

প্রশ্নমালা ৪.১

১. (i) কোনো বিন্দুতে $7 N$ এবং $8 N$ দুইটি বল পরস্পর 60° কোণে কার্যরত আছে। এদের লম্বি নির্ণয় কর।
(ii) দুইটি বল সমকোণে ক্রিয়া করলে লম্বি $13 N$ এবং এদের বৃহত্তম লম্বি $17 N$, বল দুইটি 120° কোণে ক্রিয়া করলে লম্বি নির্ণয় কর। [ঢা. বি. ০৪-০৫]
- (iii) কোনো কণার উপর একই সময়ে ক্রিয়াশীল দুইটি বলের লম্বি এদের বৃহত্তর বলটির ক্রিয়ারেখার সাথে 60° -কোণ উৎপন্ন করে। বৃহত্তর বলটিকে দ্বিগুণ করলে উক্ত কোণটি 30° হয়। বলদ্বয়ের অন্তর্গত কোণ নির্ণয় কর। [বুয়েট '১১-'১২]
- (iv) কোনো বিন্দুতে $2P$ এবং P মানের দুইটি বল ক্রিয়াশীল। প্রথমটিকে দ্বিগুণ করলে এবং দ্বিতীয়টির মান 8 একক বৃদ্ধি করলে লম্বির দিক অপরিবর্তিত থাকে। P এর মান নির্ণয় কর। [ব. ২০১১, কুয়েট, '০৮-'০৯]
- (v) একটি বিন্দুতে পরস্পর 120° কোণে ক্রিয়ারত P , $2P$ এবং $3P$ বলদ্বয়ের লম্বির মান ও দিক নির্ণয় কর।
২. (i) $3P$ এবং $2P$ মানের বল দুইটির লম্বির মান R ; যদি প্রথম বলের পরিমাণ দ্বিগুণ করা হয় তবে লম্বির মানও দ্বিগুণ হয়। বলদ্বয়ের মধ্যবর্তী কোণ নির্ণয় কর। [ব.০৪ কু.সি.০৭, বুয়েট ০৩-০৪, ঢা.বি. ০৯-১০]
- (ii) 2α কোণে ক্রিয়ারত দুইটি সমান বলের লম্বি, 2β কোণে ক্রিয়ারত বল দুইটির লম্বির দ্বিগুণ হলে, প্রমাণ কর যে, $\cos \alpha = 2 \cos \beta$ । [রা. ০৫, ২০১০, সি. ০৩, কু. ১২]
- (iii) একটি কণার উপর কার্যরত P , P দুইটি বলের লম্বির মান P হলে বল দুইটির অন্তর্গত কোণ নির্ণয় কর। [কুয়েট ১৪-১৫]
- (iv) দুইটি সমান বল কোনো একটি কণার উপর ক্রিয়ারত। এদের লম্বির বর্গ বল দুইটির গুণফলের তিনগুণের সমান হলে বলদুইটি অন্তর্ভুক্ত কোণ নির্ণয় কর। [ঢা. বি. ৯৯-০০, বুয়েট, চুয়েট ১০-১১]
- (v) একটি বিন্দুতে পরস্পর 90° কোণে ক্রিয়ারত $6 N$, $8 N$ দুইটি বলের লম্বির মান এবং বৃহত্তর বলের সাথে লম্বির নতি নির্ণয় কর।
৩. (i) দুইটি বলের লম্বি $12 N$, যা ক্ষুদ্রতর বলের ক্রিয়ারেখার উপর লম্ব এবং এদের বৃহত্তম লম্বি $18 N$, হলে বল দুইটি নির্ণয় কর।
- (ii) কোনো বিন্দুতে ক্রিয়ারত P এবং $2P$ মানের বলদ্বয়ের লম্বি যদি P এর ক্রিয়ারেখার উপর লম্ব হয়, তবে বলদ্বয়ের মধ্যবর্তী কোণ নির্ণয় কর। [ঢা. বি. ০৭-০৮, টেক্সটাইল ১২-১৩]
- (iii) কোনো বিন্দুতে 120° কোণে ক্রিয়াশীল দুইটি বলের লম্বি ক্ষুদ্রতর বলের সাথে সমকোণ উৎপন্ন করে। বৃহত্তর বলটি $10 N$ হলে, লম্বি নির্ণয় কর। [চুয়েট ১২-১৩]
- (iv) একটি বিন্দুতে ক্রিয়ারত P নিউটন এবং $12 N$ দুইটি বলের লম্বি $3\sqrt{7} N$ যার ক্রিয়ারেখা P এর সাথে 90° কোণ উৎপন্ন করে। P এর মান নির্ণয় কর। [ঢা. বি. ০৮-০৯]
৪. (i) কোনো কণার উপর ক্রিয়ারত দুইটি বলের লম্বি একটি বলের উপর লম্ব এবং এর মান অপরটির মানের এক তৃতীয়াংশের সমান। দেখাও যে, বল দুইটির অনুপাত $2\sqrt{2} : 3$ । [য. ২০১০, বুয়েট ১২-১৩]
- (ii) পরস্পর α কোণে আনত P ও Q মানের বল দুইটির লম্বির মান $\sqrt{3}Q$ এবং তা P বলের ক্রিয়ারেখার সাথে 30° কোণ উৎপন্ন করে। দেখাও যে, $P = Q$ অথবা $P = 2Q$ । [সি. ২০০৫, মা. বো. ১৪]
- (iii) একটি বিন্দুতে কার্যরত P ও Q মানের দুইটি বলের লম্বির মান R ; Q বলটিকে দ্বিগুণ করলে R ও দ্বিগুণ হয়। আবার Q বিপরীতমুখী হলেও R এর মান দ্বিগুণ হয়।
প্রমাণ কর যে, $P : Q : R = \sqrt{2} : \sqrt{3} : \sqrt{2}$ ।

(iv) কোনো বিন্দুতে ক্রিয়ারত P ও Q দুইটি বলের লব্ধির মান R . যদি Q কে দ্বিগুণ করা হয়, তবে নতুন লব্ধি P বলের ক্রিয়ারেখার উপর লম্ব হয়। প্রমাণ কর যে, $Q = R$.

(v) এক বিন্দুতে ক্রিয়ারত P ও Q দুইটি বলের লব্ধির মান R . যদি Q কে বিপরীতমুখী করা হয়, তবে নতুন লব্ধি এক সমকোণে ঘুরে যায়। প্রমাণ কর যে, $P = Q$.

5 (i) OA ও OB সরলরেখা বরাবর ক্রিয়ারত P এবং Q মানের বল দুইটির লব্ধি OA এর উপর লম্ব। একই রেখা বরাবর ক্রিয়ারত যথাক্রমে P' এবং Q' মানের বল দুইটির লব্ধি OB এর উপর লম্ব হলে প্রমাণ কর যে, $P P' = Q Q'$.

(ii) পরস্পর α কোণে আনত OA এবং OB রেখা বরাবর ক্রিয়ারত যথাক্রমে P ও Q মানের বলদ্বয়ের লব্ধি R , যা OA এর সাথে θ কোণ উৎপন্ন করে। একই রেখা বরাবর Q এর স্থলে Q' ক্রিয়া করলে এদের লব্ধির R'

যা OA এর সাথে θ' কোণ উৎপন্ন করে। প্রমাণ কর যে, $\frac{R}{R'} = \frac{\sin(\alpha - \theta')}{\sin(\alpha - \theta)}$, যখন $\alpha < \pi$.

