\therefore \frac{dy}{dx} = b + 2ax$

আদি অবস্থায় বস্তুটির অনুভূমিক সরণ $x = 0$ এবং t সময়ে বস্তুটির অনুভূমিক সরণ $x = u\cos\alpha \times t$

A বিন্দুতে বস্তুটির দিকের ঢাল $m_1 = \left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=0} = b + 2a\times 0 = b$

B বিন্দুতে বস্তুটির দিকের ঢাল $m_2 = \left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=u\cos\alpha.t} = b + 2a\times u\cos\alpha\times t$

প্রশ্নমতে, $m_1 \times m_2 = -1 \Rightarrow b\times(b + 2a\times u\cos\alpha\times t) = -1$

$\Rightarrow b + 2a\times u\cos\alpha\times t = -\frac{1}{b} \Rightarrow 2a\times u\cos\alpha\times t = -\frac{1}{b} - b = -\frac{b^2+1}{b}$

$\Rightarrow 2\times\left(-\frac{g}{2u^2\cos^2\alpha}\right)\times u\cos\alpha\times t = -\frac{\tan^2\alpha+1}{\tan\alpha} \Rightarrow \frac{g}{u\cos\alpha}t = \frac{\sec^2\alpha}{\tan\alpha} = \frac{1}{\cos^2\alpha}\times\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$

$\Rightarrow t = \frac{1}{\cos^2\alpha}\times\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\times\frac{u\cos\alpha}{g} = \frac{u}{g\sin\alpha}$

9(b) একটি বস্তু $39\cdot2\ ms^{-1}$ বেগে ভূমির সাথে $30°$ কোণে নিক্ষিপ্ত হল। কত সময় পরে বস্তুটি নিক্ষেপ দিকের সাথে লম্বভাবে চলবে?

[চ.'০৭]

সমাধান : দেওয়া আছে, নিক্ষেপণ বেগ $u = 39\cdot2$ মি./সে., নিক্ষেপণ কোণ $\alpha = 30°$ । ধরি, t সময় পরে প্রক্ষিপ্ত বস্তুটি পূর্বোক্ত দিকের সাথে লম্বভাবে অবস্থান করে।

$\therefore$ নিক্ষেপণ বিন্দুতে বস্তুটির দিকের ঢাল $m_1 = \frac{\text{আদি অবস্থায় খাড়া বেগ}}{\text{আদি অবস্থায় অনুভূমিক বেগ}} = \frac{u\sin\alpha}{u\cos\alpha} = \tan 30° = \frac{1}{\sqrt{3}}$

t সময় পরে বস্তুটির দিকের ঢাল $m_2 = \frac{\text{t সময়ে খাড়া বেগ}}{\text{t সময়ে অনুভূমিক বেগ}} = \frac{u\sin\alpha - gt}{u\cos\alpha} = \frac{39\cdot2\times\sin30^0 - 9\cdot8t}{39\cdot2\times\cos30^0}$

$= \frac{19\cdot6 - 9\cdot8t}{19\cdot6\sqrt{3}}$

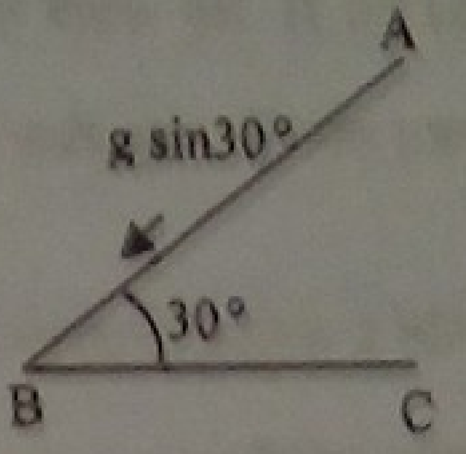
প্রশ্নমতে, $m_1\times m_2 = -1 \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{3}}\times\frac{19\cdot6-9\cdot8t}{19\cdot6\sqrt{3}} = -1 \Rightarrow 19\cdot6 - 9\cdot8t = -58\cdot8 \Rightarrow 9\cdot8t = 78\cdot4$

$\therefore$ নির্ণেয় সময় $t = 8$ সেকেন্ড।

10. ভূমির সাথে 30° কোণে আনত একটি মসৃণ সমতলের ওপর দিয়ে একটি বল গড়িয়ে নীচে পড়া শুরু করল। পঞ্চম সেকেন্ডে বলটি তল বরাবর কত দূরত্ব অতিক্রম করবে?

সমাধান ঃ ধরি, BC ভূমির সাথে 30° কোণে আনত AB মসৃণ সমতলের A বিন্দু হতে বলটি পড়া শুরু করল।

∴ AB সমতল বরাবর বলটির ত্বরণ $f = g\sin 30° = 9{\cdot}8 \times \frac{1}{2} = 4{\cdot}9\ \text{ms}^{-2}$.



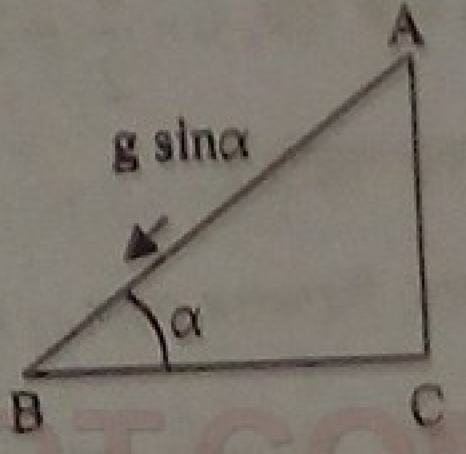
∴ পঞ্চম সেকেন্ডে অতিক্রান্ত দূরত্ব $= 0 + \frac{1}{2}f(2t-1) = \frac{1}{2} \times 4{\cdot}9\,(10-1)$

$= \frac{9}{2} \times 4{\cdot}9 = 22{\cdot}05$ মিটার।

11. প্রদত্ত ভূমি বিশিষ্ট একটি নত সমতলের শীর্ষ হতে একটি বস্তুকণা নীচে পড়া শুরু করল। দেখাও যে, পতনকাল সর্বনিম্ন হবে যদি সমতলটি ভূমির সাথে 45° কোণে আনত হয়।

প্রমাণ ঃ মনে করি, BC = a ভূমির সাথে α কোণে আনত AB মসৃণ সমতলের A বিন্দু হতে বস্তুকণা নীচে পড়া শুরু করল এবং B বিন্দুতে তার পতনকাল t।

∴ AB সমতল বরাবর বলটির ত্বরণ $f = g\sin\alpha$



$\therefore\ AB = 0 + \frac{1}{2}ft^2 = \frac{1}{2}g\sin\alpha \times t^2$

$\Rightarrow t^2 = \frac{2AB}{g\sin\alpha} = \frac{2 \times BC/\cos\alpha}{g\sin\alpha},\ [\because \cos\alpha = \frac{BC}{AB}]$

