প্রশ্নমালা 3

1. আর্গন্ড চিত্রে নিচের সংখ্যাগুলি দেখাও ঃ (ক) $5 + 3i$ (খ) $-8 + 5i$ (গ) $-3 - 2i$ (ঘ) $-8i$.

2. $A + iB$ আকারে প্রকাশ করঃ (ক) $\frac{7+2i}{5-2i}$ (খ) $\frac{3-\sqrt{2}\,i}{2+\sqrt{3}i}$

(গ) $(2 + i)(5 + 3i)(8 + 5i)$.

3. (i) বর্গমূল নির্ণয় করঃ

(ক) $-7 + 24i$ [ঢা. '১২] (খ) $7 - 30\sqrt{-2}$ [ব. '১২] (গ) $2i$ [ঢা. '০৯; সি. '১৪]

(ঘ) $-2i$ [ব. '০৫] (ঙ) $-8 - 6i$ [য. দি. '০১; সি. '১১; রা. '১৩; য. চ. '১৪] (চ) $1 + i$

(ছ) $2x + i(x^2 - 1)$ (জ) $2 + i\sqrt{x^2 - 4}\,;\ |x| > 2.$

(ঝ) $\frac{5 + 12i}{3 - 4i}$. [বুয়েট '০৯-'১০]

(ঞ) প্রমাণ কর যে, $\sqrt{-i} = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}(1 - i)$. [দি. '০৯]

(ii) ঘনমূলগুলি নির্ণয় কর ঃ (ক) 1 [চ.'১১] (খ) i [ব. '১০,'১৬; কু. '১২; চ. '১৩, দি. সি. '১৬]
(গ) $-i$. [সি. '০৮; ব. য. '১৩; ঢা. '১৪]

(iii) মান নির্ণয় কর : (ক) $\sqrt[6]{-64}$. [দি. '১১; রা. '১৪] (খ) $\sqrt[4]{-81}$. [ঢা. '১০; রা. '১১; কু. '১৬]

4. নিচের জটিল সংখ্যাগুলির মডুলাস ও আর্গুমেন্ট নির্ণয় করঃ

(ক) $4 + 3i$ (খ) $5 + 6i$ (গ) $3 - 5i$ (ঘ) $1 + \sqrt{3}i$ (ঙ) $a + ai$ (চ) $-1 + \sqrt{3}i$

5. পোলার আকারে প্রকাশ কর ঃ

(ক) $c + id$ (খ) $9 - 5i$ (গ) $2 + 3i$ (ঘ) $9 + i$.

6. (i) $\frac{5-i}{2-3i}$ এর মডুলাস ও আর্গুমেন্ট নির্ণয় কর ; (ii) দেখাও যে, $\left|\frac{x-iy}{x+iy}\right| = 1$. [য. '০৭]

(iii) $\left(-\sqrt{3} + i\right)$ সংখ্যাটির মডুলাস ও আর্গুমেন্ট নির্ণয় কর এবং এটিকে পোলার আকারে প্রকাশ কর।
[বুয়েট '১১-'১২]

7. $(a + ib)(c + id) = x + iy$ হলে, দেখাও যে, $(a - ib)(c - id) = (x - iy)$. [চ. '০৬]

8. $z_1 \equiv 9 + 5i$ এবং $z_2 \equiv 3 - 2i$ হলে, প্রমাণ কর, $|z_1|.|z_2| = |z_1 z_2|$.

9. যদি এককের ঘনমূলের একটি জটিল মূল a হয়, তবে দেখাও যে, $x^3 - 1 = (x - 1)(x - a)(x - a^2)$.

10. a ও b বাস্তব সংখ্যা এবং $a^2 + b^2 = 1$ হলে, প্রমাণ কর যে, x এর একটি বাস্তব মান $\frac{1-ix}{1+ix} = a - ib$ সমীকরণকে সিদ্ধ করে। [ঢা. '১৪, '১৬; কু. '১৪; রা. '১২, '১৬, সি. চ. দি. '১২]

11. (i) $z = x + iy$ এবং $3|z - 1| = 2|z - 2|$ হলে, প্রমাণ কর যে, $5(x^2 + y^2) = 2x + 7$.
[চ. '১১; '১৩]

(ii) $z = x + iy$ হলে, $|z - 5| = 3$ সমীকরণ দ্বারা নির্দেশিত বৃত্তের ব্যাসার্ধ ও কেন্দ্র নির্ণয় কর। [কু. '০৬]

(iii) যদি $z = x + iy$ হয়, তবে $|z + 8| + |z - 8| = 20$ দ্বারা নির্দেশিত সঞ্চারপথের সমীকরণ নির্ণয় কর। [রা. '১০; ব. '১৪]

(iv) $x = 3 + 2i,\ y = 3 - 2i$ হলে, দেখাও যে, $x^2 + xy + y^2 = 23$. [য. '০৫]