[দি. ১০, ব. ১৩]

(iii) কোনো একটি বিন্দুতে ক্রিয়ারত P, Q দুইটি বলের লব্ধি P হলে দেখাও যে, একই রেখা বরাবর ক্রিয়ারত $2P$ ও Q বলের লব্ধি Q বলের উপর লম্ব।

6. দুইটি বল ABC ত্রিভুজের CA ও CB বাহু বরাবর ক্রিয়া করে এবং এদের মান যথাক্রমে $\cos A$ ও $\cos B$ এর সমানুপাতিক। প্রমাণ কর যে, এদের লব্ধির মান $\sin C$ এর সমানুপাতিক এবং এর গতি পথ C কোণকে $\frac{1}{2}(C + B - A)$ ও $\frac{1}{2}(C + A - B)$ এ দুই অংশে বিভক্ত করে। [ব. ০৫, ১০, চ. ১১, ঢা. ০৬]

7. (i) কোনো বিন্দুতে ক্রিয়ারত দুইটি বলের বৃহত্তম ও ক্ষুদ্রতম লব্ধির মান যথাক্রমে S এবং T . প্রমাণ কর যে, বলদ্বয়ের ক্রিয়ারেখার মধ্যবর্তী কোণ α হলে, তাদের লব্ধির মান $\sqrt{S^2 \cos^2 \frac{\alpha}{2} + T^2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}}$ হবে। [দি. ১২]

(ii) P ও Q বলদ্বয়ের বৃহত্তম লব্ধি ও ক্ষুদ্রতম লব্ধি একটি বিন্দুতে α কোণে ক্রিয়ারত। তাদের লব্ধির মান ও দিক নির্ণয় কর। [ঢা. ২০০৫]

(iii) প্রমাণ কর যে, দুইটি বলের ক্রিয়া রেখার অন্তর্গত কোণ α হলে, তাদের লব্ধির মান

$\sqrt{A^2 \cos^2 \frac{\alpha}{2} + B^2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}}$, যেখানে বলদ্বয়ের বৃহত্তম ও ক্ষুদ্রতম মান যথাক্রমে A এবং B [ষ. ২০১৪]

8. (i) কোনো বিন্দুতে 2α কোণে কার্যরত $P + Q$ এবং $P - Q$ মানের বল দুইটির লব্ধি এদের অন্তর্গত কোণের সমদ্বিখণ্ডকের সাথে θ কোণ উৎপন্ন করে। দেখাও যে, $P \tan \theta = Q \tan \alpha$.

[ঢা. ০৪; কু. ০৬; রা. ০৯, সি. ২০১৩, টেক্সটাইল ০৮-০৯]

(ii) $P + Q$ এবং $P - Q$ বলদ্বয় α কোণে ক্রিয়ারত। তাদের লব্ধি বলদ্বয়ের অন্তর্গত কোণের সমদ্বিখণ্ডকের সাথে $\frac{\theta}{2}$ কোণ উৎপন্ন করে। দেখাও যে, $P : Q = \tan \frac{\alpha}{2} : \tan \frac{\theta}{2}$. [চ. ২০০৪]

9. (i) ΔABC এর সমতলে O একটি বিন্দু। BC, CA ও AB বাহুগুলির মধ্যবিন্দু যথাক্রমে D, E, F হলে, প্রমাণ কর যে, \vec{OD}, \vec{OE} এবং \vec{EO} বলগুলির লব্ধি \vec{OB} . [সি. ২০০১]

(ii) কোনো বৃত্তের দুইটি জ্যা AB ও CD পরস্পর P বিন্দুতে সমকোণে ছেদ করে। বৃত্তের কেন্দ্র O হলে, দেখাও যে, $\vec{PA}, \vec{PB}, \vec{PC}, \vec{PD}$ বলগুলির লব্ধি $2\vec{PO}$ হবে।

(iii) $ABCD$ চতুর্ভুজের BC ও AD এর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে E, F দেখাও যে, \vec{AB} ও \vec{DC} বলদ্বয়ের লম্বি $2 \vec{FE}$.

(iv) ΔABC এর ভরকেন্দ্র G হলে, দেখাও যে O বিন্দুতে ক্রিয়ারত $\vec{OA}, \vec{OB}, \vec{OC}$ বলত্রয়ের লম্বি $3 \vec{OG}$.

(v) \vec{AB} এবং \vec{AC} বলদ্বয়ের লম্বি ΔABC এর পরিকেন্দ্রগামী হলে, প্রমাণ কর যে, ত্রিভুজটি সমকোণী বা সমদ্বিবাহু হবে।

(vi) যেকোনো ABC ত্রিভুজের BC, CA, AB বাহুর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে D, E, F হলে, \vec{AD}, \vec{BE} এবং \vec{CF} বল তিনটির লম্বি নির্ণয় কর।

10. (i) ABC সমবাহু ত্রিভুজের AB, BC, CA বাহুর সমান্তরালে যথাক্রমে $2N, 4N$ এবং $6N$ একক তিনটি সমবিন্দু বল ক্রিয়াশীল। এদের লম্বি নির্ণয় কর। [চ্যুয়েট ১১-১২]

(ii) কোনো বিন্দুতে ক্রিয়ারত $Q - R, Q, Q + R$ মানের বলগুলির দিক একইক্রমে কোনো সমবাহু ত্রিভুজের বাহুগুলির সমান্তরাল। বলগুলির লম্বির মান ও দিক নির্ণয় কর। [ঢা. ২০০১, য. ২০০৪]

11. (i) $5P$ ও $2P$ দুইটি বল A বিন্দুতে ক্রিয়াশীল এবং এদের লম্বি $4P$ । যদি কোনো ছেদক তাদের ক্রিয়ারেখাকে যথাক্রমে B, C ও D বিন্দুতে ছেদ করে, তাহলে প্রমাণ কর যে, $\frac{4}{AD} = \frac{5}{AB} + \frac{2}{AC}$

(ii) $4P$ ও $3P$ মানের দুইটি বল O বিন্দুতে ক্রিয়া করে এবং এদের লম্বির মান $5P$ । যদি কোনো ছেদক এদের ক্রিয়ারেখাকে যথাক্রমে R, S ও T বিন্দুতে ছেদ করে, তাহলে দেখাও যে, $\frac{4}{OR} + \frac{3}{OS} = \frac{5}{OT}$

[সি. ০৯, ১৪, কু. ১১; দি. চ. ১৩]

12. (i) এক বিন্দুতে কার্যরত P, Q মানের দুইটি বলের লম্বির মান R এবং P এর দিক বরাবর R এর লম্বাংশের

পরিমাণ Q হলে, প্রমাণ কর যে, বল দুইটির অন্তর্ভুক্ত কোণ $\alpha = \cos^{-1} \frac{Q-P}{Q} = 2 \sin^{-1} \sqrt{\frac{P}{2Q}}$ এবং

$$R = \sqrt{Q^2 - P^2 + 2PQ}$$

[আলিম ২০০৪, ১৩, কু. ২০০৮; কু. রা. ২০১৩, দি. ১৬]