$\Rightarrow t^2 = \frac{2a}{g\sin\alpha\cos\alpha} = \frac{4a}{g\sin 2\alpha}$

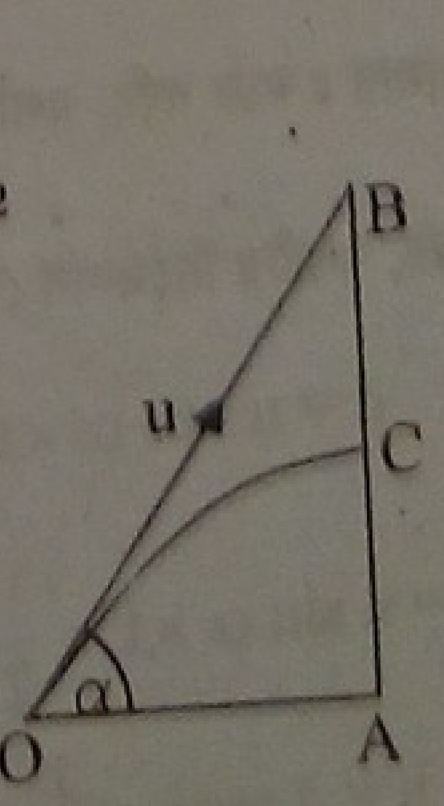
∴ t সর্বনিম্ন হবে যদি $\sin 2\alpha$ এর মান সর্বাধিক হয় অর্থাৎ $\sin 2\alpha = 1 = \sin 90°$

$\Rightarrow 2\alpha = 90° \ \therefore\ \alpha = 45°$ হয়।

12. একটি টাওয়ারের শীর্ষ লক্ষ্য করে বন্দুক হতে নিক্ষিপ্ত একটি গুলি টাওয়ারের মধ্যবিন্দুতে আঘাত করলে, দেখাও যে টাওয়ারকে আঘাত করার সময় গুলিটি অনুভূমিকে চলে। [রা.'০১]

প্রমাণ ঃ মনে করি, O বিন্দু হতে AB টাওয়ারের শীর্ষ B লক্ষ্য করে u বেগে ও ভূমির সাথে α কোণে নিক্ষিপ্ত বন্দুকের গুলি t সময়ে AB এর মধ্যবিন্দু C তে আঘাত করে। তাহলে,

$AC = \frac{AB}{2} = u\sin\alpha.\,t - \frac{1}{2}gt^2 \Rightarrow AB = 2u\sin\alpha\,.\,t - gt^2$



∴ $OA = u\cos\alpha\,.\,t$ এবং

OAB ত্রিভুজ হতে পাই, $\tan\alpha = \frac{AB}{OA} = \frac{2u\sin\alpha.t - gt^2}{u\cos\alpha.t} = \frac{u\sin\alpha.t}{u\cos\alpha.t} + \frac{u\sin\alpha.t - gt^2}{u\cos\alpha.t}$

$\Rightarrow \tan\alpha = \tan\alpha + \frac{u\sin\alpha.t - gt^2}{u\cos\alpha.t} \Rightarrow u\sin\alpha.t - gt^2 = 0 \Rightarrow u\sin\alpha - gt = 0,$

অর্থাৎ t সময় পরে গুলির খাড়া বেগ শূন্য।

$\therefore$ টাওয়ারকে আঘাত করার সময় গুলিটি অনুভূমিকে চলে।

অতিরিক্ত প্রশ্ন (সমাধানসহ)

1(a) 50 ft উঁচু একটি গাছের শীর্ষবিন্দুতে একটি পাখি বসে আছে। গাছের পাদদেশ হতে 200 ft দূর হতে কত বেগে একজন শিকারি অনুভূমিক তলের সাথে $\tan^{-1}\frac{3}{4}$ কোণে একটি গুলি নিক্ষেপ করে পাখিটিকে আঘাত করতে পারবে?

সমাধান : এখানে, নিক্ষেপণ কোণ $\alpha = \tan^{-1}\frac{3}{4} \Rightarrow \tan\alpha = \frac{3}{4}$. ধরি, u মি./ সে. বেগে গুলি নিক্ষেপ করে শিকারি t সেকেন্ডে পাখিটিকে আঘাত করে।

$\therefore\ 200 = u\cos\alpha .t = ut\times\frac{4}{\sqrt{9+16}} = \frac{4}{5}ut \Rightarrow ut = 250 \ldots\ldots$ (i) এবং

$50 = u\sin\alpha .t - \frac{1}{2}gt^2 = ut\times\frac{3}{5} - \frac{1}{2}\times 32\times t^2 = 250\times\frac{3}{5} - 16t^2 \Rightarrow t^2 = \frac{150-50}{16} = \frac{25}{4} \Rightarrow t = \frac{5}{2}$

(i) হতে পাই, $u\times\frac{5}{2} = 250 \Rightarrow u = 100$ $\therefore$ নির্ণেয় বেগ = 100 ফুট / সেকেন্ড।

বিকল্প পদ্ধতি :

এখানে, নিক্ষেপণ কোণ $\alpha = \tan^{-1}\frac{3}{4} \Rightarrow \tan\alpha = \frac{3}{4}$. $\therefore\ \sin\alpha = \frac{3}{\sqrt{9+16}} = \frac{3}{5}, \cos\alpha = \frac{4}{5}$

মনে করি, নিক্ষেপণ বেগ u ফুট/ সে.। নিক্ষেপ বিন্দুকে মূলবিন্দু ধরলে গুলিটি (200, 50) বিন্দুগামী হবে।

তাহলে, $y = x\tan\alpha\,(1 - \frac{gx}{2u^2\sin\alpha\cos\alpha})$ সূত্র দ্বারা পাই,

$50 = 200\times\frac{3}{4}\{1 - \frac{32\times 200}{2\times u^2\times(3/5)\times(4/5)}\} \Rightarrow \frac{1}{3} = 1 - \frac{32\times 625}{3u^2} \Rightarrow \frac{32\times 625}{3u^2} = \frac{2}{3}$

$\Rightarrow u^2 = 16\times 625 \Rightarrow u = 100$ $\therefore$ নির্ণেয় বেগ = 100 ফুট / সেকেন্ড।

1 (b) একটি বালক একটি ফুটবলকে খাড়া উপরের দিকে H মি. উঁচুতে নিক্ষেপ করতে পারে। দেখাও যে, সে বলটিকে d মি. অনুভূমিক দূরত্বে অবস্থিত h মি. উঁচু একটি গোল পোস্ট পার করতে সক্ষম হবে যদি $2H \geq h + \sqrt{h^2+d^2}$ হয়।

প্রমাণ : মনে করি, বলটির নিক্ষেপণ বেগ u মি./ সে.। শর্তানুসারে, $H = \frac{u^2}{2g} \Rightarrow u^2 = 2gH \ldots\ldots$ (i)

ধরি, বলটির নিক্ষেপণ কোণ α এবং t সময়ে বলটি গোল পোস্ট অতিক্রম করে।

$\therefore\ d = u\cos\alpha\times t \Rightarrow t = \frac{d}{u\cos\alpha} = \frac{d}{u}\sec\alpha$ এবং

$h = u\sin\alpha\times t - \frac{1}{2}gt^2 = u\sin\alpha\times\frac{d}{u\cos\alpha} - \frac{1}{2}g(\frac{d}{u}\sec\alpha)^2 = d\tan\alpha - \frac{gd^2}{2u^2}(1+\tan^2\alpha)$

$\Rightarrow h = d\tan\alpha - \frac{1}{2}gd^2\times\frac{1}{2gH}(1+\tan^2\alpha) \Rightarrow 4hH = 4dH\tan\alpha - d^2 - d^2\tan^2\alpha$

$\Rightarrow d^2 \tan^2\alpha - 4dH \tan\alpha + (4hH + d^2) = 0$, যা $\tan\alpha$ এর একটি দ্বিঘাত সমীকরণ। $\tan\alpha$ এর বাস্তব মানের জন্য সে বলটিকে গোল পোস্ট পার করতে সক্ষম হবে। কাজেই,

$(-4dH)^2 - 4d^2(4hH + d^2) \geq 0 \Rightarrow \Rightarrow 4H^2 - 4hH - d^2 \geq 0$, $[\because d > 0]$