12. এককের একটি ঘনমূল (জটিল) ω হলে, প্রমাণ কর যে,

(ক) $(\omega p + \omega^2 q)(\omega^2 p + \omega q) = p^2 - pq + q^2$;

(খ) $(p+q+r)(p+q\omega+r\omega^2)(p+q\omega^2+r\omega) = p^3+q^3+r^3-3pqr.$

13. $(x+iy)^{\frac{1}{3}} = p+iq$ হলে, প্রমাণ কর যে, $(x-iy)^{\frac{1}{3}} = p-iq.$
[দি.সি.'১০; কু. রা. '১১; ঢা. '১৩; বুয়েট '০৩-'০৪; রুয়েট '০৭-'০৮]

14. এককের ঘনমূলগুলির জটিল ঘনমূলদ্বয় যথাক্রমে a ও b হলে, প্রমাণ কর যে,
(ক) $a^3+a^{-3}=2$ (খ) $a^2+ab+b^2=0$ (গ) $(1-a)(1-b)=3.$

15. (i) প্রমাণ কর যে, $\sqrt{i}+\sqrt{-i}=\sqrt{2}.$ [য. '১২; কুয়েট '০৮-'০৯, রুয়েট '১২-'১৩]

(ii) দেখাও যে, $\sqrt[3]{i}+\sqrt[3]{-i}=0.$ [বুয়েট '০৫-'০৬]

16. এককের একটি জটিল ঘনমূল ω হলে, প্রমাণ কর ঃ
(ক) $(1-\omega+\omega^2)^2+(1+\omega-\omega^2)^2=-4.$
(খ) $(1-\omega)(1-\omega^2)(1-\omega^4)(1-\omega^8)=9.$
(গ) $(1-\omega^2)(1-\omega^4)(1-\omega^8)(1-\omega^{10})=9.$ [দি. '১১]
(ঘ) $(1+\omega-\omega^5)(\omega+\omega^2-1)(\omega^5+1-\omega)=-8.$ [ব '০৯]
(ঙ) $(1-\omega+\omega^2)(1-\omega^2+\omega^4)(1-\omega^4+\omega^8)(1-\omega^8+\omega^{16})=16.$ [ব. ১১]
(চ) $(1+\omega^4-\omega^2)^3-(1-\omega^4+\omega^2)^3=0.$
(ছ) $(a+b)^2+(a\omega+b\omega^2)^2+(a\omega^2+b\omega)^2=6ab.$
[ঢা. '১০, '১৩; য. সি. '১১; চ. '১২; সি. '১৩]
(জ) $(-1+\sqrt{-3})^4+(-1-\sqrt{-3})^4=-16.$
[ঢা. '০৯; চ. '১০; সি. রা, '১২; কু. '১০, '১৩, '১৬; য. '১৩; দি. সি. '১৪]

17. $\sqrt[3]{a+ib}=x+iy$ হলে, দেখাও যে, $-2(x^2+y^2)=\frac{a}{x}-\frac{b}{y}.$ [য. চ. '১৬]

18. (ক) ω এককের একটি জটিল ঘনমূল এবং $(a+b\omega+c\omega^2)^2+(a\omega+b+c\omega^2)^2+(a\omega+b\omega^2+c)^2=0$ হলে, প্রমাণ কর যে, হয় $a=c,$ অথবা $b=\frac{1}{2}(a+c).$ [কু. '১১]
(খ) $(p\omega^2+q+r\omega)^3+(p\omega+q+r\omega^2)^3=0$ হলে, প্রমাণ কর যে,
$p=\frac{1}{2}(q+r)$ অথবা $q=\frac{1}{2}(r+p)$ অথবা $r=\frac{1}{2}(p+q).$

19. যদি $a+b+c=0$ এবং এককের একটি কাল্পনিক মূল ω হয়, তবে দেখাও যে,
$(a+b\omega+c\omega^2)^3+(a+b\omega^2+c\omega)^3=27abc.$ [সি. র. '১০; ব. '১৩; চ. ঢা. '১৬]

20. $x=2+i$ হলে, $x^4-4x^3+6x^2-4x+5$ এর মান নির্ণয় কর।

21. $a=-1+i\sqrt{2}$ হলে, দেখাও যে $a^4+4a^3+6a^2+4a+9=12.$

22. $p=\frac{1+\sqrt{-1}}{\sqrt{2}}$ হলে, প্রমাণ কর যে, $p^6+p^4+p^2+1=0.$ [ঢা. '০৫; চ. '১০; ব. '১১]