(ii) কোনো বিন্দুতে ক্রিয়ারত P ও Q মানের দুইটি বলের লম্বি তাদের অন্তর্গত কোণকে এক-তৃতীয়াংশে বিভক্ত করে। দেখাও যে, বলদ্বয়ের অন্তর্গত কোণের পরিমাণ $3 \cos^{-1} \frac{P}{2Q}$ এবং লম্বি $\frac{P^2 - Q^2}{Q}$, ($P > Q$)

[য. ১২, ঢা. ১৩, ১৬, কু. ১০; আলিম ১১, দি. ১৪, টেক্সটাইল ০৯-১০]

13 (i) $P, 3P, \sqrt{3}P$ এবং $\sqrt{3}P$ মানের বলগুলি যথাক্রমে একতলীয় OA, OB, OC এবং OD সরলরেখা বরাবর ক্রিয়া করে। যদি $\angle AOB = 60^\circ, \angle BOC = 90^\circ$ এবং $\angle COD = 120^\circ$ হয়, তাহলে এদের লম্বির মান ও দিক নির্ণয় কর।

(ii) $ABCD$ আয়তক্ষেত্রের AB বাহু ৪ সে.মি. এবং BC বাহু ৩ সে.মি.। AB, AC ও AD বরাবর ক্রিয়ারত যথাক্রমে $6N, 10N$ ও $8N$ সমবিন্দু বল তিনটির লম্বি ও ক্রিয়া রেখা নির্ণয় কর।

(iii) $ABCD$ একটি রম্বস। এর কর্ণদ্বয়ের ছেদবিন্দু O তে $3N, 4N, 9N$ এবং $10N$ বলগুলি যথাক্রমে OA, OB, OC এবং OD বরাবর ক্রিয়া করে। লম্বির মান ও দিক নির্ণয় কর।

14. (i) একই সমতলে অবস্থিত OA, OB, OC রেখা বরাবর যথাক্রমে P, Q, R মানের বলগুলি কার্যরত আছে। এদের লম্বির মান F হলে প্রমাণ কর যে,

$$F^2 = P^2 + Q^2 + R^2 + 2QR \cos BOC + 2PQ \cos AOB + 2PR \cos COA.$$

(ii). কোনো বিন্দুতে P, Q, R মানের তিনটি বল এরূপভাবে ক্রিয়া করে যেন, এদের দিক একটি সমবাহু ত্রিভুজের একইক্রমে তিনটি বাহুর সমান্তরাল হয়। প্রমাণ কর যে,

এদের লম্বি $\sqrt{P^2 + Q^2 + R^2 - QR - RP - PQ}$.

(iii). কোনো বিন্দুতে ক্রিয়ারত $P, Q, R,$ ও S মানের চারটি বলের দিক $ABCD$ আয়তক্ষেত্রের যথাক্রমে AB, BC, CD ও DA বাহুর সমান্তরাল। প্রমাণ কর যে,

এদের লম্বির মান $\sqrt{P^2 + Q^2 + R^2 + S^2 - 2PR - 2QS}$

(iv) P মানের তিনটি বল একটি বিন্দুতে এরূপভাবে কার্যরত যেন এদের দিক ΔABC এর BC, CA এবং AB বাহুর সমান্তরাল। প্রমাণ কর যে, এদের লম্বি মান $P\sqrt{3 - 2 \cos A - 2 \cos B - 2 \cos C}$.

[ঢা. ১০, বুয়েট ০০-০১]

(v) ABC ত্রিভুজের বাহু বরাবর একইক্রমে কার্যরত তিনটি সমবিন্দু বলের মান এদের স্ব স্ব ক্রিয়ারেখার বিপরীত কোণের কোসাইনের সমানুপাতিক। প্রমাণ কর যে, এদের লম্বির মান

$\sqrt{1 - 8 \cos A \cos B \cos C}$ এর সমানুপাতিক।

15.(i) কোনো বিন্দুতে 150° কোণে ক্রিয়ারত দুইটি বলের লম্বি ক্ষুদ্রতর উপাংশের উপর লম্ব। বৃহত্তর উপাংশ 100 N হলে ক্ষুদ্রতর উপাংশ এবং লম্বি নির্ণয় কর।

(ii) একটি কণার উপর ক্রিয়ারত দুইটি বলের লম্বি একটি বলের উপর লম্ব এবং এর মান অপরটি অর্ধেকের সমান। দেখাও যে, তাদের মধ্যবর্তী কোণ 150° .

16. একটি বৃত্তের AB ও AC দুইটি জ্যা দ্বারা সূচিত দুইটি বলের লম্বি বৃত্তের কেন্দ্রগামী হলে প্রমাণ কর যে, বল দুইটি সমান অথবা পরস্পর লম্ব।

উত্তরমালা

1. (i) 13 N, (ii) 10.44N (iii) 120° , (iv) $P = 8$ একক, (v) $\sqrt{3}P$, P এর সাথে 210° .

2. (i) 120° . (iii) 120° . (iv) 60° . (v) 10N, $36^\circ 52'$ (প্রায়) 3. (i) 5N, 13N (ii) 120° .

(iii) $5\sqrt{3}\text{N}$. (iv) 9N 4. 120° . 5. 60° 7.(ii) লম্বি $2\sqrt{P^2 \cos^2 \frac{\alpha}{2} + Q^2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}}$,

$\theta = \tan^{-1} \frac{(P-Q) \sin \alpha}{(P+Q) + (P-Q) \cos \alpha}$. 9. (vi) লম্বি শূন্য 10.(i) $2\sqrt{3}\text{N}$.

(ii) $\sqrt{3}R$, $(Q - R)$ এর সাথে 210° 13.(i) $2P$, OA এর সাথে 60° ।

(ii) $14\sqrt{2}\text{ N}$, AB এর সাথে 45° . (iii) $6\sqrt{2}\text{ N}$, $\angle COD$ কোণের সমদ্বিখন্ডক.

15.(i) $50\sqrt{3}\text{N}$, লম্বি 50 N.