$\Rightarrow (2H)^2 - 2.2H.h + h^2 \geq h^2 + d^2 \Rightarrow (2H-h)^2 \geq h^2 + d^2$

$\Rightarrow 2H - h \geq \sqrt{h^2 + d^2}$ $\therefore 2H \geq h + \sqrt{h^2 + d^2}$ (Showed)

2(a) ভূমি থেকে শূন্যে নিক্ষিপ্ত একটি বস্তু 100 মি. দূরে ভূমিতে ফিরে আসে এবং এর বিচরণপথের সর্বাধিক উচ্চতা $18\frac{3}{4}$ মি. হলে, এর বিচরণকাল এবং নিক্ষেপণ কোণ নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ মনে করি, প্রক্ষেপকটির প্রক্ষেপ বেগ u মি./সে. এবং প্রক্ষেপ কোণ α. তাহলে,

অনুভূমিক পাল্লা $R = 100$ মি. এবং সর্বাধিক উচ্চতা $H = 18\frac{3}{4} = \frac{75}{4}$ মি.।

H এবং R এর সম্পর্ক হতে পাই, $\tan\alpha = \frac{4H}{R} = \frac{4\times 75}{100\times 4} = \frac{3}{4}$ $\therefore$ $\sin\alpha = \frac{3}{\sqrt{9+16}} = \frac{3}{5}$

এখন, $H = \frac{u^2\sin^2\alpha}{2g} \Rightarrow \frac{75}{4} = \frac{u^2\sin^2\alpha}{2g} = \frac{u^2\times 9}{2\times 9\cdot 8\times 25} \Rightarrow u^2 = 1020\cdot 83 \Rightarrow u = 31\cdot 95$ (প্রায়)

$\therefore$ বিচরণকাল $T = \frac{2u\sin\alpha}{g} = 2\times\frac{31.95}{9.8}\times\frac{3}{5} = 3\cdot 9$ সেকেন্ড (প্রায়) এবং নিক্ষেপণ কোণ $\alpha = \tan^{-1}\frac{3}{4}$।

2(b) একটি রাইফেলের বৃহত্তম পাল্লা 1000 মি.। একই প্রক্ষেপ কোণে ঘন্টায় 24·5 কি.মি. বেগে চলন্ত কোন বাস হতে ঐ রাইফেল দ্বারা একই বেগে গুলি করা হলে দেখাও যে তার পাল্লা আরও $97\frac{2}{9}$ মি. বৃদ্ধি পাবে।

প্রমাণ ঃ ধরি, গুলির প্রক্ষেপ বেগ u মি./সে. প্রক্ষেপ কোণ α। $\therefore$ বৃহত্তম পাল্লা $R_{max} = \frac{u^2}{g} = 1000$

$\Rightarrow u^2 = 9\cdot 8\times 1000 = 9800$ $\therefore$ গুলির প্রক্ষেপ বেগ $u = 70\sqrt{2}$ মি./সে. এবং বৃহত্তম পাল্লার জন্য $\alpha = 45°$.

বাসের বেগ $= 24\cdot 5$ কি.মি./ঘ. $= 24\cdot 5\times\frac{1000}{60\times 60}$ মি./সে. $= \frac{245}{36}$ মি./সে.।

$\frac{245}{36}$ মি./সে. বেগে গতিশীল বাস থেকে ঐ রাইফেল দ্বারা একই বেগে গুলি করা হলে,

গুলির অনুভূমিক বেগ $= 70\sqrt{2}\cos 45° + \frac{245}{36} = \frac{2765}{36}$ মি./সে. এবং

গুলির খাড়া বেগ $= 70\sqrt{2}\sin 45° = 70$ মি./সে.।

$\therefore$ রাইফেলের পাল্লা $= \frac{2}{g}\times$ অনুভূমিক বেগ $\times$ খাড়া বেগ $= \frac{2}{9.8}\times\frac{2765}{36}\times 70 = 1097\frac{2}{9}$ মি.।

$\therefore$ পাল্লা বৃদ্ধির পরিমাণ $= 1097\frac{2}{9} - 1000 = 97\frac{2}{9}$ মিটার। (প্রমাণিত)

3. একটি বস্তুকে অনুভূমিকের সাথে $60°$ কোণে এমনভাবে প্রক্ষেপ করা হল যেন তা 20 m ব্যবধানে অবস্থিত 10 m উঁচু দুইটি দেওয়ালের ঠিক উপর দিয়ে চলে যায়। বস্তুটির অনুভূমিক পাল্লা নির্ণয় কর।

সমাধান : মনে করি, বস্তুটি প্রক্ষেপণ বিন্দু হতে d ও (d + 20) মিটার দূরবর্তী 10 মিটার উঁচু দেওয়াল দুইটির ঠিক উপর দিয়ে চলে যায় এবং ইহার অনুভূমিক পাল্লা R মিটার। নিক্ষেপণ বিন্দুকে মূলবিন্দু ধরলে বস্তুটি (d, 10) এবং (d + 20, 10) বিন্দুগামী হবে। $y = x\tan\alpha\,(1 - \frac{x}{R})$ সূত্র হতে পাই,

$$10 = d\tan 60°\,(1 - \frac{d}{R}) \Rightarrow 10R = \sqrt{3}\,d(R - d) \;\ldots\ldots \text{(i)}$$ এবং

$$10 = (d + 20)\tan 60°\,(1 - \frac{d+20}{R}) \Rightarrow 10R = \sqrt{3}\,(d + 20)\{R - (d + 20)\} \;\ldots\ldots \text{(ii)}$$

(i) ও (ii) হতে পাই, $\sqrt{3}\,(dR - d^2) = \sqrt{3}\,(dR + 20R - d^2 - 40d - 400)$

$\Rightarrow dR - d^2 = dR + 20R - d^2 - 40d - 400 \Rightarrow 20R - 40d - 400 = 0$

$\Rightarrow R - 2d - 20 = 0 \Rightarrow d = \frac{R-20}{2}$

(i) হতে পাই, $10R = \sqrt{3}\,\frac{R-20}{2}\,(R - \frac{R-20}{2}) = \sqrt{3}\,\frac{R-20}{2} \times \frac{R+20}{2}$

$\Rightarrow 40R = \sqrt{3}\,(R^2 - 400) \Rightarrow \sqrt{3}\,R^2 - 40R - 400\sqrt{3} = 0$

$\Rightarrow \sqrt{3}\,R^2 - 60R + 20R - 400\sqrt{3} = 0 \Rightarrow \sqrt{3}\,R(R - 20\sqrt{3}) + 20(R - 20\sqrt{3})$

$\Rightarrow (R - 20\sqrt{3})(\sqrt{3}\,R + 20) = 0 \;\therefore R = 20\sqrt{3}$ মিটার, $[\because R > 0]$

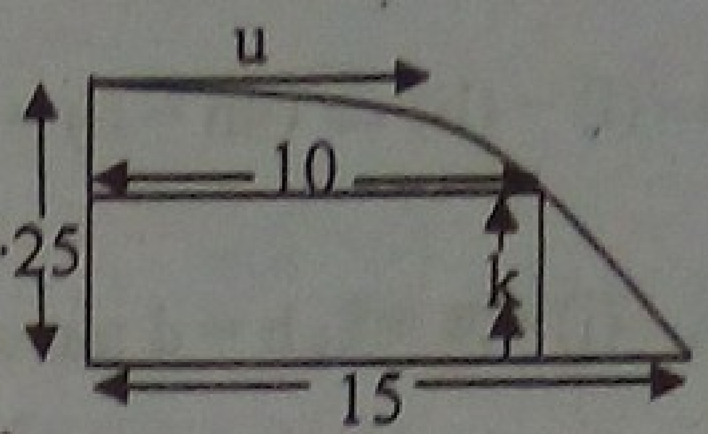
4(a) ভূমিতে পতিত হয়ে একটি বোমা ফেটে এর কণাগুলো u বেগে চতুর্দিকে ছুটতে থাকে। ভূমির যে অংশ জুড়ে কণাগুলো ছড়িয়ে পড়ে তার ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

সমাধান : আমরা জানি বৃহত্তম অনুভূমিক পাল্লা $R_{max} = \frac{u^2}{g}$ এবং এক্ষেত্রে প্রক্ষেপণ কোণ $\alpha = 45°$.