23. -1 এর ঘনমূলগুলি নির্ণয় কর।

24. $x^4+81=0$ সমীকরণের মূলগুলি নির্ণয় কর।

25. যদি $x_1 : x_2 = (a+ib) : (c+id)$ হয়, তবে
প্রমাণ কর যে, $(c^2+d^2)x_1^2-2(ac+bd)x_1x_2+(a^2+b^2)x_2^2=0.$
[য. '১০; দি. '১২; দি. ব. কু. '১৪]

26. (i) $(1+x)^n=a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n$ হলে, প্রমাণ কর যে,
$(a_0-a_2+a_4-\ldots)^2+(a_1-a_3+a_5-\ldots)^2=a_0+a_1+a_2+\ldots+a_n=2^n.$
[কু. '১২; রা, '১৩]

(ii) $(1+x+x^2)^n = p_0 + p_1 x + p_2 x^2 + \ldots + p_{2n} x^{2n}$ হলে, প্রমাণ কর যে,
$p_0 + p_3 + p_6 + \ldots\ldots\ldots = 3^{n-1}$. [চ. '০৮]

27. প্রমাণ কর যে, $\left(\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}\right)^n + \left(\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}\right)^n = 2$ বা -1, যখন n এর মান যথাক্রমে 3 দ্বারা বিভাজ্য বা n এর মান অপর যেকোনো পূর্ণ সংখ্যা হয়।

28. যদি $9 + i, 4 + 13i, -8 + 8i$ এবং $-3-4i$ সংখ্যাগুলি আর্গন্ড চিত্রে যথাক্রমে A, B, C, D বিন্দু সূচিত করে, তবে প্রমাণ কর যে, $ABCD$ একটি বর্গ।

29. যদি z এবং a জটিল সংখ্যা হয়, তবে প্রমাণ কর যে,
$|z + a|^2 + |z - a|^2 = 2(|z|^2 + |a|^2)$.

উত্তরমালা

2. (ক) $\frac{31}{29} + i\frac{24}{29}$. **(খ)** $\frac{6-\sqrt{6}}{7} - i\frac{3\sqrt{3}+2\sqrt{2}}{7}$ **(গ)** $1+i$ 123.

3. (i) (ক) $\pm(3+4i)$, **(খ)** $\pm(5-2\sqrt{2}\,i)$ **(গ)** $\pm(1+i)$, **(ঘ)** $\pm(1-i)$ **(ঙ)** $\pm(1-3i)$

(চ) $\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\{(\sqrt{2}+1)^{\frac{1}{2}} + i(\sqrt{2}-1)^{\frac{1}{2}}\}$, **(ছ)** $\pm\frac{\sqrt{2}}{2}\{(x+1)+(x-1)i\}$.

(জ) $\pm\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\sqrt{x+2} + i\sqrt{x-2}\right)$. **(ঝ)** $\pm\left(\frac{4}{5}+\frac{7i}{5}\right)$. **(ii) (ক)** 1, $\frac{1}{2}(-1 \pm \sqrt{3}\,i)$

(খ) $-i$, $\frac{1}{2}(\pm\sqrt{3}+i)$ **(গ)** $i, \frac{1}{2}(\pm\sqrt{3}-i)$. **(iii) (ক)** $\pm 2i, \pm\sqrt{3} \pm i$; **(খ)** $\pm\frac{3}{\sqrt{2}}(1 \pm i)$

4. (ক) 5, $\tan^{-1}\frac{3}{4}$; **(খ)** $\sqrt{61}$, $\tan^{-1}\frac{6}{5}$; **(গ)** $\sqrt{34}$, $\tan^{-1}\left(\frac{-5}{3}\right)$; **(ঘ)** 2, $\frac{\pi}{3}$; **(ঙ)** $\sqrt{2}a$, $\frac{\pi}{4}$.

(চ) 2, $\frac{2\pi}{3}$. **5. (ক)** $\sqrt{c^2+d^2}(\cos\theta + i\sin\theta)$, যখন $\tan\theta = \frac{d}{c}$;

(খ) $\sqrt{106}(\cos\theta + i\sin\theta)$, যখন $\tan\theta = -\frac{5}{9}$; **(গ)** $\sqrt{13}(\cos\theta + i\sin\theta)$, যখন $\tan\theta = \frac{3}{2}$;

(ঘ) $\sqrt{82}(\cos\theta + i\sin\theta)$, যখন $\tan\theta = \frac{1}{9}$. **6. (i)** $\sqrt{2}$, $\frac{\pi}{4}$.

(iii) $2, \frac{5\pi}{6}, 2\left(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}\right)$ **11. (ii)** বৃত্তের কেন্দ্র (5,0) এবং ব্যাসার্ধ = 3;

(iii) $9x^2 + 25y^2 = 900$. **20.** 0. **23.** $-1, \frac{1}{2}(1+\sqrt{-3}), \frac{1}{2}(1-\sqrt{-3})$.

24. $\pm\frac{3\sqrt{2}}{2}(1 \pm i)$.