প্রশ্নমালা ৪.২

1. (i) 5 N , 7 N এবং 8 N বলত্রয় একটি বস্তুর উপর ক্রিয়া করে ভারসাম্য সৃষ্টি করলে 8 N এবং 5 N বলদ্বয়ের মধ্যবর্তী কোণ নির্ণয় কর।
- (ii) কোনো বিন্দুতে 60° কোণে ক্রিয়ারত P মানের দুইটি সমান বলকে একই বিন্দুতে ক্রিয়ারত 9 N বলের সাহায্যে ভারসাম্য রাখলে P এর মান নির্ণয় কর। [ঢা. বি. ০৮-০৯]
- (iii) কোনো বিন্দুতে 1 পা, 2 পা. এবং $\sqrt{3}$ পা. ওজনের তিনটি বল ক্রিয়া করে সাম্যাবস্থা সৃষ্টি করে। বলগুলির মধ্যবর্তী কোণ নির্ণয় কর। [কু. ২০০২]
- (iv) একটি আনত সমতলে 10 kg . ওজনের একটি বস্তুকে সমতল বরাবর 2 kg . ওজনের বল এবং একটি আনুভূমিক বল প্রয়োগ করে স্থিরভাবে রাখা হয়েছে। যদি ভূমির সমতলের নতি $\theta = \sin^{-1} \frac{3}{5}$ হয়, তবে, আনুভূমিক বলটি নির্ণয় কর। [কুয়েট ১১-১২]
2. (i) দেখাও যে কোনো বস্তুর উপর ক্রিয়ারত $5:6:12$ অনুপাতের বলগুলি সাম্যাবস্থা সৃষ্টি করতে পারে না।
- (ii) কোনো শর্তে একটি বস্তুকণার উপর কার্যরত $3:4:7$ অনুপাতের বলগুলি সাম্যাবস্থায় থাকবে?
3. (i) P , Q , R বলত্রয় একবিন্দুতে ক্রিয়া করে সাম্যাবস্থা সৃষ্টি করে। P ও Q এর মধ্যবর্তী কোণ 60° এবং P ও R এর মধ্যবর্তী কোণ 150° হলে দেখাও যে, $P = Q = \frac{R}{\sqrt{3}}$. [কুয়েট ০৫-০৬]
- (ii) P , Q , R সাম্যাবস্থা সৃষ্টিকারী সমবিন্দু তিনটি বলের ক্রিয়া রেখা ABC ত্রিভুজের BC , CA , AB বাহুর সমান্তরাল। বাহু তিনটির দৈর্ঘ্য যথাক্রমে 50 cm , 75 cm , 65 cm এবং $Q - R = 8\text{ N}$ হইলে বলগুলি নির্ণয় কর।
- (iii) O বিন্দুতে OX , OY এবং OZ বরাবর কার্যরত P , Q , R মানের তিনটি বল সাম্যাবস্থা সৃষ্টি করে। O বিন্দুগামী একটি বৃত্ত বলত্রয়ের ক্রিয়া রেখাকে যথাক্রমে A , B , C বিন্দুতে ছেদ করে। প্রমাণ কর যে,
 $P : Q : R = BC : CA : AB$.
4. (i) ABC ত্রিভুজের অন্তঃকেন্দ্র I থেকে IA , IB , IC বরাবর কার্যরত যথাক্রমে P , Q , R মানের বলত্রয় সাম্যাবস্থা সৃষ্টি করলে প্রমাণ কর যে, $P^2 : Q^2 : R^2 = a(b+c-a) : b(c+a-b) : c(a+b-c)$. [ঢা. ২০০২, কুয়েট ১৬-১৭]
- (ii) ABC ত্রিভুজের পরিকেন্দ্র O থেকে OA , OB , OC বরাবর কার্যরত যথাক্রমে P , Q , R মানের বলত্রয় সাম্যাবস্থায় থাকলে, প্রমাণ কর যে, $\frac{P}{a^2(b^2+c^2-a^2)} = \frac{Q}{b^2(c^2+a^2-b^2)} = \frac{R}{c^2(a^2+b^2-c^2)}$
5. (i) রম্বস আকারের একটি সুখম পাতের একটি ধার ভূ-সমান্তরাল ও একটি কোণ 120° , রম্বসটির কেন্দ্র থেকে কর্ণ বরাবর P এবং Q মানের দুইটি বল ক্রিয়া করে একে ঝাড়াভাবে স্থির রাখে। $P > Q$ হলে প্রমাণ কর যে, $P^2 = 3Q^2$. [চ. ২০১০]
- (ii) একই আনুভূমিক রেখায় d দূরত্বে অবস্থিত A ও B বিন্দুতে l দৈর্ঘ্য বিশিষ্ট একটি তারের প্রান্তদ্বয় বাঁধা আছে। w ওজনের একটি মসৃণ আঠা তার বরাবর অবাধে গড়িয়ে যেতে পারে। $l > d$ হলে, দেখাও যে, তারের টান, $T = \frac{wl}{2\sqrt{l^2 - d^2}}$. [কু. ২০০৪, ১৬ সি. ২০০৬; আলিম ২০০৭; চ. ২০১২]
6. (i) একই আনুভূমিক রেখায় 25 সে. মি. ব্যবধানে দুইটি বিন্দুতে 31 সে. মি. লম্বা একটি রশির দুইপ্রান্ত বাঁধা আছে। রশির একপ্রান্ত থেকে 7 সে. মি. দূরে W ওজনের একটি বস্তু সংযুক্ত করা হলে 7 সে.মি. রশির টান 48 কেজি ওজন হয়। W এর মান নির্ণয় কর।

(ii) a দৈর্ঘ্য বিশিষ্ট একটি সূতার এক প্রান্ত একটি উল্লম্ব দেয়ালে আটকানো এবং অন্য প্রান্ত a ব্যাসার্ধ বিশিষ্ট একটি সুস্থম গোলকের সাথে যুক্ত আছে। গোলকটির ওজন W হলে দেখাও যে, সূতার টান $T = \frac{2}{\sqrt{3}} W$ ।

[কুয়েট ০৪-০৫]

(iii) W কেজি ওজনের একটি বস্তু দুইটি রশি দ্বারা ঝুলানো হল। একটি রশি উল্লম্ব রেখার সাথে 30° কোণ উৎপন্ন করে। অপর রশিটি উল্লম্ব রেখার সাথে কত কোণ উৎপন্ন করলে এতে টানের পরিমাণ ক্ষুদ্রতম হবে। এক্ষেত্রে রশি দুইটির টানের পরিমাণ নির্ণয় কর।

(iv) 5 কেজি ওজনের একটি বস্তু 12 সে. মি. ও 16 সে. মি. দীর্ঘ দুইটি রশির সাহায্যে একটি আনুভূমিক রেখায় 20 সে. মি. ব্যবধানে দুইটি বিন্দুতে বাঁধা আছে। রশিতে টানের পরিমাণ নির্ণয় কর।

(v) 6 ফুট ও 8 ফুট দৈর্ঘ্যের দুইটি রশির সাহায্যে 20 পাউন্ড ওজনের একটি বস্তুকে ঝুলান হলো। রশির দুইটির অপর প্রান্ত 10 ফুট দৈর্ঘ্যের একটি দণ্ডের দুই প্রান্তে বাঁধা আছে। দণ্ডটি এরূপভাবে স্থাপন করা হলো যেন বস্তুটি এর মধ্যবিন্দুর ঠিক খাড়া নিচে থাকে। রশিদ্বয়ের টান নির্ণয় কর। [বুয়েট ০৮-০৯]

7. (i) একই আনুভূমিক রেখায় অবস্থিত দুইটি বিন্দুতে একটি রশির দুই প্রান্ত বাঁধা আছে। W কেজি ওজনের একটি মসৃণ আঁটা রশির উপর দিয়ে অবাধে চলাচল করতে পারে। P মানের একটি আনুভূমিক বল, এর উপর সক্রিয় হলে স্থিরাবস্থায় রশির অংশদ্বয় উল্লম্ব রেখার সাথে 30° এবং 60° কোণ সৃষ্টি করে।