বোমা ফেটে গেলে এর কণাগুলো বিভিন্ন কোণে চারদিকে নিক্ষিপ্ত হয় এবং বায়াস্থান হতে বৃহত্তম অনুভূমিক R_{max} দূরত্ব পর্যন্ত ভূমির অংশ জুড়ে কণাগুলো ছড়িয়ে পড়ে। ফলে বোমার কণাগুলো একটি বৃত্ত গঠন করে যার কেন্দ্র বিস্ফোরণ বিন্দু এবং ব্যাসার্ধ R_{max}।

$\therefore$ নির্ণেয় ক্ষেত্রফল $= \pi R_{max}^{\,2} = \pi(\frac{u^2}{g})^2 = \frac{u^4}{g^2}\pi$ বর্গ একক।

4(b) 2·25 m উচ্চতা হতে একজন খেলোয়াড় একটি টেনিস বল অনুভূমিকে নিক্ষেপ করে এবং তা খেলোয়াড় হতে 15 m দূরে ভূমিকে আঘাত করে। বলটি যদি খেলোয়াড় হতে 10 m দূরে একটি জালকে স্পর্শ করে যায়, তাহলে জালটির উচ্চতা নির্ণয় কর।



সমাধান ঃ এখানে, ভূমি হতে নিক্ষেপণ বিন্দুর উচ্চতা $h = 2{\cdot}25$ মিটার। ধরি, টেনিস বলের নিক্ষেপণ বেগ u মি./সে. এবং জালটির উচ্চতা k মিটার। বলটির 15 মি. অনুভূমিক সরণে 2·25 মি. উল্লম্ব সরণ হয়।

$\therefore \quad y = \dfrac{gx^2}{2u^2}$ সূত্র দ্বারা পাই, $2{\cdot}25 = \dfrac{9.8 \times 15^2}{2 \times u^2} \Rightarrow u^2 = \dfrac{9{\cdot}8 \times 225}{2 \times 2{\cdot}25} = 490$

আবার, 10 মি. অনুভূমিক সরণে $(2{\cdot}25 - k)$ মি. উল্লম্ব সরণ হয়।

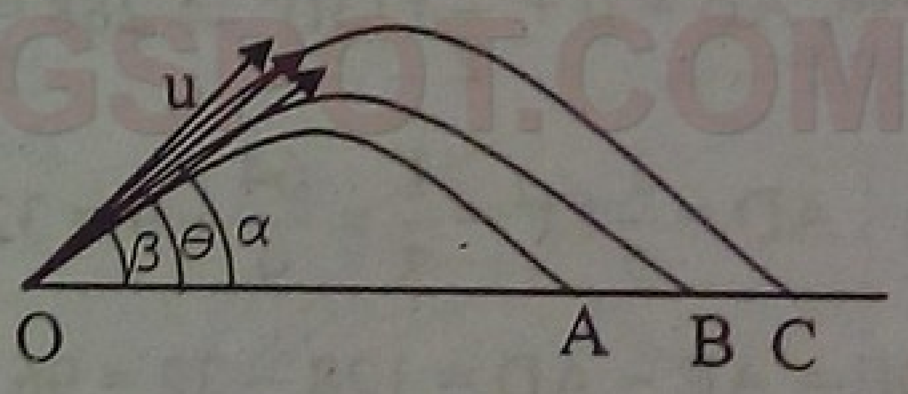
$\therefore \; 2{\cdot}25 - k = \dfrac{9.8 \times 10^2}{2 \times 490} = 1 \Rightarrow k = 2{\cdot}25 - 1 = 1{\cdot}25 \quad \therefore$ জালটির উচ্চতা $k = 1{\cdot}25$ মিটার।

4(c) ভূমি থেকে α ও β কোণে নিক্ষিপ্ত একটি গোলা সমতলের উপরস্থ লক্ষ্য বস্তুর যথাক্রমে a একক আগে ও b একক দূরে পড়ে। একই বেগে এবং θ কোণে নিক্ষেপ করলে যদি গোলা লক্ষ্যবস্তুর উপর পড়ে, তবে দেখাও যে, $\theta = \dfrac{1}{2}\sin^{-1}\left(\dfrac{a\sin 2\beta + b\sin 2\alpha}{a+b}\right)$

প্রমাণ ঃ মনে করি, গোলার নিক্ষেপণ বেগ u একক এবং নিক্ষেপণ বিন্দু O হতে এর লক্ষ্যবস্তুর দূরত্ব $OB = x$ একক।

তাহলে, $x = \dfrac{u^2 \sin 2\theta}{g}$ …… (i), $OA = OB - AB = x - a = \dfrac{u^2 \sin 2\alpha}{g}$ …… (ii)

এবং $OC = OB + BC = x + b = \dfrac{u^2 \sin 2\beta}{g}$ …… (iii)



$(i) \times b + (ii) \times a \Rightarrow (b+a)x = \dfrac{bu^2 \sin 2\alpha}{g} + \dfrac{au^2 \sin 2\beta}{g}$

$\Rightarrow (a+b) \times \dfrac{u^2 \sin 2\theta}{g} = \dfrac{bu^2 \sin 2\alpha}{g} + \dfrac{au^2 \sin 2\beta}{g}$, [(i) দ্বারা]

$\Rightarrow (a+b)\sin 2\theta = b\sin 2\alpha + a\sin 2\beta \Rightarrow \sin 2\theta = \dfrac{b\sin 2\alpha + a\sin 2\beta}{a+b}$

$\therefore \quad \theta = \dfrac{1}{2}\sin^{-1}\left(\dfrac{a\sin 2\beta + b\sin 2\alpha}{a+b}\right)$

4(d) একটি বস্তুকণা d মি. দূরে h মি. উঁচু একটি দেওয়ালের উপর দিয়ে কোন রকমে চলে গিয়ে 2d মি. দূরে h মি. উঁচু নির্দিষ্ট স্থানে আঘাত করল। দেখাও যে, প্রক্ষেপ বেগ u নিম্ন সমীকরণ হতে পাওয়া যায়, $\dfrac{4u^2}{g} = \dfrac{4d^2 + 9h^2}{h}$.

প্রমাণ ঃ মনে করি, বস্তুকণাটির প্রক্ষেপণ কোণ α । নিক্ষেপণ বিন্দুকে মূলবিন্দু ধরলে বস্তুকণাটি (d, h) এবং (2d , h) বিন্দুগামী হবে। $y = x\tan\alpha - \dfrac{gx^2}{2u^2\cos^2\alpha}$ সূত্র দ্বারা পাই,

$h = d\tan\alpha - \dfrac{gd^2}{2u^2\cos^2\alpha}$ …… (i) এবং $h = 2d\tan\alpha - \dfrac{g \times 4d^2}{2u^2\cos^2\alpha}$ …… (ii)

$4\times(i)-(ii) \Rightarrow (4h-h)=(4d-2d)\tan\alpha \Rightarrow \tan\alpha = \dfrac{3h}{2d}$

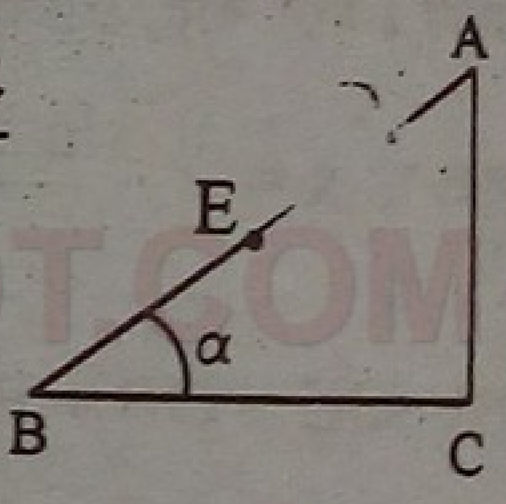
$\therefore$ (i) হতে পাই, $h = d\tan\alpha - \dfrac{gd^2}{2u^2}\sec^2\alpha = d\tan\alpha - \dfrac{gd^2}{2u^2}(1+\tan^2\alpha)$

$\Rightarrow h = d\times\dfrac{3h}{2d} - \dfrac{gd^2}{2u^2}(1+\dfrac{9h^2}{4d^2}) \Rightarrow h = \dfrac{3}{2}h - \dfrac{gd^2}{2u^2}(\dfrac{4d^2+9h^2}{4d^2}) \Rightarrow \dfrac{g(4d^2+9h^2)}{8u^2} = \dfrac{3}{2}h - h$

$\Rightarrow \dfrac{g(4d^2+9h^2)}{8u^2} = \dfrac{h}{2} \quad \therefore \dfrac{4u^2}{g} = \dfrac{4d^2+9h^2}{h}$ (Showed)

5. 288 ft দৈর্ঘ্যের AB আনত মসৃণ সমতলের শীর্ষবিন্দু A এর উচ্চতা 64 ft । AB কে D ও E বিন্দুতে এমন তিন অংশে বিভক্ত কর যেন একটি বস্তুকণা শীর্ষ A হতে প্রতিটি অংশ সমান সময়ে অতিক্রম করে।

সমাধান ঃ মনে করি, A এর উচ্চতা AC = 64 ফুট, $\angle ABC = \alpha$ এবং বস্তুকণাটি AD, DE ও EB প্রতিটি অংশ সমান t সেকেন্ডে অতিক্রম করতে পারে।



$\therefore \sin\alpha = \dfrac{AC}{AB} = \dfrac{64}{288} = \dfrac{2}{9}$, AB বরাবর বস্তুটির ত্বরণ $f = g\sin\alpha = 32\times\dfrac{2}{9} = \dfrac{64}{9}$

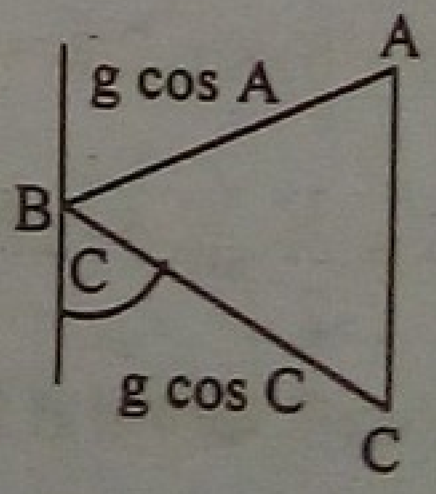
এখন, $AB = 0 + \dfrac{1}{2}f(3t)^2 \Rightarrow 288 = \dfrac{1}{2}\times\dfrac{64}{9}\times 9t^2 \Rightarrow t^2 = \dfrac{288}{32} = 9 \therefore t = 3$

$\therefore AD = \dfrac{1}{2}ft^2 = \dfrac{1}{2}\times\dfrac{64}{9}\times 9 = 32$ ফুট, $AE = \dfrac{1}{2}f(2t)^2 = \dfrac{1}{2}\times\dfrac{64}{9}\times 4\times 9 = 128$ ফুট,

$DE = AE - AD = 128 - 32 = 96$ ফুট, $EB = AB - AE = 288 - 128 = 160$ ফুট ।

6. ত্রিভুজের এক বাহু উল্লম্ব বরাবর অবস্থিত। যদি অপর বাহু দুইটি বরাবর পতনশীল কোন বস্তুর পতনকাল সমান হয়, তবে প্রমাণ কর যে, ত্রিভুজটি সমদ্বিবাহু অথবা সমকোণী।

প্রমাণ ঃ মনে করি, ABC ত্রিভুজের AC বাহু উল্লম্ব বরাবর অবস্থিত এবং বস্তুটি AB ও BC প্রতিটি দূরত্ব সমান t সময়ে অতিক্রম করে।



AB বরাবর বস্তুটির ত্বরণ = g cos A এবং BC বরাবর বস্তুটির ত্বরণ = g cos C.

$\therefore AB = 0 + \dfrac{1}{2}g\cos A\times t^2$, $BC = 0 + \dfrac{1}{2}g\cos C\times t^2$

$\therefore \dfrac{AB}{BC} = \dfrac{\cos A}{\cos C}$ …… (i). আবার ABC ত্রিভুজ হতে পাই, $\dfrac{AB}{BC} = \dfrac{\sin C}{\sin A}$ …… (ii)

(i) ও (ii) হতে পাই, $\dfrac{\cos A}{\cos C} = \dfrac{\sin C}{\sin A} \Rightarrow \sin A\cos A = \sin C\cos C \Rightarrow \sin 2A - \sin 2C = 0$

$\Rightarrow 2\cos(A+C)\sin(A-C) = 0$

$\therefore$ হয় $\cos(A+C) = 0 = \cos 90^\circ \Rightarrow A + C = 90^\circ$

অথবা, $\sin(A-C) = 0 = \sin 0 \Rightarrow A - C = 0 \Rightarrow A = C$

$\therefore$ ত্রিভুজটি সমদ্বিবাহু অথবা সমকোণী।

7. ধরা যাক একটি বস্তু একটি গভীর কূপে পড়ল। x মি. নীচে বস্তুটির বেগ $\frac{d}{dx}(\frac{v^2}{2}) = \frac{g(k-x)}{k}$ সমীকরণ হতে পাওয়া যায়; যেখানে g ও k ধ্রুবক। 1000 মি. গভীর কূপটির তলদেশে বস্তুটি কত বেগে আঘাত করবে?