দেখাও যে, $P = W(2 - \sqrt{3})$ এবং রশির টান $T = W(\sqrt{3} - 1)$

(ii) l দৈর্ঘ্যের একটি সূতার দুই প্রান্ত একই আনুভূমিক রেখায় a দূরত্বে ($l > a$) অবস্থিত A ও B বিন্দুতে বাঁধা আছে। w ওজনের একটি মসৃণ আঁটা সূতার উপর দিয়ে অবাধে চলাচল করতে পারে। P মানের একটি আনুভূমিক বল আঁটাটিকে টেনে B বিন্দুর খাড়া নিচে স্থির রাখে। দেখাও যে, $P = \frac{aw}{l}$ এবং সূতার টান

$T = \frac{w(a^2 + l^2)}{2l}$ । সংকেত : স্থির বিন্দুটি C ধরে $\triangle ABC$ তে বলের ত্রিভুজ সূত্রের বিপরীত সূত্র প্রয়োগ কর।

(iii) আনুভূমিক রেখায় α কোণে আনত একটি মসৃণ সমতলের উপর একটি বস্তু উল্লম্বের সাথে γ কোণে নত একটি রশি দ্বারা সুস্থিত আছে। তলের নতি β ($\beta > \alpha$) হলে এবং γ অপরিবর্তিত থাকলে রশির টান দ্বিগুণ হয়। দেখাও যে, $\cot \alpha - 2 \cot \beta = \cot \gamma$ ।

(iv) W ওজনের একটি সুস্থম দণ্ড একটি কজার চতুর্দিকে অবাধে ঘুরতে সক্ষম। এর এক প্রান্ত একটি মসৃণ দেওয়ালে ঠেস দিয়ে আছে। দণ্ডটি যদি আনুভূমিক রেখার সাথে θ কোণ করে, তাহলে প্রমাণ কর যে, কজার প্রতিক্রিয়া

$W \sqrt{\frac{1}{4} \cot^2 \theta + 1}$ এবং এর ক্রিয়ারেখা আনুভূমিক রেখার সাথে $\tan^{-1}(2 \tan \theta)$ কোণ উৎপন্ন করে।

8. (i) ABC ত্রিভুজের O লম্বকেন্দ্র। O বিন্দু থেকে BC , CA , AB বাহুর উপর লম্ব বরাবর ক্রিয়াশীল P , Q , R বল তিনটি সাম্যাবস্থায় থাকলে প্রমাণ কর যে, [ঢা. সি. ১১, ব. ১২, চুয়েট ০৩-০৪,

(i) $P : Q : R = \sin A : \sin B : \sin C$, (ii) $P : Q : R = a : b : c$ রা. ২০০৩]

(ii) P , Q , R মানের বলত্রয় ABC ত্রিভুজের A , B , C তিনটি কৌণিক বিন্দু হতে যথাক্রমে বিপরীত বাহুর লম্বা ভিমুখী দিকে ক্রিয়ারত থেকে সাম্যাবস্থায় থাকলে, প্রমাণ কর যে, $P : Q : R = a : b : c$

[ঢা. সি. '১১, মা. বো. ১৩, বুয়েট ৯৯-০০]

9. ভূমির সাথে α কোণে নত একটি মসৃণ সমতল বরাবর উপরের দিকে কার্যরত P_1 বল এবং P_2 মানের আনুভূমিক বল একটি বস্তুকে তলের উপর সাম্যাবস্থায় রাখে। P_1 , P_2 এবং α এর প্রত্যেকটির মান অর্ধেক হলেও বস্তুটি তলের উপর সাম্যাবস্থায় থাকে। প্রমাণ কর যে, $P_1 : P_2 = 2 \cos^2 \frac{\alpha}{4} : 1$ ।

উৎকর্ষ গণিত দ্বিতীয় পত্র-৭(ক)

10. AB ও AC মসৃণ তলদ্বয় ভূমিতলের সাথে যথাক্রমে α ও β কোণে হেলানো আছে। A বিন্দুর খাড়া উপরে স্থাপিত মসৃণ কপিকলের উপর দিয়ে একটি সূতার দুইপ্রান্তে সংযুক্ত W এবং $2W$ ওজনের দুইটি বস্তু যথাক্রমে AB ও AC তলের উপর বসানো আছে। সূতার অংশদ্বয় AB ও AC এর সাথে যথাক্রমে β ও α কোণ উৎপন্ন করে। প্রমাণ কর যে, $\sin 2\alpha = 2 \sin 2\beta$ ।
11. (i) ABC ত্রিভুজের BC , CA এবং AB বাহুর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে D , E , F । প্রমাণ কর যে, AD , BE এবং CF মধ্যমা দ্বারা সূচিত বলত্রয় কোনো কণার উপর কার্যরত হলে তা সাম্যাবস্থায় থাকবে।
(ii) ABC ত্রিভুজের পরিকেন্দ্র O এবং BC , CA , AB বাহুর উপর যথাক্রমে OD , OE , OF লম্ব। প্রমাণ কর যে, AO , BO , CO , OD , OE , OF দ্বারা সূচিত বলগুলি সাম্যাবস্থা সৃষ্টি করে।
12. 60 কেজি ওজনের একটি বস্তুকে দুইটি তার দিয়ে দুইজন ব্যক্তি বহন করছে। তার দুইটি উলম্বের সাথে 70° ও 30° কোণ উৎপন্ন করলে তার দুইটি টান নির্ণয় কর। [ছয়েট ০৫-০৬]
13. কোনো ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দু হতে মধ্যমাত্রয় বরাবর ক্রিয়ারত P , Q , R মানের বল তিনটি সাম্যাবস্থায় থাকলে, দেখাও যে, এরা অনুসঙ্গী মধ্যমার দৈর্ঘ্যের সমানুপাতিক। [য. ২০০২]
14. (i) কোনো লম্বিক তলে 10 কেজি ওজনের একটি বস্তুকে 5 কেজি ওজনের একটি আনুভূমিক বল, আনুভূমিক সাথে 60° কোণে কার্যরত F বল এবং, F -এর উপর লম্বভাবে কার্যরত R বল সাম্যাবস্থায় থাকলে দেখাও যে, $F - \sqrt{3}R + 10 = 0$ এবং $\sqrt{3}F + R - 20 = 0$ । [বুয়েট ০৩-০৪]
(ii) P ও Q দুইটি বল যথাক্রমে আনুভূমিক ও আনুভূমিকের সাথে 30° কোণে ক্রিয়া করে 6 কেজি ওজনের একটি বস্তুকে স্থির রাখতে সক্ষম। P ও Q এর মান নির্ণয় কর?
15. কোনো বিন্দুতে কার্যরত P , Q , R মানের তিনটি বল সাম্যাবস্থায় আছে। P ও Q এর মধ্যবর্তী কোণ P ও R এর মধ্যবর্তী কোণের দ্বিগুণ হলে, দেখাও যে, $R^2 = Q(Q - P)$
[য. ০৭; ব. য. ০৯, দি. ১১; ১৬; রা. ১২, বুয়েট ০৭-০৮, সি. ১৬]
16. (i) সমান দৈর্ঘ্যের তিনটি একতলীয় সরলরেখা OA , OB , OC যদি O বিন্দুগামী কোনো সরলরেখার একই পার্শ্বে অবস্থিত না হয় এবং P , Q , R মানের বলত্রয় যথাক্রমে উক্ত রেখাগুলি বরাবর এমনভাবে ক্রিয়া করে যেন $\frac{P}{\Delta OBC} = \frac{Q}{\Delta OCA} = \frac{R}{\Delta OAB}$ হয়, তবে দেখাও যে, P , Q , R বলত্রয় সাম্যাবস্থায় থাকবে।
(ii) X , Y , মানের বল দুইটি যথাক্রমে একটি বৃন্তঃস্থ চতুর্ভুজ $ABCD$ এর AB ও AD বাহু বরাবর কার্যরত। যদি C হতে A এর দিকে CA বরাবর কার্যরত Z পরিমাণ বল দ্বারা নিষ্ক্রিয় হয়, তাহলে প্রমাণ কর যে, $\frac{X}{CD} = \frac{Y}{CB} = \frac{Z}{BD}$
[য. ২০০৬]
17. P ও Q বলদ্বয় যথাক্রমে একটি হেলানো তলের দৈর্ঘ্য ও ভূমির সমান্তরালে ক্রিয়ারত থেকে প্রত্যেকে এককভাবে তলের উপরস্থ W ওজনের একটি বস্তুকে ধরে রাখতে পারে। প্রমাণ কর যে, $\frac{1}{P^2} - \frac{1}{Q^2} = \frac{1}{W^2}$ [কু. '০৯, সি. '১০; য. রা. ১১, কু, চ, ব, ১৪, টেক্সটাইল ০৭-০৮]
18. একটি ভারী সুযম রডের একপ্রান্ত একটি মসৃণ খাড়া দেওয়ালে এবং অপর প্রান্ত দেওয়ালের সাথে θ কোণে নত একটি মসৃণ সমতলে রাখা আছে। রডটি সাম্যাবস্থায় থাকলে এবং ভূমির সাথে রডের নতি α হলে, প্রমাণ কর যে, $\tan \theta = 2 \tan \alpha$ ।

উত্তরমালা

1. (i) 120° , (ii) $3\sqrt{3}N$ (iii) 120° , 150° , 90° , (iv) 5 kg-wt. 3. (ii) $P = 40N$, $Q = 60N$, $R = 52N$ 6. (i) 50 কেজি (iii) 60° , $\frac{\sqrt{3}}{2}W$, $\frac{1}{2}W$. (iv) 3 কেজি ওজন, 4 কেজি ওজন। . (v) 12 পাঃ ওজন, 16 পাঃ ওজন। (vi) $\frac{22}{\sqrt{15}}$ এবং $\frac{28}{\sqrt{15}}$ কেজি ওজন। 12. 30.46N, 57.26N. 14. (ii) $6\sqrt{3}$ এবং 12. কেজি ওজন।

প্রশ্নমালা ৪.৩

1. (i) 32 সে. মি. ব্যবধানে দুইটি বিন্দুতে 15 কেজি এবং 9 কেজি ওজনের দুইটি সমান্তরাল বল কার্যরত আছে। এদের লম্বি ও তার প্রয়োগ বিন্দু নির্ণয় কর, যখন (ক) বল দুইটি সদৃশ (খ) বল দুইটি বিসদৃশ।
(ii) AB একটি দণ্ডের A ও B প্রান্তে যথাক্রমে 5 কেজি ও 8 কেজি ওজন স্থাপন করে C বিন্দুতে রশি বেঁধে ঘরের ছাদ হতে ঝুলানো হলে দণ্ডটি আনুভূমিকভাবে অবস্থান করে। যদি A প্রান্তে 112 কেজি ওজন রাখা হয় তবে B প্রান্তে কত ওজন দিলে দণ্ডটি আগের মতো স্থির থাকবে?
2. (i) 12 মিটার দীর্ঘ একটি ভারী সুষম বীম দুইটি খুটির উপর আনুভূমিক ভাবে সুস্থিত আছে। একটি খুটি এর একপ্রান্তে এবং অন্যটি ঐ প্রান্ত হতে 8 মিটার দূরে অবস্থিত। বীমটিকে না উল্টিয়ে 55 কেজি ওজনের একটি লোক কোন রকমে অপর প্রান্ত পর্যন্ত যেতে পারে। বীমটির ওজন নির্ণয় কর।
(ii) 2.5 মিটার দীর্ঘ একটি হালকা তক্তার উপর 100 কেজি ওজনের একখন্ড পাথর রেখে দুইজন লোক তক্তার প্রান্তদ্বয় ধরে বহন করছে। পাথরখন্ডটি কোথায় রাখলে সবল লোকটি 60 কেজি ওজন বহন করবে?
(iii) 16 m. দীর্ঘ 200 kg. ওজনের একটি সুষম বীমের দুইপ্রান্তে দুইটি অবলম্বনের উপর আনুভূমিকভাবে স্থাপিত। 160 kg. ওজনের একটি লোক বীমের উপর কোথায় দাঁড়ালে অবলম্বন দুইটির উপর চাপের অনুপাত 1 : 2 হবে?
[চুয়েট ০৫-০৬, কুয়েট ০৬-০৭, বুয়েট ০৬-০৭]
3. একটি দণ্ডের একপ্রান্ত হতে 2, 8, 6 মিটার দূরত্বে অবস্থিত তিনটি বিন্দুতে যথাক্রমে P , Q , R মানের তিনটি সমান্তরাল বল ক্রিয়া করছে। দণ্ডটি সাম্যাবস্থায় থাকলে দেখাও যে, $P : Q : R = 1 : 2 : 3$.
[ঢা. ০২, য. ০৫; য. ব. '০৯; সি. ০৬, '১১, চ. ১৬]
4. (i) 10 মিটার দীর্ঘ এবং 50 কেজি ওজনের AB একটি তক্তা দুইটি খুটির উপর আনুভূমিক ভাবে স্থাপিত। একটি খুটি A বিন্দুতে এবং অপরটি B থেকে 2 মিটার ভিতরে। A থেকে 3 মিটার দূরে 70 কেজি ওজনের একখন্ড পাথর তক্তাটির উপর স্থাপন করলে খুটিদ্বয়ের উপর চাপের পরিমাণ নির্ণয় কর।
(ii) AB একটি ভারী সুষম দণ্ডের A প্রান্তে 10 কেজি ওজন ঝুলানো হলে ঐ প্রান্ত থেকে 1 মিটার দূরে একটি খুটির উপর আনুভূমিকভাবে সুস্থিত থাকে। খুটির উপর চাপের পরিমাণ 30 কেজি ওজন হলে দণ্ডটির দৈর্ঘ্য এবং ওজন নির্ণয় কর।
(iii) ভূমিতলের সমান্তরাল একই রেখাস্থ দুইটি মসৃণ পেরেক P ও Q এর উপর 8 মি. দীর্ঘ একটি বাঁশের প্রান্তদ্বয় অবস্থান করছে। বাঁশটির উপরস্থ R বিন্দুতে একটি ভারী বোঝা ঝুলানো হলো, যদি $PR = 3RQ$ হয় এবং Q বিন্দুতে চাপ P বিন্দুতে চাপ অপেক্ষা 325 গ্রাম-ওজন বেশি হয়, তবে বোঝাটির ওজন নির্ণয় কর।
[সি. ২০০১; ক. ২০০২; কুয়েট ১২-১৩]
5. (i) 6 মিটার দীর্ঘ এবং 40 কেজি ওজনের AB একটি তক্তা দুইটি কিলকের উপর আনুভূমিক ভাবে স্থাপিত। কিলক দুইটির একটি A প্রান্তে এবং অন্যটি B প্রান্ত থেকে 2 মিটার ভিতরে অবস্থিত। তক্তাটি না উল্টিয়ে 80 কেজি ওজনের একটি লোক B প্রান্তের দিকে কতদূর যেতে পারবে?
(ii) 4 মিটার দীর্ঘ এবং 15 কেজি ওজনের একটি সমরূপ তক্তা দুইটি অবলম্বনের উপর আনুভূমিকভাবে স্থির আছে। একটি অবলম্বন A প্রান্তে এবং অন্যটি B প্রান্ত হতে 50 সে. মি. ভিতরে অবস্থিত। একটি বালক তক্তাটিকে না উল্টিয়ে এর উপর দিয়ে B প্রান্তে পৌঁছতে সক্ষম হলে বালকটির ওজন কত?
[কু. ২০০২]
6. (i) P ও Q ($P > Q$) দুইটি বিপরীতমুখী সমান্তরাল বল দুইটি বিন্দুতে ক্রিয়ারত আছে। একই বিন্দুতে যথাক্রমে $(P + R)$ ও $(Q + S)$ বল দুইটি ক্রিয়া করলে, লম্বি একই বিন্দুগামী হয়। প্রমাণ কর যে, $PS = QR$.
(ii) ACB সরলরেখার AC ও CB অংশের মধ্যবিন্দুতে ক্রিয়াশীল দুইটি সদৃশ সমান্তরাল বল P ও Q এর লম্বি C বিন্দুগামী। দেখাও যে, P ও Q বল দুইটি পরস্পর স্থান বিনিময় করলে লম্বি AB এর মধ্য বিন্দুগামী হবে।
7. (i) P ও Q ($P > Q$) দুইটি বিপরীতমুখী সমান্তরাল বল দুইটি বিন্দুতে কার্যরত আছে। যদি এদেরকে সমপরিমাণে বৃদ্ধি করা হয়, তবে দেখাও যে, নতুন লম্বির ক্রিয়াবিন্দু P বল থেকে আরও দূরে সরে যাবে।
[ঢা. ২০০৮; কু. ২০০৯, '১১; য. ব. '১১; চ. সি. '১৩; দি. ১৪]