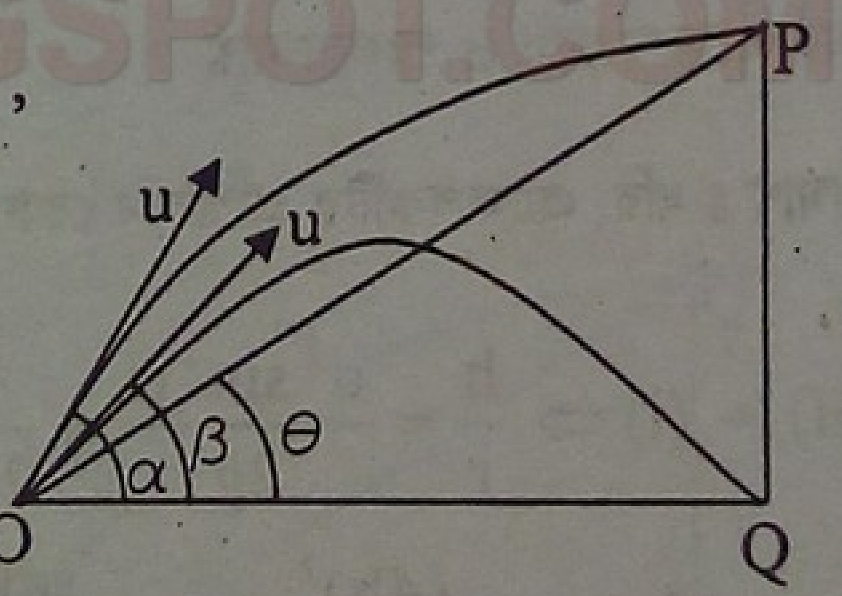
সমাধান ঃ আমাদের আছে, $\frac{d}{dx}(\frac{v^2}{2}) = \frac{g(k-x)}{k} \Rightarrow \frac{v^2}{2} = g\int(1-\frac{x}{k})dx = g\,(x - \frac{x^2}{2k}) + c \;\dots\dots$(i)

$v = 0$ যখন $x = 0$, সুতরাং আমরা পাই, $c = 0 \;\therefore\; \frac{v^2}{2} = g\,(x - \frac{x^2}{2k}) \Rightarrow v = \sqrt{2gx(1-\frac{x}{2k})}$

$x = 1000$ মি. গভীর কূপটির তলদেশে বস্তুটি বেগ $v = \sqrt{2g\times1000(1-\frac{1000}{2k})} = 20\sqrt{5g(1-\frac{500}{k})}$

8. একটি খাড়া দন্ড PQ তার পাদবিন্দুগামী অনুভূমিক তলে অবস্থিত O বিন্দুতে θ কোণ ধারণ করে। O বিন্দু হতে দুটি কণা একই সময়ে একই বেগে অনুভূমিক তলের সাথে α ও β কোণে নিক্ষিপ্ত হল যেন একই সময়ে প্রথমটি দন্ডের শীর্ষ এবং দ্বিতীয়টি দন্ডের পাদদেশে আঘাত করে। প্রমাণ কর যে, $\tan\alpha - \tan\beta = \tan\theta$.

প্রমাণ ঃ মনে করি, u বেগে নিক্ষিপ্ত কণা দুটি t সময়ে খাড়া দন্ডকে আঘাত করে।



$\therefore$ α কোণে নিক্ষিপ্ত কণার ক্ষেত্রে, $OQ = u\cos\alpha\,.\,t \Rightarrow ut = \frac{OQ}{\cos\alpha}$,

$PQ = u\sin\alpha\,.\,t - \frac{1}{2}gt^2 = \sin\alpha \times \frac{OQ}{\cos\alpha} - \frac{1}{2}gt^2$

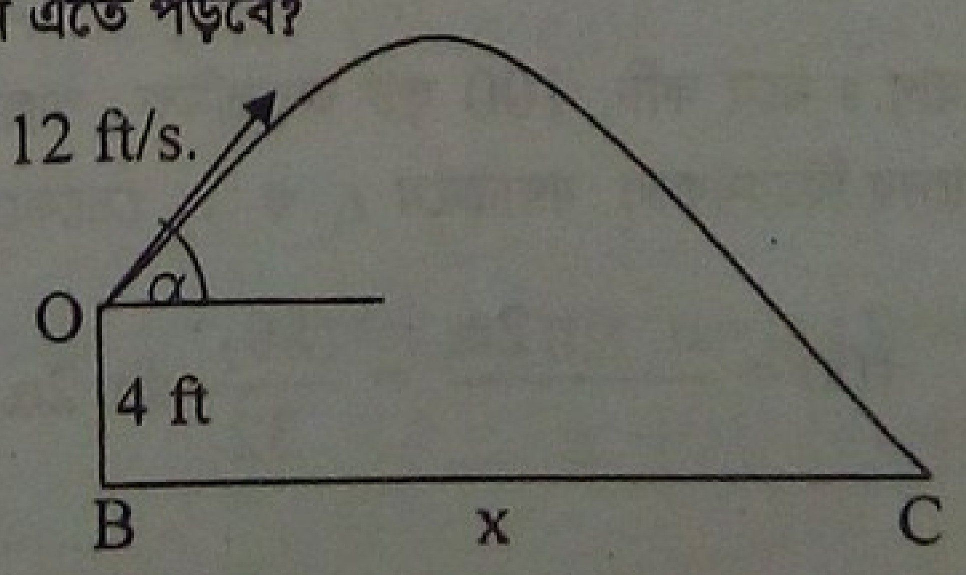
$\Rightarrow\; PQ = OQ\tan\alpha - \frac{1}{2}gt^2 \;\dots\dots$ (i)

অনুরূপভাবে, β কোণে নিক্ষিপ্ত কণার ক্ষেত্রে, $0 = OQ\tan\beta - \frac{1}{2}gt^2 \;\dots\dots$ (ii)

(i) − (ii) $\Rightarrow PQ = OQ\,(\tan\alpha - \tan\beta) \Rightarrow \frac{PQ}{OQ} = \tan\alpha - \tan\beta$

$\therefore\; \tan\theta = \tan\alpha - \tan\beta$

9. একটি গোলাকার গহ্বরের কেন্দ্রের 4 ফুট উপরে অবস্থিত একটি বিন্দু থেকে একটি ফোয়ারার পানি 12 ফুট / সে. বেগে সকল দিকে প্রক্ষিপ্ত হল। গহ্বরটির ব্যাস কত হলে ফোয়ারার সব পানি এতে পড়বে?



সমাধান ঃ মনে করি, গোলাকার গহ্বরের কেন্দ্র B হতে 4 ফুট উপরে অবস্থিত O বিন্দু থেকে 12 ফুট / সে. বেগে ও ভূমির সাথে α কোণে ফোয়ারার পানি সকল দিকে প্রক্ষিপ্ত হয় এবং পানির একটি কণা t সেকেন্ডে সর্বাধিক গহ্বরের ব্যাসার্ধ $BC = x$ ফুট দূরত্ব পর্যন্ত পড়ে।

$\therefore\ x = u\cos\alpha\,.\,t = 12\cos\alpha\,.t \Rightarrow t = \dfrac{x}{12\cos\alpha}$ এবং

$BO = 4 = -u\sin\alpha\,.t + \dfrac{1}{2}gt^2$

$\Rightarrow 4 = -12 \times \sin\alpha \times \dfrac{x}{12\cos\alpha} + \dfrac{1}{2} \times 32 \times \dfrac{x^2}{144\cos^2\alpha}$

$\Rightarrow 4 = -x\tan\alpha + \dfrac{1}{9}x^2\sec^2\alpha = -x\tan\alpha + \dfrac{1}{9}x^2(1+\tan^2\alpha)$

$\Rightarrow x^2\tan^2\alpha - 9x\tan\alpha + (x^2 - 36) = 0$

$\tan\alpha$ এর বাস্তব মানের জন্য, $(-9x)^2 - 4.x^2(x^2-36) \geq 0 \Rightarrow 81 - 4.x^2 + 144 \geq 0$

$\Rightarrow 4.x^2 \leq 225 \Rightarrow x \leq \dfrac{15}{2}$

$\therefore$ ফোয়ারার সব পানি গোলাকার গহ্বরের পড়বে যদি এর ব্যাসার্ধ $= 2 \times \dfrac{15}{2} = 15$ ফুট হয়।