- (ii) 20 সে. মি. ব্যবধানে অবস্থিত দুইটি বিন্দুতে যথাক্রমে 10 ডাইন ও 5 ডাইন দুইটি বিসদৃশ সমান্তরাল বল কার্যরত আছে। এদের প্রত্যেকের সাথে সমপরিমাণ কত বল যোগ করলে নতুন লম্বি 10 সে. মি. দূরে সরে যাবে?
- (iii) 12 N এবং 8 N দুইটি সমমুখী সমান্তরাল বল কোন কঠিন বস্তুর উপর যথাক্রমে A ও B বিন্দুতে ক্রিয়ারত আছে। বল দুইটির অবস্থান বিনিময় করলে এদের লম্বির ক্রিয়াবিন্দু AB বরাবর কত দূর সরে যাবে? [য. ১৬]
8. 20 সে. মি. দীর্ঘ AB হালকা দণ্ডটি 10 সে.মি. ব্যবধানে দুইটি পেরেকের উপর আনুভূমিক ভাবে অবস্থিত। A ও B বিন্দুতে যথাক্রমে 2W এবং 3W ওজন ঝুলানো হলে পেরেক দুইটির কোন্ অবস্থানের জন্য এদের উপর চাপ সমান হবে? [সি. '০৩, চ্যুয়েট ১৩-১৪]
9. একজন লোক একটি লাঠি কাঁধের উপর আনুভূমিকভাবে স্থাপন করে এর এক প্রান্তে হাত রেখে অপর প্রান্তে W ওজনের একটি বস্তু বহন করছে। [কু. ০৩, চ্যুয়েট ০৪-০৫]
- (i) যদি তার কাঁধ হতে বস্তু ও হাতের দূরত্ব যথাক্রমে a এবং x হয়, তবে প্রমাণ কর যে, তার কাঁধের উপর চাপের পরিমাণ হবে $W(1 + \frac{a}{x})$ [সি. ২০০৫, ব. ২০১০; ঢা. ১৪, দি. ১৬]
- (ii) যদি লাঠির দৈর্ঘ্য 6 ফুট হয় তবে লোকটির হাত ও কাঁধের দূরত্ব কত হলে কাঁধের উপর চাপ ন্যূনতম হবে? [ঢা. বি. জবি. ০৭-০৮]
- (iii) যদি লাঠির দৈর্ঘ্য 3 মিটার এবং কাঁধের উপর চাপের পরিমাণ বস্তুর ওজনের তিনগুণ হয় তবে, হাত ও কাঁধের দূরত্ব নির্ণয় কর।
10. দেখাও যে, P ও Q দুইটি সদৃশ সমান্তরাল বলের Q কে $\frac{P^2}{Q}$ তে পরিবর্তন করে P এর সাথে স্থান পরিবর্তন করলে এদের লম্বির অবস্থান একই থাকে। [ঢা. ২০০২, চ. ২০০৮, য. ২০১০]
- 11.(i) P ও Q দুইটি সদৃশ সমান্তরাল বল কোন একটি বস্তুর উপর দুইটি বিন্দুতে ক্রিয়ারত। এদের অবস্থান বিনিময় করলে যদি লম্বির অবস্থান অপরিবর্তিত থাকে, তাহলে প্রমাণ কর যে, $P = Q$.
- (ii) ABC ত্রিভুজের কৌণিক বিন্দু A, B, C তে তিনটি সমমুখী সমান্তরাল বল P, Q, R কার্যরত আছে। এদের লম্বি ত্রিভুজটির ভরকেন্দ্রে কার্যরত হলে দেখাও যে, $P = Q = R$. [ঢা. ০৮, কু. ব. '১০; আলিম, '১০; কু. '১৪]
- (iii) দেখাও যে, ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দুতে তিনটি সমান সদৃশ সমান্তরাল বলের লম্বি সর্বদা ত্রিভুজটির ভর কেন্দ্রগামী হবে।
- 12.(i) তিনটি সদৃশ সমান্তরাল বল P, Q, R যথাক্রমে ABC ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দু A, B, C তে কার্যরত আছে। যদি এদের লম্বি ত্রিভুজটির অন্তঃকেন্দ্রগামী হয়, তবে দেখাও যে,
- (i) $P : Q : R = \sin A : \sin B : \sin C$, [ব. দি. ২০১৩. মা. বো. ১৪, রা. ১৬]
- (ii) $P : Q : R = a : b : c$ [কু. ০৮, আলিম '০৬, য. '১১]
- (ii) P, Q, R সদৃশ সমান্তরাল বল তিনটি যথাক্রমে ABC ত্রিভুজের শীর্ষ A, B, C তে ক্রিয়ারত। বলগুলির যে কোনো সাধারণ দিকের জন্য এদের লম্বি যদি ত্রিভুজের পরিকেন্দ্রগামী হয়, তবে প্রমাণ কর যে,
- $P : Q : R = a \cos A : b \cos B : c \cos C$, [চ. ২০১০]
13. ABC ত্রিভুজের পরিকেন্দ্র O. একটি বল P, AO বরাবর ক্রিয়ারত। দেখাও যে, B ও C বিন্দুতে P এর সমান্তরাল উপাংশদ্বয়ের অনুপাত $\sin 2B : \sin 2C$. [য. ০৬; ঢা. ০৯; ব. দি. রা. ১২]
14. (i) 2a দীর্ঘ এবং W ওজন বিশিষ্ট একটি সুষম তক্তা b দূরত্বে অবস্থিত দুইটি খুঁটির উপর আনুভূমিকভাবে অবস্থিত। একে না উল্টিয়ে এর দুই প্রান্তে পর্যায়ক্রমে সর্বাধিক W_1 এবং W_2 ওজন ঝুলানো যায়। প্রমাণ কর যে, $\frac{W_1}{W + W_1} + \frac{W_2}{W + W_2} = \frac{b}{a}$. [আলিম ০৩, ব., য. ০১, সি. ০৩, ঢা. য. রা. ০৭, চ. ০৮, ১১, কু. ০৯, সি. ১০, ব. ০৪, ১১]
- (ii) একটি ভারী সুষম দণ্ডের একপ্রান্তে P ওজন স্থাপন করলে ঐ প্রান্ত হতে a একক দূরত্বে স্থাপিত একটি অবলম্বনের উপর আনুভূমিকভাবে সুস্থিত থাকে। একই বিন্দুতে Q ওজন স্থাপন করলে ঐ বিন্দু থেকে b একক

দূরত্বে একটি অবলম্বনের উপর সুস্থিত হয়। দেখাও যে, দণ্ডের ওজন $= \frac{Pa - Qb}{b - a}$ এবং দৈর্ঘ্য $= \frac{2a(P - Q)}{Pa - Qb}$

15. P, Q, R মানের সমমুখী সমান্তরাল বল তিনটি যথাক্রমে ABC ত্রিভুজের A, B, C শীর্ষবিন্দুতে ক্রিয়ারত এদের লম্বি ত্রিভুজের অন্তঃকেন্দ্রে ক্রিয়ারত হলে দেখাও যে, $\frac{P}{a} = \frac{Q}{b} = \frac{R}{c}$ [রা. ০৭, ১৪; ঢা. ০২]

16. (i) P ও Q দুইটি অসদৃশ সমান্তরাল বল ($P > Q$) যথাক্রমে A ও B বিন্দুতে কার্যরত আছে। উভয় বলকে R পরিমাণে বৃদ্ধি করা হলে যদি এদের লম্বির ক্রিয়া বিন্দু d দূরত্বে সরে যায় তবে দেখাও যে, $d = \frac{R}{P - Q} AB$ । [রা. ১০; চ. ১১; ঢা. ১৩; ব. ০৬, '১৪, কু. ১৬]

(ii) P ও Q দুইটি সমমুখী সমান্তরাল বল। P বলটির ক্রিয়ারেখা সমান্তরাল রেখে তার ক্রিয়া বিন্দুকে x দূরত্বে সরালে দেখাও যে, এদের লম্বি $\frac{Px}{P + Q}$ দূরত্বে সরে যাবে। [রা. ০৬, ঢা. ০৭; য. দি. ১০; য. ১২; সি. ০৯, ১৪]

17. P ও Q মানের দুইটি সদৃশ সমান্তরাল বলের লম্বি O বিন্দুতে ক্রিয়া করে। P কে R পরিমাণে এবং Q কে S পরিমাণে বৃদ্ধি করলেও লম্বি O বিন্দুতে ক্রিয়া করে। আবার, P ও Q এর বদলে যথাক্রমে Q ও R ক্রিয়া করলেও লম্বি O বিন্দুতে ক্রিয়া করে। প্রমাণ কর যে, $S = R - \frac{(Q - R)^2}{P - Q}$ [ঢা. ০৬; রা. কু. ০৯; ১১; য. চ. ১৪, বুয়েট ০৩-০৪]

18. (i) $ABCD$ বর্গের AB, BC, CD ও DA বরাবর যথাক্রমে $P, 2P, 3P$ ও $4P$ মানের বলগুলি ক্রিয়া করে। এদের লম্বির মান ও ক্রিয়া রেখা নির্ণয় কর। [ঢা. ০২]

(ii) $ABCD$ বর্গের AB, BC, AD এবং DC বাহু বরাবর যথাক্রমে ১, ২, ৩, এবং ৪ এর সমানুপাতিক বলগুলি কার্যরত আছে। এদের লম্বির মান ও ক্রিয়া রেখা নির্ণয় কর, যখন বর্গের বাহুর দৈর্ঘ্য ২ সে. মি।

(iii) $ABCD$ বর্গের AB, BC, CD বরাবর কার্যরত যথাক্রমে ১, ২, ৩ মানের তিনটি বলের লম্বি নির্ণয় কর।

(iv) একটি দণ্ডের ভারকেন্দ্র তাকে a ও b দুই অংশে বিভক্ত করে। দণ্ডটি একটি মসৃণ গোলকের ভিতর স্থাপন করা আছে এবং গোলকের কেন্দ্রে 2α কোণ উৎপন্ন করে। আনুভূমির সাথে দণ্ডের নতি θ হলে,

$$\text{দেখাও যে, } \tan \theta = \frac{b - a}{b + a} \tan \alpha.$$

উত্তরমালা

1. ক. ২৪ কেজি ওজন, বৃহত্তর বল থেকে ১২ সে.মি. ভিতরে, খ. লম্বি ৬ কেজি ওজন, বৃহত্তর বল থেকে ৪৪ সে.মি. বাইরে; (ii). ১৭৯.২ কেজি ওজন 2. (i) ১১০ kg. wt. (ii) সবল লোকটি থেকে এক মিটার দূরে; (iii) A প্রাপ্ত হতে ২m দূরে 4. (i) $5\frac{1}{2}$ কেজি ওজন ও $62\frac{1}{2}$ কেজি ওজন; (ii) ৩ মি., ২০ কেজি ওজন 4. (iii) ৬৫০ গ্রাম-ওজন। 5. (i) মধ্যবিন্দু থেকে ১.৫ মিটার দূরে। (ii) ৪৫ কেজি ওজন। 7. (ii) ২.৫ ডাইন। (iii) $\frac{1}{5}$ AB. 8. A প্রাপ্ত হতে ৭ সে. মি. এবং B প্রাপ্ত হতে ৩ সে. মি. 9. (ii) ৬ ফুট (iii) এক মিটার। 18. (i) $2\sqrt{2} P$. ক্রিয়ারেখা CA কর্ণের সমান্তরাল, BA কে ৭:৫ অনুপাতে বহিঃস্থভাবে বিভক্ত করে। (ii) $5\sqrt{2}$ এর সমানুপাতিক, AC এর সমান্তরাল এবং AD কে ২:৩ অনুপাতে বিভক্ত করে। (iii) $2\sqrt{2}$.