10. একটি প্রক্ষেপকের অনুভূমিক পাল্লা r এবং বৃহত্তম উচ্চতা h হলে দেখাও যে, $\dfrac{u^2}{2g} = h + \dfrac{r^2}{16h}$ সমীকরণ দ্বারা এর প্রক্ষেপ বেগ u পাওয়া যায়।

প্রমাণ ঃ ধরি, প্রক্ষেপকটির প্রক্ষেপণ কোণ α । তাহলে, $r = \dfrac{2u^2\sin\alpha\cos\alpha}{g} \cdots$(i), $h = \dfrac{u^2\sin^2\alpha}{2g} \cdots$ (ii)

(ii) $\div$ (i) $\Rightarrow \dfrac{h}{r} = \dfrac{u^2\sin^2\alpha}{2g} \times \dfrac{g}{2u^2\sin\alpha\cos\alpha} = \dfrac{\tan\alpha}{4} \Rightarrow \tan\alpha = \dfrac{4h}{r}$

$\therefore\ \sin^2\alpha = \dfrac{(4h)^2}{(4h)^2 + r^2} = \dfrac{16h^2}{16h^2 + r^2}$

(ii) হতে পাই, $h = \dfrac{u^2}{2g} \times \dfrac{16h^2}{16h^2+r^2} \Rightarrow \dfrac{u^2}{2g} = \dfrac{16h^2+r^2}{16h} \quad \therefore\ \dfrac{u^2}{2g} = h + \dfrac{r^2}{16h}$

11. একটি গোলা ভূমিতে ফেটে গেল এবং এর অংশগুলো বিভিন্ন দিকে 80 ফুট/সে. গতিবেগ পর্যন্ত ছুটতে লাগল। দেখাও যে, 100 ফুট দূরের একজন লোক $\dfrac{5\sqrt{2}}{2}$ সেকেন্ড ধরে বিপদে থাকবে।

প্রমাণ ঃ মনে করি, 100 ফুট অনুভূমিক পাল্লার জন্য গোলার দুইটি অংশের প্রক্ষেপণ কোণ α ও $(90° - \alpha)$ এবং তাদের বিচরণকাল যথাক্রমে t_1 ও t_2 সেকেন্ডে।

$\therefore\ 100 = \dfrac{u^2\sin2\alpha}{g} = \dfrac{(80)^2}{32}\sin2\alpha = 200\sin2\alpha \Rightarrow \sin2\alpha = \dfrac{1}{2},$

$t_1 = \dfrac{2u\sin\alpha}{g} = \dfrac{2\times 80}{32}\sin\alpha = 5\sin\alpha$, $t_2 = \dfrac{2u\sin(90^0-\alpha)}{g} = \dfrac{2\times 80}{32}\cos\alpha = 5\cos\alpha$

এখন, $(t_1 \sim t_2)^2 = (t_1 + t_2)^2 - 4t_1 t_2 = (5\sin\alpha + 5\cos\alpha)^2 - 4\times 5\sin\alpha \times 5\cos\alpha$

$= 25(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha + 2\sin\alpha\cos\alpha) - 50\times 2\sin\alpha\cos\alpha$

$= 25(1 + \sin 2\alpha - 2\sin 2\alpha) = 25(1 - \sin 2\alpha) = 25(1 - \frac{1}{2}) = \frac{25}{2}$

$\Rightarrow t_1 \sim t_2 = \dfrac{5}{\sqrt{2}}$ অর্থাৎ একজন লোক $\dfrac{5\sqrt{2}}{2}$ সেকেন্ড ধরে বিপদে থাকবে।

12. দুইটি কণা দুইটি নির্দিষ্ট বিন্দু হতে একই সময়ে একই বেগে α ও β উন্নতি কোণে একই খাড়া তলে প্রক্ষিপ্ত হল এবং পরে তারা মিলিত হল। দেখাও যে, $\alpha + \beta =$ ধ্রুবক।

প্রমাণ ঃ মনে করি, u বেগে প্রক্ষিপ্ত কণা দুইটি t সময় পরে মিলিত হয়।

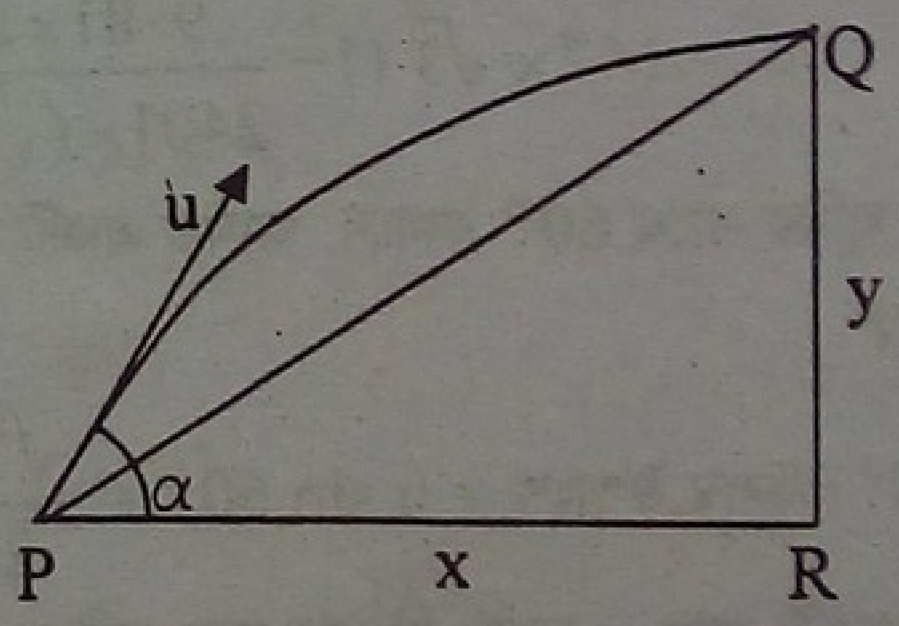
$\therefore\ u\sin\alpha.t - \frac{1}{2}gt^2 = u\sin\beta.t - \frac{1}{2}gt^2 \Rightarrow \sin\alpha = \sin\beta = \sin(\pi - \beta) \Rightarrow \alpha = \pi - \beta$

$\therefore\ \alpha + \beta = \pi =$ ধ্রুবক।

13. দেখাও যে, একটি নির্দিষ্ট বেগে P হতে নিক্ষিপ্ত কোন কণার Q বিন্দুতে উত্থানের দুইটি সময়ের গুণফল $\dfrac{2PQ}{g}$.

প্রমাণ ঃ মনে করি, কণাটির নিক্ষেপণ কোণ α, নিক্ষেপণ বেগ u এবং ইহা t সময়ে Q(x, y) বিন্দুতে পৌছে।

$\therefore$ কণাটির t সময়ে অতিক্রান্ত অনুভূমিক দূরত্ব $PR = x = u\cos\alpha\,.\,t \ldots\ldots$(i) এবং



খাড়া দূরত্ব $QR = y = u\sin\alpha.t - \frac{1}{2}gt^2$

$\Rightarrow u\sin\alpha.t = y + \frac{1}{2}gt^2 \ldots$(ii)

$(i)^2 + (ii)^2 \Rightarrow u^2t^2 = x^2 + y^2 + y\,gt^2 + \frac{1}{4}g^2t^4$

$\Rightarrow \frac{1}{4}g^2t^4 - (u^2 - yg)t^2 + x^2 + y^2 = 0$, যা t^2 এর দ্বিঘাত সমীকরণ।

ধরি, মূলদ্বয় $t_1^{\ 2}$ এবং $t_2^{\ 2}$.

$\therefore\ t_1^{\ 2}t_2^{\ 2} = \dfrac{x^2+y^2}{g^2/4} = \dfrac{4(PR^2 + RQ^2)}{g^2} = \dfrac{4(PQ^2)}{g^2}\ \therefore t_1 t_2 = \dfrac{2PQ}{g}$ (Showed)

ভর্তি পরীক্ষার MCQ:

1. 20 মি./সে. বেগে উর্ধ্বগামী কোন বেলুন থেকে পতিত এক টুকরা পাথর 20 সে. পরে মাটিতে পড়ল। পাথরের টুকরা বেলুন থেকে পতিত হওয়ার সময় বেলুনের উচ্চতা কত? [DU 10-11]

Sol^n : বেলুনের উচ্চতা $= -ut + \frac{1}{2}gt^2 = = -20\times20 + \frac{1}{2}\times9\cdot8\times20^2 = 1560$ মিটার।

2. সমবেগে খাড়া উর্ধ্বগামী একটি উড়োজাহাজ হতে একটি বোমা ছেড়ে দেওয়ার 5 সে. পরে তা মাটিতে আঘাত করল, বোমাটি যখন মাটিতে আঘাত করল তখন উড়োজহাজের উচ্চতা কত ছিল? [NSTU 08- 09]

Sol^n : উচ্চতা $= \frac{1}{2}gt^2 = \frac{1}{2}\times9\cdot8\times5^2 = 122\cdot5$ মি.

3. কোন স্তম্ভের শীর্ষ হতে 19·5 মি./সে. বেগে খাড়া উপরের দিকে প্রক্ষিপ্ত কোন কণা 5 সে. পরে স্তম্ভের পাদদেশে পতিত হলে স্তম্ভের উচ্চতা কত হবে? [DU 07-08, 05-06; BUET 08-09; Jt.U 06-07]

Sol^n : স্তম্ভের উচ্চতা $h = -ut + \frac{1}{2}gt^2 = -19\cdot5\times5 + \frac{1}{2}\times9\cdot8\times5^2 = 25$ মিটার।

4. একটি পক্ষেপককে কত আদিবেগে নিক্ষেপ করা হলে সর্বাধিক অনুভূমিক পাল্লা 90 মি. হবে, যেখানে g = 10 মি./সে.^{2} [KU 09-10; NSTU 08-09]

Sol^n : $R_{max} = \frac{u^2}{g} = 90 \Rightarrow u^2 = 90\times10 \;\therefore\; u = 30$

5. একটি খাড়া দেয়ালের পাদদেশ থেকে ভূমি বরাবর 147 মি. দূরত্বে কোন বিন্দু থেকে একটি বস্তু 49 মি./সে. বেগে অনুভূমিকের সাথে α কোণে ছোড়া হলো। $\alpha = 60°$ হলে বস্তুটি দেয়ালের যে বিন্দুতে আঘাত করবে তার উচ্চতা নির্ণয় কর। ($g = 9{\cdot}81\ ms^{-2}$) [BUET 10-11]

Sol^n : $y = x\tan\alpha\,(1 - \frac{gx}{u^2\sin2\alpha}) = 147\times\tan60°\,(1 - \frac{9\cdot81\times147}{49^2\sin2.60^0})$

$= 147\times\sqrt{3}\,\{1 - \frac{9\cdot81\times147}{2401\times(\sqrt{3}/2)}\} = 78\cdot03$

6. ভূমির সাথে 60° কোণে আনত একটি সমতলের উপর দিয়ে একটি বস্তু u বেগে গড়িয়ে পড়ে। বেগের উলম্ব উপাংশ কত? [KUET 05-06]

Sol^n : উলম্ব উপাংশ $= u\sin60° = \frac{\sqrt{3}}{2}u$

7. একটি কণা u বেগে নিক্ষিপ্ত হলে যদি তার অনুভূমিক পালণ্য বৃহত্তম উচ্চতার দ্বিগুণ হয় তবে তার অনুভূমিক পাল্লা কত? [KUET 05-06]

Sol^n : $\tan\alpha = \frac{4H}{R} = \frac{4H}{2H} = 2 \;\therefore\; \sin2\alpha = \frac{2\tan\alpha}{1+\tan^2\alpha} = \frac{4}{5}$ এবং $R = \frac{u^2\sin2\alpha}{g} = \frac{4u^2}{5g}$

8. প্রক্ষেপকের উত্থানকাল t এবং সর্বোচ্চ উচ্চতা H হলে $\frac{H}{t^2}$ কত? [DU01-02; SAU 05-06; Jt.U 07-08]

Sol^n : $\frac{H}{t^2} = \frac{\frac{u^2\sin^2\alpha}{2g}}{\frac{4u^2\sin^2\alpha}{g^2}} = \frac{g}{2}$

9. একটি খাড়া দেয়ালের পাদদেশ হতে ভূমি বরাবর 10 সে.মি. দূরত্বে কোনো বিন্দু হতে 45° কোণে একটি বস্তু নিক্ষেপ করা হল। বস্তুটি ঠিক দেয়ালের উপর দিয়ে গেল এবং দেয়ালের অপর পাশে 10 সে.মি. দূরত্বে গিয়ে মাটিতে পড়ল। দেয়ালটির উচ্চতা কত? [SUST 06-07]

Sol^n : $y = x \tan\alpha \left(1 - \frac{x}{R}\right) = 10 \tan 45°\left(1 - \frac{10}{2\times10}\right) = 5$ cm

10. একটি বস্তু 39·2 মি./সে. বেগে ভূমির সাথে 30° কোণে নিক্ষিপ্ত হলে কত সময় পড়ে বস্তুটি নিক্ষেপের দিকের সাথে লম্বভাবে চলবে? [RU 09-10]

Sol^n : $t = \frac{u}{g\sin\alpha} = \frac{39\cdot2}{9\cdot8\times\sin30^0} = 8$ সে.।

11. একটি উঁচু টাওয়ারের শীর্ষ হতে একটি পাথরকে 20 মি./সে. বেগে অনুভূমিকভাবে নিক্ষিপ্ত হল। পাথরটি টাওয়ারের পাদদেশ হতে 100 মি. দূরত্বে ভূমিতে আঘাত করে, টাওয়ারের উচ্চতা কত? [RU 08-09]

Sol^n : $y = \frac{gx^2}{2u^2} = \frac{9\cdot8\times100^2}{2\times20^2} = 122\cdot5$ মি.।

12. একটি বস্তু উপর থেকে মুক্তভাবে 4 সেকেন্ডে পড়ল। এটি শেষের 2 সেকেন্ডে কত ফুট পড়েছিল? [NU 02-03]

Sol^n : $h = \frac{1}{2}g\times4^2 - \frac{1}{2}g\times2^2 = 16\times(16-4) = 192$ ফুট।

কৌশলঃ খাড়া উপরে নিক্ষিপ্ত বস্তু সর্বোচ্চ বিন্দুতে পৌছার শেষ t সময়ে $\frac{1}{2}gt^2$ দূরত্ব অতিক্রম করে।

13. 32 ft/sec আদিবেগে এবং ভূমির সাথে 30° কোণে একটি বস্তু নিক্ষেপ করা হলো। ইহার আনুভূমিক পাল্লা-
A. 16 ft B. $32\sqrt{3}$ ft C. 32 ft D. $16\sqrt{3}$ ft [DU 13-14]

Sol^n : আনুভূমিক পাল্লা $R = \frac{u^2\sin2\alpha}{g} = \frac{32^2\sin60^0}{32} = 32\times\frac{\sqrt{3}}{2} = 16\sqrt{3}$ ft.